GEOMETRIA ANALÍTICA NOS LIVROS DE MINICURSOS DOS SNHM: POSSIBILIDADES DIDÁTICAS PARA O ENSINO

ANALYTICAL GEOMETRY IN SNHM MINI-COURSE BOOKS: DIDATICALS POSSIBILITIES FOR TEACHING

Rubens Matheus dos Santos Marques
Universidade Federal do Pará

RESUMO

O objetivo da pesquisa que originou este artigo foi de analisar as produções de história da geometria analítica nos livros de minicursos oferecidos nos Seminários Nacionais de História da Matemática (SNHM), entre os anos de 2001-2017, a fim de sugerir como essas produções podem servir de apoio conceitual e didático ao professores nas aulas de matemática para o ensino médio e ou superior. Durante a pesquisa investigamos os 101 livros de minicursos publicados, onde foi identificadas propostas para subsidiar o ensino de matemática, a formação inicial e continuada de professores de matemática todos os níveis de ensino, assim os potenciais dessas produções para estabelecer relações entre conteúdos e métodos de ensino, para o uso em sala de aula. A pesquisa realizada centrou-se inicialmente no levantamento, classificação, e catalogação dos 101 livros identificados. Em todos os livros procuro identificar as seguintes dimensões temáticas das pesquisas em História da Matemática: História e Epistemologia da Matemática (HEpM), História da Educação Matemática (HEdM) e História para o Ensino de Matemática (HEnM), para analisar as produções centradas na temática de história da geometria analítica. Os resultados obtidos indicam que seis pesquisas apresentam seja implicitamente ou explicitamente potenciais para o ensino de geometria analítica de acordo com objetivo proposto para investigação.
Palavras-chave: História da Matemática; História da Geometria; Ensino de geometria analítica.

ABSTRACT

The purpose of the research that originated this article was to analyze the history productions of analytical geometry in the short courses books offered at the National Seminars of History of Mathematics (SNHM), from 2001-2017. to suggest how these productions can serve as conceptual and didactic support for teachers in math classes for high school and beyond. During the research we investigated the 101 published short course books, and identified proposals to support mathematics teaching, the initial and continuing training of mathematics teachers at all levels of education, as well as the potential of these productions to establish relationships between content and teaching methods for use in the classroom. The research was initially focused on the survey, we classified, cataloged the 101 books identified. In all books we seek to identify the following thematic dimensions of research in the history of mathematics: History and Epistemology of Mathematics (HEpM), History of Mathematical Education (HEdM) and History for the Teaching of Mathematics (HEnM), to analyze the productions centered on the history of analytic geometry. The results indicate that six researches are either implicitly or explicitly potential for the teaching of analytical geometry according to the proposed research objective.
Keywords: History of Mathematics; History of geometry; Teaching of analytical geometry.

Introdução

Este artigo refere-se a alguns resultados parciais de uma pesquisa em andamento, financiada pelo CNPq na modalidade Produtividade em Pesquisa, a qual foi elaborado um levantamento e uma seleção dos livros de minicursos publicados nos Seminários Nacionais de História da Matemática (SNHM), oferecidos pela Sociedade Brasileira de História da Matemática, a fim de responder a seguinte questão: De que maneira os livros de minicursos oferecidos nos SNHM referentes a história da geometria analítica podem contribuir para o ensino de geometria analítica e para a formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática?

Em busca de respostas à questão lançada foi desenvolvido um levantamento dos livros de minicursos oferecidos nos SNHM, entre 2001 e 2017 e a seleçaõ do referido tema para analisar os possíveis potenciais dos trabalhos produzidos, para o uso nas aulas de matemática no ensino médio ou superior de modo que a história da matemática não seja um objeto para meras ilustrações ou para uma simples informação.

Os livros mencionados neste artigo e outras produções estão disponíveis no Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática - CHEPHIMAT[1], sendo este um dos resultados do projeto de pesquisa supracitado.

Conforme já mencionado anteriormente, o objetivo do recorte da pesquisa que originou este artigo foi identificar e analisar os livros produzidos para os SNHM que tratam de história da geometria analítica, com vistas a verificar possíveis contribuições desses livros para o ensino desse assunto. Neste sentido, essa investigação partiu do pressuposto de que haviam possíveis potenciais pedagógicos que poderiam ser tomados para uma abordagem didática nas aulas de matemática na Educação Básica, bem como na formação de professores de matemática. Um aspecto epistemológico importante que foi considerado na pesquisa e que retomamos também neste artigo é: qual história da matemática foi tomada como base para a investigação e para a escrita do artigo?

Elucido, portanto que se trata da história da matemática como área de pesquisa que, conforme salienta Mendes (2014; 2018), está organizada em três tendências nas pesquisas em História da Matemática de abrangência investigativa: História e Epistemologia da Matemática (HEpM), História da Educação Matemática (HEdM) e História para o Ensino de Matemática (HEnM). Para o autor, as pesquisas em HEpM tratam de aspectos como o desenvolvimento de um conceito matemático, ou seja, uma história específica do desenvolvimento conceitual da Matemática sob enfoque acadêmico, vida e obra de matemáticos, multiplicidades de estratégias e métodos de solução de problemas referentes a questões matemáticas em aberto, no decorrer dos séculos, etc.

As pesquisas em HEdM abordam aspectos históricos sobre as matemáticas ensinadas em instituições escolares, biografia de professores de matemática e suas trajetórias intelectuais, histórias relacionadas à formação de professores de matemática, dentre outras temáticas que envolvem práticas e saberes matemáticos escolares como legislação, programas de ensino, produções de materiais didáticos, manuais escolares, etc. As pesquisas referentes a HEnM se caracterizam por geralmente ter como interesse central tomar as

[1]Acesso disponível em: http://crephimat.com

informações históricas como possibilidade de melhoria do ensino de matemática, quando mobilizadas para dinamizar a aprendizagem dos estudantes dos diversos níveis de ensino.

É nessa tendência que será o foco da pesquisa que originou este artigo, uma vez que se trata de produções didáticas para o ensino de matemática e a elaboração de material para o ensino de matemática a partir de informações históricas da matemática. Assim procedemos ao processo de classificação das produções em uma ou mais dimensões temáticas como as mencionadas anteriormente, considerando que poderíamos identificar produções classificadas como HEdM, com potencialidades para o Ensino de Matemática, por exemplo.

Assim, se faz necessário esclarecer sobre qual HEnM me refiro, para posteriormente apresentar e analisar as informações sobre o tema central do artigo; os livros de minicurso que trataram sobre história da geometria analítica.

História para o Ensino de Matemática

Á respeito da HEnM fundamento nos estudos de Miguel e Miorim, no que se refere como história pedagogicamente vetorizada, e Mendes que concerne na história como um agente de cognição e como um reorganizador cognitivo.

Para Miguel e Miorim (2008), a *história pedagogicamente vetorizada* são mais do que histórias meramente ilustrativas e/ou propriamente ditas, os autores defendem que essa história seja capaz de oferecer um grande auxilio para os professores de matemática que tem a intenção de sair de sua zona de conforto e da tendência tecnicista no qual neutraliza o ensino. Mendes (2015) refere-se à *história como um agente de cognição* e *reorganizador cognitivo* como um fator cuja a abordagem conceitual e didática favorece o ensino dos estudantes a partir das ideias matemáticas desenvolvidas ao longo do tempo e no espaço.

Neste sentido, considerando as proposições centrais defendidas pelos autores, a História da Matemática não é apenas uma história de definições de objetos matemáticos, mas de um processo criativo que envolve relações indissociáveis entre sociedade, cultura e cognição. Dessa forma, é necessário compreender que a abordagem histórica em que Mendes (2017) admite ser importante para a aprendizagem matemática em sala de aula, seja capaz de explicar o processo de organização conceitual das matemáticas produzidas no tempo e espaço, portanto em um contexto sociocultural. É com base nesse contexto que as informações históricas poderão ser utilizadas para auxiliar o professor para melhorar o desenvolvimento de suas aulas. No entanto essa história poderá ainda contribuir para esclarecer aspectos conceituais e didáticos que poderão colaborar para o professor desenvolver sua prática.

Nesta perspectiva, Mendes (2015) justifica que o uso das informações históricas em atividades para o ensino de matemática, subsidia a formação dos estudantes, e igualmente na formação continuada do próprio professor a fim de constituir suas competências formativas para seu desempenho no ensino. Neste sentido, o autor confirma cada vez mais ser possível o uso da investigação histórica nas aulas de matemática. De acordo com Mendes (2015), muitas das suas conclusões foram estabelecidas com bases em suas experiências docentes com estudantes da Educação Básica e com professores em formação inicial e continuada. Mendes (2015) assegura que quando os estudantes entram em contato com essa proposta metodológica desenvolvem um processo significativo de compreensão. E

consequentemente de aprendizagem conceitual matemática com ampliação de suas capacidades metacognitivas.

O autor enfatiza ainda que o uso de investigação histórica é uma excelente estratégia didática para essa ampliação metacognitiva enriqueça a aprendizagem matemática dos estudantes de qualquer nível de ensino, pois as práticas investigativas com história no ensino de matemática, possibilitam a formação de estudantes mais autônomos em busca do seu próprio conhecimento, no exercício de leitura, de escrita e de discussão das ideias matemáticas, bem como suas relações com outras áreas de conhecimento.

Desse modo, advoga, também, que umas das maneiras mais apropriadas para colocar essa prática em ação, é analisar os momentos históricos que envolvem todos os aspectos que originaram formulações construtivas dos conceitos matemáticos que se pretende ensinar. Assim se torna possível instigar os estudantes, estimulá-los a pensarem em estratégias que resultem na produção do seu próprio conhecimento, ao identificarem processos de mobilização de saberes e estratégias de pensamento para a produção de conhecimento, conforme o contexto, as necessidades, interesses e limitações socioculturais de cada época.

Não é objetivo dessa seção dispor a ideia de que a história da matemática seja única, ou seja, recortar um fato histórico e inseri-la no ensino, as compreenções acerca dessa metodologia de ensino está além disso, conforme defendido por Mendes (2015), histórias narrativas, biografias, nomes, datas e locais são fatos menos importantes para se trabalhar no ensino de matemática, porém não podemos descarta-las, é mais relevante recorrer por exemplo sobre a história dos tópicos de matemática, que neste caso particular concerne nas histórias da geometria analítica.

Desse modo, para usufruirmos dessa metodologia de ensino precisamos ter ciência de que tipo e qual história pode ser considerada adequada para se ensinar conteúdos de matemática. Conforme mencionado anteriormente um dos tipos de história que consideramos importante são aos dos tópicos de conteúdos matemáticos, ou seja, a partir do desenvolvimento histórico cuja a história do conteúdo ensinado esta condicionalmente favorável para o ensino.

Condicionalmente porque muitas das vezes as informações contidas nas fontes primárias ou secundárias não está explicitamente voltada para o ensino de matemática devendo assim passar por uma espécie de transposição para atingir o objetivo pretendido. Transposição mencionada aqui não se refere ao termo utilizado pela didática francesa[2], mas sim no sentido de uma reformulação de um contexto histórico desenvolvido para o ensino.

Em relação a qual história é considerada adequada para se ensinar, em primeiro lugar é necessário que o professor deverá ter clareza sobre a história a qual quer vincular no ensino, essa é uma questão óbvia mas é uma situação costumeiramente encontrada, em que um profissional da educação tem uma compreensão errônea sobre a história da matemática no ensino, desse modo corroborando com Mendes (2015), ensinar pela história não é ensinar história da matemática.

[2] Ver maiores detalhes em Mendes (2017), História para o ensino da matemática uma reinvenção didática. Revista COCAR, Belém, Edição Especial N.3, p. 145 a 166 – Jan./Jul. 2017

Neste sentido, Mendes (2017) afirma que nem todas informações históricas contém potencial para o ensino, n o autor elenca histórias inapropriadas mas não descartáveis para o ensino, tais como, as histórias de vida de matemáticos e professores de matemática bem como mitologias, narrativas históricas surgidas ao longo do tempo em relação a nomes, locais e datas, sem obter qualquer relação conceitual de um tópico investigado. Para superar essas dificuldades presentes nestes tipos de história (MENDES, 2017. p. 156) propõe que com base na execução de projetos de investigação cuja a proposta deve avançar além das apresentações dessa informação, ou seja, saber relacionar com fazer matemático.

Por um lado, podemos, portanto de acordo com essas reflexões, concluir que a investigação histórica oferece ao professor uma série de possibilidades para tornar mais didático o conhecimento matemático registrado e estudado na formação de professores de matemática. Por outro lado, em consonância com Mendes e Chaquiam (2016), asseverar uma história que deve ser adequada para o ensino é bastante difícil, neste sentido, a história que os autores considera adequada é aquela em que as ideias e conceitos matemáticos sejam subsidiados pelo desenvolvimento histórico-epistemológico. Trata-se, portanto, da história das ideias matemática em seu processo de criação, reinvenção e organização lógica. Assim sendo, é uma história que tem o interesse de apresentar uma organização conceitual e didática das ideias matemáticas produzidas no tempo e no espaço. (MENDES, CHAQUIAM, p.19, 2016).

Geometria Analítica nos Livros de Minicursos dos SNHM de 2001-2017

Em relação ao Seminário Nacional de História da Matemática, este evento ocorre bienalmente, desde do ano de 1995 cuja sua primeria ediçaõ ocorreu na cidade de Recife-PE, o II SNHM realizou-se em 1997 na cidade de Aguas São Pedro-SP, o III SNHM ocorreu no ano de 1999 em Vitória-ES, estes três primeiros Seminários Nacionais de História da Matemática, conforme Nobre (2007), eram de responsabilidade de seus coordenadores locais com contribuições de um comitê vinculado a Sociedade Brasileira da História da Ciência-SBHC.

Os primeiros livros de minicursos foram publicados durante o IV SNHM ocorrido na Universidade Federal do Rio Grande do Norte-UFRN no período de 08 a 11 de abril de 2001 na cidade de Natal-RN, John Andrew Fossa foi o primeiro organizador da série textos de História da Matemática, este seria o primeiro Seminário Nacional de História da Matemática realizado pela Sociedade Brasileira de História da Matemática- SBHMat. Segundo Nobre (2007), o SNHM anterior, ocorrido em Vitória-ES na assembleia de encerramento foi comunicado a criação da Sociedade Brasileira de História da Matemática.

Conforme Nobre (2007), com a SBHMat na organização, ocorreram discussões a respeito do evento, nessas discussões foi definido que haveria uma seleção mais qualitativa dos trabalhos para garantir uma qualidade científica no qual possuiriam condições para a publicação nos anais do evento, nesse sentido foi definido quatro modalidades de apresentações, Relatos de Experiências e Resultados de Iniciação Científica (alunos de graduação), Resultados de Pesquisa (alunos de pós-graduação e pesquisadores), e Projetos de Pesquisas.

Ainda sobre as discussões a respeito do evento Nobre (2007), destaca também que houve novos objetivos para os SNHM, um desses objetivos eram de proporcionar acesso da História da Matemática para os professores do ensino fundamental, ensino médio e do ensino superior. Desta maneira, passou a ser promovido durante o evento a realização de minicursos para estes professores, no qual a posteriori viriam ser transformados em livros. Neste sentido, os livros de minicursos vem sendo publicados a partir de sua quarta edição, as três primeiras edições ocorreram minicursos porém, não foram transformados posteriormente em livros.

Ao classificar todos os 101 livros de minicursos[3] publicados nos SNHM levando em consideração as tendências de pesquisa em História da Matemática supracitadas na introdução desta investigação identificamos que desse total, apenas seis relacionavam-se sobre o tema, não sendo necessariamente o assunto principal abordado pelos seus respectivos autores, se limitássemos a classificação pelo foco e objetivo do livro esse número seria bem menor. O quadro a seguir apresenta de modo geral o quantitativo das produções de História da Matemática em relação ao conteúdo de geometria analitica, o qual é possível observar que as histórias contidas nos livros para ensinar ainda são incipientes.

Quadro 1: Relação de livros de Minicursos sobre Geometria Analítica

Título	Autor	Ano	Tendência
Introdução às Cônicas	Guy Grebot	2005	HEpM
Ontologia e representação Matemática em Descartes a construção de figuras na geometria analítica	Érico Andrade	2009	HEnM
Introdução Histórica às geometrias não-euclidianas uma proposta pedagógica	Sérgio Roberto Nobre	2009	HEpM
Uma incursão em alguns tópicos da história da geometria	Vicenzo Bongiovanni	2009	HEnM
Introdução para o estudo histórico da geometria analítica plana	Mariana Feitero Cavalari, César Peon Martins	2011	HEnM
Problema de Apôlonio: Panorama histórico e sua resolução utilizando um software geométrico	Lucieli Maria Trivizoli, Rachel Mariotto	2011	HEnM

Fonte: Elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Conforme os dados explicitados no quadro acima obtivemos o número de quatro livros referentes a história para o ensino da matemática, ou seja, livros que têm a preocupação explicitamente para fins didáticos. Não é objetivo deste artigo classificar os livros como bons ou ruins, assim a classificação se desenvolveu de acordo com as compreensões a partir do referencial teórico e das histórias apresentadas por cada autor, esclareço também que os livros classificados nas demais tendências contém potencial para se ensinar, cabe ao profissional da educação direcionar as proposições contidas nessas produções para sua sala de aula.

[3] Todos os livros disponiveis em: http://crephimat.com/livrosdeminicursos

Assim sendo, o primeiro livro que identificamos a temática de geometria analítica foi produzido para o VI SNHM, ocorrido em Brasília-DF no período de 20 a 25 de março de 2005.Trata-se do livro Introdução às cônicas, no qual seu autor, Guy Grebot, apresenta uma história dos estudos das seções cônicas a partir do tratado de Apolônio de Perga (Figura 1). Identificamos como conteúdo abordado os estudos das seções cônicas, tais como hipérboles, cubos e cones.

Figura 1: Livro de Minicurso Introdução às Cônicas

Fonte: SBHMat

Segundo o autor, o objetivo do seu trabalho é apresentar os métodos dos estudos de Apolônio, de modo que tais métodos possam subsidiar para a formação dos egressos do ensino médio, na licenciatura em Matemática. O livro está organizado em nove capítulos da seguinte maneira: introdução, primeiras observações, determinação das cônicas, diâmetros e conjugados, tangentes e diâmetros conjugados, mudanças de sistemas de coordenadas, paralelogramos determinados por tangentes, o problema motivador e as referências.

Inicialmente o texto aborda as dificuldades de ensino em alguns temas relacionados à geometria no ensino básico para, em seguida, tratar do estudo das seções cônicas com base na tradução do tratado de Apolônio de Perga. Assim o autor argumenta sobre a possibilidade de mesclar a geometria euclidiana plana, geometria euclidiana espacial e geometria analítica e mostra os métodos de proporções e de conservações de áreas empregados por Apolônio, até abordar as seções cônicas e suas equações cartesianas em um determinado sistema de eixos. Em seguida caracteriza as tangentes e as expressões das cônicas em outros sistemas de referências com base no método de conservação de áreas. Posteriormente apresenta uma breve do estudo das cônicas retomando o problema motivador, relacionando ao problema da duplicação do cubo, que, segundo o autor se trata de um problema relacionada à descoberta das seções cônicas.

A partir da definição entre cone oblíquo e cone reto, o autor demonstra as seções circulares obtidas em um cone oblíquo, denominadas seções paralelas à base e às seções subcontrárias. Mostra a construção de Apolônio ao afirmar que a seção de um cone determinado por um plano não é necessariamente um círculo. Apresenta desenhos ilustrativos das construções demonstradas e mostra que Apolônio iniciou a investigação das propriedades algébricas e geométricas das curvas e seus traçados. Ao longo de todo o texto

faz demonstrações matemáticas com todas as propriedades e proposições na produção investigada.

Embora o livro não apresente nenhuma atividade didática, o autor discute sobre ensino de geometria na Educação Básica, enfatizando a problematização como abordagem do tema, presente ao longo dos tempos históricos, sob o olhar da geometria projetiva e da geometria analítica deixando à margem a álgebra e a geometria dos gregos. Discute, ainda, a dificuldade de aprendizagem dos estudantes.

Por fim, após a leitura reflexiva sobre o texto compreendemos que a partir da abordagem histórica é possível mostrar outras possibilidades de abordagens do conteúdo matemático na sala de aula, principalmente ao apresentarmos o desenvolvimento histórico-conceitual de um conhecimento, como um elemento gerador de problematizações e estratégias de pensamento para exercício na formação de professores e no ensino básico. Assim, classificamos o livro em HEpM, com ênfase para o ensino de matemática, ou seja, embora não proponha diretamente uma abordagem didática do tema, deixa subjacente sua preocupação com esse aspecto.

Outro livro referente ao tema é intitulado Ontologia e representação matemática em Descartes a construção de figuras na geometria analítica, de autoria de Érico Andrade publicado no VIII SNHM, ocorrido em Belém-PA. no período de 5 a 8 de abril de 2009. O livro está organizado em sete capítulos: introdução, Abstração e o objeto matemático: dos contornos da figura sensível à criação da geometria, A abstração cartesiana e o surgimento da geometria analítica, A abstração e a construção da figura na geometria analítica, Conclusão, Solução de problemas e as referências.

No texto o autor apresenta e discute como o conceito de abstração é concebido por Descartes enquanto método constituinte do objeto matemático e da geometria analítica (Figura 2). O autor faz um percurso apontando contribuições para a matemática de Euclides de Aristóteles e Descartes de modo a refletir como esses filósofos e matemáticos concebiam a natureza dos objetos dessa ciência.

Figura 2: Ontologia e representação matemática em Descartes a construção de figuras na geometria analítica

Fonte: SBHMat

Ao longo de seu texto Andrade (2009) apresenta algumas indagações, tais como, a geometria analítica seria mais abstrata que a geometria euclidiana? Os objetos da geometria euclidiana e da geometria analítica seriam objetos de natureza distintas? Neste sentido o autor refere-se a ontologia do objeto matemático, de modo que a filosofia e a matemática se unem no estudo de se tornarem mais claro neste sentido os objetos da matemática são objetos abstratos.

De acordo com Andrade (2009, p. 11), para Aristóteles só existem 3 possibilidades para se compreender a natureza do objeto matemático: 1) os próprios corpos são os objetos da matemática assim um conjunto de objeto da matemática poderia ser tomado como um conjunto de números; 2) os objetos matemáticos existem e não guardam nenhuma relação com os objetos da experiência; 3) os objetos da matemática existem enquanto objetos abstraídos dos objetos da experiência. Neste sentido, o autor afirma que o objeto matemático é abstrato porque ele é idealizado por meio de um processo de abstração que extraí dos corpos sua imagem figural e a transforma no objeto matemático a ser manipulado na experiência matemática.

Ao se fundamentar em Descartes para conceber a produção do conhecimento cientifico e matemático como uma atividade histórica, Andrade (2009) propõe no seu livro, cinco atividades duas das quais sugere que sejam resolvidas com régua e compasso, e outras três referem-se diretamente à questões de geometria analítica, sobre distância entre dois pontos e a noção de par ordenado. Tais atividades são propostas para estudantes de ensino médio.

Entretanto, embora suas discussões filosóficas e ontológicas concernentes à Matemática, não seja focada à formação inicial do professor, a abordagem apresentada pelo autor pode ser adaptada ao nível que o professor desejar usá-la. A discursão apresentada pode ser também adaptada aos cursos superiores de pós-graduação que tenham foco principalmente em história da matemática. Assim, classificamos o livro na dimensão temática HEpM, com ênfase para o ensino de matemática.

Outro livro foi intitulado Introdução Histórica às Geometria não-euclidianas-uma proposta pedagógica (Figura 3), de autoria de Sérgio Roberto Nobre, produzido para o VIII SNHM, e organizado em três capítulos: pequena introdução histórica sobre Euclides e os elementos de Euclides, o quinto postulado de Euclides e as Referências. O objeto de estudo da produção é o quinto postulado de Euclides com foco temático nas geometrias não euclidianas. O livro se caracteriza como uma pesquisa do tipo bibliográfica em fontes primarias e secundárias sobre história da matemática da vida e obra de Euclides, do quinto postulado e das geometrias não-euclidianas. Apresenta e discute, sob ponto de vista histórico, o surgimento das geometrias não-euclidianas.

Figura 3: Introdução Histórica às geometrias não euclidianas: uma proposta pedagógica

Fonte: SBHMat

No primeiro capítulo, Nobre (2009) apresenta um panorama sobre a vida de Euclides, discursa sobre a escassez de fontes relacionadas ao tema e menciona o importante livro atribuído a esse matemático (Os Elementos), descrevendo os treze livros que o compõem. No segundo capítulo trata da história do quinto postulado de Euclides que se inicia com a enunciação do postulado e as tentativas históricas de sua compreensão ao longo dos séculos. O autor relata, também, algumas tentativas de resolução e demonstrações do postulado ocorridas no mundo árabe e Europa e mostra como esse movimento originou as discussões e proposições sobre geometrias não euclidianas. No capítulo seguinte Nobre apresenta as principais contribuições de Gauss, Lobachysky e Bolyai para o nascimento das geometrias não-euclidianas citando-as de forma cronológica em cada biografia.

O livro não apresenta atividades de ensino, mas a história ligada a essa geometria poderá servir de ponto de partida para que professores desenvolvam atividades de ensino sobre o tema. O livro ainda pode ser utilizado na disciplina história da matemática em cursos de licenciatura em matemática, pois traz informações históricas relevantes sobre o surgimento das geometrias não-euclidianas, a partir dos estudos sobre o quinto postulado de Euclides. Desse modo, classificamos essa produção em HEpM.

O livro intitulado Uma incursão em alguns tópicos da história da geometria (Figura 4), de autoria de Vincenzo Bongiovanni está organizado em quatro capítulos: exploração de algumas ideias de geometria projetiva, exploração da geometria hiperbólica em um ambiente informatizado, a geometria na Grécia antiga. Todos esses capítulos são independentes e em todos eles contêm referências e atividades.

Figura 4: Uma incursão em alguns tópicos da história da geometria

Fonte: SBHMat

O livro objetiva relacionar a história da matemática e as tecnologias de informação e comunicação (TIC). Assim o autor elabora uma história da geometria projetiva e hiperbólica com base no método de Arquimedes e nas Cônicas de Apolônio, e propõe atividades para o ensino de geometria analítica, pois ao analisarmos o livro percebemos conteúdos como: ponto, reta, plano, ângulo, cone, ponto médio, seguimento de reta e polígono inscrito, geometria projetiva, circunferência, circulo, elipse, hipérbole, parábola e cálculo do volume da esfera.

As atividades estão dispostas ao final de cada um dos capítulos abordados no livro e apresentam alguns elementos do contexto histórico. No primeiro capítulo são dispostas cinco atividades, três das quais apresentam pinturas antigas como elementos históricos e outras duas atividades apresentam desenhos ilustrativos. No segundo capitulo contém uma atividade que consiste em criar um menu hiperbólico fazendo-se uso do software cabri geomètre. Essa atividade consiste em relacionar a história da matemática e as TIC. O terceiro capítulo contém dez atividades, das quais duas relacionam-se ao cálculo do volume de uma semiesfera, na qual se apresentam algumas demonstrações envolvendo o teorema de cordas quebradas e as outras oito referem-se às cônicas.

A história elaborada por Bongiovanni e as atividades produzidas por ele, tem potencial de serem utilizadas na formação inicial e continuada de professores de matemática, pois, abordam temas específicos que podem ser trabalhados no ensino médio e no nível superior. Assim, classificamos essa produção em História para o ensino de Matemática, uma vez que o autor utiliza o contexto histórico desenvolvido conectando-as nas atividades propostas por ele.

Figura 5: Uma introdução para o estudo histórico da geometria analítica plana

Fonte: SBHMat

O livro uma introdução para o estudo histórico da geometria analítica plana de autoria de Mariana Feitero Cavalari e César Ricardo Peon Martins produzido para o IX SNHM no período de 17 a 20 de abril de 2011 ocorrido em Aracaju-SE. A obra está organizada em cinco capítulos: introdução, uma solução a história da geometria analítica, formação da geometria analítica, uma interpretação para as ideias que deram origem à geometria analítica, considerações finais, e a sua bibliografia.

Na introdução os autores citam o hábito de alunos e de alguns professores a conceberem os conteúdos de matemática como um conjunto de regras sem significados. Nesse sentido, advogam que uma abordagem histórica poderá atribuir princípios e significados para o ensino dessa disciplina. No segundo capítulo apresentam um panorama histórico da geometria analítica apontando que as primeiras ideias surgiram na Grécia antiga e se consolidaram na Europa no século XVII, apresenta ainda três históricos da geometria analítica, o nascimento, a formação e a consolidação. No terceiro capítulo são apresentadas a vida e obra dos principais colaboradores da criação da geometria analítica, Fermat com em sua obra introdução a lugares planos e sólidos (introduction aux Lieus Plans et Solids), e Descartes em sua obra (la géometre) sendo esse um dos três apêndices do discurso do método, Fermat por sua vez partia da equação e buscava encontrar o lugar geométrico, já Descartes delineava uma curva e buscava sua equação.

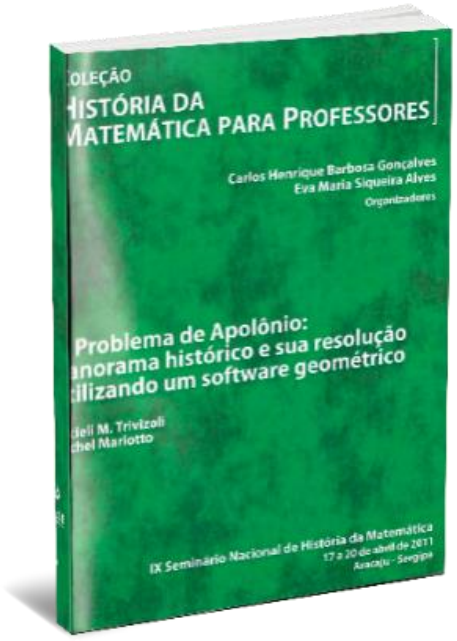
No terceiro capítulo os autores apresentam um bloco de atividades para mostrar como as ideias da geometria analítica foram concebidas. As atividades elaboradas foram baseadas nas ideias de Fermat, pois segundo os autores a obra de Descartes é de difícil compreensão pelo fato de ser necessário obter a percepção de onde a geometria foi escrita para demonstrar as aplicações do método racionalista de Descartes.

Dessa maneira os autores iniciam as atividades questionando de que maneira Fermat encontrava o lugar geométrico, e apresentam seu possível raciocínio para tal. Nas considerações finais os autores enfatizam seus objetivos que foram de apresentar uma introdução histórica a geometria analítica através das obras dos seus dois principais colaboradores para o seu desenvolvimento, onde demonstra o aspecto central desta área do conhecimento que era de estabelecer relações entre equações e curvas.

Assim, com base nas caracterizações estabelecidas, classificamos o livro em HEnM, uma vez que essa produção poderá ser utilizada para o ensino de matemática no nível médio e em cursos de graduação.

Livro produzido para o IX SNHM 2011 ocorrido no período de 17 a 20 de abril de 2011 ocorrido em Aracaju-SE, intitulado: Problema de Apolônio: Panorama histórico e sua resolução utilizando um software geométrico, autoria de Lucieli M. Trivizoli e Rachel Mariotto.

Figura 6: Problema de Apolônio: Panorama histórico e sua resolução utilizando um software geométrico



Fonte: SBHMat

O livro está organizado da seguinte forma; Introdução, Geometria e as construções geométricas, Como trabalhar com construções geométricas? Atividades, Apolônio: o grande geômetra, Os softwares geométricos Cabri geomètre II e geogebra, Resolvendo o problema de Apolônio e por fim as Referências.

Na introdução os autores mencionam a motivação pelo qual elaboraram este minicurso, onde foi com base nas experiências vivenciadas enquanto estagiárias docente durante o tempo que estavam em formação pós-graduada na disciplina desenho geométrico e geometria descritiva regidas pelo professor Sérgio Roberto Nobre. Ainda na introdução os autores apresentam seus objetivos que são de fornecer atividades que constituam e oriente o professor em suas aulas. A abordagem tratada no livro apresenta um percurso da resolução e o problema de Apolônio ao longo da história, sendo este um dos objetos para esse estudo.

No capítulo seguinte, as construções são apresentadas e realizadas com o auxílio de um software de geometria dinâmica, são eles: cabri geomètre II e o GeoGebra. Segundo os autores ao mencionarmos sobre as construções geométricas temos que compreender que os gregos da antiguidade faziam uso somente de régua não graduada e do compasso. Dessa

maneira, os autores justificam que as abordagens em que eles apresentam será na perspectiva destes instrumentos.

Em seguida, são apresentadas quatro definições três teoremas que objetivam em fixar algumas definições como por exemplo de lugar geométrico, reta tangente, e circunferências. No terceiro capítulo apresentado os autores apresentam de que maneira pode ser trabalhado as construções geométricas e de que modo elas podem contribuir para o desenvolvimento do aluno.

Logo em seguida os autores apresentam um esquema constituído em cinco etapas para auxiliar o entendimento do problema de Apolônio e a sua resolução; 1- Imaginar uma solução, 2- Pensar nas propriedades que envolvem as soluções, 3- Verificar como pode ser feita a construção (passos), 4- Realizar a construção, 5- Validar a construção (demonstração), dessa maneira, (TRIVIZOLI; MARIOTTO, 2011) apresentam um exemplo utilizando o esquema descrito por elas. Em relação as atividades, os autores propõem onze atividades nos quais orientam a escrever, realizar e demonstrar cada construções geométricas a partir do esquema mencionado.

No quinto capítulo, é apresentado um panorama histórico da vida e obra de Apolônio, embora os autores mencionarem que pouco se sabe da vida deste matemático, já que a maioria de suas obras desapareceram. Em relação a suas contribuições Apolônio foi o que mais detém estudos das seções cônicas. O problema de Apolônio envolve dez casos nos quais são apresentadas possíveis resoluções com o uso de apenas régua não graduada e de um compasso.

Em relação ao sexto capítulo são apresentados os softwares de geometria dinâmica; cabri geomètre II e geogebra, segundo os autores a manipulação deste software permitiria validar alguns aspectos no qual a régua e o compasso não pode nos oferecer. Para o sétimo capítulo (TRIVIZOLI; MARIOTTO, 2011) propõem que o leitor tente solucionar o problema de Apolônio e suas variações enfatizando que nem todas são possíveis ser solucionadas, apontam ainda que o grau de complexidade das construções geométricas pode tornar um desafio para a realização com régua não graduada e com o compasso.

De acordo com a proposta elaborada pelos os autores de apresentar atividades norteado a partir do esquema mencionado para sua resolução com relação ao problema de Apolônio com auxilio de dois softwares para contribuírem e potencializarem o ensino de acordo com os aspectos históricos estabelecidos pelos autores, foi possivel classificar o livro como HEnM.

Algumas reflexões

Antes de tecer as reflexões, esclareceço ainda que a pesquisa não foi desenvolvida com o intuito de criticar a produção identificada para essa investigação, como já mencionado anteriormente não são objetivos classificar tais produções como boas ou ruins, mas sim de verificar quais das pesquisas tem potencias para subsidiar o ensino de geometria analítica em sala de aula tanto quanto para a formação inicial e continuada do professor.

Dessa forma podemos observar que todos os livros de Mnicursos publicados nos Seminário Nacional de História da Matemática contém potencial para o ensino de matemática seja para ensino fundamental, médio ou superior. De forma direta, ou seja, os livros que delineiam em seus objetivos o desenvolvimento para sala de aula bem como para

formação de professores representam 47% das produções mencionadas e 53% apresentam de forma indireta subsidios para o ensino, essas produções expressadas como indiretas não devem ser descartadas pois elas fornecem ao professor a compreensão do desenvolvimento epistemológico de tópicos de matemáticos e assim contribui para sua formação.

Em relação ao livros de geometria analítca os conteúdos explorados são multiplos, perpassa pelo ensino das cônicas, lugar geométrico, equação da circunferença e cálculo do volume da esfera, conteudos esses que estão no curriculo do ensino médio.

Desse modo com os resultados parciais obtidos neste estudo, as informações históricas nos livros apresentados é possivel fornecer encaminhamentos para o ensino de alguns tópicos da geometria analítica tanto quanto para formação de professores seja ela inicial ou continuada, esses livros evidenciam implicitamente e explicitamente potenciais conceituais e didaticos para o ensino da Geometria Analítica.

Em relação a indagação inicial foi possível observar que as pesquisas relacionadas à história da geometria analítica nos minicursos nos SNHM ainda são incipientes, uma vez que dos 101 livros produzidos, somente seis focalizaram, de alguma forma, o conteúdo de geometria analítica. Isto porque desses seis livros, somente quatro fornecem concretamente, subsídios para o ensino de geometria analítica. Por um lado, as duas produções classificadas como HEpM fornecem subsídios conceituais inerentes ao ensino desta geometria se o professor explorar criativamente essas produções para atender seus objetivos de ensino. Por outro lado, essas pesquisas fornecem subsídios para a formação do professor de matemática pois as produções contêm aspectos históricos para se ampliar os conceitos referentes à geometria analítica.

É perceptível ainda que as produções de geometria nos livros têm a tendência de produções em geometria euclidiana plana, sendo pouco exploradas a geometria espacial e analítica, essa última com 22% das produções nos livros.

Embora algumas dessas produções não proponham diretamente o uso da história da matemática, as abordagens utilizadas pelos autores suscitaram contribuições para o ensino desse conteúdo. Na pesquisa de Bongiovanni, por exemplo, há atividades para o ensino do tema em conexão com o uso das TIC. Assim os resultados obtidos apresentam novos caminhos para o ensino da disciplina, sabemos que não é uma tarefa fácil.

Contudo, ao empreender ações como essas em sala de aula, o trabalho do professor poderá ser gratificante quando os resultados surgirem, reiterando, então a potencialidade do uso da História da Matemática no ensino, como um empreendimento didático capaz de ampliar o desenvolvimento conceitual e metacognivo dos estudantes em matemática.

Agradecimentos

Este artigo foi realizado com o apoio da *Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior* - Brasil (CAPES) e se classifica como uma produção gerada nos projetos de pesquisas vinculados a programas de pós-graduação em níveis de mestrado e doutorado. Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela concessão de uma bolsa de estudos para fomento de meus estudos na Pós-Graduação em Educação Matemática. Ao professor Dr. Iran Abreu Mendes, por ter dado a oportunidade de fazer parte como membro auxiliar de seus dois projetos de pesquisa aprovados, certificados e financiados pelo CNPq.

Referências

ANDRADE, Érico. Ontologia e representação matemática em Descartes a construção de figuras na geometria analítica. Belém – PA, SBHMat (preprint), 2009.

BONGIOVANNI, Vincenzo. Uma Incursão em alguns tópicos da história da Geometria. Belém – PA, SBHMat (preprint), 2009.

CAVALARI, M. F. MARTINS. C. R. P. Uma introdução para o estudo histórico da Geometria Analítica Plana. Aracajú – SE, SBHMat (preprint)¸2011.

GREBOT, Guy. Introdução às Cônicas. Brasília – DF, SBHMat (preprint). 2005.

MENDES, Iran Abreu. Cartografias da produção em História da Matemática no Brasil: um estudo centrado nas dissertações e teses defendidas entre 1990-2010. Relatório de Pesquisa (Bolsa produtividade CNPq). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014

MENDES, Iran Abreu. História para o ensino da matemática: uma reinvenção didática para sala de aula. Revista COCAR. Belém. Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual do Pará. Ed. Especial, n3, p.145- 166 – Jan/Jul.2017.

MENDES, Iran Abreu. História da matemática no ensino: entre trajetórias profissionais, epistemologias e pesquisas. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

NOBRE, Sérgio. Introdução Histórica às Geometrias Não – Euclidianas: uma Proposta Pedagógicas. Belém – PA, SBHMat (preprint), 2009.

TRIVIZOLI, Lucieli M., MARIOTTO, Rachel. O Problema de Apolônio: panorama histórico e sua resolução utilizando um software geométrico. Aracajú – SE, SBHMat (preprint)¸2011.

NOBRE, Sergio Roberto. Ubiratan D'Ambrosio e o movimento científico e institucional da história da matemática no Brasil. In: VALENTE, Wagner (Org.). Ubiratan D' Ambrosio: Conversas - Memórias - Vida Acadêmica - Orientandos - Educação Matemática - Etnomatemática - História da Matemática - Inventário Sumário do Arquivo Pessoal. São Paulo: Annablume, 2007

MENDES, Iran Abreu; CHAQUIAM, Miguel. História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores. SBHMat, Belém-PA. 2016

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. História na educação matemática: proposta e desafios. 1ed. 2° reim. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. (Coleção tendência em educação matemática).

Rubens Matheus dos Santos Marques
Universidade Federal do Pará
E-mail: rubensmatheus@uft.edu.br
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8289-4567

***Recebido**: 19/09/2019*
***Aprovdo**: 30/11/2019*