REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura, Ano 14, Número 32, p.09-28 ISSN: 1980-3141

PRÁTICAS COM MATRIZES A PARTIR DO ESTUDO HISTÓRICO EPISTEMOLÓGICO

MATRIX PRACTICES FROM THE EPISTEMOLOGICAL HISTORICAL STUDY

Fernando Cardoso de Matos
Instituto Federal do Pará – IFPA – Brasil

José Messildo Viana Nunes
Universidade Federal do Pará – UFPA – Brasil

RESUMO

Neste artigo relatamos resultados de uma investigação em obras originais, referente ao estudo das matrizes, que evidenciou a problemática referente ao ensino desse objeto no ensino superior. Objetivamos identificar e analisar a epistemológia das matrizes para uma perspectiva de ensino de parte da Álgebra Linear. A Teoria de alicerce desse trabalho foi a Teoria Antropológica do Didático. A metodologia empregada foi pesquisa qualitativa de cunho histórico e epistemológico. Nesse sentido tal abordagem pode contribuir para um saber, transcendendo meros processos algorítmicos, pois de um modo geral o professor desconhece o porquê de se estudar matrizes. Assim reconstruirmos racionalmente as tarefas que pudessem revelar a gênese do método da Eliminação Gausseana, dos operadores e das operações matriciais. Essa pesquisa revelou que as atividades propostas na formação de professores de Matemática pode fornecer subsídios para (re) construir as tarefas com matrizes. Concluímos que o estudo de sistemas lineares no que diz respeito a técnica referente ao método da substituição e eliminação, foi primordial para o surgimento da Teoria das Matrizes.

Palavras-chave: História da Matemática, Álgebra Linear.

ABSTRACT

In this article we report the results of an investigation in original works, referring to the study of matrices, which evidenced the problematic concerning the teaching of this object in higher education. We aim to identify and analyze the matrix epistemology for a teaching perspective from the Linear Algebra. The Theory of foundation of this work was the Anthropological Theory of Didactics. The methodology used was qualitative research of a historical and epistemological nature. In this sense, such an approach can contribute to a knowledge, transcending mere algorithmic processes, since in general the teacher does not know why to study matrices. Thus we rationally reconstruct the tasks that could reveal the genesis of the Gaussean Elimination method, the operators and the matrix operations. This research revealed that the proposed activities in Mathematics teacher training can provide subsidies for (re) constructing tasks with matrices. We conclude that the study of linear systems with regard to the technique related to the method of substitution and elimination, was primordial for the emergence of Matrix Theory

Keywords: Mathematics History, Linear Álgebra.

RÉSUMÉ

Dans cet article, nous rapportons les résultats d’une enquête dans des travaux originaux, en faisant référence à l’étude des matrices, qui a mis en évidence la problématique concernant l’enseignement de cet objet dans l’enseignement supérieur. Notre objectif est d'identifier et d'analyser l'épistémologie des matrices pour une perspective pédagogique de l'algèbre linéaire. La théorie fondamentale de ce travail était la théorie anthropologique de la didactique. La méthodologie utilisée était une recherche qualitative de nature historique et épistémologique. En ce sens, une telle approche peut contribuer à une connaissance, transcendant les simples processus algorithmiques, car en général l’enseignant ne sait pas pourquoi étudier les matrices. Ainsi, nous reconstruisons rationnellement les tâches qui pourraient révéler la genèse de la méthode d’élimination gaussienne, des opérateurs et des opérations matricielles. Cette recherche a révélé que les activités proposées dans la formation des professeurs de mathématiques peuvent fournir des subventions pour (re) construire les tâches avec des matrices. Nous concluons que l’étude des systèmes linéaires en ce qui concerne la technique de la méthode de substitution et d’élimination était primordiale pour l’émergence de la théorie matricielle.

Mot-clé: Histoire des mathématiques, Algèbre linéaire.

Introdução

A Álgebra Linear é uma disciplina relevante na área das Ciências Exatas e afins, e se destaca devido às múltiplas possibilidades de aplicações em diversas áreas do conhecimento científico, como a matemática, na qual se encontra subjacente a quase todos os seus domínios.

Dentre os objetos matemáticos estudados nesta disciplina estão as matrizes. De um modo geral as matrizes no ensino médio e superior, são estudadas primeiro, depois os determinantes e por conseguinte os sistemas lineares. Mas a partir de nossos estudos históricos realizado em obras originais revelam que surgiram primeiro os sistemas lineares, depois os determinantes e por fim as matrizes.

Uma diretriz percursora deste estudo se deu com o surgimento da Geometria Analítica como um método de se fazer matemática ao transgredir a Geometria Euclidiana, já que havia problemas que não poderiam ser resolvidos com régua e compasso. Aparecem o estudo das curvas por descartes e Fermat que desencadeia no estudo de sistemas lineares. O trabalho de Euler (1750) tratava, qualitativamente, os sistemas lineares, assim como Frobenius que trabalhava com os homogêneos. Era possível se trabalhar com os coeficientes das equações do sistemas daí a ideia de matrizes revelada por Cayley no século XIX.

Neste trabalho demos ênfase na ideia de uma reconstruição heurística que traz a descoberta, a invenção, contra os conceitos diriamos canoniszados pelas obras didáticas, com uma roupagem científica.

Para tanto, é preciso uma *vigilância epistemológica* na pesquisa dos objetos matemáticos, sistematizando a prática do ensino de matemática em seu proceso transpositivo, sendo uma pesquisa sobre a gênese destes objetos, para que não se perca de foco suas origens, mas que não precisa ser algo acabado, permitindo, então, analisar a evolução do saber[1], possibilitando assim uma prática mais questionadora, por meio de uma organização matemática e didática, pois um professor prepara suas aulas já pensando em como ensinar. No caso das matrizes, objeto deste artigo, as obras didáticas apresentam inicialmente uma relação com tabelas, e sua gênese etá relacionada ao estudo dos sistemas lineares.

Realizamos um apanhado histórico sobre o estudo de sistemas lineares desde o século XIV com o trabalho do matemático Nicole d'Oresme, o surgimento da Geometria Analítica, o estudo das curvas surge que surge o estudo qualitativo dos sistemas lineares, e a partir deste revelarmos o surgimento das matrizes. A partir deste levantamento propomos uma reconstrução racional deste objeto matemático por meio de tarefas que irão revelar a gênese das operações matriciais, voltada para um curso de Álgebra Linear, mas utilizando como conhecimento prévio o estudo qualitativo de sistemas lineares.

Objetivamos neste artigo evidenciar por meio do estudo histórico e epistemológico, a gênese das matrizes, incluindo suas operações e do método da Eliminação Gausseana.

A Teoria Antropológica do Didático (TAD)

A Teoria de alicerce deste artigo emerge do programa epistemológico investigativo em Didática da Matemática e será nosso modelo epistemológico, pois sinaliza a ideia de modelar as atividades matemáticas nas instituições.

Para nós, a epistemologia é uma ferramenta consistente na didática, uma vez que fornece elementos determinantes de compreensão relativos à construção do saber, permitindo, especialmente, a questionar a especificidade destes saberes científicos na sua relação com outros saberes.

Uma das linhas de investigação que a TAD trata, que é de tentar delimitar vantajosamente a gênese sociohistórica do saber designado para ser ensinado. Segundo Chevallard (1991), tendo em conta as realizações atuais, seria possível construir uma epistemologia artificial como um resumo melhorado, deixando de lado os impasses, os fracassos, mais reimplantando toda riqueza de desenvolvimentos fecundos e as vezes esquecidos da construção histórica do saber.

Quando falamos de modelos epistemológicos não estamos nos referindo a alguma coisa abstrata, mas que se concretiza, nas práticas dos professores de matemática. Gáscon (2000, p.2), afirma que:

> Para começar a descrever e explicar a prática profissional do professor de matemática em sala de aula, podemos nos situar em diferentes perspectivas teóricas, verdadeiros modelos determinam como a matemática escolar esta estruturada. Contudo, alguns destes modelos, que por mais remotos que sejam ainda hoje estão presentes na praxeologia espontânea de muitos professores de matemática e, consequentemente nas suas práticas docentes não refletidas nem criticadas por eles (GÁSCON, 2000, p.2).

Segundo Bosch & Gáscon (2000), uma praxeologia é dita espontânea, quando as tarefas didáticas geradas não estão organizadas, podendo até serem improvisadas, logo o

[1] O saber no sentido da TAD, é algo não palpável, incerto, então trabalhamos às práticas ou o conjunto de prática que são engendradas de um objeto em estudo.

discurso que justifica aquele saber está pouco sistematizado, apresentando-se de forma atomizada, além de que sua incidência sobre a prática didática, relativamente esporádica.

Portanto, Chevallard (1999) propõe um modelo epistemológico geral da matemática, que descreve o saber matemático em termos de organizações ou praxeologias matemáticas institucionais. Nesta perspectiva o saber surge em dois níveis: o nível da práxis, que se refere a prática realizada composta por: tipo de tarefas; de técnicas que para resolver às tarefas e o nível do logos, que contém o discurso matemático racional, isto é, a tecnologia que é o discurso, que justifica às técnicas de teorias que fundamentam e organizam os discursos tecnológicos, que será utilizado para interpretar, dar sentido e desenvolver a prática matemática. A junção desses dois níveis fora denominada de praxeologia.

Análise histórica do objeto matemático matrizes

A história dos objetos matemáticos nos permite reconstruir os processos matemáticos heurísticos para revelar, que é um produto do raciocínio humano no contexto sociocultural. Um estudo histórico-epistemológico justifica-se para compreensão da evolução e consolidação destes objetos no interior de condições culturais. Nesse sentido tal abordagem pode contribuir para um saber, transcendendo meros processos algorítmicos, pois de um modo geral o professor desconhece o porquê de se estudar matrizes por exemplo.

Segundo Bruter (1998), as primeiras representações dos fenômenos luminosos desempenharam um papel muito importante para o nascimento da Geometria. O raio luminoso era o mais trabalhado dos fenômenos, sendo que Euclides desenvolveu uma teoria descritiva do fenômeno na obra Óptica, escrito no século III a. C.

A Geometria, como ciência dedutiva, criada pelos gregos não apresentava operacionalidade. A Álgebra veio com a ideia de unificador. No século XVII a Álgebra estaria, de certa forma, aparelhada para uma fusão criativa com a Geometria Euclidiana, já que está Geometria tem um papel fundamental neste processo histórico, pois era considerada verdadeira pelos matemáticos, já que detinha um modelo de rigor lógico.

Na antiguidade da matemática ocidental o estudo e aplicações dos *sistemas de equações lineares* pouco aparecem, enquanto que no oriente, os sistemas são bem mais estudados e aplicados. Há 4000 anos atrás, o povo da Babilônia resolveria um sistema de equações lineares bem simples 2x2, ou seja, com duas incógnitas, como segue:

> Existem dois campos cuja área total é de 1800 jardas quadrados. Uma produtora de grãos, à taxa de 2/3 de um alqueire por jarda quadrada, enquanto o outro produz grãos, à taxa de 1/2 por alqueire por jarda quadrada. Se o rendimento total é de 1100 sacas, o que é o tamanho de cada campo (O'CONNOR & ROBERTSON, 1996, p.1).

Na China, no registro de representação por diagramas, os chineses representavam os sistemas lineares 3x3 por meio de seus coeficientes escritos com banas de bambu sobre os quadros de um tabuleiro, descobrindo um método de resolução que até hoje é muito utilizado, que é o método de resolução por eliminação.

Exemplos desse procedimento encontram-se na obra *Nove capítulos sobre a arte da matemática*, provavelmente do século III a.C. Havia nesta obra problemas, o qual foi resolvido por um processo, praticamente, igual ao método da Eliminação Gausseana, desenvolvido por Gauss sem utilizar matrizes:

> Existem 3 tipos de milho. Três pacotes do primeiro, dois do segundo e um do terceiro somam 39 unidades de milho. Dois pacotes do primeiro, três pacotes do segundo e um do terceiro somam 34 unidades. E um pacote do primeiro, dois do segundo e três do terceiro somam 26 unidades. Sabendo que os pacotes de milho do mesmo tipo contêm a mesma quantidade de unidades, quantas unidades de milho contém um pacote de cada tipo? (O'CONNOR & ROBERTSON, 1996, p.1).

Na obra já aparece do seguinte modo, em seguida apresenta a resolução bem próxima da Eliminação Gausseana e já numa forma matricial até então desconhecida.

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Na visão do escritor do prefácio Liu Hui, incorporado no século III no documento, que ao se referir ao Método de FangSheng, onde é proposto uma situação que reflete em um sistema linear de 3 equações e 3 incógnitas. Tal método consiste em dispor os coeficientes das incógnitas em linhas e colunas, e após se operar com elas, deixando o sistema na forma triangular. Ao se efetuar a divisão determinasse o valor de uma incógnita e por meio de substituição determinasse o valor das demais, o que hoje equivale a resolver um sistema pelo método do escalonamento.

O trabalho de Oresme do século XIV, "Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum" escrito, inicialmente, em latim, que abordava um sistema de representações geométricas com o intuito de explicar e representar por figuras geométricas, causas de determinados fenômenos físicos, isto é, Oresme introduziu figuras geométricas para representar o comportamento das qualidades. Na obra Oresme busca uma abordagem qualitativa e métrica moderna com a natureza (matematização da natureza), trazendo representações gráficas inovadoras (Mendes, 2015).

Concebera a ideia de usar coordenadas retangulares (latitude e longitude) e as figuras geométricas resultantes para distinguir entre as distribuições uniformes e não uniformes de várias quantidades, mesmo estendendo a definição para incluir figuras tridimensionais. Segundo Mendes (2015, p. 221):

> Oresme procurou apresentar e explicar a ciência de figurar qualidades e movimentos, com a intenção de apontar possíveis causas dos diversos fenômenos naturais. Na linha horizontal representava um objeto ou o tempo e nas verticais as intensidades, sendo a área total delimitadas pelas duas linhas, proporcionando a ideia do que mais tarde seria o plano cartesiano, lançando as bases para a Geometria Analítica (MENDES, 2015, p. 221).

Até o início do século XVIII os sistemas lineares eram utilizados como ferramentas, tanto no ocidente, quanto no oriente. No que diz respeito ao estudo qualitativo de sistemas lineares, um dos trabalhos importantes publicados na época foram os trabalhos de Euler. Estes desempenharam um importante papel na resolução de sistemas lineares e na elaboração da teoria das equações diferenciais. Com o estudo da Geometria Analítica e de curvas geométricas os sistemas lineares foram estudados de modo qualitativo por Euler como mostramos em sua obra datada de 1750.

Compreender o domínio das relações existentes entre as equações de um sistema linear fomentou um campo fértil para o desenvolvimento de alguns conceitos em Álgebra Linear, como os espaços vetoriais, subespaços vetoriais, matrizes, posto e também a noção de independência linear.

A partir dai, nasce uma nova Geometria, no caso a Geometria Analítica, e surge como uma transgressão da Geometria Euclidiana, que Segundo Comte (1843) a ideia proposta por Descartes sobre a Geometria Analítica, era destinar, a generalizar, tanto quanto possível, as mais possíveis teorias geométricas, de acordo com sua íntima subordinação para modelos analíticos, em apresentação a diferentes questões como de métodos uniformes aplicados a todas as figuras corretamente definidas, como as da Geometria Plana.

A Geometria Analítica era um método para resolver questões problemáticas de Geometria, surgindo com o propósito de algebrizar a Geometria Euclidiana. Ajudou a resolver problemas cujos instrumentos régua e o compasso não podiam resolver, isto é, utilizou a Álgebra para resolver problemas geométricos.

Na obra do "Discours de la Méthode por Bien Conduire sa Raison et Chercher la Vérité dans les Sciences" publicada por René Descartes (1637) revelava a sua visão da ciência como o estudo da natureza e destacava em seu capítulo "La Geómetrie", no qual propõe unificar a Geometria com a Álgebra, isto é, a aritmetização da Geometria, representando diversas figuras geométricas por equações em **x** e em **y**, originando então a Geometria Analítica.

O simbolismo algébrico desenvolvido por Viète, foram a base dos trabalhos de Pierre Fermat (1601-1665). Este autor publica em 1679 um pequeno texto intitulado "Introdução aos Lugares Planos e Sólidos de Geometria Analítica". A obra tratava, por exemplo, das relações existentes entre uma equação indeterminada em duas variáveis e o lugar geométrico. Consistia de uma técnica que era a aplicação da Álgebra aos problemas de lugares geométricos. A Álgebra no século XVIII se impõe como um método de fazer matemática, pois mostrava o caminho, tornando os problemas de Geometria mais fáceis, isto é, permitia tratar os problemas geométricos a partir dos números.

A Geometria Analítica proporcionou o estudo de um outro objeto relevante cujas questões levaram ao desenvolvimento da Teoria de Sistemas Lineares, que por sua vez levaram ao desenvolvimento das matrizes.

O estudo qualitativo de sistemas se inicia com Euler (1750) com o propósito de responder ao *Paradoxo de Cramer*[2] o qual Maclaurin em 1720 tentou elucidar ao publicar

---

[2] (1) Duas curvas algébricas distintas de ordens m e n respectivamente têm m.n pontos em comum. Sabe-se que estes pontos podem ser múltiplos, complexos ou infinitos, mas, os matemáticos da época também conheciam exemplos em que estes pontos eram todos simples e reais.

(2) Para determinar uma curva de ordem n são necessários e suficientes pontos. Esta segunda proposição leva a um paradoxo, pois quando n > 2, , então parece que duas curvas algébricas podem ter mais pontos em comum do que é suficiente para determinar cada uma delas, esta segunda proposição é conhecido como Paradoxo de Cramer (1704 – 1752). (Boyer, 1974).

dois tratados sobre curvas intitulados Geometria Orgânica e “De Linearum Geometricarum Proprietatibus”.

Euler (1750) ao escrever a obra intitulada “Uma aparente contradição na doutrina das linhas curvas”, que tratava do paradoxo de Cramer e com as curvas algébricas, identificou a natureza do problema (Dorier, 1995). O estudo de curvas trouxe à luz a ideia de que um sistema de equações não tem necessariamente de ter uma solução. Esse matemático revelou que em alguns casos, uma das proposições do paradoxo pode não ser verdadeira, pois quando **n** equações não são suficientes para determinar **n** incógnitas, dando exemplos do que hoje é conhecido como sistemas indeterminados de equações lineares, ou seja, são sistemas de equações de curvas algébricas que não possuem solução, pois uma ou mais equações são dependentes das outras, surgindo neste estudo a ideia de Dependência Linear.

A dependência entre equações presente no trabalho de Euler (1750), denominada por Dorier (2003) como *dependência inclusiva*[3], pois era uma definição diferente da moderna, como a que se tem agora. Portanto, a noção de *dependência linear* surge do *estudo qualitativo* de sistemas lineares, definição esta não proposta por Euler. Como exemplo temos o sistema de equações resolvida, empiricamente, por Euler no século XVIII para ilustrar tal situação (Sistema S_1):

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 4y = 6x - 10 \end{cases} \qquad \textit{Sistema } S_1$$

A partir de seus estudos, Euler (1750) se dá conta de que ao se transformar a primeira equação esta fica igual a segunda equação, isto é, são idênticas. Euler pensara, também, no caso do sistema ter 3 equações, em que uma equação é a soma do dobro das outra. Então conclui que:

> Vamos ver que não é possível determinar as duas incógnitas x e y, uma vez que a eliminação x, o outro vai para si próprio e é obtido a mesma equação, o que somos capazes de determinar qualquer coisa. A razão para este acidente inicialmente óbvio é uma vez que a segunda equação muda em 6 x – 4y =10 é que nem a primeira duplicada 3x -2y = 5 que não é nenhum problema diferente. (EULER, 1750, p. 226).

Para o caso de quatro equações com quatro incógnitas, Euler (1750, p. 227) acrescentou que duas incógnitas podem ficar indeterminadas utilizando como exemplo o sistema de equações S_2 a seguir:

$$\begin{cases} 5x + 7y - 4z + 3v - 24 = 0 \\ 2x - 3y + 5z - 6v - 20 = 0 \\ x + 13y - 14z + 15v + 6 = 0 \\ 3x + 10y - 9z + 9v - 4 = 0 \end{cases} \qquad \textit{Sistema } S_2$$

[3] Dorier (1995) denomina a concepção de Euler acerca de dependência linear de dependência inclusiva, para destacar a diferença com as definições de dependência linear que se encontra atualmente nos livros didáticos de Álgebra Linear, salientando que não será apenas na resolução de problemas que envolvem sistemas de equações lineares que o aluno pode obter um forte significado do conceito, atributo que se supõe indispensável para a sua apropriação.

Euler (1750, p. 227) resolve o sistema pelo método da substituição e eliminação, pois isola na terceira equação o valor de x como segue:

$x = - 13y + 14z - 15v - 6$

Substituindo na segunda equação, temos:

$$y = \frac{33z - 3v - 52}{29};$$

$$x = \frac{-23z + 33v + 212}{29}$$

Após determinar os valores de **x** e **y**, estes podem ser substituídos na primeira e na quarta equação, que acarretará em duas equações idênticas, onde as incógnitas z e v são indeterminadas. Observa-se no sistema desenvolvido por Euler, que as equações estão contidas e incluídas em outras. Euler (1750) não menciona as relações lineares entre as equações do sistema S_1 e nem do S_2, por exemplo. Para Euler as equações não significava que duas equações eram idênticas, mas cada uma era a mesma, e isto era, sempre, verdadeiro.

O estudo qualitativo de sistemas continua com os trabalhos de Dodgson (1867) "An Elementary Treatise On Determinants e Sur la discussão des equações du degré premier"; Frobenius (1875) Ueber das Pfaffsche problem e Frobenius (1877) "Ueber das Pfaffsche problem"; e o importante trabalho de Cayley (1889) no artigo intitulado Remarques sur la notation des functions algébriques e em Cayley (1858) intitulado A memoir on the theory of matrices ele introduziu uma notação para matrizes, como sendo prática para representar sistemas lineares e formas quadráticas, além de definir matriz como *um conjunto de quantidade organizadas em forma de quadrado* (Figura 1).

Figura 1 - Matriz revelada na obra de Cayley.

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$$

Fonte: Cayley (1858, p.17).

Cayley (1858) relata em sua obra que, certamente, não conseguiria a notação de matrizes em algum caminho através dos quatérnios, foi diretamente por meio dos determinantes ou como um conveniente caminho da expressão da equação:

$$x' = ax + by \quad e \quad y' = cx + dy$$

Introduzindo assim as matrizes $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Esta noção de matriz surge naturalmente a partir de uma de uma *abreviação* (notação abreviada) de um sistema de equações lineares, como segue no sistema a seguir (não apresentava as chaves):

$x = ax + by + cz$

$x = a'x + b'y + c'z$ Sistema S_3

$z = a''x + b''y + c''z$

Este podia ser representado da seguinte forma (Figura 2):

Figura 2 - Representação do sistema linear feita por Cayley.

$$(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} (x, y, z),$$

Fonte: Cayley (1858, p.17).

A adição com matrizes tens suas origens, como revela Cayley (1858), também no estudo qualitativo de sistemas lineares é similar a adição de quantidades algébricas ordinarias, enquanto que a multiplicação (ou composição) há uma peculiaridade que matrizes não são em geral conversíveis.

A teoria de matrizes desenvolvida na obra de Cayley foi feito para matrizes de grau 3, mas vale para qualquer grau. A matriz pode ser representado por um *funcional linear,* como segue (Figura 3):

Figura 3 – Representação matricial na forma funcional linear.

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} \qquad \big((a, b, c)(x, y, z),\ (a', b', c')(x, y, z),\ (a'', b'', c'')(x, y, z)\big)$$

Fonte: Cayley (1858, p.17).

E ainda a matriz como abreviação do sistema (Figura 4):

Figura 4 - Representação do sistema na forma de matriz.

$$(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} (x, y, z)$$

Fonte: Cayley (1858, p.18).

A partir dai podemos apresentar diversas matrizes, como seguem as Figuras 5 e 6:

Figura 5 - Matriz zero e matriz identidade denomidadas por Cayley

$$\begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

Fonte: Cayley (1858, p.18).

A adição matricial fora revelado, junto com as propriedades, como matriz oposta e a propriedade associativa da soma matricial, por Cayley (1858) em sua obra, Figura 6.

Figura 6 – Soma de duas matrizes apresentadas por Cayley.

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = \left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array} \right)(x, y, z), \quad (\mathrm{X}', \mathrm{Y}', \mathrm{Z}') = \left(\begin{array}{ccc} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array} \right)(x, y, z)$$

$$(\mathrm{X}+\mathrm{X}', \mathrm{Y}+\mathrm{Y}', \mathrm{Z}+\mathrm{Z}') = \left(\begin{array}{ccc} a+\alpha, & b+\beta, & c+\gamma \\ a'+\alpha', & b'+\beta', & c'+\gamma' \\ a''+\alpha'', & b''+\beta'', & c''+\gamma'' \end{array} \right)(x, y, z)$$

Fonte: Cayley 1858, p. 19).

O produto de uma matriz por escalar (regra) fora apresentado do seguinte modo a partir de uma dada equação (Figuras 7 e 8):

Figura 7 - Regra do produto de uma matriz por um escalar.

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = \left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array} \right)(mx, my, mz)$$

Fonte: Cayley (1858, p. 19).

Figura 8 - Regra do produto de uma matriz por um escalar.

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = m\left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array} \right)(x, y, z) = \left(\begin{array}{ccc} ma, & mb, & mc \\ ma', & mb', & mc' \\ ma'', & mb'', & mc'' \end{array} \right)(x, y, z)$$

Fonte: Cayley (1858, p. 36).

O produto de matrizes é apresentado como segue na Figura 9.

Figura 9 – Exemplo de multiplicação matricial revelado por Cayley.

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = \left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array} \right)(x, y, z), \quad (x, y, z) = \left(\begin{array}{ccc} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array} \right)(\xi, \eta, \zeta),$$

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = \left(\begin{array}{ccc} \mathrm{A}, & \mathrm{B}, & \mathrm{C} \\ \mathrm{A}', & \mathrm{B}', & \mathrm{C}' \\ \mathrm{A}'', & \mathrm{B}'', & \mathrm{C}'' \end{array} \right)(\xi, \eta, \zeta) = \left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array} \right)\left(\begin{array}{ccc} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array} \right)(\xi, \eta, \zeta),$$

E dai substituindo pela matriz:

Obtem-se:

$$\left(\begin{array}{ccc} (a, b, c)(\alpha, \alpha', \alpha''), & (a, b, c)(\beta, \beta', \beta''), & (a, b, c)(\gamma, \gamma', \gamma'') \\ (a', b', c')(\alpha, \alpha', \alpha''), & (a', b', c')(\beta, \beta', \beta''), & (a', b', c')(\gamma, \gamma', \gamma'') \\ (a'', b'', c'')(\alpha, \alpha', \alpha''), & (a'', b'', c'')(\beta, \beta', \beta''), & (a'', b'', c'')(\gamma, \gamma', \gamma'') \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array} \right)\left(\begin{array}{ccc} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array} \right)$$

Fonte: Cayley (1858, p.19 e 36).

A operação de multiplicação (*ou composição*) por duas *matrizes*, de um modo geral não é comutativa. O tratamento que dava a matriz inversa (ou matriz recíproca) era: dado uma matriz A calcule sua inversa, então a matriz $A \times A^{-1} = I$, onde A^{-1} é a inversa de A e I a matriz identidade na mesma ordem das demais. Seu trabalho com multiplicação matricial culminou em seu teorema, Teorema de Cayley-Hamilton[4], que diz que o polinômio mínimo de uma matriz divide seu polinômio característico $p(x) = \det(xI_n - A)$. Podemos verificar em sua obra a gênese da ideia da matriz identidade, bem como o inverso de uma matriz quadrada. Cayley (1855), também, mostrou que o produto de uma matriz por sua inversa obtem-se a matriz identidade.

A vigilância epistemológica - Estudo qualitativo de sistemas lineares

Propomos uma **tarefa** para resolver um sistema linear **S_4** pelo método da eliminação e substituição, mas agora adicionando e retirando no segundo membro da equação a variável x_n (**n** representa a variável isolada).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 & (E_1) \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8 & (E_2) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 & (E_3) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 & (E_4) \end{cases} \qquad \textit{Sistema } S_4$$

A **técnica** para enfrentar esta tarefa se dá por meio da aplicação do método da eliminação e substituição, que é o método que **justifica** este fazer matemático.

Apresentamos a **técnica** para enfrentar a **tarefa**.

Da E_1 temos: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$

Então: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 7 = 0$

Isolando $x_1 = (7 - x_2 - x_3 - x_4)$

Obtemos: $x_1 = -(-7 + x_2 + x_3 - x_4)$

$x_1 = \mathbf{x_1} - (\mathbf{x_1} - 7 + x_2 + x_3 + x_4)$

$x_1 = x_1 - E_1$

Substituindo na equação E_2, temos:

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8$

$(x_1 - E_1) + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8$

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 8 - E_1 = 0$

$E_2 - E_1 = 0$

Substituindo $x_1 = x_1 - E_1$ na E_3, temos:

$(x_1 - E_1) + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 9 - E_1 = 0$

$E_3 - E_1 = 0$

Substituindo $x_1 = x_1 - E_1$ na E_3, temos:

$(x_1 - E_1) + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 10 - E_1 = 0$

$E_4 - E_1 = 0$

---

[4] Teorema (Cayley-Hamilton). Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão finita n e $T : V \to V$ linear e $p(\lambda)$ o polinômio característico de T. Então, $p(T) = 0$.

Voltando ao sistema S_4:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 & x_1 = x_1 - (E_1) \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8 & (E_2) = E_2 - E_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 & (E_3) = E_3 - E_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 & (E_4) = E_4 - E_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 & x_1 = x_1 - (E_1) \\ (x_1 - E_1) + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8 & (E_2) = E_2 - E_1 \\ (x_1 - E_1) + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 & (E_3) = E_3 - E_1 \\ (x_1 - E_1) + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 & (E_4) = E_4 - E_1 \end{cases}$$

Chamaremos as equações deste novo sistema de equação 2, equação 3 e equação 4, respectivamente por E'_2, E'_3 e E'_4, em um sistema que chamaremos de S_4'.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 & x_1 = x_1 - (E_1) \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 8 = E_1 & (E_2') = E_2 - E_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 9 = E_1 & (E_3') = E_3 - E_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 10 = E_1 & (E_4') = E_4 - E_1 \end{cases}$$

Substituindo E_1 no sistema anterior, temos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 & \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 & (E_2') \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 & \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 & \end{cases}$$

Como $x_2 = 1 - (x_3 + x_4)$

$x_2 = (1 - \mathbf{x_2} - x_3 - x_4) + \mathbf{x_2}$

$x_2 = x_2 - E_2'$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 & \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 & \leftrightarrow \quad x_2 = x_2 - E_2' \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 & E_3' \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 & E_4' \end{cases}$$

Substituindo nas equações E_3' e E_4', obteremos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \quad \leftrightarrow \quad x_2 = x_2 - E_2' \\ (x_2 - E_2') + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ (x_2 - E_2') + 2x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ (x_2 - E_2') + 2x_3 + 2x_4 = 2 \Rightarrow x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2 = E_2' \Rightarrow E_3' = E_3' - E_2' \\ (x_2 - E_2') + 2x_3 + 3x_4 = 3 \Rightarrow x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 3 = E_2' \Rightarrow E_4' = E_4' - E_2' \end{cases}$$

Resultando em:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 & E_1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 & E_2' \\ x_3 + x_4 = 1 & E_3'' \\ x_3 + 2x_4 = 2 & E_4'' \end{cases} \quad \text{conforme os anteriores } x_3 = 1 - x_4$$

$x_3 + x_4 = 1$, então: $x_3 = 1 - x_4$

Adicionando no segundo membro x_3 e $-x_3$ a igualdade não se altera.

$x_3 = \mathbf{x_3} - (-1 + \mathbf{x_3} + x_4)$, então: $x_3 = x_3 - E_4$

Podemos escrever:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 & E_1 \\ \quad x_2 + x_3 + x_4 = 1 & E_2' \\ \qquad x_3 + x_4 = 1 & E_3'' \\ \qquad x_3 + 2x_4 = 2 & E_4'' \text{ Substituindo em } E_4'' \; x_3 = x_3 - E_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 & E_1 \\ \quad x_2 + x_3 + x_4 = 1 & E_2' \\ \qquad x_3 + x_4 = 1 & E_3'' \\ \qquad (x_3 - E_4) + 2x_4 = 2 & \text{que é mesmo que } E_4'' = E_4'' - E_3'' \end{cases}$$

A partir de todas as substituições e eliminações que fizemos em S_4, surge o sistema S_4'':

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 & E_1 \\ \quad x_2 + x_3 + x_4 = 1 & E_2' \\ \qquad x_3 + x_4 = 1 & E_3'' \\ \qquad\quad x_4 = 1 & E_4'' = E_4'' - E_3'' \end{cases} \qquad \text{Sistema } S_4''$$

A solução de S_4'' é simples, pois deixamos o sistema inicial S na forma escalonada. Portanto a solução do sistema S' é $x_4 = 1$, $x_3 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_1 = 6$, portanto obtemos como solução do sistema linear $S_4 = \{(6,0,0,1)\}$

Nesta resolução apresentada começando pelo sistema $\mathbf{S_4}$ e terminando no $\mathbf{S_4''}$ é possível se verificar que a gênese do método do E*scalonamento* ou *Método de Gauss* é a *descrição do método da substituição e eliminação*, deixando de se trabalhar em uma *perspectiva algébrica* para se dar um *tratamento aritmético*, assim como Euler (1750) utilizava. Portanto esse o método da substituição e eliminação mostrou justificar a técnica utilizada, sendo um processo *econômico*, pois se trabalha com os coeficientes das incógnitas das equações do sistema, portanto *abstraindo* os sistemas de equações lineares por uma disposição em formato de linhas e colunas o que veio a ser chamado de *matriz,* por (Cayley, 1858).

Uma outra **tarefa** que deveria estar presente na atividade matemática escolar é podermos generalizar este processo, pois a resolução do sistema literal fornece ao leitor, uma descrição visível do método do escalonamento, como segue:

Vamos trabalhar com um sistema S_5 de 3 incógnitas e 3 equações, ou seja, $\mathbf{n} = \mathbf{m} = 3$.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = f_1 & (E_{51}) \\ a_2x + b_2y + c_2z = f_2 & (E_{52}) \\ a_3x + b_3y + c_3z = f_3 & (E_{53}) \end{cases}$$

Isolando-se x na E_{51}:

$$x = \frac{f_1}{a_1} - \frac{(b_1y + c_1z)}{a_1}$$

Adicionando-se a_1x no 2º membro da equação E_{51}.

$$x = \frac{f_1}{a_1} - \frac{(a_1x + b_1y + c_1z)}{a_1} + \frac{a_1x}{a_1} \therefore x = \frac{f_1 - (a_1x + b_1y + c_1z) + a_1x}{a_1}$$

$$como \;\; -E_{51} = f_1 - (a_1x + b_1y + c_1z), então:$$

$$x = \frac{-E_{51} + a_1x}{a_1} \therefore x = \frac{-E_{51}}{a_1} + \frac{a_1x}{a_1} \therefore x = \frac{-1}{a_1}E_{51} + x \therefore x = x - \frac{1}{a_1}E_{51}$$

Substituindo-se nas equações E_{52} e E_{53}, temos:

Como $a_2x + b_2y + c_2z - f_2 = 0$ é a E_{52} e $a_3x + b_3y + c_3z = f_3$ é a E_{53}, então:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = f_1 \Leftrightarrow x = x - \frac{1}{a_1}E_{51} \\ E_{52} - \frac{a_2}{a_1}E_{51} = 0 \\ E_{53} - \frac{a_3}{a_1}E_{51} = 0 \end{cases}$$

Sistema S’$_5$

Anulamos o primeiro termo das equações E_{52} e E_{53}, isto é, a variável **x**. Então, temos $E_{52} = E_{52} - \frac{a_2}{a_1}.E_{51}$, por exemplo, basta pegarmos a própria equação E_{52} e somarmos com o simétrico do primeiro coeficiente não nulo da E_{52} no caso a_2 multiplicado por cada coeficiente de E_{51} tudo dividido por a_1 e somando os termos semelhantes consegue-se anular ao menos o primeiro termo da equação e assim sucessivamente com as demais equações. Continua-se neste mesmo raciocínio, isola-se a variável **y** e substitui na equação E_{53} iremos anular por simetria a variável **y** na equação E_{53} e ficamos com o sistema na forma triangular.

Após determinarmos **z**, como o sistema está no *formato triangular*, determinamos **y** e **x**. A *descrição* do método da substituição e eliminação ganha um regularidade que pode ser descrito de uma maneira mais simples, como *operações entre as equações*. Na descrição do método temos um problema essencialmente numérico, ou seja, aritmético, pois trabalhamos com os coeficientes.

É possível revelarmos que o método da substituição e eliminação, do ponto de vista epistemológico é a gênese do método de Eliminação Gausseana, ou seja, a abstração do método da substituição e eliminação é o método do escalonamento, tornando a prática mais rápida, com uma diferença, pois no primeiro método vem da prática da manipulação das variáveis, enquanto que no método do escalonamento a ideia é trabalhar com os coeficientes, dando a ideia inicial de *matriz*. Generalizando em uma forma de ver o que acontece com o sistema – é o que a matemática denomina de operadores elementares entre linhas são:

i) $E_k \rightarrow \alpha E_k$, onde $\alpha \neq 0$
ii) $E_k \rightarrow E_k + \alpha E_j$, $\alpha \neq 0$ operação entre as linhas onde $E_k \neq E_j$. Adição de um múltiplo escalar da linha **j** à linha **k**.
iii) $E_k \Leftrightarrow E_j$ sejam equivalentes.
iv) Adição de múltiplos escalares em ambas as linhas: $E_k \rightarrow \beta E_k + \alpha E_j$. Onde $\beta \neq 0$ e $\alpha \neq 0$.

Conforme Cayley (1858), as matrizes surgem como uma abreviação dos sistemas lineares, que foi o que propomos na **tarefa** acima. Na atividade matemática que proposta não trabalhamos como as atividades propostas no livros didáticos, que é a ideia de tabela e sim a epistemologia proposta (Cayley, 1858).

Conforme já havíamos revelado, que o método da Eliminação Gausseana é a descrição do método da substituição e eliminação, pois no sistema de equações lineares quando substituímos e eliminamos incógnitas em outra equação do sistema, obtêm-se o que hoje é descrito nos livros como operadores lineares. A **tecnologia** que justifica a técnica empregada é o estudo qualitativo dos sistemas lineares. A **teoria** é a Álgebra Linear.

Operações com matrizes – um processo epistemológico

Já vimos que os sistemas lineares deram origem as matrizes e nesta parte revelar a gênese das operações com matrizes, que faz parte da atividade matemática da escola básica e superior, mas que de um modo geral não é revelado para os alunos o porquê que as matrizes são multiplicadas trabalhando-se as linhas de um com as colunas de outra, sendo que estas têm que ter a mesma quantidade de elementos, para que seja possível se realizar a operação.

Nossa ideia perpassa por **tarefas** que irão revelar a ideia destas operações. Partimos da seguinte **tarefa**:

Determinar as soluções dos sistemas 2 x2 a seguir.

$$S_1\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_2\begin{cases} x-y=0 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$$

Seja por qual for o método os sistemas $\mathbf{S_1}$ e $\mathbf{S_2}$ tem a mesma solução, pois x = y = 1.

Vamos agora somar os sistemas S_1 com o S_2.

Esta ***tarefa*** nos faz trabalhar com soma das soluções. Portanto, $S_1 + S_2$ dá:

$\begin{cases} 2x=2 \\ 4x+2y=6 \end{cases}$. Resolvendo este sistema teremos x = y = 1.

Mudar a variável de modo que **x** fique em função de **y**. Vamos fazer uma mudança de variável de modo que o **x** em função de **y**, com a intenção de tornar o sistema triangular.

A **técnica**: Fazendo $y = 2x + t$, pois ao substituir no sistema S_1 ira anular a variável **x**, como segue:

$S_1{'}\begin{cases} x+(2x+t)=2 \\ 2x-(2x+t)=1 \end{cases} \Rightarrow S_1{'}\begin{cases} 3x+t=2 \\ -t=1 \end{cases}$ Como t = -1, logo x = 1, como y = 2.1+(-1)=1.

Representar do sistema na forma *ampliada* – matriz do sistema

Destaca-se que esta notação é uma notação atual, pois anteriormente a esta os matemáticos representavam os sistemas acima da seguinte forma:

$$S_1 = \begin{array}{c} (x \quad y) \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad S_2 = \begin{array}{c} (x \quad y) \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Adicione S_1 e S_2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ Então, } \begin{pmatrix} 1+1 & 1-1 \\ 2+2 & -1+3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 \\ 1+5 \end{pmatrix}$$

Somamos as variáveis **x** com **x** e **y** com **y**. Concluímos que a adição de matrizes esta inspirado nos sistemas lineares, portanto é o que justifica a **técnica** da adição. A matriz resultante desta soma será denominada de *matriz soma*. Daí nasce a ideia de soma de matrizes está muito bem definida, pois só podemos somar matrizes de mesma ordem.

Pensemos do mesmo modo para a ideia do produto de matrizes. Resolva o sistema linear a seguir por mudança de variável.

$$S_1 \begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases}$$

Atribuindo valores as variáveis **x** e **y** do sistema.

Tínhamos atribuído a variável y = 2x + t e agora chamaremos a varável **x** de **s**, ou seja, x = s.

$S_1 \begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ Mudando-se as variáveis $\begin{cases} x=s \\ y=2x+t \end{cases}$ escrevendo de outra forma, temos:

$\begin{cases} x=s \\ y-2x=t \end{cases}$ ou ainda $\begin{cases} x=s \\ y=2s+t \end{cases}$ Substituindo em S_1:

$$\begin{cases} s+(2s+t)=2 \\ 2s-(2s+t)=1 \end{cases} ==> \begin{cases} 3s+t=2 \\ -t=1 \end{cases} ==> S_1 \begin{cases} (2+1)s+t=2 \\ (2-2)s-t=1 \end{cases}$$

Outra **tarefa**: Resolver o sistema linear a seguir por mudança de variável, mas utilizando a representação matricial.

$$S_1 \begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases}$$

Usando a representação do sistema e acompanhando passo a passo o que fizemos utilizando sistemas, temos:

S_1 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ representação do sistema $S_1 \begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases}$

Trabalhando com o sistema de mudança de variável:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ representação do sistema $\begin{cases} x=s \\ y=2s+t \end{cases}$

Fazendo a combinação, ou seja, substituindo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ no sistema de mudança de variável, temos:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ representando a *combinação* $\begin{cases} s+(2s+t)=2 \\ 2s-(2s+t)=1 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} (1+2) & 1 \\ (2-2) & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ representando a *combinação* $\begin{cases} (2+1)s+t=2 \\ (2-2)s-t=1 \end{cases}$

Acabamos de revelar a gênese do *produto matricial*, como sendo um problema de *mudança de variável*. Esta ideia já era trabalhada por Cayley (1858), conforme levantamento histórico realizado.

Cayley (1858) definiu como multiplicação matricial como sendo a representação do efeito de duas transformações sucessivas. Então propomos a atividade, por meio de *tarefa*, que não esta presente nas obras (livros e textos do saber) são ***tarefas*** onde os coeficientes são letras. Então, dado os sistemas genéricos, podemos revelar o produto matricial, como segue:

S $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ sistema principal S’ $\begin{cases} a_1's + b_1't = x \\ a_2's + b_2't = y \end{cases}$ sistema mudança de variável

$\begin{cases} a_1(a_1's + b_1't) + b_1(a_2's + b_2't) = c_1 \\ a_2(a_1's + b_1't) + b_2(a_2's + b_2't) = c_2 \end{cases}$ Fazendo a combinação, isto é, substituir as variáveis x e y na primeira equação. Agrupando os termos semelhantes, temos:

$$\begin{cases} (a_1a_1' + b_1a_2')s + (a_1b_1' + b_1b_2')t = c_1 \\ (a_2a_1' + b_2a_2')s + (a_2b_1' + b_2b_2')t = c_2 \end{cases}$$

Utilizando a representação matricial, como um registro necessário para entendimento da ideia da *matriz produto*.

Sistema S $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ representação de S $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

Sistema S’ $\begin{pmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2' & b_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ representação de S’ $\begin{cases} a_1's + b_1't = x \\ a_2's + b_2't = y \end{cases}$

Fazendo a combinação $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2' & b_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ representação da combinação $\begin{cases} a_1(a_1's + b_1't) + b_1(a_2's + b_2't) = c_1 \\ a_2(a_1's + b_1't) + b_2(a_2's + b_2't) = c_2 \end{cases}$. Observe que na representação matricial aparece uma matriz ao lado da outra sem sinal.

$\begin{pmatrix} a_1a_1' + b_1a_2' & a_1b_1' + b_1b_2' \\ a_2a_1' + b_2a_2' & a_2b_1' + b_2b_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ representação de

$$\begin{cases} (a_1a_1' + b_1a_2')s + (a_1b_1' + b_1b_2')t = c_1 \\ (a_2a_1' + b_2a_2')s + (a_2b_1' + b_2b_2')t = c_2 \end{cases}$$

Assim é possível se mostrar que a gênese do produto matricial, vem, também, do estudo qualitativo de sistemas lineares. Mostramos que o produto de matrizes não acontece por acaso. É importante notar no sistema S que ocorre uma *transformação*, pois o par (x,y) é transformado no par (c_1,c_2), enquanto que no sistema S’ transformasse o par (s,t) em (x,y).

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} - T_1 -> \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - T_2 -> \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \qquad (T_2oT_1)\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$-----T_2oT_1------> \qquad ---T_2oT_1---->$$

A grande ideia revelada é que a *composição de transformações* é o produto das matrizes, portanto estamos no campo das *relações*. Agora podemos dizer que ao aplicarmos uma transformação (mudança de variável) com intuito de obter um sistema mais fácil de resolver. Então do ponto de vista das relações os sistemas lineares são *transformações lineares*.

Para que ocorra o produto de matrizes é necessário que o número de colunas da primeira matriz seja igual ao número de linhas da segunda matriz, resultando em uma matriz com a mesma quantidade de linhas da primeira matriz e mesma quantidade de colunas da segunda matriz. O que justifica isto é o *produto escalar* entre dois vetores, pois os vetores tem que ter o mesmo número de elementos, como mostra a representação matricial do sistema apresentado S e S'(sistema mudança de variável).

Substituindo as variáveis x e y no sistema e por seguinte, representar na forma de matriz. A ideia do produto escalar por uma matriz, perpassa por um sistema linear, também, como segue:

Perpassamos pelo estudo iniciado por Oresme, pela criação da Geometria Analítica, o estudo das curvas, que foi estudado a partir dos sistemas lineares, que caminha para um saber as formas que assumiu, galgando a independência como um saber prático e se constituiu em Teoria de Matrizes, depois a Teoria da Álgebra Linear.

Nesse trabalho propomos **tarefa** que não estam presentes na escola, pois não se leva em conta a potencialidade do estudo qualitativo de sistemas lineares, que é a gênese, do método de Gauss, dos operadores elementares entre as linhas do sistema linear e ainda das operações matriciais.

Considerações Finais

Esse trabalho de cunho histórico epistemológico foi de extrema importância, pois nos fez revelar que as atividades propostas já na formação inicial de professores de Matemática podem fornecer subsídios para (re) construir as tarefas que na grande maioria dos livros didáticos não estão presentes, portanto boa parte dos docentes até desconhecem o porquê se deve multiplicar as matrizes linhas por colunas, ou a gênese dos operadores entre linhas, por exemplo. As tarefas propostas nesse artigo têm um cunho epistemológico e histórico, para que futuros professores possam repensar e analisar o ensino de matrizes na matemática no contexto escolar.

A construção do objeto matrizes necessita avancemos do nível empírico, e do que esta posto nas obras didáticas e sim a partir de uma organização matemática e didática possamos encaminhar uma construção racionalista, que levem os alunos ao encontro do objeto e uma relação dialética com a prática.

A Teoria postula que uma praxeologia pode ser dividida em práticas e logos, ou seja, o bloco do saber-fazer não vive sozinho nas organizações praxeológicas, ele necessita de algo que o legitime, principalmente a técnica. Isso ocorre pela inserção do bloco do saber ou do logos, onde estão a tecnologia que justifica a técnica e a teoria que é uma justificação da tecnologia.

As tarefas propostas para o ensino de matrizes no ensino superior, partem do estudo qualitativo de sistemas lineares, que segundo a Teoria Antropológica do Didático, é a tecnologia que justificaram às técnicas para enfrentar às tarefas, possibilitando articular práticas, que estão na escola básica que foram mobilizados para o estudo de matrizes no ensino superior. No que diz respeito ao método da substituição e eliminação nos permitiu revelar a gênese do que a matemática denominou de Eliminação Gausseana, que é o Método do Escalonamento.

As matrizes, diferente do que podemos verificar em literaturas tanto do ensino médio quanto do superior, que emergem de tabelas, revelamos neste artigo que as mesmas tê sua gênese como uma abreviação dos sistemas lineares, pois é mais rápido se resolver por matrizes do que escrever todo o sistema. Perceber que dava muito menos trabalho se operar com os coeficientes, logo a estrutura em que ficavam dispostos os números se dava o nome de matrizes, isto é, as matrizes são uma abreviação dos sistemas lineares.

As operações com matrizes, também, derivam do estudo qualitativo de sistemas lineares, pois as tarefas propostas neste artigo foram possíveis desencadear a gênese destas operações, sendo assim demos um motivo para se estudar matrizes, pois na escola este objeto matemático aparece isolado dos demais.

Alcançamos o objetivo neste artigo pois evidenciamos por meio do estudo histórico e epistemológico a gênese das matrizes, suas operações, além do método do escalonamento, a partir de tarefas que auxiliem o professor em situação de ensino deste objeto.

Referências

BOSCH, M.; GÁSCON, J. Las práticas docentes del professor de matemáticas. XIème École d'Été de Didactique des Mathématiques. Versión provisional. Barcelona. 2001.BOYER, C.B. (1974). História da matemática. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher.

BRUTER, C.P. (1998). Compreender as matemáticas. As dez noções fundamentais. Instituto Piaget.

CAYLEY, A. (1858). A memoir on the theory of matrices. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 148, 17–37.

CAYLEY, A. (2009). Remarques sur la Notation des Fonctions Algébriques. In: The Collected Mathematical Papers. 2009. 185-188. [Online]. Cambridge Library Collection - Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press. Available from: Cambridge Library Collection. Retirado em 1 de janeiro, 2015, de: http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511703683.

COMTE. A. Traité Élémentaire de géométrie analytique a deux et a trois dimensions. Paris, 1843.

DODGSON, C. T. (1867). An Elementary Treatise on Determinantes. Oxford. Londres.

DORIER, J. L. (1995). Genesis of vector space theory, Hist. Math, 22, 3.

DORIER, J. L. (2003). Some comments on "The role of Proof in Comprehending and Teaching Elementary Linear Algebra" by F. Uhlig, Education Studies in Mathematics, 51, 185-191.

EULER, L. (1750). Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes curbes. In: Berlin, D. A. der W. zu ". Histoire de l'Académie royale des sciences et des belles lettres de Berlin: avec les mémoires pour la même année, tirez des registres de cette Académie. Germany: Berlin: Editora: Chez Ambroise Haude, 4. 219 – 233.

FROBENIUS, F. G. (1875). Ueber das Pfaffsche Problem. Flachen.Journal Für Die Reine und Angewandte Mathematik. Berlin. 82. 353.

FROBENIUS, F. G. (1877). Ueber Systeme und Gewebe Algebraischen Flachen.Journal Für Die Reine und Angewandte Mathematik. Berlin. 82. 353.

FROBENIUS, F. G. L'analise des pratiques enseignantes em théorie antropologique du didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble, La Pensée Sauvage, v. 19, n. 2, p. 221-265, 1999.

GÁSCON, J. (2000). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, México, v. 4, n. 2, p. 129-159.

HERMANN, A. (1886). La Géométrie de René Descartes. Nova edição. Paris.

MENDES, I. A. (2015). História da matemática no ensino: entre trajetórias profissionais, epistemologias e pesquisa. São Paulo: Editora Livraria da Física.

O'CONNOR, J, J. ROBERTSON E, F. (1996). Matrices and determinants. Retirado em 12 de março, 2016, de: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Matrices_ and_determinants. s.html.

Fernando Cardoso de Matos
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará – IFPA
Campus Belém
Belém - Brasil
E-mail: matos2001@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4816-4018

José Messildo Viana Nunes
Universidade Federal do Pará – UFPA
Belém - Brasil
E-mail: messildo@yahoo.com.br
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9492-4914

Recebido: *16/09/2019*
Aprovdo: *30/11/2019*