

Aplicação de regras matemáticas: entre o treino e o uso da gramática

Application of mathematical rules: between training and the use of grammar

Marisa Rosâni Abreu da Silveira

Universidade Federal do Pará (UFPA) – PA/Brasil

Paulo Vilhena da Silva

Universidade Federal do Pará (UFPA) – PA/Brasil

RESUMO

Este texto tem o objetivo de discutir a aplicação de regras matemáticas que, sob a perspectiva da filosofia de Wittgenstein, podem ser compreendidas pelo treino. O treino corresponde a diversas aplicações de uma determinada regra matemática em diferentes contextos. Para que o aluno aplique tal regra, ele pode consultar a gramática da matemática na qual esta regra está inserida. A gramática própria da matemática é o conjunto de regras que determina o uso adequado de conceitos matemáticos, tais como aqueles que provêm da aritmética, álgebra e geometria. Após algumas inserções nas ideias de alguns comentadores de Wittgenstein, do próprio filósofo e de alguns educadores matemáticos que utilizam sua filosofia para pensar a docência, concluímos que é no movimento entre o treino e o uso da gramática que o estudante percebe a circularidade de sentidos dos conceitos matemáticos.

Palavras-chave: Regras matemáticas. Treino. Uso da gramática. Filosofia de Wittgenstein.

ABSTRACT

This text aims to discuss the application of mathematical rules that, from the perspective of Wittgenstein's philosophy, can be understood as a training. The training corresponds to several applications of a given mathematical rule in different contexts. For the student to apply such a rule, he can refer to the mathematics' grammar in which this rule is inserted. The grammar of mathematics is the set of rules that determines the proper use of mathematical concepts, such as those derived from arithmetic, algebra, and geometry. After some insertions in the ideas of some commentators of Wittgenstein, in the ideas of the philosopher himself and of some mathematical educators who use his philosophy to think teaching, we conclude that it is in the movement between the training and the use of the grammar that the student perceives the circularity of senses of the mathematical concepts.

Keywords: Mathematical rules. Training. Use of grammar. Philosophy of Wittgenstein.

Introdução

Na educação matemática, muito se discute sobre o aprendizado de regras matemáticas. Parece consenso, por exemplo, que o aluno deve compreender os procedimentos matemáticos que realiza e não apenas memorizá-los. Por outro lado, não parece concorde a discussão sobre o papel do treino no aprendizado dessa disciplina: alguns consideram imprescindível para que o estudante possa adquirir habilidade, enquanto outros acham que treinar é apenas repetição desnecessária e ineficaz. No presente texto, faremos

uma discussão a respeito do que consiste treinar, apontando o papel do treino no aprendizado da matemática.

Destarte, o objetivo desse texto é mostrar que, para o aluno ter êxito no seguimento de regras matemáticas, ele precisa treinar o uso das regras em diferentes contextos, de forma que essa prática seja constante, enriquecendo o repertório do aprendiz, até que compreenda sua aplicação. Conforme veremos, seguir uma regra não depende de um processo mental, tampouco suas aplicações estão dadas de antemão. Daí que o processo de seguimento de regras matemáticas necessite de exercícios para que se possa dominá-las.

Seguir uma regra pode envolver um processo de reflexão. Porém, Wittgenstein afirma que, quando estamos adestrados ao uso da regra, seguimos a regra sem refletir. Podemos perceber esta afirmação quando, por exemplo, aprendemos a dizer uma nova palavra. Nas primeiras vezes que a pronunciamos podemos ter certas dificuldades, inclusive em manter certa coerência com aquilo que dizemos. Muitas vezes, buscamos o significado de tal palavra no dicionário para sabermos empregá-la bem. Com o passar do tempo, temos condições de dizê-la sem mais consultar o dicionário. Este fato explica que após o treino – o uso da palavra em diferentes contextos – não precisamos mais refletir para empregá-la adequadamente, pois já conhecemos seu significado.

Para que uma regra matemática seja aprendida é preciso que esta seja considerada em diferentes contextos de aplicação, pois é no seu uso em meio a outras regras matemáticas que podemos encontrar o seu significado, ou seja, é necessário um uso constante e variado. Wittgenstein chama esse uso de treino. A função do treino é a conquista de uma autonomia do aluno, tal quando for capaz de seguir uma regra “sem refletir”.

A pesquisa de Gonçalves (2003, p.7) aponta para a direção da busca desta autonomia do aprendiz pelo treino em situações de aprendizagem. Assim, investiga o conceito de adestramento à luz da filosofia tardia de Wittgenstein, que acredita ser o adestramento o fundamento de qualquer explicação ou justificação na educação.

A partir da filosofia de Wittgenstein, queremos tratar do problema do ensino e da aprendizagem, presentes em sua filosofia posterior, na qual ele mesmo desconfia do processo de ensino-aprendizagem “a partir da criança”. Wittgenstein se opõe à ideia de que o saber não pode ser transmitido, mas somente construído. E, em nossa pesquisa, queremos investigar, portanto, o processo do adestramento como instrumento sem o qual, segundo o filósofo, nenhuma outra explicação ou justificação pode ser dada. Essa teoria encontra forte rejeição: primeiro porque o termo adestramento remete a um condicionamento behaviorista, o que não é o caso aqui. Além disso, o processo do adestramento envolve uma relação estabelecida pela autoridade entre professor e aluno, onde a aprendizagem seria fortemente marcada por essa prática. Numa visão wittgensteiniana, educar é mais do que ensinar, explicar. Envolve o conceito de iniciação da criança em um contexto social e cultural: social porque, na medida em que a criança aprende, não o faz sozinha, mas com outras pessoas; cultural porque, ao ser educada, a criança toma parte da tradição cultural de uma comunidade, participando da forma de vida dessa comunidade. É exatamente isso que Wittgenstein entenderia por adestramento, ou seja, a

ideia de que a criança é gradativamente inserida em um ambiente social e cultural ao ser educada.

Ao discutirem o adestramento wittgensteiniano como possibilidade pedagógica frente às incertezas do construtivismo, os autores afirmam:

O filósofo da educação inglês Christopher Winch faz críticas aos movimentos pedagógicos que valorizam o aprendizado autônomo. Segundo ele, a ideia de uma aprendizagem baseada em uma construção independente do aluno seria uma perigosa ilusão. Winch encontra fundamento de suas críticas em Wittgenstein, que vê na práxis do adestrar, importância central. (GONÇALVES; ESTEVES; SANTOS, 2012, p. 737).

Retomando a nossa afirmação anterior, para Wittgenstein, o aprendizado de uma regra se dá por um uso constante, que o filósofo chama de treino, e é por meio do treinamento de regras que o aprendiz se torna autônomo. Nesse sentido, Saint-Fleur (1998) mostra que Wittgenstein, por meio da criação do *Vocabulaire à l'usage des enfants des écoles primaires* junto aos seus alunos, pretendia que eles utilizassem o pequeno dicionário com palavras que lhe fizessem sentido, já que as palavras ali contidas se adaptavam ao contexto onde a escola estava inserida. Segundo Saint-Fleur (1998), a educação, como entendida por Wittgenstein, visa ao crescimento intelectual e moral do aluno. É uma educação para a liberdade e autonomia. O aluno é convidado a exercitar sua imaginação para cultivar o gênio da inventividade. Não se trata de buscar, por trás da palavra, uma essência escondida, mas de imaginar múltiplos e diferentes contextos, nos quais a mesma palavra é usada, de maneira semelhante ou diferente. Essas diferentes perspectivas, expressas em sentenças igualmente diferentes, refletem a diversidade e a multiplicidade de possíveis significados da mesma palavra. Em suma, é uma questão de cada vez mais imaginar contextos situacionais novos e variados. O projeto wittgensteiniano de desenvolver um vocabulário para crianças em idade escolar primária era parte da reforma mais ampla do sistema educacional austríaco. Esta reforma pretendia, acima de tudo, tornar os estudantes autônomos, mais livres, eliminando a lacuna entre o mundo da escola e o mundo da vida cotidiana. Era necessário dar ao estudante a oportunidade de se encarregar de si mesmo, de colocar o ensino ao serviço da vida. Do mesmo modo, Prado Jr. (2009) mostra que para Wittgenstein a aprendizagem de uma língua materna não depende de explicações e sim, de um treino, isso porque a reflexão de Wittgenstein é baseada em uma distinção: uma coisa é aprender um conhecimento ou um saber-fazer, outra coisa é aprender a língua materna, a primeira linguagem. A esse respeito, Wittgenstein considera que o aprendizado não é uma explicação, mas constitui “adestramento”, pois entramos na cultura através das práxis dos “jogos de linguagem”, e através deles nas “formas de vida” de uma cultura, suas normas, seus valores.

Na aprendizagem da matemática, para efetivar o treino acima mencionado é necessário que o aluno consulte outras regras que compõem a gramática da matemática. Esta gramática é o conjunto de regras que definem o uso adequado de suas aplicações. Assim, para alcançar nosso objetivo, abordaremos a circularidade de sentidos entre um ato e outro de aplicação de uma regra, bem como veremos que o significado para Wittgenstein está no

uso da gramática da matemática. Em nossas análises, nos apoiaremos na filosofia da linguagem de Wittgenstein, mais especificamente no chamado segundo Wittgenstein, aquele que, conforme seus comentadores, corresponde à sua obra *Investigações Filosóficas*, bem como em alguns de seus intérpretes e em educadores matemáticos filiados à sua filosofia.

1 Circularidade do significado

“‘Aprender’ significa: ser levado a poder fazê-lo”
(WITTGENSTEIN, 2009, §385).

A virada linguística – movimento filosófico que se deu em meados do século XX – nos possibilitou mudar o rumo das discussões a respeito dos fundamentos do conhecimento: o foco não é mais a mente do sujeito e suas abstrações, e sim, a linguagem. Para Wittgenstein, um dos filósofos que influenciou este movimento, não existem problemas propriamente filosóficos, existe a má compreensão da lógica da linguagem. Na primeira fase da sua filosofia, aquela relativa ao *Tractatus Logico-Philosophicus*, a lógica da linguagem é dada pela Lógica Proposicional; na segunda fase, mais especificamente nas *Investigações Filosóficas*, ele admite que existe a má compreensão da linguagem ordinária, apontando para o uso da gramática que define o que faz ou não sentido dizer.

Nas mudanças de sua filosofia, o conhecimento passa pelo viés da linguagem em que as discussões epistemológicas atribuem os sentidos pelos significados das palavras em diferentes contextos de aplicação, e não mais apenas por meio da relação da palavra e sua referência. O conhecimento está atrelado à gramática e é no jogo de linguagem que existe a possibilidade de compreensão, já que nele as palavras têm formas de vida. No jogo de linguagem, para Wittgenstein, “uma parte grita as palavras, a outra age de acordo com elas” (WITTGENSTEIN, 2009, p. 18) e acrescenta “chamarei de ‘jogo de linguagem’ também a totalidade formada pela linguagem e pelas atividades com as quais ela vem entrelaçada” (WITTGENSTEIN, 2009, p. 19).

O uso das palavras não depende de imagens mentais, nem de suas representações. Neste sentido, não figuram em nossas reflexões teorias que adotam o modelo referencial da linguagem, isto é, que usam a linguagem apenas como referência para objetos extralinguísticos.

O modelo referencial da linguagem considera que o significado de uma palavra é o objeto ao qual o termo substitui. Nesse sentido, a linguagem teria uma função unicamente descritiva, a saber: expressar objetos externos a própria linguagem, sejam eles empíricos, mentais ou ideais. Essa concepção desconsidera que uma expressão linguística possui diversos usos que não podem ser representados por um único objeto, caracterizando a busca por uma suposta essência.

Para Wittgenstein (1999), não existe um significado comum a todos os usos de uma palavra, uma essência que defina tal palavra, e sim aquilo que ele chama de semelhanças de família. Nessas semelhanças, tais como nos membros de uma família, não existe um traço definidor, apenas semelhanças, como a cor dos olhos, a estatura, o tipo de cabelo etc. Wittgenstein introduz a ideia de *semelhanças de família*, quando afirma

Ao invés de indicar algo que seja comum a tudo aquilo que chamamos linguagem, digo que não há uma coisa sequer que seja comum a estas manifestações, motivo pelo qual empregamos a mesma palavra para todas, – mas são *aparentadas* entre si de muitas maneiras diferentes. Por causa deste parentesco, ou destes parentescos, chamamos a todas de “linguagens” (WITTGENSTEIN, 2009, § 65).

Observe, p. ex., os processos a que chamamos “jogos”. Tenho em mente os jogos de tabuleiro, os jogos de cartas, o jogo de bola, os jogos de combate, etc. O que é comum a todos estes jogos? – Não diga: “Tem que haver algo que lhes seja comum, do contrário não se chamariam ‘jogos’” – mas olhe se há algo que seja comum a todos. – Porque, quando olhá-los, você não verá algo que seria comum a todos, mas verá semelhanças, parentescos, aliás, uma boa quantidade deles. Como foi dito: não pense, mas olhe! (WITTGENSTEIN, 2009, § 66).

Assim como aprendemos o uso de uma palavra, também aprendemos a aplicar regras, pois elas são convenções humanas. Necessitamos de regras sociais, jurídicas e de trânsito para vivermos em sociedade. Do contrário viveríamos na barbárie. Para nos comunicar necessitamos de regras gramaticais. Diferentemente dessas e outras regras, as regras matemáticas são normativas, porque resultam de um acordo de juízos, de convenções humanas, enquanto as outras resultam de um acordo de opiniões. Com o passar do tempo, as regras se tornam automáticas e é por isso que Wittgenstein (2009, § 66) diz “não pense, mas olhe!”, ou seja, deixe que o uso lhe ensine o significado. Quanto aos sinais de trânsito, aprendemos a dirigir um automóvel, reagindo aos seus sinais, de tal forma que, ao avistarmos o semáforo com cor vermelha, automaticamente, freamos, isto é, aprendemos seu uso.

O que tem a expressão da regra – digamos, a placa de orientação – tem a ver com minhas ações? Que tipo de ligação existe entre elas? – Bem, talvez a seguinte: fui treinado para ter uma determinada reação frente a este signo, e é assim agora que reajo agora (2009, § 198).

Ora, um indicador de direção, tal qual uma placa de trânsito, não contém em si mesmo sua aplicação. Ele só funciona na medida em que lhe damos um uso, isto é, convenciamos como segui-lo. Daí a necessidade do treino para que possamos aprender seus usos e aplicá-los com liberdade.

As regras gramaticais são aplicadas automaticamente, de forma que não precisamos pensar nelas quando estamos falando. Aplicamos elas mecanicamente, “sem pensar, sem refletir”. No entanto, aprender a aplicar a definição de logaritmo, por exemplo, significa aprender as regras que o definem. Para isso, é necessário resolver diversos exercícios envolvendo a definição, tais como as consequências da definição e as propriedades operatórias dos logaritmos. Em cada contexto de aplicação, o algoritmo vai obtendo sentido e ampliando a rede de possibilidades de resolução, inclusive quando for necessário substituir $\log x$ por y , alargando o repertório do aprendiz e enriquecendo seu mundo de significados.

As resoluções vão adquirindo sentido, porque existem semelhanças de família entre um procedimento matemático e outro, entre um exercício e o seguinte. A linguagem matemática em que são escritas as equações logarítmicas, por exemplo, apresentam semelhanças em sua sintaxe que não são perceptíveis ao aluno em um primeiro momento, tal que $\log x + \log y = \log xy$ e $\log a + \log \sqrt{b} = \log a\sqrt{b}$, justamente porque ele ainda não domina sua gramática. É na prática de resolução de diferentes equações que o aluno vai aos poucos compreendendo sua escrita e percebendo as similaridades de uma equação para outra, vendo isto *como* aquilo¹, até que chega o momento em que ele passa a aplicar regras envolvendo equações logarítmicas sem precisar recorrer a modelos de resoluções.

As listas de exercícios, muitas vezes criticadas por alguns educadores, representam uma forma de o aluno compreender os diferentes contextos de aplicação das regras ensinadas. É o que o tornará capaz de dominá-las, na circularidade de sentido entre uma e outra aplicação.

O círculo hermenêutico de Heidegger (1996) pode ilustrar muito bem aquilo que queremos dizer com circularidade de sentidos, pois o sujeito elabora e projeta possibilidades de sentidos na compreensão de um exercício e outro e o conceito exercitado vai adquirindo sentido. A compreensão fabrica relações e significações plenas de sentidos e a interpretação é simplesmente a explicitação da compreensão. Para Heidegger (1996, p. 208), o sentido “é aquilo em que se sustenta a compreensibilidade de alguma coisa” e “o que pode ser articulado na interpretação”, sendo que “todas as significações sempre têm sentido” e “das significações brotam palavras. As palavras, porém, não são coisas dotadas de significados” (p. 219). Em cada ato de compreensão e interpretação, o conceito vai se modificando e aumentando seu espectro de significação (SILVEIRA, 2005).

2 O significado está no uso

“Seguir uma regra é análogo a cumprir uma ordem. Treina-se para isto e reage-se à ordem de uma maneira determinada” (WITTGENSTEIN, 2009, p. 114).

“O que é o significado de uma palavra?” pergunta Wittgenstein (1992a, p. 25) que logo em seguida questiona “o que é a explicação do significado de uma palavra?”. O significado da palavra, afirma Wittgenstein, está no seu uso. Ensinar a linguagem consiste, de certa forma, a usar a palavra em diferentes contextos. Isso demanda treino, pois habilita o aprendiz a usar a palavra corretamente em diferentes situações de aprendizagem.

Wittgenstein afirma reiteradas vezes que o significado de uma palavra está no seu uso em diferentes contextos de aplicação. Isso porque, em primeiro lugar, o significado não é um objeto extralinguístico que a expressão descreve; por outro lado, os usos são dados pelas convenções humanas. Portanto novos usos sempre podem surgir, de modo que o significado

¹ O ver-como wittgensteiniano nos ensina que ver algo *como* outra coisa, como por exemplo *ver* a diagonal de um quadrado como a hipotenusa de um triângulo retângulo na resolução de exercícios envolvendo o Teorema de Pitágoras, depende do domínio de técnicas, que representam um “saber-fazer”. Para mais, sugerimos a leitura de Silva e Silveira (2014).

de um conceito é dado pelo conjunto de seus usos. De certa forma, podemos afirmar que “compreender algo, portanto, pressupõe o domínio das regras, o que envolve um certo *treino*, pois, as regras são *aprendidas*, não são extraídas do empírico e tampouco são inatas. São de natureza convencional. Fazem parte de uma *forma de vida*” (GOTTSCHALK, 2013, p. 672 – grifos da autora).

Aplicar a palavra *hipotenusa*, por exemplo, em diferentes tipos de triângulos pode esclarecer o significado da palavra. Não é possível dizer que o triângulo acutângulo e obtusângulo possuem hipotenusa. Apenas o triângulo retângulo possui hipotenusa. Dizer que o menor lado de um triângulo retângulo é a sua hipotenusa também está errado. Mas é correto afirmar que a hipotenusa de um triângulo retângulo é o maior lado do triângulo, pois ao maior ângulo de um triângulo se opõe o maior lado. Assim, é se deparando com diferentes tipos de triângulos que o aprendiz compreenderá como se aplica corretamente a palavra hipotenusa.

Da mesma forma, é na resolução de diferentes tipos de equações logarítmicas que o aprendiz saberá o uso correto das regras operatórias de logaritmo, bem como a própria definição de logaritmo. Desde criança, não apenas as palavras são incorporadas em nosso vocabulário, como também é aumentado nosso repertório de compreensão do mundo. Ambos nos permitem o acesso à comunicação com nossos pares.

Nas relações métricas no triângulo retângulo, é preciso que o professor exercite com seus alunos diferentes tipos de aplicações de regras em diferentes posições do triângulo, bem como com diferentes letras para os elementos do triângulo. Este uso em diferentes contextos, nos quais se muda a posição do triângulo, expande o conceito e o aluno tem a chance de, nestas diferentes experimentações, compreender as regras das relações métricas. Isso, para Wittgenstein, é o treino de uma regra. Treinar com a finalidade de obter autonomia.

Se nas reações métricas do triângulo retângulo fixarmos letras, como na figura a seguir, para os elementos do triângulo, sem chamarmos a atenção para o nome de cada elemento, nas suas respectivas fórmulas, dificilmente os estudantes conseguirão compreendê-las. É necessário educar o olhar do estudante para que ele veja os elementos em diferentes triângulos.

Elementos de um Triângulo Retângulo

A → Ângulo Reto

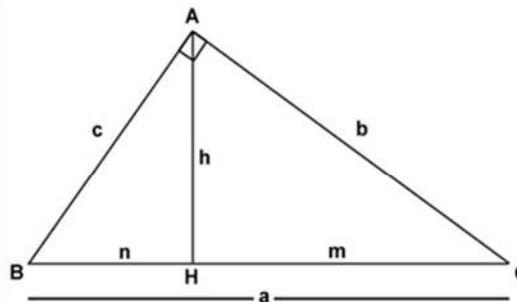
B e C → Ângulos Agudos

a → hipotenusa

b e c → catetos

h → altura relativa à hipotenusa

m e n → projeções dos catetos sobre a hipotenusa



Relações Métricas no Triângulo Retângulo

1ª Relação → $b^2 = a m$

2ª Relação → $c^2 = a n$

3ª Relação → $a^2 = b^2 + c^2$

4ª Relação → $a h = b c$

5ª Relação → $h^2 = m n$

Fonte: <http://www.matematicamuitofacil.com/trianguloret.html>

Aliás, ver-como é outro conceito da filosofia da linguagem de Wittgenstein. Treinar o olhar no sentido de perceber a hipotenusa de um triângulo retângulo em qualquer posição em que ele esteja.

No triângulo, agora ver *isto* como vértice, *isto* como base – agora *isto* como vértice e *isto* como base. – É claro que para o aluno que começa a tomar conhecimento dos conceitos de vértice, base etc., as palavras “vejo *isto* agora como vértice” ainda não podem dizer nada. (WITTGENSTEIN, 2009, p. 272).

Recordamos um episódio em que um estudante, após explicações inaugurais sobre o conceito de logaritmo, perguntou “Professora, a senhora está ensinando com “a” e “b” ($\log_x ab = \log_x a + \log_x b$), mas no meu livro aparece “x” e “y” ($\log_a xy = \log_a x + \log_a y$), mas isto é a mesma coisa, não é?” (SILVEIRA, 2005, p. 62). Esta pergunta reflete um dos problemas das confusões que a adoção de um modelo referencial da linguagem pode acarretar, quando a linguagem apenas descreve objetos. Nesse sentido, Loi (1982) acusa os professores de habituarem os estudantes com o uso de variáveis fixas para determinados

objetos matemáticos, tais como, h para a altura, v para velocidade, x para a incógnita/raiz de uma equação do primeiro grau.

Reiteramos que o ato de fazer e refazer cálculos ou de resolver listas de exercícios aponta para a necessidade do aluno de experimentar o objeto matemático em diferentes situações. Os professores, na tentativa de que o aluno aprenda um determinado conceito, utilizam listas de exercícios envolvendo o conceito ensinado. O nível de dificuldades de uma tarefa a outra aumenta até que o estudante alcance o nível desejado. O ato de fazer e refazer a mesma tarefa matemática, em diferentes contextos, busca a compreensão da regra que lhe é implícita, pois é no uso, na aplicação da regra, que acontece a experiência com o objeto.

Nesse sentido, Wittgenstein diz que nós não aprendemos tudo de uma só vez. Assim, podemos afirmar que é, na prática de resolução de questões, envolvendo o conceito que o aluno pode compreendê-lo, no exercício do uso da regra que ele é compreendido. Isso é treinar.

2.1 O uso como treino

Caveing (2004, p. 29) cita Descartes: “‘Olhar’ não satisfaz mais que ‘escutar’. Que é preciso fazer? É preciso refazer” [tradução nossa]. Refazer é fazer de novo, para que na circularidade de fazer e refazer, a compreensão do conceito se efetue (SILVEIRA, 2005). Da mesma forma, na educação infantil

a criança aprende esta linguagem, sendo treinada pelos adultos a usá-la. Utilizo a palavra “treinar” de maneira rigorosamente análoga àquela em que falamos de treinar um animal para fazer certas coisas. Isso é feito recorrendo a exemplos, à recompensa, à punição e coisas semelhantes. Parte deste treino consiste em apontar para uma pedra de construção, dirigir a atenção da criança para ela e pronunciar uma palavra. Chamarei a esta maneira de proceder, ensino *demonstrativo* de palavras. (WITTGENSTEIN, 1992a, p. 9-10).

A família ensina as primeiras palavras para a criança, tais como, água, frio, quente, fome, sono até que chega ao ponto que a criança necessita de outras palavras para se comunicar; a bola amarela, o lápis azul. Nesse momento, a criança aprende o nome das cores. “Esta cadeira é azul” introduz a criança na pronúncia dos nomes das cores, bem como suas tonalidades, azul claro, azul escuro, etc. Assim, a criança se envolve em *jogos de linguagem primitivos*, seja no ambiente familiar ou na escola, já que a criança aprenderá outras palavras, diferentes palavras em diferentes disciplinas.

As crianças são educadas para executar essas atividades, para usar essas palavras e para reagir dessa maneira às palavras dos outros. Uma parte importante do treinamento consistirá em o instrutor apontar para objetos, dirigir a atenção da criança para eles enquanto profere uma palavra, por exemplo, a palavra "laje", mostrando esta forma. (Não quero chamar isto de "explicação ostensiva" ou de "definição", porque a criança ainda não pode perguntar pela denominação. Quero chamar isto de "ensino ostensivo das palavras". – Digo que esta é uma parte importante do treinamento,

porque é o que ocorre entre as pessoas e não porque não dá para imaginar outra coisa.) (WITTGENSTEIN, 2009, §6).

Apontamos para uma bola e dizemos à criança: “traga aquela bola amarela para mim”. Na escola, a professor desenha uma bola no quadro de escrever e apontando para ela diz à criança “a cor dessa bola é azul”. Assim, a criança aprende aplicar a palavra bola, bem como as cores amarelo e azul. A compreensão destas palavras é efetuada pela explicação do professor, mas também pelo exercício constante de perceber as diferentes aplicações das palavras. “Não consigo descrever como (em geral) aplicar regras, excepto *ensinando-te, treinando-te a aplicar regras*” (WITTGENSTEIN, 1989, §318).

O filósofo austríaco (2009) afirma que, quando analisamos os fenômenos da linguagem nas espécies primitivas de seu emprego, podemos ter ideia do funcionamento das palavras. Podemos perceber que quando ensinamos uma criança a falar, não a ensinamos por meio de explicações, e sim, por meio do treino. Conforme explica Wittgenstein, nesse estágio não se trata propriamente de uma explicação, uma vez que o aprendiz ainda não é capaz de perguntar pelas razões disso ou daquilo.

Na matemática, o aprendizado de suas regras \dashv não pode ser adquirido com apenas poucas aplicações. É necessário um uso constante até que tais regras sejam compreendidas. A respeito desta prática de fazer várias aplicações de regras matemáticas, Rui, o “garotão nota 10”², um dos estudantes brasileiros premiado na 39ª Olimpíada Internacional de Matemática, afirma:

Estudo para isso há cinco anos, aplicando toda a disciplina que aprendi com meus pais (...) Comecei a fazer um curso preparatório que iniciava às 7 horas da manhã de sábado (...) Naquele ano, participei da olimpíada do Estado de São Paulo, mas não fiquei nem entre os seis primeiros colocados (...) freqüentava quatro aulas semanais de treinamento para as olimpíadas, totalizando vinte horas por semana. Em casa, além dos deveres escolares normais, reservava cerca de três horas diárias para resolver mais problemas de matemática (...) Muitas pessoas imaginam que vencer uma olimpíada de matemática é coisa para gênios, donos de cérebros muito acima da média da grande massa de seres humanos (...) Há muitas histórias sobre a equipe iraniana, que se classificou no primeiro lugar geral da olimpíada. Isso é estranho porque o Irã não se destaca no cenário internacional por possuir grandes matemáticos. O que me contaram por lá é que isso é fruto do fanatismo dos seus dirigentes. Os candidatos são retirados da escola e vão para centros de treinamento, onde são submetidos a uma maratona no limite da exaustão física e mental. Uma loucura. (JUNQUEIRA, 1998, p. 9)

² Conforme Silveira (2000, p. 50), essa matéria e essa reportagem intitulada “*Gênios no Alvorada*”, referindo-se aos estudantes brasileiros premiados na 39ª Olimpíada Internacional de Matemática, que foram recebidos no Palácio da Alvorada para um almoço com o Presidente Fernando Henrique Cardoso (Gênios..., 1998, p. 8), bem como a reportagem “*Garotão nota 10 - Medalha de ouro na Olimpíada Internacional de Matemática, explica como se tornou um ás na disciplina que é o terror dos estudantes*” (JUNQUEIRA, 1998, p. 9).

Podemos perceber, na voz do estudante premiado na Olimpíada Internacional de Matemática, que é necessário treinamento para ser classificado, ou seja, que treinando os exercícios pôde competir em olimpíadas e que foi possível ser campeão. Não estamos querendo afirmar que os demais estudantes devem fazer o mesmo que o Garotão Nota Dez, a não ser que queiram participar e serem premiados em olimpíadas internacionais de matemática. Porém, se os estudantes querem, ao menos, garantir um bom desempenho em matemática na escola, é aconselhável que exercitem bastante.

3 A gramática da matemática

Lembremo-nos de que, em matemática, estamos convencidos de proposições *gramaticais*; a expressão, o resultado desse convencimento é, portanto, que *aceitamos uma regra*. (WITTGENSTEIN, 1998, III, §26).

Wittgenstein não usa o termo gramática em seu sentido usual. A gramática wittgensteiniana descreve as regras de uso da linguagem e representa aquilo que faz ou não faz sentido dizer em um uma proposição. Por exemplo, sabemos que não faz sentido dizer “esse bebê está fingindo”, tendo em vista o fato de que a criança ainda não aprendeu tal habilidade; por outro lado, a gramática nos autoriza a dizer que uma pessoa solteira não é casada, isto é, a gramática também estabelece relações entre expressões linguísticas (SILVA, 2001).

É nesse sentido que podemos falar da “gramática da matemática” ou da “gramática do xadrez”, pois consideramos as regras que permitem certos lances e proibem outros. A matemática, portanto, possui regras gramaticais, como “ $2 + 2 = 4$ ”, que nos permitem dizer que dois pares de sapatos totalizam 4 objetos. Tendo em vista a matemática ser criação humana, tais regras não são óbvias ao aprendiz, mas precisam ser ensinadas, treinadas. Conforme explicita Wittgenstein:

A demonstração me conduz a dizer: isto *deve* ser assim. [...] Recorro à regra e digo: “sim, é assim que *deve* ser; devo estabelecer o uso de minha linguagem dessa forma”. Quero dizer que o *deve* é como um caminho que estabeleço na linguagem. Pois a proposição matemática tem que mostrar-nos o que faz SENTIDO dizer (WITTGENSTEIN, 1998, III, §28, 30, itálico do autor).

As proposições matemáticas são normativas. Estabelecem o que é correto e falso. São nosso padrão público de correção. Segundo Wittgenstein (1998), elas não estão num mundo platônico ideal. Não estão de antemão na mente do aprendiz, tampouco são descobertas no mundo empírico, são instituições que a humanidade criou. Uma das contribuições do filósofo à filosofia da matemática, inclusive, foi apontar a natureza social da matemática (SILVA, 2001).

Ora, se as proposições matemáticas são convenções, seu aprendizado necessita de um treino, tendo em vista que compreendê-las é ter uma habilidade, é saber aplicá-las, é dominar os procedimentos matemáticos: “Quando digo: “Não conheço bem o cálculo” – não me refiro a um estado mental, mas a uma incapacidade de fazer algo” (WITTGENSTEIN,

1998, III, §80), ou seja, não tenho tal capacidade, não domino esta técnica, não aprendi, ou: não fui treinado nesse *jogo de linguagem*.

Compreender uma regra é saber como aplicá-la, tal como um construtor ao ouvir seu colega gritar “lajota!”. Ele entrega o objeto pedido ao colega. “Traga-me uma lajota!” é imediatamente compreendido pelo colega, pois ele domina a técnica do que está sendo dito e age em conformidade com ela naquele contexto. Nesse âmbito pragmático, o construtor compreende a regra e age de acordo com o que seu colega lhe solicita justamente porque entregar lajotas para o colega já se tornou um *costume* na perspectiva que essa regra foi aplicada e a ação realizada repetidas vezes. “Nesse caso, o ‘seguir a regra’ é algo “análogo a obedecer a uma ordem”, isto é, é-se treinado para isso, e reage-se de uma maneira determinada” (ARRUDA JÚNIOR, 2017, p. 108).

‘Seguir a regra’ é uma práxis, cujas atividades não decorrem de uma apreensão mental de uma regra, mas consistem, essencialmente, em o seguidor da regra ter sido *treinado* a agir de modo determinado quando confrontado com um conjunto específico de sinais em dadas circunstâncias. Isso implica dizer que o teste que prova se alguém compreendeu uma regra não é o que acontece no momento da compreensão, mas é o dominar a técnica de *usá-la* de modo correto. Nesse caso, a apreensão de uma regra está na prática de sua *aplicação*. (ARRUDA JÚNIOR, 2017, p. 107-108, grifos do autor).

Seguir uma regra, para Wittgenstein, é fazer o mesmo. A regra não precisa ser interpretada, basta que o seguidor de regras, siga-a automaticamente, sem pensar, sem refletir, siga cegamente a regra. Mas nós sabemos que ao ensinarmos matemática na escola, não é bem assim, temos que dar muitos exemplos e explicações. Wittgenstein afirma que o professor dispõe apenas disso, exemplos, exercícios e explicações. Temos a ilusão de que quando damos muitos exemplos, nossos alunos aprenderão facilmente, o que esquecemos é que é preciso o treino das regras matemáticas, que segundo o filósofo, são regras gramaticais.

Como estudávamos para uma prova de cálculo diferencial e integral, por exemplo? Treinávamos todos os diferentes tipos de aplicação dos conceitos envolvidos neste tipo de cálculo que encontrávamos no caderno e no livro adotado pelo professor a fim de dominar seus diversos usos e aplicações.

“Seguir a regra” *cegamente* não implica, contudo, segui-la irresponsavelmente, como se a questão de não haver escolhas desvalorizasse, pela ausência dessa possibilidade, as ações, os esforços e as habilidades dos seguidores de regras. Mas o que essa forma *cega* de “seguir a regra” quer mostrar, na realidade, é o fato de os seguidores de regras já estarem inseridos previamente (sem escolha) num contexto caracterizado por determinados *costumes* e *instituições* peculiares a partir do qual (porque define o que conta como seguir ou violar as regras) eles podem ser responsabilizados pela acomodação ou inadequação de suas ações à regra seguida. (ARRUDA JÚNIOR, 2017, p. 115).

Seguimos as regras gramaticais e as regras de trânsito, por exemplo, cegamente, mas as regras matemáticas não. Justamente por que elas são aplicadas em um contexto específico que é a escola. Por isso, é que precisamos estudá-las com muita atenção. Essas regras fazem parte de nosso arcabouço científico que foi herdado por nós e que serão aprendidas por nós, para que possamos repassá-las às futuras gerações, bem como aplicá-las em outros conhecimentos, tais como o tecnológico. Para Engel (1993), o conhecimento lógico-matemático é a base do conhecimento científico de uma determinada sociedade, de tal forma que seja qual for a concepção que se tenha do lugar das verdades lógicas no seio do conhecimento, é necessário explicar como as verdades lógicas nos são impostas, como evidentemente corretas como sendo normativas. Assim, o autor pergunta: podemos formular esta questão da seguinte maneira: porque acreditamos em verdades lógicas e porque seguimos as regras da lógica?

As regras lógicas nos fazem compreender que o mercado financeiro não age de acordo com as diferentes subjetividades de uma comunidade e, mesmo que possa ser caótico, ele segue alguns padrões estabelecidos pela própria economia financeira. Acreditamos que nenhum cidadão queira comprar um apartamento no vigésimo andar, se o engenheiro que o delineou não simpatizasse com procedimentos lógicos-matemáticos.

Considerações finais

Este texto teve o objetivo de discutir a aplicação de regras matemáticas no contexto escolar. Regras que podem ser apreendidas no uso do conjunto de regras que compõe a gramática da matemática, bem como por um uso constante de tais regras que Wittgenstein denomina de treino. Assim como somos treinados para o uso de palavras e de regras gramaticais que regulam esse uso, também somos treinados por tantos outros tipos de regras para vivermos em sociedade. Algumas regras gramaticais nos são ensinadas para podermos nos comunicar com nossos semelhantes, já as regras matemáticas nos são ensinadas para que tenhamos uma base de matemática que nos permita, dentre outras coisas, operar quantitativamente, distinguirmos formas geométricas e compreendermos relações entre variáveis.

Como vimos, a criança é inserida no mundo da linguagem sendo treinada a aplicar palavras inicialmente no âmbito familiar e posteriormente na escola. Tal ensino vai aos poucos se aperfeiçoando. Nesse sentido, Wittgenstein afirma que o mais importante é que o aprendiz compreenda o significado da palavra no uso, sem necessariamente perguntar pelo seu significado, pois o importante é que veja o emprego da palavra na prática. Neste sentido, é oportuno reconhecermos que existe a possibilidade da cegueira para o aspecto da palavra que aponta para a incapacidade do aprendiz de experimentar o seu sentido. Tal cegueira pode ser curada com a utilização da palavra em diferentes contextos, repetidas vezes, com certa regularidade.

Da mesma forma, podemos observar que na aprendizagem de regras matemáticas, alguns aprendizes têm dificuldades de compreender tais regras, já que não compreendem o próprio vocabulário que as regem. Podemos afirmar, pelo que foi exposto neste texto, que é na prática do uso de determinadas regras que o aprendiz compreende o sentido de suas

aplicações em diferentes contextos, repetidas vezes. Esta atividade de treinar por meio do uso de regras matemáticas possibilita o desenvolvimento de técnicas de aplicação.

O jogo de linguagem nos aponta para o modo como utilizamos as palavras em meio às nossas práticas linguísticas, bem como oferece formas de vida quando elas são pronunciadas. As regras matemáticas em meio a estes jogos adquirem sentido para o aluno quando estimuladas pelo professor, pois quando é oferecida a oportunidade de o aluno expor suas compreensões de um determinado conceito implícito na aplicação de regras, o aluno mostra ao professor, por meio de suas verbalizações, aquilo que o professor precisa retomar na sua fala para que possíveis dúvidas e erros desapareçam.

Portanto, embora para alguns pesquisadores e educadores matemáticos o treino possa parecer desnecessário e até prejudicial, vemos que ele é imprescindível, tendo em vista que o saber matemático é criação humana e de modo algum seu aprendizado seria óbvio ao estudante. Por outro lado, a prática da repetição de exercícios de aplicação dos procedimentos matemáticos em diversos contextos de uso favorecem o domínio das técnicas matemáticas por mostrar diferentes aspectos do conceito, desenvolvendo o repertório do aprendiz.

Referências

ARRUDA JÚNIOR, Gerson Francisco. 10 **Lições sobre Wittgenstein**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2017.

CAVEING, Maurice. Le problème des objets dans la pensée mathématique. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 2004.

ENGEL, Pascal. Logique, raisonnement et normes de rationalité. In.: HOUDÉ, O.; MIÉVILLE, D. **Pensée logico-mathématique: nouveaux objets interdisciplinaires**. Paris: PUF, 1993.

GONÇALVES, Carolina F. **Adestrar para a autonomia: a crítica wittgensteiniana ao construtivismo**. Dissertação de mestrado. UERJ, 2013.

GONÇALVES, Carolina; ESTEVES, Júlio; SANTOS, Lenilson. **O adestramento wittgensteiniano como possibilidade pedagógica frente às incertezas do construtivismo**. Atas do II Congresso Internacional TIC e Educação, Lisboa, 2012.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornélia. O paradoxo do ensino da perspectiva de uma epistemologia do uso. **Educação e Filosofia**. Uberlândia, v. 27, n. 54, p. 659-674, jul./dez. 2013.

HEIDEGGER, Martin. **Ser e Tempo**. Tradução de Márcia de Sá Cavalcante. Petrópolis: Vozes, 1986.

JUNQUEIRA, Eduardo. Garotão nota dez. **Veja**, São Paulo: Ed. Abril, p. 9-13, ago., 1998.

LOI, Maurice. Rigueur et ambiguïté. In: DIEUDONÉE. J. et alli. **Penser les mathématiques** (Séminaire de philosophie et mathématiques de l'École normale supérieure). Paris: Éditions du Seuil, 1982, p. 108-125.

PRADO JR., Plínio Walder. La norme et l'idiome. Notes sur Wittgenstein, le dressage et l'infans. Presses universitaires de Caen. **Le Télémaque**, 2009/2, n. 36, pp. 57- 68.

SAINT-FLEUR, Joseph P. Ludwig Wittgenstein: de l'éthique de la pédagogie à la pédagogie de l'éthique: Pour une éducation à l'autonomie. **SPIRALE** - Revue de Recherches en Éducation – 1998, n. 21, pp. 191-205.

SILVA, Paulo Vilhena da. **O aprendizado de regras matemáticas: uma pesquisa de inspiração wittgensteiniana com crianças da 4ª série no estudo da divisão**. Belém: UFPA, 2011. Dissertação (mestrado em Educação Matemática).

SILVA, Paulo Vilhena; SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu. O ver-come wittgensteiniano e suas implicações para a aprendizagem da matemática: um ensaio. In: **BoEM**, Joinville, v. 2, n. 3, p. 17-34, ago./dez. 2014.

SILVEIRA, Marisa R. Abreu da. **Produção de sentidos e construção de conceitos na relação ensino/aprendizagem da matemática**. Porto Alegre: UFRGS, 2005. Tese (Doutorado em Educação).

SILVEIRA, Marisa R. Abreu da. **A interpretação da matemática na escola, no dizer dos alunos: ressonâncias do sentido de “dificuldade”**. Porto Alegre: UFRGS, 2000. Dissertação (Mestrado).

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Fichas (Zettel)**. Tradução de Ana Berhan da Costa. Lisboa: Edições 70, 1989.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Investigações Filosóficas**. Tradução de Marcos G. Montagnoli. Petrópolis: Vozes, 2009.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **O Livro Azul**. Tradução de Jorge Mendes. Lisboa: Edições 70, 1992a.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **O Livro Castanho**. Tradução de Jorge Marques. Lisboa: Edições 70, 1992b.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Remarks on the foundations of mathematics**. Org. G. H. Von Wright, R. Rhees e G. E. M. Ascombe. Oxford: Blackwell, 1998.

Marisa Rosâni Abreu da Silveira
Universidade Federal do Pará (UFPA) – PA/Brasil
marisabreu@ufpa.br
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3147-9478>

Paulo Vilhena da Silva
Universidade Federal do Pará (UFPA) – PA/Brasil
pvilhena@ufpa.br
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2573-6255>