Linguagem em Atividades de Modelagem Matemática: uma perspectiva wittgensteiniana

Language in Mathematical Modelling Activities: a wittgensteinian perspective

Bárbara Nivalda Palharini Alvim Sousa
Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP) – PR/Brasil
Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina (UEL) – PR/Brasil

RESUMO

Neste artigo investigamos relações entre modelagem matemática e linguagem, em particular, a linguagem matemática. Dados provenientes de uma atividade de modelagem matemática, desenvolvida por treze alunos, são analisados a fim de responder a questão de pesquisa: "como os alunos justificam seus procedimentos matemáticos no decorrer de atividades de modelagem matemática?" Registros escritos, transcrição de áudio e vídeo possibilitaram uma análise da linguagem dos alunos no desenvolvimento da atividade. Levando em consideração elementos da perspectiva wittgensteiniana de linguagem são construídas árvores de associação de ideias que sinalizam o modo como os alunos utilizam *proposições*, *regras* e diferentes *jogos de linguagem* que se articulam na justificativa dos procedimentos matemáticos utilizados pelos alunos.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Linguagem; Wittgenstein.

ABSTRACT

In this paper we present a research that addresses the mathematical modelling and language, in particular, mathematical language. Data from a mathematical modelling activity, developed by eighteen students, are analyzed to answer the research question: "How do students justify their mathematical procedures used during mathematical modelling activities?" Written records, and audio and video transcription analysis allowed an analysis of students' language in their modelling activity. Considering aspects of the Wittgensteinian perspective of language we constructed association trees of ideas that signals the way students use *propositions*, *rules* and different *language games* which are articulated in the justification of the mathematical procedures used by the students.

Keywords: Mathematical Modelling; Language; Wittgenstein.

Introdução

A abordagem de conceitos matemáticos pode ser associada ao ensino e à aprendizagem ou à aplicação da Matemática em situações e problemas que podem não ser matemáticos. O diálogo entre realidade e matemática compreende o escopo da Modelagem Matemática na Educação Matemática e, neste contexto, a Matemática é entendida como instrumento para compreender o mundo, como área do conhecimento que conduz à investigação e resolução de problemas (D'AMBROSIO, 2007).

Os diferentes papéis que a Matemática pode desempenhar na sociedade, algumas vezes conduzem a uma visão absolutista da Matemática, ou, ainda, à visão de 'rainha' das ciências como descrita por Mattheus (1995). Na contramão dessa visão absolutista está a abordagem de Wittgenstein (1996; 2013), filosófo contemporâneo que apresenta uma visão

'pragmática' da Matemática, em que emerge a possibilidade de considerações sobre os diferentes usos da linguagem matemática em situações que não são oriundas da Matemática. Neste contexto, Vilela (2009) refere-se as práticas matemáticas como realizações humanas, práticas intencionais e condicionadas pela estrutura da linguagem, a qual limita e regula as possibilidades de desenvolvimento da Matemática em práticas específicas.

Considerando a Modelagem Matemática como um *jogo de linguagem*, uma prática matemática específica e dependente da intencionalidade humana, abordamos neste artigo o modo como os alunos lidam com a linguagem matemática em atividades de modelagem matemática, especificamente para justificar seus procedimentos matemáticos no decorrer de suas atividades. A investigação acerca dos usos da linguagem em atividades de modelagem matemática, em particular da linguagem matemática, faz-se importante na medida em que problematiza os usos da linguagem que possibilitam a manipulação e aprendizagem linguística de procedimentos e regras que emergem em atividades de modelagem matemática.

Para apresentar reflexões com relação à questão de pesquisa "como os alunos justificam seus procedimentos matemáticos no decorrer de atividades de modelagem matemática?" estruturamos este artigo de modo a contemplar aspectos teóricos acerca de Modelagem Matemática e de linguagem na perspectiva Wittgensteiniana, os quais fundamentam nossa interpretação sobre dados coletados em uma pesquisa empírica desenvolvida com treze alunos de um curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias. A produção de sentido no que tange aos dados coletados é feita por meio do uso de árvores de associação de ideias, que no processo analítico evidenciam o modo como os alunos utilizam *proposições*, *regras* e os diferentes *jogos de linguagem* que permeiam a atividade de modelagem matemática.

A Linguagem Matemática e a Modelagem Matemática na Educação Matemática

Aplicações e Modelagem Matemática têm sido foco de discussões em torno de pesquisas e práticas de sala de aula. De acordo com Sriraman e Lesh (2006), tanto na Matemática quanto nas Ciências a modelagem matemática trata, em particular, da descrição, explicação ou conceituação proposital – que associada à quantificação, dimensionalização, coordenação e, em geral, matematização, relaciona à uma situação do cotidiano do modelador um modelo matemático, uma expressão da linguagem matemática referente o tópico investigado, que com diferentes intencionalidades conduzem o modelador a uma resposta ou possível solução para a situação investigada.

O uso de modelos matemáticos é feito na sociedade para prescrever ou descrever comportamentos, como fenômenos físicos, geológicos, sociológicos, entre outros (NISS, 2015). Neste sentido, jogar o *jogo de linguagem* da modelagem matemática pode auxiliar os modeladores, em nosso caso os alunos, a lidar com diferentes situações do cotidiano em que o uso da linguagem matemática é necessário, ou ainda para que possam se beneficiar com seu uso.

A interlocução entre eventos do cotidiano e a linguagem matemática coloca em evidência uma pluralidade de linguagens, ou usando as palavras de Wittgenstein (2013),

diferentes jogos de linguagem são acionados. Almeida, Tortola e Merli (2012, p. 220) evidenciam que "não se pode ignorar que a linguagem matemática, preponderantemente escrita, e que embora se pretendendo formal, necessita da linguagem natural, de figuras, para a comunicação das ideias". O uso das palavras, ações, gestos, registros escritos, entre outras linguagens, entram em cena no trabalho do modelador que deve a partir de um evento real efetuar simplificações, formular hipóteses, interpretar a problemática em estudo, por meio da linguagem matemática, e deduzir um modelo matemático que permita uma resposta para a situação-problema (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN, 2012).

Sobre a pesquisa brasileira em modelagem matemática, Sousa, Almeida e Kluber (2018) indicam que discussões de aspectos epistemológicos relacionados à caracterização do que é modelagem matemática e como sua prática ocorre em sala de aula tem sido recorrente nas pesquisas, e os argumentos de Wittgenstein auxiliam os autores a tecer considerações em relação aos usos da matemática e da formulação de hipóteses em atividades de modelagem matemática, juntamente com os desdobramentos e implicações para as práticas de modelagem em sala de aula.

Especificamente na Educação Matemática pesquisas sobre os usos da linguagem em atividades de modelagem matemática receberam destaque na última década (ALMEIDA, 2014A; 2014B; TORTOLA, 2012; 2016; SOUZA, 2012; SOUZA, BARBOSA, 2014; OLIVEIRA, 2010; PALHARINI, 2017).

Para Almeida (2014a, p. 100, tradução nossa), "no contexto da Matemática [...], não se trata de procurar o significado dos objetos matemáticos na realidade interdependente da linguagem matemática ou na multiplicidade de usos em situações empíricas", mas no uso que destes fazemos. Já Tortola (2012; 2016) utiliza da perspectiva wittgensteiniana para analisar os usos da linguagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental a aprendizagem da matemática está associada à aprendizagem dos usos da linguagem matemática, ao *seguir regras* matemáticas e no uso apropriado das regras do jogo de linguagem da tradução entre uma situação em um jogo de linguagem para o jogo de linguagem da Matemática, estabelecendo conexões entre Matemática e suas aplicações na realidade.

O papel normativo que a matemática exerce em nossas práticas cotidianas é abordado por Souza (2012), que tem como o sistema matemático escolar. Neste sistema a modelagem matemática pode ser entendida como uma maneira de organizar situações empíricas por meio da linguagem matemática. Ainda no contexto do ambiente escolar, Oliveira (2010) expressa uma preocupação particular no que tange ao uso da linguagem matemática pelos alunos e a pluralidade de sentidos que os alunos podem produzir a partir da interpretação do discurso do professor e de outros alunos, o que independe da pretensão dos usos da linguagem matemática:

> [...] não podemos negar que a Matemática possui, de maneira muito perceptível, uma relação de significados nos signos e representação de sentidos, usos linguísticos peculiares e organização simbólica própria, evidenciando as questões acerca das especificidades da sintaxe, da

> semântica e da pragmática da linguagem matemática (OLIVEIRA, 2010, p. 51).

Justificativas matemáticas em atividades de modelagem matemática são importantes visto que a qualidade dos resultados obtidos pelo modelador é julgada, não só com base nos procedimentos matemáticos utilizados na situação matemática idealizada pelo modelador, mas também pelo sucesso do confronto desta com a realidade (POLLAK, 2015). A atenção para o rigor nos usos de conceitos matemáticos, bem como na justificação de tais usos está associada ao perigo do uso de procedimentos empíricos e ao reducionismo que os pensamentos do dia a dia podem causar nos modeladores (OTTE, BARROS, 2015; KLÜBER, BURAK, 2009). Segundo Klüber e Burak (2009, p. 13), quando o foco, na Educação Matemática, é a modelagem matemática:

> [...] há uma tendência de que o ensino de Matemática seja predominantemente empirista. Assim, acredita-se que apenas o desenvolvimento da atividade embasada no fazer matemático e na própria prática do professor oferecerá as respostas para um bom desenvolvimento do ensino de Matemática, como se a aprendizagem fosse uma causa/consequência imediata do ensino.
> Essa perspectiva caracteriza-se como problemática, uma vez que pode impedir avanços significativos no reconhecimento de aspectos como: o conteúdo, o sujeito da aprendizagem, o papel da construção do conhecimento e outros; que, em nosso entender, constituem-se como fundamentais para qualquer prática educativa. Tal visão não é condizente com uma base epistemológica que leva em consideração não apenas o fazer, mas o compreender a Matemática, aliada a uma concepção de sujeito que aprende e uma concepção de construção de conhecimentos.

É neste contexto que a pesquisa endereçada neste artigo se encaminha, visando fomentar o debate acerca dos usos da matemática em atividades de modelagem matemática. Tendo como desafio a articulação e a produção de sentidos para os diferentes jogos de lingaugem que devem ser jogados pelos modeladores.

Os usos da linguagem e da linguagem matemática em uma perspectiva wittgensteiniana

A perspectiva wittgensteiniana na Educação Matemática está associada a um posicionamento filosófico contemporâneo que dialoga com a literatura sobre a Filosofia da Linguagem, as Filosofias da Matemática e sobre a Filosofia da Educação Matemática.

De modo geral, a Filosofia da Linguagem de Wittgenstien visa, em parte, contrapor as Filosofias da Consciência e está para além de algo que se ocupa apenas em resolver problemas de linguagem, como um acabamento, ou uma análise a posteriori da atividade filosófica. Essa Filosofia é vista como uma disciplina ulterior a qualquer atividade filosófica e a partir dela é possível a realização de uma "análise crítica da estrutura, dos limites e das possibilidades da nossa linguagem quotidiana" (CONDÉ, 1998, p. 17).

Ludwig Wittgenstein apresenta neste contexto uma visão pragmática para a linguagem (IZMIRLI, 2013, DUMMET, 1959; GERRARD, 1991; 1996; MORENO, 2003;

WRIGHT, 1980). Neste texto, nos amparamos nas obras de Wittgenstein *Investigações Filosóficas* e *Observações sobre os fundamentos da Matemática,* em que o filosófo faz um exame filosófico sobre linguagem, enuncia e discute alguns dos tópicos fundamentais de seu trabalho, como: *jogos de linguagem*, *regras*, *significado*, *provas*, *proposições*.

As reflexões de Wittgenstein sobre matemática compreendem asserções sobre os usos e os papeis de proposições matemáticas em diferentes jogos de lingaugem, bem como o conceito de seguir uma regra. Segundo Wittgenstein (1996), para o matemático, jogar pode significar agir de acordo com certas regras. De acordo com Wittgenstein (1996, p. 346, tradução nossa),

> As palavras 'linguagem', 'proposição', 'ordem', 'regra', 'calcular', 'experimento', 'seguir uma regra' estão relacionadas a uma técnica, um costume. Um passo preliminar para agir de acordo com uma regra seria, digamos, ter o prazer em regularidades simples como o toque de ritmos, ou desenhos simples, ou olhando ornamentos simples. Assim, pode-se treinar alguém a obedecer à ordem: "desenhe algo regular", "toque regularmente". E aqui novamente é preciso imaginar uma técnica particular.

As proposições, de modo geral, obedecem a determinadas regras gramaticais que determinam sua significação e desempenham papel de instrumentos de linguagem, em particular as proposições matemáticas. O termo gramática, segundo Moreno (2003, p. 116):

> [...] pode ser entendido, em uma primeira aproximação, como sendo o conjunto de usos que fazemos das palavras que podem ser expressos sob a forma de um sistema de regras; uma vez cristalizados em regras e assim sistematizados, os usos das palavras esclarecem a significações dos conceitos e dos enunciados.

Para Wittgenstein (1996, p. 99, tradução nossa), "a proposição matemática tem a dignidade de uma regra" e regras, por sua vez, segundo Wittgenstein (2013, §85), apresentam- se como "um indicador de direção [...]". O autor sinaliza que em matemática estamos convencidos sobre proposições gramaticais e, por isso, os resultados expressos por meio de proposições matemáticas são aceitos como regra.

Proposições gramaticais são proposições que dependem de relações internas para serem elucidadas. São proposições em que "não há relações hipotéticas, mas sim gramaticais, que nos dizem o que faz sentido dizer ou o que não faz sentido dizer", tais proposições são vistas, ainda, como condições de sentido para outras proposições (GOTTSCHALK, 2004, p. 313). As proposições empíricas, por sua vez, apresentam também natureza pragmática, mas se fazem dependentes dos fatos na medida em que as utilizamos neste sentido, segundo Moreno (2003, p. 129) "é o uso que fazemos de certas proposições que tornam seus sentidos dependentes dos fatos. Os fatos participam do sentido das proposições empíricas porque é assim que definimos o uso que delas devemos fazer com a finalidade de levantar hipóteses e construir raciocínios".

Enquanto uma proposição gramatical está associada ao que o objeto é em uma gramática específica, uma proposição empírica está associada aos fatos, aos fenômenos, mas

quem as torna empíricas somos nós, baseados nos usos que delas fazemos. Utilizamos essas proposições como descritivas, para falar como as coisas são. Por exemplo, a proposição citada por Wittgenstein (1996, p. 245, tradução nossa), "A palavra 'Bismark' tem letras" pode ser concebida como uma proposição empírica, visto que descrevemos o uso de tal palavra na linguagem, de acordo com a proposição. Wittgenstein também se refere a essa proposição como sintética a priori.

Na análise da perspectiva wittgensteiniana e referindo-se a contextos em que interssa o ensino e a aprendizagem, Gottschalk (2008) argumenta que:

> [...] esta nova perspectiva (vinda da filosofia de Wittgenstein) sugere uma concepção de ensino e aprendizagem em que o papel do professor passa a ser ensinar significados através do uso que se faz deles em seus respectivos contextos linguísticos. E aprender, por sua vez, é ser capaz de ver de outra maneira, sem que essa outra maneira seja uma "variação" de uma hipótese inicial do aluno. Em outras palavras, aprender é estar disposto a comparar seu modo usual de empregar certa imagem com outro (não importa que tipo de imagem seja) (GOTTSCHALK, 2008, p. 87).

No que se refere à modelagem matemática, particularmente em contextos de ensino e de aprendizagem é pertinente focar nos usos da linguagem matemática e dos múltiplos jogos de linguagem que a rodeiam e a constituem.

Segundo Wittgenstein (2013), os jogos de linguagem se definem como parte de nossas *formas de vida* e consistem de linguagem e das atividades com as quais estão entrelaçadas. Vilela (2011), considera que jogos de linguagem são como os diferentes usos da matemática em práticas específicas. Já Gottschalk (2004, p. 321), refere-se a eles como meios para que os significados sejam entendidos e ampliados e, segundo a autora "aprender o significado de uma palavra pode consistir na aquisição de uma regra, ou um conjunto de regras, que governam seu uso dentro de um ou mais jogos de linguagem".

Neste sentido, a apreensão de significado constitui uma atividade linguística e está relacionada ao uso da linguagem e ao seu uso para justificação dos procedimentos matemáticos pelos alunos.

Procedimentos Metodológicos

Para investigar "como os alunos justificam seus procedimentos matemáticos no decorrer de atividades de modelagem matemática?" referimo-nos a uma atividade de modelagem matemática desenvolvida por treze alunos de um curso de Licenciatura em Matemática no decorrer da disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias, durante o ano letivo de 2015, em um período de aproximadamente oito aulas. Os aluno, distribuídos em 03 grupos são identificados como: G4 (Alunos A1, A2 e A3), G5 (B1, B2, B3, B4 e A4) e G3 (C1, C2, C3, C4 e C5).

Os dados em que fundamentamos nossas reflexões, interpretações são provenientes de anotações em diário de campo, registros escritos dos alunos e gravações em áudio e vídeo. Neste artigo, apresentamos a análise da atividade "a prática do *Bungee Jump*" a fim de evidenciar como os alunos justificam seus procedimentos matemáticos em atividades de

modelagem matemática. O texto inicial da atividade foi entregue pela professora, uma das autoras deste artigo, aos alunos.

A literatura sobre modelagem matemática aborda diferentes procedimentos que podem ser utilizadas no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática: "a busca de informações, a identificação e seleção de variáveis, a elaboração de hipóteses, a simplificação, a obtenção de uma representação matemática (modelo matemático), a resolução do problema por meio de procedimentos adequados e a análise da solução que implica numa validação, identificando a sua aceitabilidade ou não" (ALMEIDA; FERRUZZI, 2009, p. 121). No processo de análise, recorremos a tais procedimentos a fim de identificar os passos percorridos pelos alunos para desenvolver a atividade.

Como metodologia de análise de dados recorremos à análise das práticas discursivas de acordo com Spink (2013). Utilizamos como instrumento de análise de dados a construção de árvores de associação de ideias para a produção de sentidos contemplando a questão de pesquisa e a interlocução entre os elementos teóricos. De acordo com a autora, "as árvores de associação constituem mais um recurso para entender como um determinado argumento é construído no afã de produzir sentido num contexto dialógico" (SPINK, 2013, p. 91). Na análise o processo de interpretação é concebido como um processo de produção de sentido. "A interpretação emerge, dessa forma, como um elemento intrínseco do processo de pesquisa. [...] Durante todo o processo da pesquisa estamos imersos no processo de interpretação." (SPINK, 2013, p. 82).

A atividade de modelagem matemática: o caso do *Bungee Jump*

Considerado um esporte de aventura, o *Bungee Jump* tem como característica a superação de dificuldades físicas e a busca por emoções. O esportista amarrado a um cabo de aço cai em queda livre de aproximadamente 50 m. De acordo com Lopes (2005), o esporte começou na ilha Pentecost do Pacífico e seus registros datam de 1954. Regulamentados no Brasil desde 2006, os saltos devem ser administrados com material de boa qualidade e tecnologia, os quais consistem de: tornozeleira, cordas para ancoragem, cabo elástico e proteção corporal. O conjunto de informações do Quadro 1 foi entregue aos alunos para inteiração com o tema da atividade.

Quadro 1: Como funciona o salto de *Bungee Jump*

Como Funciona
O esporte *Bungee Jumping* pode ser praticado por qualquer pessoa sem limites de idade, os únicos limites são peso mínimo de 40kg e não ter algum problema sério de saúde. Existem 3 tipos de cordas a serem utilizadas, estas variam de acordo com o peso da pessoa que saltará, isto determinará apenas o conforto no salto, para que a corda estique de forma suave. Após decidida a corda que será utilizada, os engates e os cintos de segurança serão colocados e vistoriados para o salto. Um guindaste com capacidade para aproximadamente 40 toneladas, içará uma gaiola com a pessoa presa à mesma até o topo, onde após ser solta da presilha de segurança estará liberada para saltar no momento desejado. Com a ajuda de um instrutor, esta realizará o salto de uma altura de aproximadamente 42 metros, (equivalente a altura de um prédio de 14 andares), presa a uma corda elástica em cima de um Air Bag (colchão de ar), a pessoa que realiza o salto não chega a encostar no Air Bag, mantendo-se a uma distância de 2 a 5 metros do mesmo. Nas cordas de *Bungee Jumping* temos, além dos milhares de feixes de látex que formam a corda elástica uma fita tubular de nylon de alta resistência que acompanha toda corda elástica, capaz de

suportar o peso de 2.7 mil kg. O praticante é ancorado no elástico em no mínimo dois pontos do corpo (geralmente na cintura e nos tornozelos;). Todos os mosquetões são protegidos de acolchoado para impossibilitar eventuais ferimentos no praticante. Como *backup* complementar utilizamos um Airbag (colchão de ar;) no solo contra o último caso de uma queda.

Fonte: Master Jump. Disponível em: <http://www.masterjump.com.br/ComoFunciona.aspx>. Acesso em 28/02/19.

No desenvolvimento da atividade os alunos buscaram interpretar a problemática enunciada por meio de uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) de segunda ordem. O jogo de linguagem que normatiza o salto do *Bungee Jump*, associado a essa prática em particular, é utilizado pelos alunos no momento de identificação dos dados para delineamento da situação-problema e regras deste jogo de linguagem são levadas em consideração para formular hipóteses sobre quanto a corda irá se estender, a altura que o praticante irá saltar, a massa do sujeito que saltará, entre outros dados necessários e, a partir dessas suposições, os alunos adentram no jogo de linguagem da Matemática.

Três situações-problema são estudadas: os alunos do grupo G4 se concentraram na obtenção de um modelo para descrever o deslocamento do sujeito que pula no decorrer do tempo; os alunos do grupo G5 identificaram como problema a ser estudado "Qual o deslocamento da corda no fim do salto, levando em consideração a força de resistência atuante sobre o corpo?"; já os alunos do grupo G3 definiram o problema "Analisar os valores iniciais da prática do *Bungee Jump*, encontrar a EDO e resolvê-la". Idealizadas as situações matemáticas, os alunos utilizaram resultados matemáticos associados ao estudo de um sistema massa-mola, regras convencionadas na linguagem matemática:

Quadro 2: Regras da Linguagem Matemática usadas na atividade dos alunos

Lei de Hooke
A força da mola (F) é proporcional ao deslocamento da mola (x) $F = -k.x$, sendo k constante de proporcionalidade da força da mola oposta à força da gravidade. - usada considerando o cabo do Bungee Jump como uma mola atada ao sujeito.
Segunda Lei de Newton
A soma das formas que atuam sobre um corpo $(\sum F)$ é proporcional à massa do corpo pela sua aceleração, ou seja, $\sum F = ma$.

Uso da Lei de Hooke e da segunda Lei de Newton para dedução da EDO

A segunda Lei de Newton nos diz que a soma das forças é proporcional à massa do corpo do sujeito por sua aceleração, ou seja,

$$\sum F = mg - \gamma v - kx = ma,$$

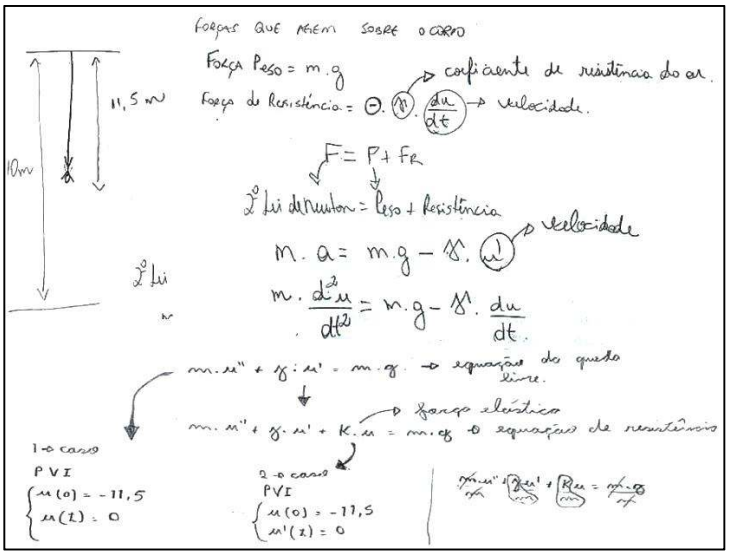
sendo as variáveis dessa equação:
x – espaço percorrido pelo sujeito;
t – tempo;
v – velocidade do corpo no decorrer do tempo, sendo que a derivada primeira do espaço em relação ao tempo é igual à velocidade v, ou seja, $\frac{dx}{dt} = v$;
a – aceleração do corpo no decorrer do tempo, sendo que a derivada segunda do espaço em relação ao tempo é igual à aceleração a, ou seja, $\frac{d^2x}{dt^2} = a$.
E, são constantes:
m – massa do sujeito (kg);
g – força da gravidade, $g = 9{,}8\ m/s^2$;
γ – força de resistência do vento, proporcional à velocidade.
Desse modo a EDO correspondente ao fenômeno pode ser escrita como:

$$mx'' - \gamma x' - kx = mg.$$

Fonte: registros escritos dos alunos.

Após a interpretação da situação-problema, das forças que atuam sobre o corpo e da EDO de segunda ordem correspondente, caberia aos alunos a obtenção dos parâmetros γ e k. Focamos na descrição do desenvolvimento da atividade por um dos grupos (G4) devido ao espaço do artigo. Os alunos A1, A2 e A3 deste grupo interpretaram a situação por meio de ilustrações e da análise das forças que atuam sobre um corpo em movimento (Figura 1).

Figura 1 Interpretação da situação do *Bungee Jump* pelo grupo G4



Fonte: registros escritos dos alunos.

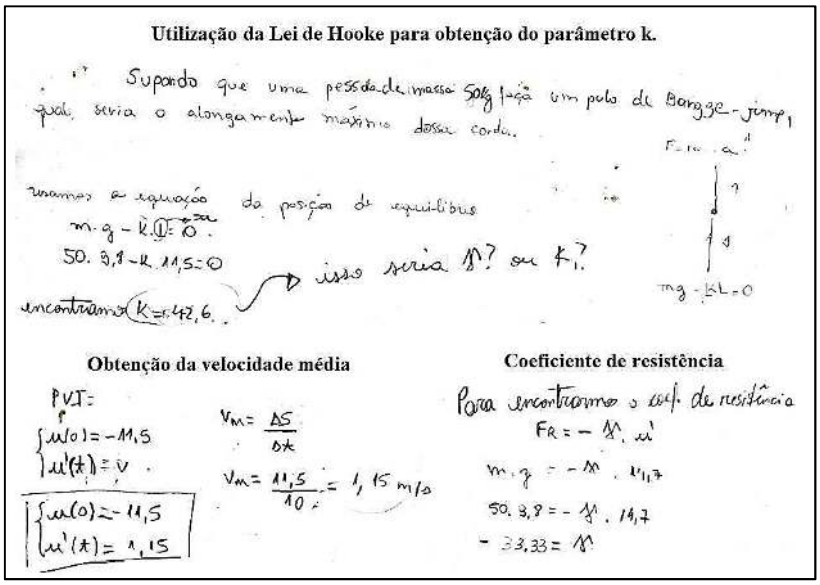
Para o desenvolvimento da atividade os alunos do grupo G4 formularam as hipóteses: *Hipótese 1*: a massa do corpo do sujeito que salta de Bungee Jump influencia no quanto o cabo irá esticar/distender.

Hipótese 2: O coeficiente de elasticidade da corda é proporcional à massa do corpo do sujeito. Ou seja, é possível considerar a lei se k é o coeficiente de elasticidade e m a massa do sujeito, então a força de elasticidade será dada por $k.m = F$.

Hipótese 3: Quando a corda sofre seu estiramento máximo, o tranco, é possível supor uma força que puxa a massa deslocando-a para cima. A este fenômeno podemos associar a Lei de Hooke $F = -c.L$, sendo c uma constante e L o deslocamento do cabo.

A Figura 2 mostra a obtenção dos parâmetros da EDO de segunda ordem associada ao deslocamento do sujeito após sua queda.

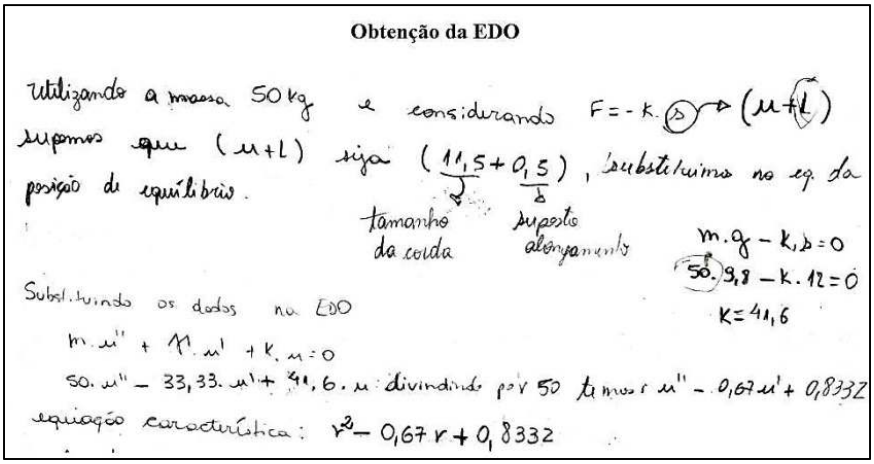
Figura 2 Obtenção dos parâmetros de G4



Fonte: registros escritos dos alunos.

Neste contexto, foram consideradas as informações: a massa do sujeito é de 50 kg, o comprimento da corda é 11,5 m (cabo em que o sujeito está preso para o salto) e um suposto alongamento da corda de 0,5 m. A partir das considerações empíricas, as regras matemáticas relativas às equações diferenciais de segunda ordem foram utilizadas (Figura 3).

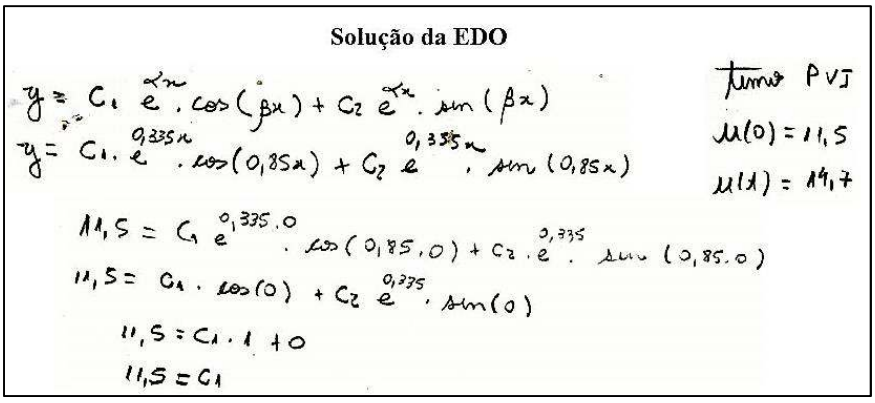
Figura 3 Obtenção da EDO e identificação da equação característica G4



Fonte: registros escritos dos alunos.

A equação característica de uma EDO de segunda ordem corresponde à uma equação de segundo grau, neste caso $r^2 - 0{,}67r + 0{,}8332 = 0$, sendo que os coeficientes constantes associados à EDO são 1, -0,67 e 0,8332, e as raízes complexas conjugadas $r_1 = 0{,}335 + 0{,}8i$ e $r_2 = 0{,}335 - 0{,}8i$. A partir do uso dessa regra, uma função para o deslocamento do sujeito após a queda no Bungee Jump é declarada, no entanto os alunos não finalizam com a obtenção das duas constantes a partir das condições iniciais por eles declaradas (Figura 4).

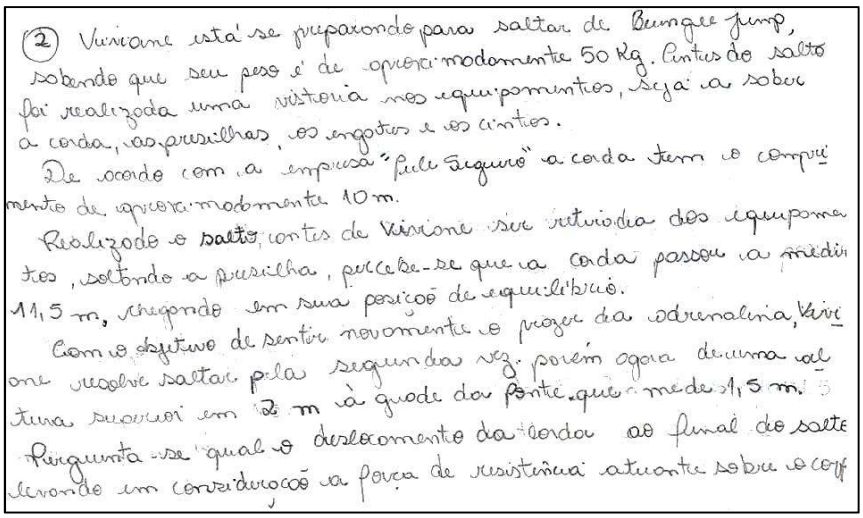
Figura 4 Identificação da solução da EDO do grupo G4.



Fonte: Registros escritos dos alunos.

De modo similar foi realizado o trabalho dos alunos do grupo G5 e G6. Diferenças específicas emergiram na ocorrência do tamanho do cabo considerado para o *Bungee Jump* e no grupo G5 uma situação-problema foi desenhada pelos alunos para a investigação (Figura 5).

Figura 5 Situação-problema formulada pelo grupo G5



(2) Viviane está se preparando para saltar de Bungee jump, sabendo que seu peso é de aproximadamente 50 Kg. Antes do salto foi realizada uma vistoria nos equipamentos, seja ela sobre a corda, as presilhas, os engates e os cintos.

De acordo com a empresa "Full Seguro" a corda tem o comprimento de aproximadamente 10 m.

Realizado o salto, antes de Viviane sofrer retirada dos equipamentos, soltando a presilha, percebe-se que a corda passou a medir 11,5 m, chegando em sua posição de equilíbrio.

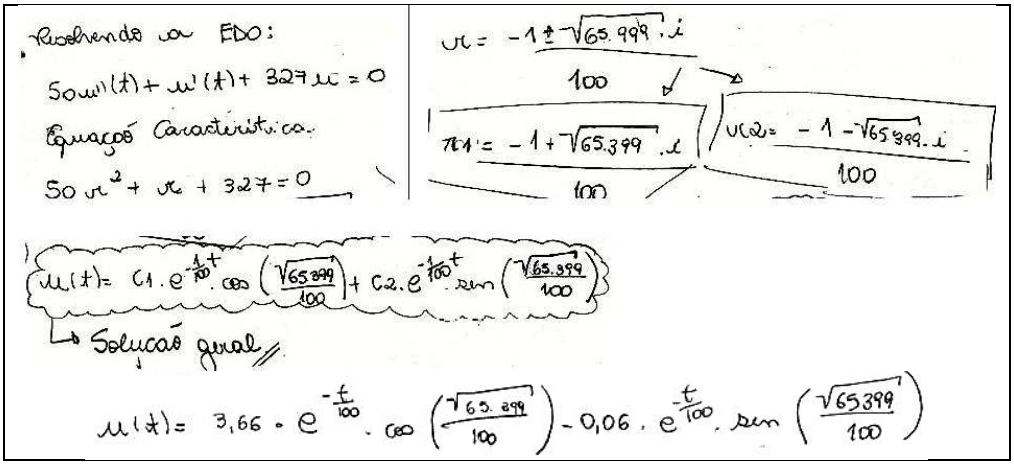
Com o objetivo de sentir novamente o prazer da adrenalina, Viviane resolve saltar pela segunda vez, porém agora de uma altura superior em 2 m à queda da ponte, que mede 11,5 m.

Pergunta-se: qual o deslocamento da corda ao final do salto levando em consideração a força de resistência atuante sobre o corp

Fonte: registros escritos dos alunos.

De posse dos dados e das hipóteses colocadas, os alunos apresentaram a resolução da EDO como explicitado na Figura 6.

Figura 6 Resolução de EDO de segunda ordem G5



Resolvendo a EDO:

$50u''(t) + u'(t) + 327u = 0$

Equação Característica:

$50r^2 + r + 327 = 0$

$r = \frac{-1 \pm \sqrt{65.999}\cdot i}{100}$

$r1 = \frac{-1 + \sqrt{65.399}\cdot i}{100}$ $\quad r2 = \frac{-1 - \sqrt{65.399}\cdot i}{100}$

$u(t) = C1 \cdot e^{-\frac{t}{100}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{65.399}}{100}\right) + C2 \cdot e^{-\frac{t}{100}} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{65.399}}{100}\right)$

↳ Solução geral

$u(t) = 3{,}66 \cdot e^{-\frac{t}{100}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{65.399}}{100}\right) - 0{,}06 \cdot e^{-\frac{t}{100}} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{65.399}}{100}\right)$

Fonte: registros escritos dos alunos.

A partir do momento que os alunos obtiveram a solução da EDO dada pela função u, os mesmos entenderam que a atividade foi desenvolvida, visto que conseguiram uma solução para o problema declarado inicialmente. A partir de uma EDO sobre a variação do deslocamento da corda, em relação ao tempo, os cálculos resultaram em uma função u que descreve em linguagem matemática o deslocamento da corda após o salto de *Bungee Jump*.

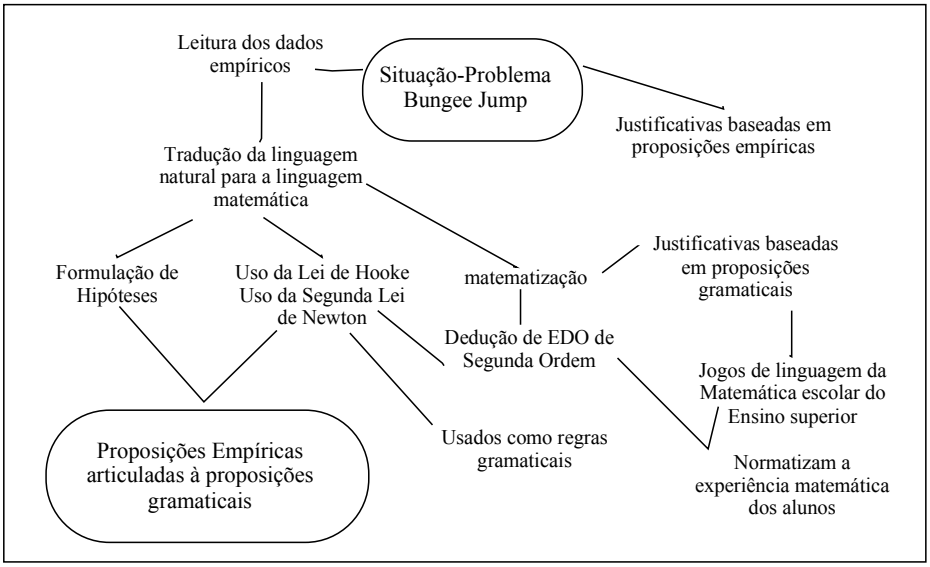
Árvore de Associação e a Produção de Sentidos

A justificativa para os procedimentos dos alunos durante a atividade de modelagem matemática é o guia que move essa pesquisa ("como os alunos justificam seus procedimentos matemáticos no decorrer de atividades de modelagem matemática?"). Tal justificação

depende dos *jogos de linguagem*. Em Wittgenstein (2013, § 486) discute-se "[...] eu estava justificado em tirar estas consequências? O que se chama aqui justificação? – Como é usada a palavra "justificação"? Descreva jogos de linguagem! Deles poder-se-á deduzir também a importância do estar-justificado".

No caso da atividade em análise, os jogos de linguagem jogados pelos alunos estão associados à matemática e à situação de uma prática esportiva presente no cotidiano dos alunos e jogar tais jogos de linguagem, para os modeladores assim como para o matemático é agir de acordo com essas regras. O percurso dos alunos no desenvolvimento da atividade é expresso na árvores de associação de ideias da Figura 7.

Figura 7 Árvore de Associação de Ideias – o trabalho dos alunos na atividade



Fonte: das autoras.

A Figura 7 indica a utilização de proposições empíricas quando os alunos precisam produzir sentidos para a situação-problema em estudo, e o uso de proposições matemática que atuam como regras que normatizam a situação-problema para resolver e sistematizar uma resposta para a idealização matemática realizada. O papel normativo das regras matemáticas em consonância com dados empíricos, de acordo com Souza (2012), é fato comum em situações em que o sistema matemático escolar é o vigente.

No que tange à atividade de modelagem matemática realizada por cada grupo, com tema comum, mas situações iniciais detalhadas individualmente, os alunos usam de procedimentos matemáticos para descrever por meio da linguagem matemática a situação do *Bungee Jump,* o modelo utilizado trata-se de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, que nas palavras de Sriraman e Lesh (2006), traduzem as diferentes intencionalidades do modelador no estudo da situação-problema.

Proposições empíricas que no decorrer do tempo se tornaram regras gramaticais como a Lei de Hooke e a Segunda Lei de Newton são utilizadas para traduzir a situação original, de um salto de *Bungee Jump*, para o uso de sistemas massa-mola na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias. A proposição empírica é articulada com a regra

matemática, proposição gramatical levando em consideração o comportamento da situação sob investigação, como denota a fala do aluno que traduz o jogo de linguagem da situação inicial para a o jogo de linguagem da matemática:

> Aluno A3 : *Inicialmente o saltador está em queda livre, onde está presentes a força peso, a força de resistência do ar, e, fazendo o desenhinho, a gente pode utilizar a segunda lei de Newton para obter a equação do corpo em queda livre.*
>
> Registro áudio gravados do aluno A3, G4.

Acerca do uso das Leis de Newton, Wittgenstein (2013, p. 225) argumenta que:

> Por que as leis de Newton não são axiomas da matemática? Porque nós bem poderíamos imaginar que as coisas são de outra maneira. Mas - eu quero dizer - isso só atribui certo papel a essas proposições, em contraste com outros. Isto é, dizer que uma proposição: "Poderia ser imaginada ao contrário" ou "Podemos imaginar o oposto", dá à proposição o papel de uma proposição empírica.

A Lei de Hooke é usada para atribuir sentido ao cabo de aço, que na visão dos alunos se assemelha a uma mola. Os alunos declaram então que a força da mola (F) é proporcional ao deslocamento da mola (x), F=- k.x, sendo k constante de proporcionalidade da força da mola oposta à força da gravidade. Essa proposição, juntamente com a Segunda Lei de Newton, é empírica pois estabelece uma relação externa à matemática, e mostra a escolha do jogo de linguagem que os alunos adentram para solucionar a situação-problema, os colocando nos passos da solução de uma EDO. Tais leis são utilizadas no desenvolvimento de hipóteses que guiam o trabalho dos alunos na situação-problema.

O tratamento das leis matemáticas e da dedução da equação diferencial ordinária de segunda ordem carrega consigo a complexidade do texto matemático, já descrita por Silveira e Silva (2016), cuja tradução está associada também as hipóteses formuladas. As hipóteses formuladas, de modo geral, traduzem as relações realizadas entre os dados empíricos e os procedimentos matemáticos que serão utilizados pelos alunos no desenvolvimento da atividade, ou seja, evidenciam o jogo de linguagem da tradução e os sentidos atribuídos pelos alunos, bem como os aspectos da situação-problema que serão mantidos ou ignorados [a massa do sujeito foi considerada de 50 kg, o comprimento 11,5 m foi considerado para a corda e um suposto alongamento da corda de 0,5 m.], como declarado por Pollak (2015) como passo importante em atividades de modelagem matemática.

A partir da formulação de hipóteses os alunos adentram no uso de regras matemáticas que possibilitam a solução do problema por meio de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, esta própria uma regra matemática, um modelo matemático com o potencial de descrever a situação-problema por meio dos olhos dos modeladores. O potencial de descrição dos modelos matemáticos é abordado por Niss (2015) como importante nas situações de ensino e de aprendizagem da modelagem matemática em salas de aula e pode fomentar análises críticas sobre os usos da matemática.

A solução do problema é então feita com base na utilização de matemáticas que são delineadas de acordo com a utilização das regras matemáticas para a solução de equações diferenciais ordinárias. Tais regras podem ser denominadas gramaticais, pois determinam a significação da EDO no jogo de linguagem da matemática e desempenham papel de

instrumentos de linguagem, sendo elas regras para solução de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem com coeficientes constantes.

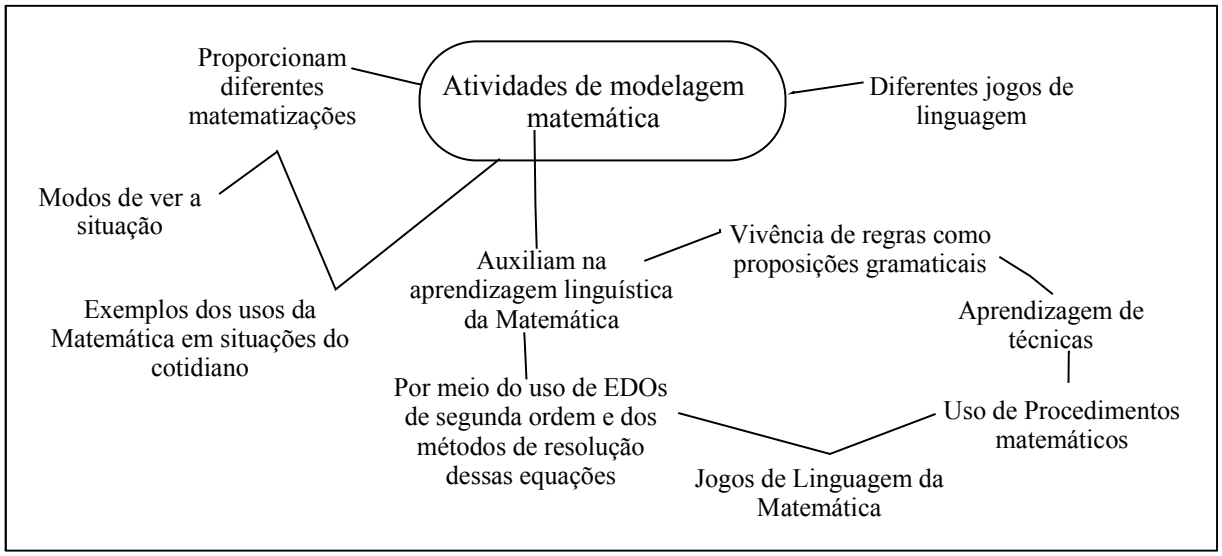
No desenvolvimento da solução para a equação diferencial ordinária de segunda ordem, os alunos utilizam procedimentos matemáticos da Educação Básica para resolver o que denominam de equação característica para a equação diferencial ordinária.

> Aluno B1: *podemos tentar colocar os dados de acordo com a EDO, porque a EDO da mola você chega em uma EDO homogênea e ...*
> Aluno A4: *e 'mata'.*
> Aluno B1: *e resolve normal, encontra a equação característica,* c_1 *e* c_2 *e resolve.*
> Aluno A4: *vamos tentar.*
>
> Registro áudio gravados dos alunos do grupo G5.

As regras para solução da equação característica não são explicitadas, e pode-se dizer que os alunos do grupo G5 a utilizam mecanicamente, neste caso procedimentos matemáticos para solução de equações de segundo grau são utilizados. Para Wittgenstein (1996, p. 422, tradução nossa), o conceito de seguir uma regra mecanicamente pode ser comparado com um mecanismo em que "'mecânico' – significa: sem pensar. Mas inteiramente sem pensar? Sem refletir". Não é possível dizer se A4 refletiu ou não sobre a utilização de propriedades matemáticas, fato é que a utilização de tais regras culminou na obtenção de um modelo matemático que soluciona a situação-problema. Lembremos de Wittgenstein (2013, § 289) ao sinalizar que "usar uma palavra sem justificação não significa usá-la indevidamente".

As demais regras matemáticas utilizadas na solução da EDO são explicitadas (Figura 2, Figura 3, Figura 4 e Figura 6), e a todos momento os alunos indicam em seus registros a relação entre a regra matemática utilizada e sua associação com os dados empíricos coletados, como por exemplo, o tamanho do cabo de aço, a massa do sujeito que salta, entre outros. Pode-se dizer que os alunos seguem justificam seus procedimentos matemáticos com vistas aos dados – proposições empíricas – que sustentam a dedução de uma equação diferencial ordinária para descrever o salto de Bungee Jump na atividade de modelagem matemática. Neste contexto elaboramos a árvore de associação de ideias referente a atividade de modelagem matemática (Figura 8).

Figura 8 Árvore de Associação de Ideias – sobre a atividade de modelagem matemática



Fonte: das autoras.

De modo geral, os registros dos três grupos detalham a seleção de variáveis, interpretação matemática dos dados dispostos na situação-problema, obtenção de um modelo matemático e intepretação, com vistas à situação, do modelo obtido, como pode ser visto na seção anterior. A justificação por escrito das conexões matemáticas utilizadas e o que a situação-problema requeria auxilia os alunos na atribuição de sentidos às proposições gramaticais utilizadas.

Na árvore de associação da Figura 8, sinalizamos que em atividades de modelagem matemática diferentes matematizações são possíveis, que se traduzem em diferentes modos de ver a situação-problema, o que no caso analisado está associado às três problemáticas definidas inicialmente pelos grupos G4, G5 e G3. São mobilizados nessas atividades diferentes jogos de linguagem, no enanto é por meio dos jogos de linguagem da matemática que ocorre o uso de procedimentos matemáticos, associados às equações diferenciais de segunda ordem e seus métodos de resolução – explicitos na análise deste artigo. A aprendizagem linguística está associada à vivência de regras como proposições gramaticais que normatizam os usos da linguagem matemática e o percurso dos alunos pelos diferentes jogos de linguagem mobilizados na atividade de modelagem matemática.

Palavras Finais...

Por fim, não com o objetivo de esgotar as discussões, mas de impulsionar o debate em torno dos usos da linguagem e de sua importância para a atribuição de sentidos em atividades de modelagem matemática, retomamos elementos que emergiram nas análises e trazemos à tona as palavras de Wittgenstein para fomentar nossas reflexões em torno do objetivo da pesquisa, ou seja, como os alunos justificam seus procedimentos em atividades de modelagem matemática.

De modo geral, na atividade de modelagem matemática desenvolvida pelos alunos proposições matemáticas são utilizadas com o caráter de regras. A matemática é utilizada

para responder à situação-problema e parece se configurar a assertiva de Wittgenstein de que:

> A matemática - eu quero dizer - lhe ensina, não apenas a resposta para uma pergunta, mas todo um jogo de linguagem com perguntas e respostas.
> [...]
> Podemos dizer que a matemática nos ensina métodos experimentais de investigação? Ou nos ajuda a descobrir esses métodos de investigação?
> 'Para ser práticos, a matemática deve nos falar de fatos'. - Mas esses fatos têm de ser matemáticos? – Mas, por que não pode a matemática, em vez de 'ensinar-nos fatos', criar as formas do que chamamos de fatos?
> 'Sim, mas certamente continua a ser um fato empírico o que os homens calculam!' - Sim, mas isso não faz das proposições utilizadas no cálculo, proposições empíricas (WITTGENSTEIN, 1996, p. 381, tradução nossa).

As justificativas para os procedimentos matemáticos utilizados pelos alunos, quando dadas, são feitas com base na situação-problema em estudo, especificamente nos dados considerados para a situação-problema, ou com base em relações internas à matemática, ou seja, na gramática que rege as regras matemáticas, o que nesse caso foi feito olhando para as regras de solução de EDOs de segunda ordem.

Assim, diferentes jogos de linguagem são utilizados com vistas à utilização de matemática na situação. Observa-se que nem todos os alunos justificam seus procedimentos, atribuindo sentidos aos usos dos procedimentos matemáticos utilizados, tendo como pano de fundo o significado destes usos na situação do *Bungee Jump*, por exemplo no fato de que após o salto o cabo de aço tem um distendimento específico que caracteríza na linguagem matemática o coeficiente de elasticidade de uma equação diferencial ordinária, como indicado no diálogo do grupo G4:

> Aluno A3: *com a corda estendida há a inclusão da força elástica, dessa forma utiliza-se mais uma vez a segunda lei de Newton para descrever o movimento. Então a gente tem a massa vezes a aceleração*
> Aluno A2: *que é a força resultante*
> Aluno A3: *a gente tem o coeficiente vezes a velocidade mais o que aparece aqui, a força elástica vezes o deslocamento... ele impôs, a gente vai ter que impor também.*
>
> Registros áudio gravados do grupo G4.

Tal fato denota parte da aprendizagem linguística que é possível na articulação da situação-problema com as regras matemáticas. Corroboramos com Gottschalk (2010) acerca do uso de métodos nos processos de ensino e aprendizagem para fomentar a aprendizagem linguística em Matemática e evidenciamos a asserção já realizada por Almeida (2014a) que enfatiza que nestes contextos não procuramos por significados dos objetos matemática em uma realidade interdependente da linguagem matemática, mas auxiliamos os alunos na

atribuição de sentidos a partir do uso que fazemos dos conceitos matemáticos combinados à situações específicas.

A justificativa do uso da matemática se dá de acordo com a proposição empírica de deduções de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, por meio da junção da Lei de Hooke com a Segunda Lei de Newton.

Wittgenstein (1996) aborda o papel de proposições matemáticas na linguagem e coloca importância nas reflexões sobre elas de modo a mostrar o papel da gramática que rege as regras matemáticas. Faz-se importante sinalizar a importância de olhar para a matemática como base no papel que desempenha em nossas vidas e na relação que desempenha com outros jogos de linguagem. Nesse sentido acreditamos que a modelagem matemática pode auxiliar os alunos na apropriação linguística das regras matemáticas e na atribuição de sentidos para tais regras por meio de diferentes usos da matemática articulados com as situações empíricas, seja a partir de proposições empíricas ou seja a partir de proposições gramaticas.

Referências

ALMEIDA, L. M. W. Jogos de linguagem em atividades de modelagem matemática. **VIDYA**, v. 34, n. 1, p. 241-256, jan./jun., 2014b.

ALMEIDA, L. M. W. The 'Practice' of Mathematical Modeling Under a Wittgensteinian Perspective. **International Journal for Research in Mathematics Education**, v. 2, p. 98-113, 2014a.

ALMEIDA, L. M. W.; FERRUZZI, E. Uma aproximação socioepistemologica para a Modelagem matemática. **Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.2, n. 2, p. 117-134, jul 2009.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA. K. P.; VERTUAN, R. E. **A modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; TORTOLA, E.; MERLI, R. F. Modelagem Matemática – com o que estamos lidando: modelos diferentes ou linguagens diferentes? **Acta Scientiae**: Revista de Ensino de Ciências e Matemática, vol. 14, p. 215-239 – maio/ago – 2012.

CONDÉ, M. L. L. **Wittgenstein**: linguagem e mundo. São Paulo: Annablume, 1998.

COSTA, D. E.; MORAES, M. S. F.; SILVEIRA, M. R. A. Um estudo sobre problemas de tradução relativos às propriedades de limites de função real de uma variável real. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 18, n. 1, pp. 203-216, 2016.

D'AMBROSIO, U. The role of mathematics in educational systems. **ZDM**. Vol. 39, p. 173-181, 2007.

DUMMET, M. Wittgenstein's philosophy of mathematics, **Philosophical Review,** 68 3: pp. 324-348, 1959.

GERRARD, S. A philosophy of mathematics between two camps. In: **The Cambridge Companion to Wittgenstein**. SLUGA, Hans; STERN, David G. (ed.). Cambridge: Cambridge University Press, 1996, pp 171-197.

GERRARD, S. Wittgenstein's philosophies of mathematics. **Synthese**, Londres, v.87, 125-142, Kluwer Academic Publishers, 1991.

GOTTSCHALK, C. M. A transmissão e produção do conhecimento matemático sob uma perspectiva wittgensteiniana. **Cadernos Cedes**, Campinas, v.28, n.74, pp.75-96, jan./abr. 2008.

GOTTSCHALK, C. M. C. A Natureza do Conhecimento Matemático sob a Perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais. **Caderno de História e Filosofia da Ciência**. Campinas, SP, Série 3, v. 14, n. 2, p. 305-334, jul.-dez. 2004.

GOTTSCHALK, C. M. C. Fundamentos epistemológicos da educação de uma perspectiva wittgensteiniana? entre o adestramento e a compreensão. In: Azize, R. L. (Org.). **Wittgenstein nas Américas**: legado e convergências. 1ed.Salvador (Bahia), Brasil: Editora da Universidade Federal da Bahia, 2018, v. 1, p. 53-71.

GOTTSCHALK, C. M. C. O papel do método no ensino: da maiêutica socrática à terapia wittgensteiniana. **ETD** - Educação Temática Digital, Campinas, v.12, n.1, p. 64-81, dez. 2010.

IZMIRLI, I. M. Wittgenstein as a social constructivist. **Philosophy of Mathematics Education Journal**, n. 27, april 2013, p. 1-12

KLÜBER; T. E; BURAK, D. Bases epistemológicas e implicações para práticas de modelagem matemática em sala de aula. In: IV Seminário internacionoal de pesquisa em educação matemática. **Anais**... Brasília, DF, pp. 1-16, out. 2009.

MATTHEUS, M. História, filosofia e ensino de ciências: a tendência atual de reaproximação. **Cad. Cat. Ens. Fís.**, v. 12, n. 3: p. 164-214, dez. 1995.

MORENO, A. R. Descrição fenomenológica e descrição gramatical – ideias para uma pragmática filosófica. **Revista olhar**. Ano 4, n. 7, p. 93-139, jul-dez, 2003.

NISS, M. Prescriptive Modelling – Challenges and Opportunities. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.) **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: cultural, social and cognitive influences. New York: Springer, p. 67-80, 2015.

OLIVEIRA, M. de S.; SILVEIRA, M. R. A. Falar e Mostrar para Provar: Uma contribuição Teórica sobre a Utilização dos Gestos Ostensivos Wittgensteinianos como

Auxiliares na Prova Matemática. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**. v. 9, n. 2, p. 271-285, 2016.

OLIVEIRA, M. S. **Interpretação e comunicação em ambientes de aprendizagem gerados pelo processo de modelagem matemática**. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Pará. Belém, 2010.

OTTE, M. F; BARROS, L. G. X. What is mathematics, really? Who wants to know? **Bolema**. Rio Claro, SP. vol. 29, n. 52, ago. 2015, p. 756-772.

PALHARINI, B. N. **A Matemática em atividades de modelagem matemática**: uma perspectiva wittgensteiniana. 2017. 316p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, UEL, Londrina, 2017.

POLLAK, H. O. The Place of Mathematical Modelling in the System of Mathematics Education: Perspective and Prospect. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.) **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: cultural, social and cognitive influences. New York: Springer, p. 265-276, 2015.

SILVEIRA, M. R. A.; SILVA, P. V. O cálculo e a escrita matemática na perspectiva da filosofia da linguagem: domínio de técnicas. **Educ. Matem. Pesq**. São Paulo, v.18, n.1, pp. 469-483, 2016.

SOUZA, E. G. **A aprendizagem matemática na modelagem matemática**. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) - Universidade Federal da Bahia, Instituto de Física. Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador, 2012.

SOUZA, E. G.; ALMEIDA, L. M. W.; KLÜBER, T. E. Research on Mathematical Modelling in Mathematics Education in Brazil: Overview and Considerations. In: RIBEIRO, A. J. et. al. (Eds.). **Mathematics Education in Brazil**. Panorama of Current Research, 2018, p. 211-228.

SOUZA, E. G.; BARBOSA, J. C. Contribuições teóricas sobre a aprendizagem matemática na modelagem matemática. **Zetetiké**. v. 22, n. 41, p. 31-58, jan/jul, 2014.

SPINK, M. J. **Práticas discursivas e produção de sentidos no cotidiano**. Ed. Virtual. Rio de Janeiro: Centro Edelstein de Pesquisas Sociais, 2013, p. 22-41.

SRIRAMAN, B.; LESH, R. Modeling conceptions revisited. **ZDM**. Vol 38, n.3, 2006.

TORTOLA, E. **Configurações de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2016. 304f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

TORTOLA, E. **Os usos da linguagem em atividades de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2012. 168f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

VILELA, D. S. Práticas matemáticas: contribuições sócio-filosóficas para a Educação Matemática. **Zetetiké** – Cempem – FE – Unicamp, v. 17, n. 31, pp. 191-211, jan/jun – 2009.

VILELA, D. S.; MENDES, J. R. A linguagem como eixo da pesquisa em educação matemática: contribuições da filosofia e dos estudos do discurso. **Zetetiké** – FE/Unicamp – v. 19, n. 36, pp. 7-25, – jul/dez 2011.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações Filosóficas**. 8. ed. Petrópolis: Vozes; Bragança Paulista: Editora Universitária São Francisco, 2013.

WITTGENSTEIN, L. **Remarks on the foundations of mathematics**. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts; London, England, 1996.

WRIGHT, C. **Wittgenstein on the Foundations of Mathematics**, Duckworth: London, 1980.

Bárbara Nivalda Palharini Alvim Sousa

Universidade Estadual do Norte do Paraná - UENP

E-mail: barbara.palharini@uenp.edu.br

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3712-9663

Lourdes Maria Werle de Almeida

Universidade Estadual de Londrina

E-mail: lourdes@uel.br

ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8952-1176