APRENDIZAGEM GEOMÉTRICA E SEMIÓTICA NA MATEMATIZAÇÃO COM GEOGEBRA: O CASO DO VIRABREQUIM

GEOMETRIC AND SEMIOTIC LEARNING IN MATHEMATIZATION WITH GEOGEBRA: THE CASE OF CRANKSHAFT

Ivonne C. Sánchez S.
Universidade Federal do Pará (UFPA)

João Cláudio Brandemberg Quaresma
Universidade Federal do Pará (UFPA)

RESUMO

Este artigo apresenta resultados parciais de uma pesquisa em andamento, intitulada "Aprendizagem geométrica em torno de ideais presentes na simulação de um motor a dois tempos no Geogebra: um estudo de caso". Desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará (UFPA). A presente pesquisa tem interesse na aprendizagem geométrica manifestada por um grupo de estudantes da licenciatura integrada em Ciências, Matemática e Idiomas nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental do Instituto em Educação Matemática e Cientifica (IEMCI) e três professores de matemática que participam nas atividades de simulação com Geogebra. Especificamente, nas atividades do momento de matematização feito em torno do virabrequim de um motor a dois tempos. A partir da Teoria da Objetivação, contamos com a noção de aprendizagem em termos de processos Objetivação dos saberes geométricos para descrever como um aluno e dois professores reconhecem objetos geométricos em um desenho do virabrequim para ser construído no Geogebra. Os dados da pesquisa provêm das gravações realizadas nas sessões de trabalho com os alunos e professores quando estas desenvolviam as atividades, particularmente no momento da matematização. Realizamos uma análise multi-semiótica das informações obtidas a partir das transcrições feitas das gravações. Os resultados focam como os alunos movilizam meios semióticos de objetivação para expressar e moldar as ideias geométricas, o qual da conta da aprendizagem deles durante a atividade.

Palavras-chave: Aprendizagem geométrica; Matematização; Processos de objetivação; Geogebra; Análise multi-semiótica.

ABSTRACT

This paper presents partial results from ongoing research entitled "Geometric learning around ideals present in the simulation of a two-stroke engine in Geogebra: a case study". Developed in the Graduate Program in Education in Science and Mathematics of the Federal University of Pará (UFPA). This research has interest in geometric learning manifested by a group of undergraduate students in Science, Mathematics and Languages in the Early Years of the Elementary School of the Institute in Mathematical and Scientific Education (IEMCI) and three mathematics teachers who participate in simulation activities with Geogebra. Specifically, in the activities of the moment of mathematization done around the crankshaft of a two stroke engine. From the Objectification Theory, we rely on the notion of learning in terms of processes Objectification of geometric knowledge to describe how a student and

two teachers recognize geometric objects in a crankshaft design to be constructed in Geogebra. The research data come from the recordings made in the working sessions with the students and teachers when they performed the activities, particularly at the time of mathematization. We performed a multi-semiotic analysis of the information obtained from the transcriptions made from the recordings. The results focus on how students move semiotic means of objectification to express and shape geometric ideas, which account for their learning during the activity.
Keywords: Geometric learning; Mathematization; Objectification processes; Geogebra; Multi-semiotic analysis.

Introdução

A aprendizagem matemática é um fenômeno educacional cuja caracterização depende da perspectiva teórica com a qual ela decide ser analisada. Uma perspectiva teórica que teve uma grande influência no modo de compreender a aprendizagem matemática desde o final do século XX é o construtivismo. Porém, ao longo dos anos, novas perspectivas de aprendizagem foram desenvolvidas para responder à necessidade de integrar esses aspectos sociais, culturais e históricos na aprendizagem dos alunos. Uma dessas perspectivas é a sociocultural, que se caracteriza, por um lado, porque o conhecimento é gerado pelos indivíduos no decorrer das práticas sociais que são consubstanciais na história e na cultura.

Um exemplo dessas perspectivas socioculturais que permitiram uma evolução da educação matemática, é a teoria histórico-cultural do ensino e aprendizagem da matemática chamada Teoria da Objetivação, criada pelo professor Luis Radford (RADFORD, 2006, 2013), com base em uma concepção social de aprendizagem, na qual capacidades intelectuais são formadas enquanto se aprende a relacionar-se com outros indivíduos, isto é, capacidades humanas são formadas.

Além disso, defende uma concepção não-mentalista do pensamento, na qual ela pode ser observada, uma vez que ela emerge através de gestos, movimento do corpo, atividade perceptiva, artefatos e signos usados pelos indivíduos e não como algo inobservável, isso só acontece no plano mental.

A partir dessa perspectiva, o pensamento é enquadrado por significados culturais que orientam a atividade dos indivíduos e dão a eles uma certa forma. Forma que se reflete na maneira de demonstrar, argumentar e resolver problemas, pois tem significados históricos culturais que a precedem, isto é, essa forma de atividade é subtendida por uma superestrutura simbólica que tem sido chamada de meios semióticos. Esses meios ajudam a entender as concepções de objetos matemáticos, sua existência, a relação com o mundo concreto e os padrões sociais de produção de significados culturais (RADFORD, 2006).

Recentemente, a perspectiva sociocultural tem animado o debate sobre o papel desempenhado pelo trabalho humano no desenvolvimento de modos histórico-culturais de produção do conhecimento matemático, independentemente das condições institucionais que cercam a atividade. Nessa perspectiva, a atividade escolar formal e não formal, como a elaboração de simuladores com o GeoGebra (PRIETO; ORTIZ, 2019), passa a ser vista como uma instância social de encontro com o conhecimento escolar e posicionamento crítico diante deles.

Embora a alienação nunca tenha sido o objetivo do ESG, consideramos importante evitá-lo tanto quanto possível e, para isso, é necessário realizar estudos que nos permitam ampliar nossa compreensão das implicações do ESG na aprendizagem geométrica dos alunos participantes na atividade. Assumir uma perspectiva sociocultural para isso implica dar atenção especial ao papel da cultura na produção do conhecimento matemático escolar, isto é, à maneira como professores e alunos pensam e agem juntos no que diz respeito ao conhecimento matemático, utilizando uma série de recursos semióticos organizados na cultura escolar.

Nesse sentido, o objetivo deste trabalho é descrever a aprendizagem geométrica que ocorre nas atividades de matematização de um motor de duas madeiras virabrinquina com o GeoGebra, realizado por um grupo de estudantes de graduação e três professores. Nossa intenção é contribuir com informações que sejam benéficas para os professores que vêem no ESG uma oportunidade para a promoção da aprendizagem matemática.

Marco Teórico

Em nosso trabalho, contamos com uma perspectiva histórico-cultural da aprendizagem matemática, expressa na Teoria da Objetivação (TO) de Luis Radford (2006; 2014), para interpretar a aprendizagem geométrica produzida nas atividades de matematização realizadas pelos alunos de graduação e professores que participam do desenvolvimento de um simulador com o GeoGebra.

A Teoria da Objetivação (TO) emergiu como uma resposta à necessidade de repensar o ensino e a aprendizagem da matemática em termos diferentes daqueles propostos pelas teorias individualistas, cujo propósito fundamental era a transmissão do conhecimento, essa perspectiva dominando a educação matemática até a década de 1990 (RADFORD, 2014).

Radford (2006) argumenta que a aprendizagem "não consiste em construir ou reconstruir conhecimento. Trata-se de dar sentido aos objetos conceituais que o aluno encontra em sua cultura" (p. 113). A aquisição de conhecimento faria, então, um processo social, sensível e material teorizado na TO como uma objetivação na qual "o estudante alcança um entendimento crítico, através da dotação de significados, objetos culturais matemáticos e a lógica cultural destes "(RADFORD, 2011, p.45).

O professor Luis Radford argumenta que, se as teorias da educação matemática buscam oferecer explicações adequadas sobre a aprendizagem, elas devem primeiro esclarecer o que entendem por saber e conhecimento. De fato, a aprendizagem é sempre relativa a alguma coisa (por exemplo, a aprendizagem de probabilidade, das propriedades geométricas das figuras etc.). Como resultado, não podemos entender a aprendizagem se falharmos em dar uma explicação satisfatória sobre o objeto da aprendizagem e a natureza desse objeto (RADFORD, 2017).

Na teoria da objetivação, o saber é concebido como uma entidade geral que, ontologicamente falando, já está na cultura quando nascemos. O saber está composto de arquétipos histórica e culturalmente constituídos de pensamento, reflexão e ação. Na TO, o saber é *potencialidade*. O saber algébrico, por exemplo, é um potencial incorporado à cultura: possibilidades oferecidas aos indivíduos para pensar, refletir, colocar e resolver problemas de uma certa maneira. Para esclarecer melhor as ideias, vamos definir o saber da seguinte forma: o saber é um sistema codificado de processos corporais, sensíveis e atitudinais de ação e reflexão, constituídos histórica e culturalmente (RADFORD, 2017).

Os adjetivos corporais, sensíveis e materiais mencionados na definição anterior significam que os processos de ação a que nos referimos não são cogitações mentais que ocorrem dentro da cabeça, mas ações de indivíduos específicos que agem e vivem no mundo social e cultural. Essas ações são constituídas através do corpo, dos sentidos humanos e do uso de objetos físicos e artefatos culturais.

A partir da teoria da objetivação, o conhecimento é concebido como a atualização ou materialização do saber. Ou seja, para que ela surja na existência (é uma mera possibilidade), o saber precisa-se materializar através de um processo de atualização.

Devemos ter em mente que afirmar que o saber é algo geral significa que o conhecimento não pode ser identificado com nenhuma de suas materializações ou atualizações. É afirmar o que dissemos antes: que o saber é pura possibilidade. A possibilidade de encontrar uma propriedade das sequências aritméticas ou o termo 100 em uma determinada sequência. Esse processo pelo qual o saber é atualizado é a atividade: para se materializar, o saber precisa se mostrar na atividade pela qual adquire seu conteúdo (RADFORD, 2018). Nas palavras de Radford, o geral (saber) não tem o poder de aparecer por si mesmo. É importante mencionar que a atividade imprime sua marca na atualização do conhecimento.

A atualização do saber é, como mencionado anteriormente, o conhecimento. Em outras palavras, o conhecimento é o conteúdo conceitual concreto no qual o saber é manifestado ou atualizado ou materializado ou corporificado. Seu conteúdo conceitual aparece apenas em uma atividade que é mediada por alguns meios e imprime sua própria marca, ou seja, a atividade demarca o modo pelo qual o saber se manifesta no conhecimento.

A relação entre saber, atividade e conhecimento pode ser vista da seguinte forma: o conhecimento é uma maneira do saber: uma de suas formas desenvolvidas de forma única. Essa forma desenvolvida que a atividade mediadora possibilita, coloca o saber em movimento e o atualiza ou materializa.

Em oposição ao paradigma individualista, a TO propõe uma reconceptualização da aprendizagem matemática, não como resultado da ação do sujeito que constrói seu próprio conhecimento, mas como "um processo coletivo, cultural e historicamente situado que destaca o papel do trabalho social humano, o corpo, as emoções e o mundo material. " (Radford, 2018). Para a TO, a aprendizagem tem que ver com o saber escolar matemático, mas também com aqueles seres que transformam e reafirmam como sujeitos da educação na busca por esse conhecimento. Radford (2018) refere-se ao conhecimento matemático como arquétipos de pensamento, reflexão e ação constituídos histórica e culturalmente.

Para estudar a aprendizagem matemática, a TO introduz duas categorias conceituais na forma de processos de objetivação e subjetivação. Enquanto os processos de objetivação dão conta da maneira pela qual o saber aparece na aprendizagem, os processos de subjetivação têm a ver com o sujeito da aprendizagem e suas formas de colaboração.

A objetivação é justamente esse processo social, corporal, material e simbólico que implica "tornar-nos, progressiva e criticamente, conscientes de uma forma codificada de pensamento e ação - algo que notamos gradualmente e ao mesmo tempo adquire significado, por meio de nossa atividade corporal, sensorial e artefato” (RADFORD, 2017, p. 121). A TO coloca no centro de sua abordagem ao conceito de *atividade*, entendido como "um evento criado por uma busca comum, ou seja, uma busca que é, ao mesmo tempo, cognitiva, emocional e ética" (RADFORD, 2017, p.125).

Um dos pontos importantes da atividade é que ela é *essencialmente social*. Essa característica social não desaparece quando trabalhamos sozinhos (por exemplo, quando um aluno resolve tarefas de construção). Você pode estar fisicamente sozinho, mas estamos recorrendo a recursos históricos, culturais e sociais (computador, calculadora, lápis, linguagem, escrita, etc.), que tornam a atividade uma atividade social. Na TO esses sinais e artefatos são chamados de *meios semióticos de objetivação* (RADFORD, 2003, p.41).

Nos processos de objetivação, os alunos e o professor recorrem ao corpo, a sinais, artefatos e gestos para fazer o objeto aparecer e atingir formas relativamente estáveis de consciência dos significados culturais com os quais foram dotados, uma vez que os objetos não eles podem ser totalmente expostos no mundo concreto.

Na teoria da objetivação o que torna possível a aprendizagem é uma atividade humana, sensual e prática. Neste sentido o conceito de atividade proposto a partir da TO abrange muito mais do que pessoas interagindo umas com as outras. É mais do que um meio de interação com pessoas e artefatos. É um modo de vida, algo orgânico e sistêmico, um evento criado por uma pesquisa comum - ou seja, uma pesquisa com outras pessoas - da solução para um problema colocado, uma pesquisa cognitiva, emocional e ética.

Considerando as ideias teóricas anteriores, definimos a Elaboração de Simuladores com GeoGebra (ESG) como um contexto em que várias atividades ocorrem criadas pela necessidade de promover a aprendizagem geométrica dos alunos participantes dessa atividade e motivadas por a produção de *desenhos dinâmicos* com o software GeoGebra.

Um desenho dinâmico é um desenho geométrico produzido por meio de software dinâmico, de forma a preservar as propriedades espaciais que lhe foram impostas quando é movido ou arrastado por qualquer um de seus elementos livres (LABORDE, 1997). Concordamos em chamar o conjunto de desenhos dinâmicos simulados com o GeoGebra, criado com o software GeoGebra, que nos permite modelar ou representar esse fenômeno da realidade de interesse dos alunos.

Para produzir desenhos dinâmicos, alunos e professores devem passar por várias atividades no momento da *matematização*. Entendendo isso como aquele momento em que os sujeitos reconhecem em um esboço objetos geométricos que dão "sentido matemático" às formas e movimentos da peça que eles decidiram representar com o GeoGebra. Cada um dos objetos geométricos que são evocados durante uma matematização "modela" algum aspecto do fenômeno que foi selecionado.

Para alcançar o que precede, alunos e professores devem realizar as seguintes atividades: (i) desenhar um esboço da primeira parte selecionada do fenômeno, (ii) identificar objetos geométricos nesse esboço, (iii) estabelecer uma sequência de tarefas de construção para esses objetos e (iii) execute novamente as ações para a próxima peça escolhida.

Marco Metodológico

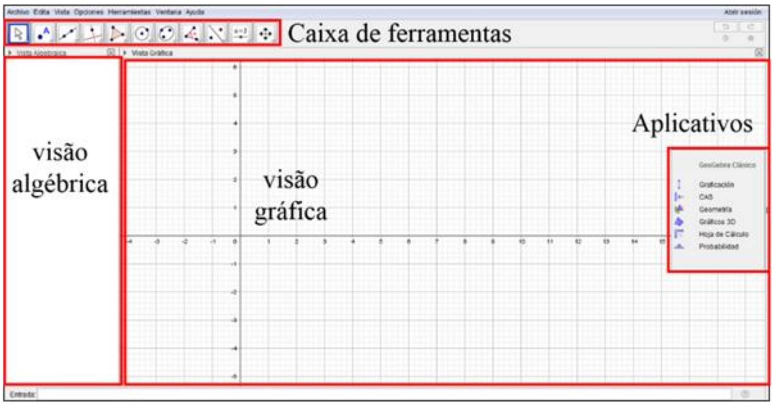
Adotou-se a metodologia de pesquisa qualitativa, do tipo descritivo-interpretativa, com um método de estudo de caso, que foi desenhado para realizar uma análise dos processos de objetivação do conhecimento geométrico. A presente investigação é realizada em um contexto sociocultural específico, no qual são considerados os modos e meios semióticos de objetivação utilizados pelos alunos e o professor na resolução de tarefas no momento da matematização da ESG.

1. Participantes e contexto

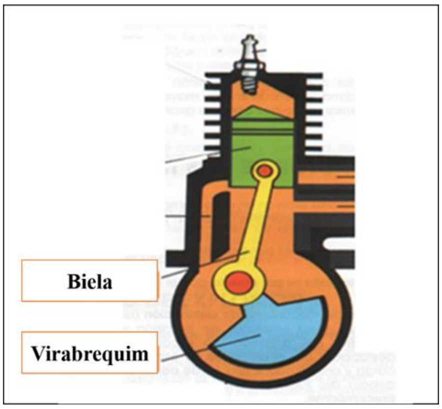
Os participantes desta pesquisa foram 14 alunos da graduação da licenciatura integrada de Ciências, Matemática e Línguas nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental do Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI), que participaram da disciplina Tendências de pesquisa em Educação em Ciências, Matemática e Linguagens I do terceiro período. Em algumas aulas dessa disciplina, os alunos participaram na atividade chamada "Construção de desenhos dinâmicos com o Geogebra" realizada nos meses de maio e junho do ano de 2019. Para manter o anonimato dos participantes da pesquisa, os alunos serão chamados com o acrônimo E, seguido de um número e dos professores participantes, como professores com um número ao lado deles.

Durante essas reuniões da oficina, foram realizadas 4 atividades. A primeira sessão com os alunos, teve como objetivo familiarizar os jovens com a atividade de simuladores com Geogebra. Com isto queremos dizer que esta sessão consistiu em apresentar os processos matemáticos associados à resolução da simulação, isto é, explique cada momento pelo qual os alunos passarão para elaborar o simulador computacional.

Em seguida, foi feita uma primeira abordagem ao software Geogebra, onde foram anunciados os pontos mais importantes, quem foi o criador, a comunidade que o acompanha e os materiais disponíveis para uso nas salas de aula. A seguir, foram apresentadas aos alunos a interface do Geogebra, as áreas que o compõem e as caixas de ferramentas de construção que o software pode disponibilizar aos usuários.



A segunda e terceira sessão de trabalho estavam diretamente relacionadas ao desenvolvimento de simuladores com o Geogebra. Por razões de tempo, o fenômeno foi selecionado pela pessoa responsável pela oficina. Este foi um motor de dois tempos. Depois de todas as informações sobre o fenômeno, os alunos simularam o virabrequim na visualização gráfica do Geogebra (veja imagem 2).



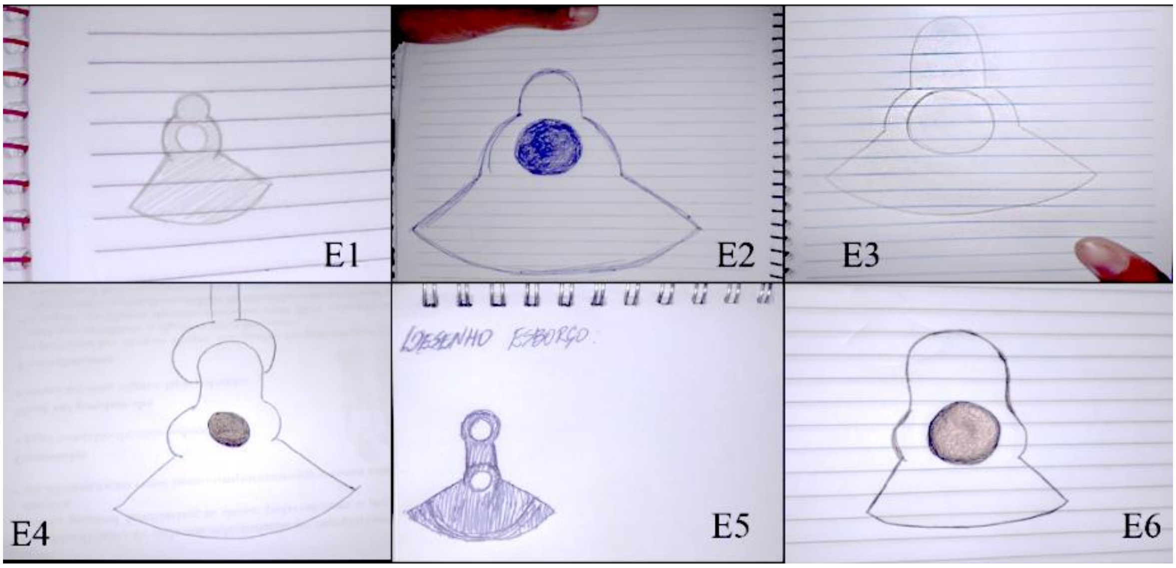
Seleção das peças para simular o motor a dois tempos

Depois que as imagens do fenômeno do motor de dois tempos foram mostradas aos alunos, o que se seguiu no escritório foi discutir o número de objetos que serem representados no Geogebra. Para fazer isso, há uma discussão entre os alunos e o professor sobre as partes do mecanismo de dois tempos que tiveram movimento. O interesse por essas partes reside no fato de que as peças que possuem movimento seriam as primeiras a serem construídas no Geogebra com a ajuda da teoria geométrica e das ferramentas de software.

Identificadas as peças que serem simuladas, a discussão que se seguiu foi sobre o estabelecimento de uma ordem de construção no Geogebra. O professor 2 considera que, para tomar uma decisão, é conveniente considerar que existem três das peças selecionadas que estão conectados um ao outro, enquanto a quarta peça é independente. Sua explicação mostra que pode ser conveniente iniciar a simulação por uma dessas três peças que estão conectadas.

Após essa discussão, foi alcançada a sequência para a construção desses objetos na visualização gráfica do software. Foi então decidido construir o virabrequim primeiro, depois a vieira, depois o pistão e, finalmente, seria a válvula de admissão. Para levar a atenção agora apenas no virabrequim, os professores pediram aos alunos que fizessem em seus cadernos um desenho à mão livre desta peça o mais semelhante possível. Os desenhos feitos pelos alunos são mostrados abaixo.

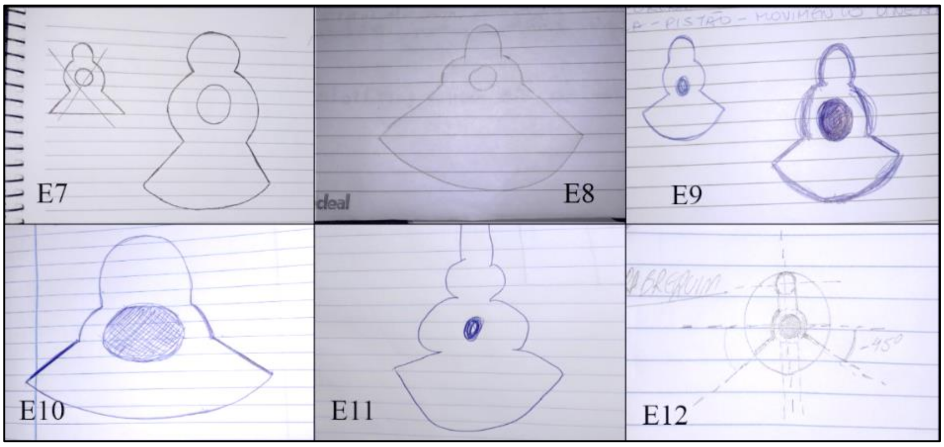
Figura 3. Desenho do virabrequim pelos alunos



Fonte. Elaborada pela autora

A figura a seguir mostra os esboços do virabrequim desenhados por outros estudantes.

Figura 4. Desenho do virabrequim pelos alunos

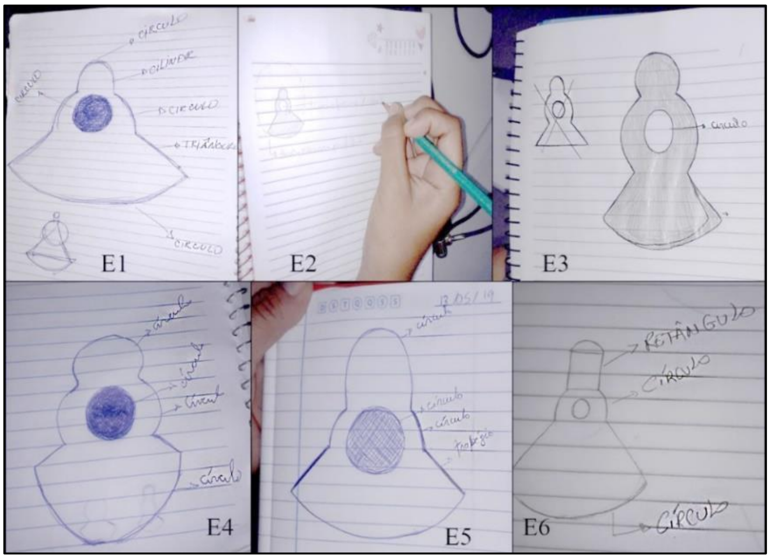


Fonte: elaborada pela autora

Depois de fazer o desenho da peça de virabrequim no caderno, alguns imediatamente identificaram nela os objetos geométricos que poderiam representar melhor cada parte do esboço. Para fazer isso, alguns tiveram que refinar os olhos no desenho. Como mostra a Figura 5, alguns deles conseguiram identificar mais de dois objetos geométricos para representar a peça no Geogebra (veja E1, E4 e E5).

Nos casos E2, E3 e E6, alguns conseguiram identificar apenas dois objetos geométricos, isso pode acontecer, por um lado, o pouco conhecimento sobre geometria euclidiana e um pouco de visualização para associar as formas do esboço a algum objeto geométrico. O que representa um obstáculo para a representação do virabrequim no Geogebra. Devido ao exposto, o Professor 2 segue conduzindo uma discussão com os alunos presentes para chegar a um acordo sobre os objetos geométricos a serem construídos no Geogebra para representar o Virabrequim.

Figura 5. Objetos geométricos identificados no desenho pelos alunos



Fonte: elaborada pela autora

4.2. Coleta de informações

Os dados do estudo vêm da discussão gerada pelos participantes sobre a construção de virabrequim no Geogebra. Esta discussão foi gravada com uma câmera de vídeo, com o objetivo de captar a realidade natural e complexa do trabalho conjunto realizado pelos participantes, ao passar pelo "matematização" descrito nas seções anteriores.

No vídeo, se pode ver os recursos semióticos que os participantes usam para comunicar suas ideias. O vídeo foi transcrito na íntegra em formato Word, utilizando um instrumento semelhante ao apresentado na Tabela 1. A tabela a seguir mostra um exemplo de como as informações dos vídeos gravados das sessões de trabalho foram transcritas.

Tabela 1. Instrumento para a transcrição de episódios

Momento. No.: 1
Número do vídeo: 1
Linhas: (1-8)
Discussão: Seleção das peças que têm movimento no fenômeno

No. Linha	Conteúdo da transcrição
1	Professor 1: quantas peças [quem tem movimento] vocês reconhecem ali [no quadro]? Comparando as duas imagens [mostrado no quadro].
2	E1: o pistão.
3	Professor 1: Qual seria o pistão? Poderia acontecer e sinalizar para seus companheiros de equipe reconhecê-lo.
4	E1: para mim seria essa parte daqui [move a mão para cima e para baixo verticalmente (veja a Figura 31)]. Figura 6. Gestos de um aluno para explicar o movimento da peça  Fonte: elaborada pela autora (2019)
5	Professor 1: é este aqui [aponta para uma parte do quadro].
6	E1: isso.
7	Professor 2: esse é o pistom.
8	E1: para mi seria o pistom.

4.3. Análise das informações

A análise dos dados foi realizada em etapas. Na etapa 1, fizemos uma primeira leitura das transcrições com o objetivo de identificar, discutir e descrever o processo de matematização do virabrequim por alunos e professores (Tabela 1). O objetivo desta etapa foi reconhecer as particularidades do trabalho geométrico realizado durante todo o processo mencionado, especialmente o conteúdo geométrico que foi mobilizado nessa atividade.

Na segunda etapa, entramos em contato com os dados coletados. A esse respeito, fizemos um tour pelas transcrições para detectar fragmentos da discussão dos participantes que pareciam mostrar evidências da consciência de algum objeto geométrico subjacente na matematização. Cada fragmento é um segmento proeminente (RADFORD, 2015, p. 561) que reflete um momento particular na matematização do virabrequim. Para identificar os segmentos, focamos a atenção nas mudanças de foco ao longo da discussão, considerando os objetos geométricos que identificaram os participantes.

Na terceira etapa, realizamos uma análise multi-semiótica (RADFORD, 2015; SABENA; ROBUTTI; FERRARA; ARZARELLO, 2012), a fim de identificar nos segmentos a variedade de significados e meios semióticos desempenhados pelos participantes durante o trabalho de matematização. Assumindo que a cognição tem uma natureza multimodal (ARZARELLO, 2006; MANGHI, 2011; RADFORD; EDWARDS; ARZARELLO, 2009), focamos na maneira como os participantes combinaram diferentes signos e artefatos para tentar tornar aparente os objetos geométricos que podem representar a parte do fenômeno a ser simulada.

Chamamos o *nó semiótico* a cada forma em que os participantes combinaram diferentes meios semióticos para alcançar um estado mais ou menos estável de consciência sobre algum objeto geométrico. Radford (2003) define os nós semióticos como "pedaços da atividade semiótica do aluno, onde ação, gestos e palavras trabalham juntos para alcançar a objetivação do conhecimento" (p 56).

Resultados

A análise dos dados tornou possível detectar segmentos importantes que perceberam como os professores, apoiados por uma variedade de meios semióticos de objetivação, ajudavam os alunos a selecionar os objetos geométricos que poderiam representar melhor a virabrequim no Geogebra. No total, existem três nós semióticos que respondem por diferentes objetos geométricos que surgiram durante o trabalho conjunto.

Nó 1. A ideia de círculo

O trabalho continua e a discussão para esse momento gira em torno da ideia de um círculo e da representação desse objeto geométrico em um plano de duas dimensões e três dimensões. O professor 1, por meio do discurso oral, reconhece que, devido à maneira como uma grande parte do esboço pode ser representada usando um círculo, é necessário que todos os alunos concordem com seus outros dois parceiros que já participaram.

Para fazer isso, o Professor 1 pergunta aos alunos se essa parte do esboço pode ser representada como um círculo, para que eles associem parte da forma do esboço à forma do círculo. No começo, todos pareciam concordar, no entanto, a participação do E3 deixa clara a dúvida que ele tem sobre a representação geométrica de dois objetos geométricos, referindo-se a que parte do esboço pode ser desenhada como uma esfera, porque está cheia e não com um circo.

Todos na sala compreendem a confusão que E3 apresenta naquele momento e é a participação de E2 que, através de seu discurso oral, faz com que E3 toma consciência que os objetos geométricos que estão sendo usados para representar a virabrequim estão no plano. Ou seja, você tem duas dimensões que são mostradas na imagem de referência. Portanto, não se pode dizer que uma parte desta peça será representada como um objeto de três dimensões, como a esfera, e é por isso que o objeto geométrico mais relevante a ser utilizado é o círculo. E2 é mais específico, mesmo quando comunica que são necessários dois círculos para representar essa parte do virabrequim.

> 71. Professor 1: Se continuarmos subindo no desenho, o que se segue é um círculo [Figura 8a].
> 72. E4: sim
> 73. Professor1: Todos nós concordamos?
> 74. Todos: dá certo.
> 75. E3: na verdade, essa parte preta pode ser uma esfera porque está cheia
> 76. E2: não, não é uma esfera porque estamos com figuras planas. É um círculo e um círculo [Figura 8b].
> 77. E3: mmm, é verdade, você está certo
> 78. Professor 1. É verdade, então teremos que representar dois círculos. Se continuarmos com o desenho, o E3 disse que poderia ser representado com um quadrado. Se olharmos novamente para a imagem de referência, ela pode ser um quadrado ou um retângulo.

Figura 6. Discutir a representação do círculo como a melhor opção para representar uma parte do desenho

Fonte: elaborada pela autora (2019)

Nó 2. A ideia do retângulo

Neste momento da discussão, o trabalho é direcionado ao reconhecimento do retângulo no esboço. Contudo, o desenho feito no quadro não foi muito útil para indicar qual figura geométrica usar, se o retângulo quadrado ou um, de modo que o professor 1 pergunta aos outros alunos qual deve ser o objeto que deve ser representado na figura. Geogebra E5 responde imediatamente usando um discurso oral que, para ele, é um retângulo, pois, olhando a imagem de referência (e não o esboço feito), dois dos lados são mais longos que os outros dois.

A explicação de E5 parece ser suficiente para que seus pares tomem consciência dessa identificação de um dos elementos que define um retângulo e, portanto, é a figura que deve ser representada quando E8 participa da discussão que concorda com E5 sobre representa essa parte do esboço com um retângulo

> *78. Professor 1:* Se olharmos novamente para a imagem de referência, ela pode ser um quadrado ou um retângulo.
> *79. E5:* Eu acho que é um retângulo e não um quadrado
> *80. Professo1:* Por que você acha que é um retângulo?
> *81. E5:* O quadrado tem todos os seus lados iguais, enquanto o retângulo tem apenas os lados opostos. Se olharmos para a imagem de referência, existem dois lados um pouco mais longos que os outros dois, então é um retângulo.
> *82. E6:* É verdade, apenas que o desenho não pode ser visto bem porque é muito pequeno, mas se vemos a imagem de referência, é um retângulo [o que temos que construir]
> *83. Professor 1:* Então, ficamos com [construir] um retângulo.
> *84. Todos:* sim.

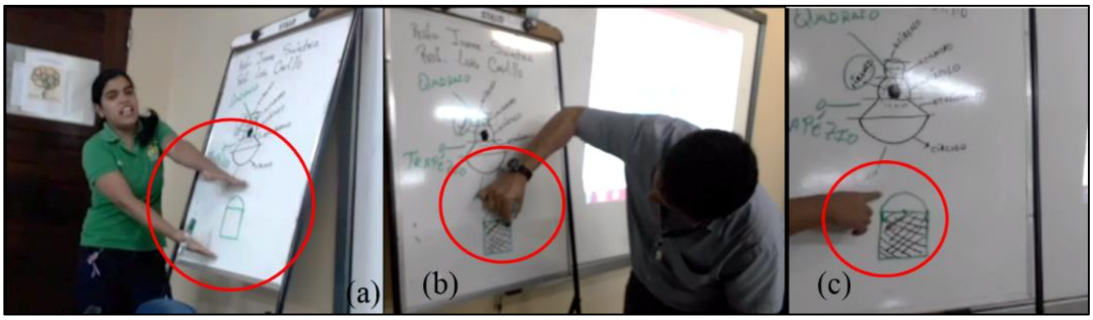
Nó 3. A ideia do semicírculo

Nesta última parte do trabalho conjunto, é direcionado o reconhecimento do semicírculo como a opção mais relevante para representar o topo do desenho. Isso, levando em consideração a forma curva do esboço na parte superior e a representação geométrica do semicírculo no plano. A discussão começa quando E2 comenta que ele observa que essa parte pode ser representada como um círculo e que está por trás da forma retangular que pode ser vista no desenho.

A dúvida por parte do professor 1 faz com que o aluno se levante e desenhe no quadro o círculo que está observando para representar essa parte do virabrequim. Ao observar o desenho feito pelo aluno, o Professor 1 concorda que ele pode ser representado como esse objeto geométrico. No entanto, ele pede aos alunos que observem apenas a parte que foi desenhada no desenho. O objetivo disso é que os alunos tenham consciência de que, se apenas a parte que foi desenhada for levada em consideração, ela poderá ser representada como um semicírculo, pois sua representação gráfica é muito semelhante. A reflexão feita pelo professor 1 ajuda os alunos a alcançar um certo grau de consciência e decidir construir um semicírculo.

85. Professor 1: Falta a última parte do desenho (veja Figura 7a).
86. E2: Eu vejo um círculo atrás do retângulo.
87. Professor 1: um círculo?
88. E2: se, eu vejo um círculo sobreposto aqui [E2 desenha o círculo acima do retângulo (veja Figura 7b)].
89. Professor 1: É verdade, mais, se olharmos para a parte que só é vista no desenho, podemos representá-la com um semicírculo, lembra-se?
90. E3: se.
91. Professor 1: Então podemos construir esta parte [aponta para uma parte do novo desenho (veja Figura7c)] com um semicírculo e não com um círculo.
92. E2: É por isso que eu disse um círculo, porque se você sobrepuser [o retângulo sobre o círculo] a mesma figura será observada.
93. Professor 1: É verdade, mas a técnica de construção dos dois objetos não é a mesma. Existe uma diferença na técnica de construção entre um círculo e um semicírculo. Então, construímos um círculo ou um semicírculo?
94. E3 y E8: semicírculo.

Figura 7. Discutir a representação do semicírculo como a melhor opção para representar uma parte do desenho



Fonte: elaborada pela autora (2019)

Discussões e reflexões finais

Este trabalho foi baseado em uma perspectiva histórico-cultural do aprendizado de matemática para descrever o aprendizado geométrico em relação à matematização de um virabrequim. Através de uma análise multimodal, procuramos explicar os objetos geométricos que podem representar as formas da peça no Geogebra. Para isso, utilizou-se uma conceptualização do aprendizado geométrico em correspondência com a Teoria da Objetivação, para que pudessem ser analisadas as discussões de alunos de graduação e três professores envolvidos na atividade de matematização.

Os resultados mostraram, primeiro a variedade de sinais (palavras, gestos, desenhos) e artefatos (lápis, papel e quadro) que compõem os diferentes nós semióticos exposto nos resultados sobre o trabalho de matematização de virabrequim realizado por estudantes e professores. Com relação a gestos e desenhos, descobrimos que esses recursos cumpriram uma importante função mediadora nos processos de objetivação, enquanto foram produzidos de maneira sincronizada com o discurso oral para revelar as ideias geométricas que foram úteis na identificação dos objetos geométricos que poderiam representar a peça.

Em particular os alunos e professores usavam as mãos (acompanhadas pelo marcador de quadro-negro ou não) para indicar ou apontar algumas formas do esboço, figuras geométricas que podem representar o desenho feito no quadro, escrever algo etc. Esses tipos de gestos utilizados por alunos e professores estão em correspondência com algumas das categorias de gestos teorizadas por McNeill (1992), especificamente com os gestos icônicos e deitíticos.

Seguindo esse autor, podemos concluir que estava presente a dimensão icônica do trabalho conjunto, pois para os alunos e os professores alguns gestos se assemelhavam visualmente às entidades que pretendiam descrever. Especificamente, destaca uma cena do primeiro nó semiótico no qual E3 faz um *movimento de sua mão* em alusão à forma da esfera. Outra dimensão identificada é a deitico, referente à maneira como os sujeitos indicaram um objeto geométrico específico (ou alguns de seus aspectos característicos) representados no quadro.

Ambas as dimensões foram relatadas nos estudos de Gómez (2013) e Pantano (2014), embora com denominações diferentes. No caso de Gomez, ele os inclui em uma categoria chamada sinais cinestésicos. Onde menciona os sinais de sinalização, principalmente com o dedo indicador e o que é mais utilizado pelos alunos. Também destaca os meios semióticos de movimento. Por outro lado, o Pantano é mais específico quando se refere a eles como sinais de dedos ou lápis.

Os resultados também mostram os meios linguísticos semióticos, como oralidade e escrita. Ambos foram fundamentais para a discussão sobre matematização. Alunos e professores confiaram na escrita para identificar no quadro o objeto geométrico associado a alguma parte do esboço desenhado no quadro. Os meios semióticos de objetivação utilizados por estudantes e professores, neste trabalho, correspondiam aos identificados por Radford (2010); gestos, palavras e símbolos escritos. A mobilização destes permitiu-lhes abordar as atividades no contexto da matematização da virabrinquina. Vale ressaltar que, embora usassem os mesmos meios, para cada aluno e professor a maneira de expressá-los era particular.

Os meios semióticos de objetivação utilizados por estudantes e professores, neste trabalho, correspondiam aos identificados por Radford (2010); gestos, palavras e símbolos escritos. A mobilização destes permitiu-lhes abordar as atividades no contexto da matematização da virabrinquina. Vale ressaltar que, embora usassem os mesmos meios, para cada aluno e professor a maneira de expressá-los era particular.

Embora os resultados desta pesquisa representem um avanço na compreensão do aprendizado produzido durante a matematização de um fenômeno nas atividades de elaboração de um simulador com o GeoGebra, analisar uma atividade específica orientada ao reconhecimento no GeoGebra não garante reconhecimento profundo desse fenômeno, motivo pelo qual precisamos realizar outros estudos focados nos processos de objetivação que ocorrem durante a matematização no ESG, para que os resultados obtidos contribuam para que nossos professores melhorem suas condições de gerenciamento de atividades.

Agradecimentos

Este artigo foi realizado com o apoio da *Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior* - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências Bibliográficas

ARZARELLO, F. Semiosis as a multimodal process. **Revista Latinioamericana de Investigación en Matemática Educativa**, n. Número Especial sobre Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático, p. 267- 299, 2006.

GÓMEZ, J. **La generalización de patrones de secuencias figurales y numéricas: Un estudio de los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en**

estudiantes de grado décimo. Tesis de Maestría. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, 2013. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/11109/1/G%C3%B3mez2013La.pdf .

LABORDE, C. CABRI-GEÓMETRA O UNA NUEVA RELACIÓN CON LA GEOMETRÍA. In: PUIG, L. (Ed.). . **Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática**. Madrid: Una Empresa Docente, 1997. p. 33–48.

LERMAN, S. **The function of language in radical constructivism: A vygotskian perspective**. In: W. GEESLIN, K. GRAHAM, (Eds.)Proceedings of 16th conference of international group for the psychology of mathematics education. **Anais**...1992.

MANGHI, D. M. La perspectiva multimodal sobre la comunicación: desafíos y aportes para la enseñanza en el aula. **Diálogos educativos**, v. 22, p. 3-14, 2011.

MCNEILL, D. **Hand and mind: What gestures reveal about thought**. Chicago: University of Chicago Press, 1992.

PANTANO, O. **Medios semióticos y procesos de objetivación en estudiantes de tercer grado de primaria al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales**. Tesis de Maestría. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, 2014. Disponible en: http://upnblib.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/209/TO-17469.pdf?sequence=1&isAllowed=y .

PRIETO G., J. L.; ORTIZ, J. Saberes necesarios para la gestión del trabajo matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra. Bolema, Rio Claro, v. 33, n. 65, p. 1276-1304, 2019. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a15.

RADFORD, L. Elementos de una teoría cultural de la objetivación. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 9, n. Número Especial, p. 103–129, 2006.

RADFORD, L. The evolution of paradigms and perspectives in research. The case of mathematics education. In J. Vallès, D. Álvarez & R. Rickenmann (Eds.), **Teacher's activity: Intervention, innovation, research**. Girona (Spain). p. 33-49, 2011.

RADFORD, L. Three Key Concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, Knowing, and Learning. **Journal of Research in Mathematics Education**, v. 2, n. 1, p. 7–44, 2013.

RADFORD, L. On the role of representations and artefacts in knowing and learning. **Educational Studies in Mathematics**, v. 85, n. 3, p. 405–422, 2014b.

RADFORD, L. Ser , Subjetividad y Alienación. In: D'AMORE, B.; RADFORD, L. (Eds.). . **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos**. 1. ed. Bogota, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2017. p. 137–165.

RADFORD, L. Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la teoría de la objetivación. **PNA**, v. 12, n. 2, p. 61–79, 2018.

RADFORD, L. Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 51, n. 1, p. 37-70, 2003.

RADFORD, L. Elementos de uma teoria cultural de la objetivación. **Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa**. v. 9, n. Número Especial,

p. 103-129, 2006.

RADFORD, L. Elementary forms of algebraic thinking in Young students. In: M. F. PINTO,; T. F. KAWASAKI (Eds.). Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics, Belo Horizonte, Brasil, v. 4, p. 73-80, 2010

RADFORD, L. The evolution of paradigms and perspectives in research. The case of mathematics education. In J. VALLÈS; D. ÁLVAREZ; R. RICKENMANN (Eds.). **Teacher's activity: Intervention, innovation, research**. Girona (Spain), p. 33-49, 2011.

RADFORD, L. Three Key Concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, Knowing, and Learning. **Journal of Research in Mathematics Education jornal of Reseach in Mathematics Education**, v. 2, n.1, p. 7-44, 2013.

RADFORD, L. On the role of representations and artefacts in knowing and learning. **Educational Studies in Mathematics**, v. 85, n. 3, p. 405-422, 2014.

RADFORD, L. Methodological aspects of the theory of objectification. **Revista Perspectivas da Educação Matemática,** v. 8, n. 18, 547−567, 2015.

RADFORD, L. Ser, Sujetividad y Alienación. In: D'AMORE, B; RADFORD, L. (Eds.). **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, espistemologicos y prácticos**. Bogota, Colombia: Universidad Distrial Francisco José de Caldas, 2017, p. 137-165.

RADFORD, L. Algunos desafios encontrados en la elaboración de la teoria de la objetivación. **PNA**, v. 12, n. 2, p. 61-79, 2018.

RADFORD, L.; EDWARDS, L.; ARZARELLO, F. Beyond words. **Educational Studies in Mathematics**, v. 70, n. 3, p. 91-95, 2009.

SABENA, C.; ROBUTTI, O.; FERRARA, F.; ARZARELLO, F. The development of a semiotic frame to analyse teaching and learning processes: Examples in preand post-algebraic contexts. En L. COULANGE, J-P.; DROUHARD, J-L.; DORIER; A. ROBERt (Eds.), **Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 2012, p. 231−245.

Ivonne C. Sánchez S.
Universidade Federal do Pará (UFPA)
E-mail: ivonne.s.1812@gmail.com
ORDCID: http://orcid.org/0000-0002-2485-1059

João Cláudio Brandemberg Quaresma
Universidade Federal do Pará (UFPA)
Email: Brand@ufpa.br
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8848-3550

***Recebido**: 16/10/2019*
***Aprovdo**: 20/12/2019*