Escrita e Leitura em *Geometriquês*

Écriture et Lecture en *Géométriquais*

Jaime Velasco
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ/Rio de Janeiro/Brasil
Sueli Cunha
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ/Rio de Janeiro/Brasil

RESUMO

O estudo da linguagem matemática pode ser comparado ao de uma língua estrangeira; isto é, deve-se conhecer suas regras gramaticais (em diversos níveis de aprendizagem como básico, intermediário e avançado) para melhor compreender um texto, ou uma expressão, escritos nesta linguagem. Além disso, por vezes é interessante observar os dialetos, caracterizando as diferenças regionais (no caso de uma língua natural), que podem ser comparadas às diferenças entre as diversas áreas da matemática. Este artigo trata de uma breve introdução ao dialeto *Geometriquês*, e aborda algumas das dificuldades em termos de nomenclatura, e de escrita e leitura de frases neste dialeto, bem como faz uma pequena comparação entre o *Geometriquês* e o *Algebrês*.

RÉSUMÉ

L'étude du langage mathématique peut être vue comme celle d'une langue étrangère ; c'est-à-dire, il est nécessaire de connaître ses règles grammaticales (dans les divers niveaux de l'apprentissage comme élémentaire, intermédiaire et avancé) pour mieux comprendre un text, ou une expression, écrits en ce langage. De plus, il est parfois intéressant de remarquer les dialectes, qui caractérisent les différences régionales (dans le cas d'un langage naturel). Ces différences peuvent être comparées à celles entre les diverses branches des mathématiques. Ce text est une brève introduction au dialecte *Géometriquais* et on examine quelques unes des difficultés concernant la nomenclature, ainsi que l'écriture et la lecture de phrases en ce dialect. En outre, une comparaison entre deux dialects (le *Géometriquais* et l'*Algébrais*) est faite.

Introdução

A devida compreensão da Matemática está intimamente relacionada aos corretos uso e interpretação de sua linguagem. Esta, por sua vez, apresenta características próprias, dependendo da área da Matemática que se esteja considerando. Tais peculiaridades fazem com que a linguagem matemática possua regras particulares, dependendo da área de estudo. Nesse sentido, diz-se que a linguagem matemática possui alguns *dialetos*.

Existe uma grande variedade de textos que tratam de escritas e leituras em Matemática. A grande maioria deles, porém, aborda temas mais voltados à Aritmética ou à Álgebra. Quando se deseja descrever determinada propriedade geométrica (como uma proposição ou um teorema), muitos autores inclusive se preocupam em descrevê-la *exclusivamente* em língua natural, sem o auxílio da linguagem matemática. Por exemplo, ao enunciar o Teorema de Pitágoras, em língua portuguesa, pode-se dizer: "*Em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa corresponde à soma dos quadrados dos catetos.*".

Porém, existe uma grande dificuldade, tanto por parte dos alunos quanto por parte de alguns professores, de descrever uma determinada propriedade *exclusivamente* em linguagem matemática, isto é, sem o auxílio da língua natural. Um dos motivos que levam a essa situação é o número de palavras (em *Geometriquês*, o dialeto da Geometria) necessárias para descrever um simples objeto (exemplos são apresentados ao longo deste texto).

Entretanto, existem diferentes níveis de rigor na escrita em linguagem matemática. Não se deve exigir que alunos dos anos iniciais do Ensino Básico tenham o mesmo grau de fluência nesta linguagem que os dos anos finais; assim como no estudo de uma língua estrangeira, não se aprendem todas as regras gramaticais e todo o seu vocabulário em um nível mais básico. Nesse sentido, as escritas e leituras realizadas neste artigo são tratadas em um nível mais elementar do estudo da linguagem matemática, sem, no entanto, que as expressões percam seu significado.

Por outro lado, analisando diversos materiais didáticos disponíveis no mercado, e que tratam de Geometria, percebe-se uma enorme variedade de notações atribuídas a um mesmo objeto. Por exemplo, alguns representam um segmento de reta de extremos em dois pontos A e B por AB. Já outros, o nomeiam por $\overline{AB}$. Um triângulo de vértices em três pontos não colineares (isto é, que não pertencem a uma mesma reta) A, B e C ora é representado por $\triangle\, ABC$, ora simplesmente por ABC. São inúmeros os exemplos de ocorrências desse tipo.

Outro fato também observado são as diferentes formas de se definir determinados objetos geométricos. Por exemplo, alguns materiais didáticos definem a mediatriz de um segmento como a reta que o intersecta perpendicularmente em seu ponto médio. Já outros, a definem como o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos extremos do segmento. Algumas definições apresentadas podem perder a *essência* do objeto a ser definido (como esta última), acarretando também numa eventual perda de compreensão do mesmo.

Isso pode levar a crer que, não importa a forma com a qual escrevamos, ou com a qual nomeemos os objetos, ou os definamos, os alunos irão sempre compreender. Será mesmo? Boa parte de nossos futuros professores que ensinarão matemática (licenciandos em Matemática, por exemplo) nunca se preocupou com esses "detalhes" (talvez porque nunca tenham dito a eles que se preocupassem), e, provavelmente, repetirão em sala de aula a mesma falta de precisão na escrita em linguagem matemática. É muito comum, ao corrigir provas desses alunos ou mesmo presenciar suas exposições orais em formato de aula, que eles escrevam ora AB, ora $\overline{AB}$ (em uma mesma questão, por exemplo), querendo significar exatamente o mesmo objeto (a saber, o segmento de reta de extremos em A e B). Isso ocorre, pois os mesmos não têm as regras gramaticais bem fundamentadas, e creem que ambas as palavras têm o mesmo significado (isto é, que são *sinônimas*).

Neste sentido, este artigo visa apresentar uma breve introdução à descrição da linguagem matemática presente na Geometria, bem como a leitura e escrita adequadas de expressões em *Geometriquês*. No entanto, não se tem aqui o intuito de apresentar definições precisas dos objetos geométricos, tampouco descrever demonstrações de proposições ou de teoremas.

Na primeira seção, são apresentadas algumas considerações a respeito de certos objetos geométricos básicos tratados em Geometria, tais como seus nomes e determinadas relações entre eles. A escrita e a leitura de frases em linguagem matemática são abordadas na segunda seção, atentando também para a definição adequada de alguns objetos. Já na terceira seção, é apresentada uma breve comparação entre os dialetos *Geometriquês* e *Algebrês*.

Considerações sobre alguns objetos geométricos básicos

Esta seção visa apresentar, de modo breve, os nomes atribuídos a alguns dos principais objetos com os quais normalmente se trabalha em Geometria, dentre eles os pontos, as retas, os segmentos e os ângulos, e são consideradas também algumas relações que os envolvem. Como o foco deste artigo é tratar da linguagem matemática relacionada a conteúdos de *Geometria Plana*, todos os objetos considerados estão em um determinado plano fixado.

Lembramos que *ponto*, *reta* e *plano* são *noções primitivas* da Geometria, isto é, são objetos admitidos sem definição. Sendo assim, eles não podem ser definidos a partir de conceitos definidos anteriormente. Por esse motivo, não se deve dizer que "*Ponto **é definido como**...*" ou "*Ponto **é**...*". O que se deve dizer é que, baseados em nossa experiência do dia a dia, um ponto **pode ser visto como** uma marca feita pela ponta de um lápis no papel, por exemplo, ou como algo adimensional (isto é, sem dimensão), menor do que se consegue imaginar, que não possui partes, etc.

Os pontos são nomeados por letras maiúsculas latinas, usualmente A, B, C e D. Com frequência também são utilizadas as letras P e Q. Certos pontos específicos possuem nomes especiais. Por exemplo, usualmente nomeia-se por M o ponto médio de segmentos, e por O o centro de circunferências.

Tem-se que dois pontos A e B são i*guais* (isto é, *coincidentes*) quando ambos corresponderem a precisamente o mesmo ponto do plano; neste caso, escreve-se $A = B$. Em outros termos, A e B são simplesmente nomes diferentes para o mesmo objeto (o ponto). Ao longo deste texto, letras latinas maiúsculas sempre representam nomes de pontos[1].

As retas, por sua vez, são nomeadas por letras minúsculas latinas, usualmente r, s e t. Convém lembrar que a letra r também é usada para nomear o raio (que é um número real positivo)[2] de uma circunferência. Portanto, dizemos que, neste caso, r é uma palavra *homônima*[3].

[1] Convém notar que nem sempre letras latinas maiúsculas nomeiam pontos. Usualmente, utiliza-se a letra *R* para nomear o raio (um número real positivo) da circunferência circunscrita a um triângulo, por exemplo.

[2] Na verdade, "raio" é uma palavra polissêmica, em língua portuguesa, que pode significar tanto o segmento (e, portanto, um conjunto de pontos) que liga o centro de uma circunferência a qualquer um de seus pontos, quanto a medida (e, logo, um número real positivo) de tal segmento.

[3] Diz-se que uma palavra, em linguagem matemática, é *homônima* quando possuir pelo menos dois significados distintos não relacionáveis entre si (CUNHA; VELASCO, 2019).

Para nomear especificamente a única reta que passa por dois pontos distintos A e B, utiliza-se a palavra AB (obtida pela *justaposição* dos nomes dos dois pontos) acrescida do *suprafixo*[4] "$\leftrightarrow$", isto é, a palavra $\overleftrightarrow{AB}$. Sendo assim, se, em uma determinada reta r, tomamos dois pontos distintos A e B, esta mesma reta também é denominada por $\overleftrightarrow{AB}$. Em suma, neste caso, r e $\overleftrightarrow{AB}$ são dois nomes distintos para um mesmo objeto, a saber, a reta r. Portanto, diz-se que, neste caso, essas duas palavras são *sinônimas*.

Segmento de reta é a porção de uma reta compreendida entre dois pontos distintos da mesma, incluindo estes dois. Sendo A e B os nomes de tais pontos, nomeia-se tal segmento por AB (isto é, pela justaposição dos nomes dos extremos do segmento).

Caso queiramos nos referir à medida do segmento AB (com respeito a uma certa unidade de medida fixada), adiciona-se a essa palavra o suprafixo "—", nomeando-a, portanto, por $\overline{AB}$. Uma outra nomenclatura para essa medida é dada por meio da notação funcional $m(AB)$. Como dito anteriormente, com frequência, encontram-se materiais didáticos que não fazem distinção de nomenclatura entre um segmento e sua medida. Porém, tal prática não é considerada adequada, visto que ambos são objetos distintos, inclusive de natureza distinta; um deles é um conjunto de pontos (o segmento), e o outro, um número real positivo (sua medida).

Outra prática muito comum é a de considerar segmentos de medidas iguais como *segmentos iguais*. Segmentos são conjuntos de pontos; portanto, dois segmentos são *iguais* quando ambos forem constituídos pelos mesmos pontos do plano[5]. Por exemplo, os segmentos AB e BA são iguais[6], e escreve-se $AB = BA$, visto que os pontos compreendidos entre A e B são os mesmos que os compreendidos entre B e A. Nota-se, portanto, que as palavras AB e BA são sinônimas, visto que elas descrevem precisamente o mesmo objeto.

Sendo assim, embora os segmentos AB e CD da Figura 1 possuam a mesma medida (representada graficamente pelas marcações nos segmentos), eles não são iguais, pois sequer possuem um ponto em comum. Neste caso, diz-se que AB e CD são *congruentes*[7], e representa-se por $AB \equiv CD$. Tem-se, consequentemente, que $AB \equiv CD$ e $\overline{AB} = \overline{CD}$ são frases equivalentes. Porém, elas não possuem a mesma leitura. A primeira deve ser lida: "*Os segmentos 'AB' e 'CD' são <u>congruentes</u>.*"; já a segunda: "*As medidas dos segmentos 'AB' e 'CD' são <u>iguais</u>.*".

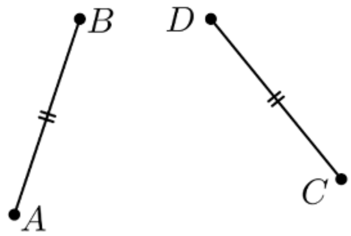

Figura 1: Segmentos congruentes

[4] *Suprafixo* é um tipo de afixo, identificado na linguagem matemática, utilizado para compor palavras a partir de outras pelo seu acréscimo *acima* destas (CUNHA; VELASCO, 2017 e CUNHA; VELASCO, 2019).

[5] Lembramos que dois conjuntos são ditos *iguais* quando possuírem precisamente os mesmos elementos.

[6] Em Geometria Euclidiana, não é usual considerar segmentos *orientados* (isto é, aqueles para os quais se estabelece um sentido de percurso). Por esse motivo, os segmentos AB e BA são iguais, em nosso contexto. Porém, se for considerada sua orientação (quando se trabalha com vetores, por exemplo), estes mesmos dois segmentos seriam distintos, por possuírem sentidos diferentes.

[7] Dois objetos são ditos *congruentes* quando possuem mesmo tamanho, mesmas medidas e mesmo formato. A relação de congruência entre segmentos (ou entre ângulos, triângulos, etc.) é uma relação de equivalência no conjunto de todos os segmentos (ou de todos os ângulos, de todos os triângulos, etc.).

Caso queiramos representar, em linguagem matemática, que dois segmentos **não** são congruentes, deve-se adicionar o *sobrefixo*[8] *de negação* "/" à palavra "≡". Sendo assim, a frase $AB \not\equiv CD$ significa que os segmentos AB e CD não são congruentes. Isto equivale a dizer que estes dois segmentos possuem medidas distintas, isto é, que $\overline{AB} \neq \overline{CD}$.

Uma *semirreta*, por sua vez, é nomeada pelo acréscimo do suprafixo "⟶" à palavra obtida pela justaposição dos nomes do ponto correspondente à sua origem e de um outro ponto pelo qual a semirreta passa. Em outros termos, a semirreta, de origem em um ponto O e que passa por um ponto A é nomeada por $\overrightarrow{OA}$. Nota-se que as palavras $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{AO}$ não são sinônimas, pois representam semirretas distintas (a primeira, possui origem em O e passa por A, e a segunda, tem origem em A e passa por O).

Um *ângulo* é definido como a união de duas semirretas de mesma origem. Elas são ditas os *lados* do ângulo, e a origem comum de ambas é dita o *vértice* desse ângulo. Sendo $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ os lados de um ângulo (de vértice O), nomeia-se esse ângulo pelo acréscimo do *prefixo* "∠" à palavra AOB, isto é, por $\angle AOB$. Em linguagem matemática, a frase

$$\angle AOB = \overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$$

indica a definição de tal ângulo, e pode-se lê-la como: "*O ângulo 'AOB' corresponde à união das semirretas 'OA' e 'OB'.*".

Sua medida (a qual não definimos aqui) é nomeada pelo acréscimo do suprafixo "^" acima do nome do vértice na palavra AOB, isto é, $A\hat{O}B$ indica a medida (em graus ou em radianos, dependendo do contexto) do ângulo $\angle AOB$. Outros nomes para essa medida são $\widehat{AOB}$ (palavra obtida pelo acréscimo do suprafixo "⌒" à palavra AOB) e $m(\angle AOB)$ (uma notação funcional). Sendo assim, as palavras $A\hat{O}B$, $\widehat{AOB}$ e $m(\angle AOB)$ são sinônimas.

Da mesma forma que para segmentos, dois ângulos são *iguais* quando ambos forem iguais em termos de conjuntos. Por sua vez, quando dois ângulos possuírem apenas medidas iguais, diz-se que são *congruentes*. Na Figura 2, os ângulos $\angle AOB$ e $\angle CPD$ são distintos (pois não possuem os mesmos lados) e congruentes (pois possuem a mesma medida, representada graficamente com uma mesma marcação em ambos), e escrevemos, em linguagem matemática, que $\angle AOB \equiv \angle CPD$. Em outros termos, as frases $\angle AOB \equiv \angle CPD$ e $A\hat{O}B = C\hat{P}D$ são equivalentes. Porém, da mesma forma que para os segmentos, a leitura de ambas as frases é distinta. A primeira deve ser lida como: "*Os ângulos 'AOB' e 'CPD' são <u>congruentes</u>.*"; já a segunda: "*As medidas dos ângulos 'AOB' e 'CPD' são <u>iguais</u>.*".

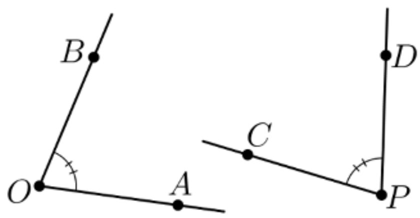

Figura 2: Ângulos congruentes

Quando se trata da posição relativa entre duas retas no plano, nota-se que existem três possibilidades: ou elas são iguais, ou são paralelas, ou são concorrentes.

Assim como para a igualdade de segmentos e de ângulos, duas retas são *iguais* (isto é, *coincidentes*) quando elas forem constituídas exatamente pelos mesmos pontos do plano (ou

[8] *Sobrefixo* é um afixo adicionado *sobre* uma palavra (CUNHA; VELASCO, 2017 e CUNHA; VELASCO, 2019).

seja, quando forem iguais em termos de conjuntos). Em outras palavras, as retas r e s são iguais quando r e s forem dois nomes distintos para o mesmo conjunto, e escreve-se $r = s$.

Por sua vez, duas retas são *paralelas* quando elas não se intersectarem, isto é, quando forem disjuntas (lembramos que estamos no contexto da Geometria *Plana*[9]). Em linguagem matemática, a frase $r // s$ indica que as retas r e s são paralelas. Sendo assim, $r // s$ e $r \cap s = \emptyset$ são frases equivalentes. Porém, suas leituras não são as mesmas. A primeira deve ser lida como "*As retas r e s são paralelas.*"; já a segunda: "*As retas r e s são disjuntas.*". Por sua vez, dois segmentos são *paralelos* quando estiverem contidos em retas paralelas.

Por fim, quando duas retas se intersectam em um único ponto, diz-se que elas são *concorrentes* nesse ponto, e não existe uma nomenclatura específica para designar a concorrência. Porém, a frase

$$r, s \mid r \cap s = \{A\} \tag{1}$$

significa que as retas r e s são concorrentes no ponto A. Analisemos a estrutura da frase (1). Neste caso, deseja-se definir o que seriam duas retas concorrentes. Tem-se que elas são duas retas *que* possuem determinada característica essencial (a saber, se intersectar em um único ponto). Sendo assim, à esquerda da palavra "|" (lê-se "*tal que*"), escrevemos o(s) objeto(s) que possui(em) uma determinada característica (neste caso, as duas retas). Já à direita de "|", escreve-se a característica propriamente dita. Ao longo deste texto são apresentados outros exemplos com essa estrutura.

Uma *leitura soletrada* (CUNHA; VELASCO, 2019) de (1) é: "*r e s são tais que se intersectam em A.*". Nota-se que, mesmo em uma leitura soletrada da frase (1), deve-se observar a quantidade de objetos que aparecem a esquerda da palavra "|", e lê-la no singular ou no plural; neste caso, lê-se "*tais que*".

Um erro *gramatical* muito comum ocorre ao escrever "$r \cap s = A$". A interseção entre dois conjuntos é um conjunto de mesma natureza. Portanto, a interseção entre duas retas (dois conjuntos de pontos) não pode ser simplesmente um ponto, mas sim um conjunto constituído por um único ponto. De modo semelhante, não se deve dizer que "Uma reta **pertence** a um plano.", pois retas e planos são conjuntos de mesma natureza (isto é, neste caso, seus elementos são pontos), e um conjunto não pode pertencer a outro de mesma natureza. Sendo assim, o correto a dizer é que "Uma reta **está contida** em um plano."

Um caso particular de duas retas concorrentes ocorre quando elas formam quatro ângulos adjacentes retos (isto é, de medidas iguais a 90°); neste caso, diz-se que elas são *perpendiculares*. A frase $r \perp s$ significa que as retas r e s são perpendiculares.

Algumas expressões em *Geometriquês*

Esta seção trata da escrita e leitura em *Geometriquês*, onde são apresentados alguns exemplos de definições, axiomas e proposições, e suas respectivas interpretações.

[9] Lembramos que duas retas disjuntas no *espaço* não são necessariamente paralelas. Elas podem ser *reversas*, que são retas não coplanares (isto é, retas para as quais não existe um plano que as contém).

Lembramos que um ponto é dito *ponto médio* de um segmento quando ele o divide em dois segmentos congruentes. Nota-se que, como esse ponto *divide* o segmento, ele pertence ao mesmo. Sendo AB tal segmento, e M seu ponto médio, deve-se ter, portanto, $M \in AB$. Além disso, como M divide AB em dois segmentos congruentes, temos que $AM \equiv MB$. Em suma, a descrição, em linguagem matemática, do ponto médio M de AB é

$$M \mid M \in AB,\ \ AM \equiv MB. \tag{2}$$

A estrutura da frase (2) é basicamente a mesma que a da (1). Como desejamos definir o *ponto* médio, à esquerda de "|" coloca-se um ponto que, neste caso, chamamos de M. À direita de "|" tem-se a característica essencial de tal ponto. Nota-se também a utilização de uma "," (vírgula) entre as frases "$M \in AB$" e "$AM \equiv MB$". Ela indica um acréscimo de propriedade, e deve ser lida como "*e*" ou "*com*", dependendo do contexto.

A partir da definição de ponto médio apresentada, não se deve descrevê-la, em linguagem matemática, como

$$M \mid M \in AB,\ \overline{AM} = \overline{MB}, \tag{3}$$

pois a mesma foi dada utilizando-se segmentos congruentes, e não segmentos de mesma medida. É evidente que (2) e (3) são frases equivalentes. Porém, em termos de uma interpretação, deve-se considerar (2) como a correta escrita da definição. Por sua vez, uma leitura adequada para (3) é: "*M é um ponto que divide AB em dois segmentos de mesma medida.*".

Sabendo-se as definições de ponto médio e de perpendicularismo (esta última tratada na seção anterior), pode-se estabelecer também o conceito de *mediatriz* de um segmento, que é a reta que o intersecta perpendicularmente em seu ponto médio. Nota-se, portanto, que a mediatriz é uma reta que goza de determinada propriedade (em relação a certo segmento). Portanto, utiliza-se a estrutura "$m \mid \cdots$", onde m denomina a tal mediatriz. Desta forma, a frase

$$m \mid m \perp AB,\ m \cap AB = \{M\}, AM \equiv MB \tag{4}$$

expressa, em linguagem matemática, a definição da mediatriz do segmento AB.

Nota-se que, embora a definição do ponto médio de AB inclua a condição "$M \in AB$", não a incluímos explicitamente em (4), pois ela já está descrita (de modo implícito) em $m \cap AB = \{M\}$. Caso a escrevêssemos, não estaria incorreto, mas seria uma redundância, caracterizando assim um *pleonasmo*.

Uma observação importante a respeito da mediatriz é que ela é o conjunto dos pontos do plano que possuem a propriedade de serem equidistantes dos extremos de tal segmento. Isto caracteriza a mediatriz como um lugar geométrico[10]. Ser "*equidistante de*" significa "estar a mesma distância de". *A distância entre dois pontos* é a medida do segmento que os liga, e $d(A,B)$ denota a distância entre A e B. Sendo assim, tem-se $d(A,B) = \overline{AB}$. Nesse

[10] Um *lugar geométrico* é o conjunto de todos os pontos do plano que gozam de determinada propriedade, sendo constituído exatamente pelos pontos que possuem tal propriedade, nem um ponto a mais, nem um a menos.

caso, a mediatriz pode ser descrita por meio de um conjunto específico, cujos pontos possuem determinada propriedade. Sendo assim, a expressão

$$m = \{P \mid d(P,A) = d(P,B)\} \tag{5}$$

também descreve a mediatriz de AB.

Alguns autores a definem dessa forma. No entanto, vale observar que toda definição deve refletir a essencialidade do objeto a ser definido (ROSA; CUNHA; VELASCO, 2018). Portanto, esta última não seria uma boa definição de mediatriz, visto que a ideia desta reta é que ela divide (em certo sentido) o tal segmento ao meio (devido, inclusive, a seu próprio nome). Porém, é possível provar que esta pode ser vista como uma propriedade que é equivalente à definição, no seguinte sentido: se uma reta é a mediatriz de um segmento (como definida em (4)), então ela é o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos extremos do segmento; por outro lado, o conjunto dos pontos que são equidistantes dos extremos de um segmento é obrigatoriamente uma reta que coincide com a mediatriz deste. Em suma, *matematicamente*, ambas podem ser consideradas como definições de mediatriz de um segmento. Entretanto, *gramaticalmente*, e até mesmo *didaticamente*, a primeira deve ser considerada como a definição (e, a segunda, como uma propriedade).

Vejamos agora um outro exemplo de expressão em *Geometriquês*. Diz-se que três pontos são *colineares* quando existir uma reta que os contém (a mesma definição pode ser estabelecida com uma quantidade qualquer de pontos). Para escrever, em linguagem matemática, a existência de algo, utiliza-se o quantificador existencial "$\exists$" (lê-se "*existe*"). Por outro lado, a definição dada diz respeito a três pontos que possuem determinada propriedade (a de existir uma reta que os contém). Portanto, pode-se escrevê-la, na linguagem matemática, do seguinte modo:

$$A, B, C \mid \exists\, r,\ \{A, B, C\} \subset r. \tag{6}$$

No caso da frase (6), a "," entre as frases "$\exists\, r$" e "$A, B, C \in r$" deve ser lida como "*com*" (isto é, existe uma reta *com* A, B e C pertencentes a ela). A partir desta definição, pode-se estabelecer o significado de três pontos *não colineares*, que são aqueles para os quais não existe uma reta que os contém. Em linguagem matemática, a frase

$$A, B, C \mid \nexists\, r,\ \{A, B, C\} \subset r \tag{7}$$

significa que os pontos A, B e C são não colineares. Nota-se que foi utilizado novamente o sobrefixo de negação "$/$" (adicionado à palavra "$\exists$") para descrever a **inexistência** de uma reta contendo certos pontos.

É possível escrever, de modo equivalente, a frase (7) sem utilizar a negação do quantificador existencial "$\exists$"[11]. Para isto, basta notar que, "não existir uma reta que contenha pontos" equivale a dizer que "nenhuma reta contém esses pontos", isto é, "que todas as retas *não contêm* tais pontos"; em linguagem matemática,

[11] Para mais detalhes a respeito da negação dos quantificadores lógicos, o leitor pode consultar Cunha e Velasco (2019).

$$A, B, C \mid \forall\, r,\ \{A, B, C\} \not\subset r. \tag{8}$$

Sendo assim, (7) e (8) são expressões equivalentes.

Vejamos agora um exemplo de leitura de uma expressão em linguagem matemática. Consideremos a seguinte frase:

$$\forall\, A, B,\ A \neq B,\ \exists!\ r \mid A, B \in r. \tag{9}$$

Nota-se a utilização do quantificador universal "∀" (lê-se "*para todo*", ou "*qualquer que seja*"), indicando que algo vale para quaisquer que sejam dois pontos **distintos** (pois $A \neq B$). Além disso, o *sufixo*[12] "!", adicionado à palavra "∃", indica *unicidade*. Portanto, a frase "$\exists!\ r \mid \cdots$" significa que existe uma única reta possuindo determinada propriedade, a saber, aquela descrita à direita da palavra "|". Sendo assim, uma leitura soletrada da frase (9) é: "*Para todos A e B, com A diferente de B, existe uma única* r *tal que A e B pertencem a* r*.*". Vale observar que, mesmo em uma leitura soletrada, é necessário concordar a palavra "∀" com o que vem a seguir, e lê-la como "*para todo**s***". Da mesma forma, embora a palavra "∈" signifique "*pertence a*", neste caso, deve-se lê-la como "*pertence**m** a*".

Por sua vez, uma leitura interpretada de (9) é: "*Existe uma única reta que contém dois pontos quaisquer distintos.*". Convém observar que esta propriedade é um *axioma* (ou *postulado*) da Geometria Plana, isto é, uma sentença assumida sem demonstração.

Uma outra forma de expressar essa frase é através do verbo *determinar*. Esta palavra indica **existência e unicidade** de algo. Sendo assim, a frase "*Dois pontos distintos determinam uma reta.*" é uma outra interpretação de (9), e significa justamente que existe, e é única, a reta que contém dois pontos distintos dados. Um outro exemplo de utilização deste termo é: "*Três pontos não colineares determinam uma circunferência.*" Isto significa que "*Existe uma única circunferência contendo três pontos não colineares dados.*" Este fato é uma proposição matemática, podendo assim ser provado.

Sobre polígonos

Conhecendo-se o conceito de pontos não colineares, pode-se estabelecer a definição de alguns dos objetos mais tratados em Geometria Plana: os polígonos. Nota-se, entretanto, que tal definição não é a mesma em todos os livros que abordam o assunto. Porém, a que apresentamos a seguir atende bem às necessidades do Ensino Básico[13]. Algo interessante a se observar é a estrutura de recorrência dos conceitos geométricos. Para se definir polígonos, é necessário conhecer o conceito de pontos não colineares. Por sua vez, para definir estes, precisa-se conhecer a definição de pontos colineares. Por fim, para se definir estes últimos utiliza-se pontos e retas, que são conceitos primitivos (isto é, assumidos sem definição).

Um *polígono* é a união dos segmentos que ligam pontos consecutivos de uma lista de pontos do plano não consecutivamente colineares três a três. Mais especificamente, dados n

---

[12] *Sufixo* é um afixo adicionado após uma palavra.

[13] Embora usualmente sejam considerados, no Ensino Básico, os polígonos *convexos*, apresenta-se neste artigo uma definição um pouco mais geral, e o leitor pode consultar Cunha e Velasco (2019) para uma descrição, em linguagem matemática, dos polígonos desse tipo.

pontos no plano ($n \geq 3$) $A_1, A_2, \dots, A_n$, não consecutivamente colineares três a três (considerando-se consecutivos A_{n-1}, A_n e A_1, bem como A_n, A_1 e A_2), um *polígono* de *vértices* nesses pontos é a união dos segmentos A_1A_2 , A_2A_3 , ..., $A_{n-1}A_n$ e A_nA_1, e o nomeamos pela justaposição (ordenada) dos nomes de seus vértices, isto é, por $A_1A_2 \cdots A_n$. Em linguagem matemática, tem-se

$$A_1, A_2, \dots, A_n \mid (\nexists\, r_i\,,\ A_{i-1}, A_i\,, A_{i+1} \in r_i\,,\ \forall\, i = 1,2, \dots, n), \tag{10}$$

$$A_1A_2 \cdots A_n = A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup \cdots \cup A_{n-1}A_n \cup A_nA_1\,, \tag{11}$$

onde estabelecemos que A_0 e A_{n+1} correspondem a A_n e A_1, respectivamente.

Observe que a frase (10) significa que a lista $A_1, A_2, \dots, A_n$ é formada por pontos não consecutivamente colineares três a três. Por sua vez, a frase (11) indica que o polígono é a união dos segmentos que ligam consecutivamente tais pontos. Cada um dos segmentos que constituem um polígono é dito um *lado* do mesmo. Nota-se, portanto, que todo polígono possui os mesmos números de lados e de vértices. A Figura 3 exemplifica um polígono de cinco lados $A_1A_2 \cdots A_5$.

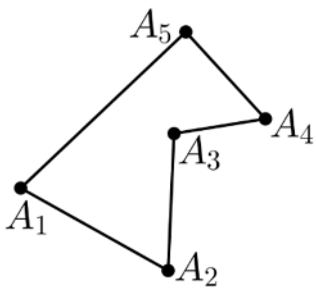

Figura 3: Polígono $A_1A_2 \cdots A_5$

A classificação dos polígonos é feita mediante seu número de vértices (ou, equivalentemente, seu número de lados, ou de ângulos internos). Triângulo, quadrilátero, pentágono, hexágono, etc. são os nomes dados a polígonos que possuem, respectivamente, três, quatro, cinco, seis, etc., lados. De modo genérico, um polígono de n lados, $n \geq 3$, é denominado um *n-ágono*. Esta palavra deve ser lida com uma breve pausa entre "n" e "ágono", pois caso seja lida de modo ininterrupto, ouve-se a palavra "eneágono", que corresponde a um polígono de nove lados.

Quando se trata especificamente dos polígonos de três e quatro lados (triângulos e quadriláteros, respectivamente), dificilmente nomeiam-se os vértices de modo indexado, como na definição de polígono. Usualmente, utiliza-se as primeiras letras do alfabeto latino, e denominamos tais vértices por A, B, C e D. Assim, tais polígonos são normalmente nomeados por ABC e $ABCD$, respectivamente. Sendo assim, considera-se que nomear um triângulo por $\triangle\, ABC$ é um pleonasmo, visto que a palavra ABC por si só já designa um triângulo.

Os ângulos internos de um polígono $A_1A_2 \cdots A_n$ são $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$, para cada $i = 1,2, \dots, n$, onde cada A_i corresponde a um vértice do polígono. **Caso não exista ambiguidade** (como no polígono da Figura 3), esses ângulos podem ser nomeados por $\angle A_i$ (neste caso, também pode-se nomear sua medida por $\hat{A}_i$). Por exemplo, na Figura 4, pode-se denominar o ângulo interno de $ABCD$, e de vértice em A, tanto por $\angle BAD$ quanto por $\angle A$. Por outro lado, o ângulo interno $\angle ABC$ não deve ser nomeado por $\angle B$, pois de mesmo vértice B existem outros ângulos, a saber, $\angle ABD$ e $\angle CBD$. Da mesma forma, não se deve nomear a medida de tal ângulo por $\hat{B}$.

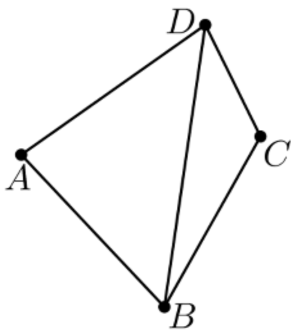

Figura 4: Quadrilátero $ABCD$

Vale observar que, com a nomenclatura dos vértices de um triângulo como A, B e C (e não como A_1, A_2 e A_3), a definição do triângulo ABC pode ser descrita, em linguagem matemática, por

$$A, B, C \mid (\nexists\, r,\ A, B, C \in r),\ ABC = AB \cup BC \cup CA. \tag{12}$$

Nota-se, portanto, a importância de se dar um nome a um triângulo. Toda vez que lermos a palavra ABC, embutida nela, encontramos toda a expressão descrita em (12). Neste sentido, entendemos que o *significado* da palavra ABC é aquele apresentado em (12). Isso facilita grandemente a escrita, em linguagem matemática, de várias expressões. De modo geral, dar nome a objetos simplifica substancialmente determinadas frases. Isto ocorre mesmo em uma língua natural. Por exemplo, caso não existisse a palavra "mesa" (ou qualquer um de seus sinônimos), para nos referirmos a ela, precisaríamos explicar suas características dizendo, que ela é um "Móvel formado por uma superfície horizontal e um ou mais pés que o sustêm, e que é usado para fazer refeições, escrever, jogar, executar ou preparar um grande número de trabalhos mecânicos e artísticos." (MICHAELIS).

Lembramos que um triângulo (ou um polígono qualquer) é dito *equilátero* quando todos os seus lados forem congruentes. Para descrever esta definição em linguagem matemática, devemos notar que ela deve possuir a estrutura "$ABC \mid \cdots$", pois ela é relativa a um triângulo que possui determinada propriedade. Sendo assim, a frase

$$ABC \mid AB \equiv BC \equiv CA$$

designa, em linguagem matemática, um triângulo equilátero ABC. Observa-se que, analogamente ao que foi dito anteriormente, não descrevemos a característica dos triângulos equiláteros como "$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$", pois esta não representa exatamente a definição. Além disso, a frase

$$ABC \mid \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$$

significa que "*ABC é um triângulo cujos lados possuem medidas iguais.*". Evidentemente, que esta frase também descreve um triângulo equilátero. Porém, não representa sua definição como dada anteriormente.

A frase a seguir, escrita em linguagem matemática, estabelece uma propriedade geométrica:

$$ABC \mid AB \equiv BC \equiv CA \ \Rightarrow\ \angle A \equiv \angle B \equiv \angle C \tag{13}$$

Nota-se que a frase (13) indica uma propriedade relativa a triângulos equiláteros, e seu significado é: "*Os ângulos internos de um triângulo equilátero são congruentes.*"[14].

Caso optemos por nomear um quadrilátero por $ABCD$, a condição de não colinearidade dos pontos consecutivos, utilizada para defini-lo, não se estabelece de modo compacto, como em (10). A frase a seguir expressa, em linguagem matemática, que $ABCD$ é um quadrilátero.

---

[14] Sabe-se, na verdade, um pouco mais do que o descrito em (13). Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, tem-se que todos os ângulos internos de um triângulo equilátero medem 60°. Em linguagem matemática, descrevemos essa propriedade por:

$$ABC \mid AB \equiv BC \equiv CA \ \Rightarrow\ \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60°.$$

$$A, B, C, D \mid (\nexists\, r, s, t, u,\ \ A, B, C \in r,\ \ B, C, D \in s,\ \ C, D, A \in t,\ \ D, A, B \in u), \tag{14}$$

$$ABCD = AB \cup BC \cup CD \cup DA. \tag{15}$$

A frase (14) indica a tal condição de não colinearidade dos pontos não consecutivos. Nota-se novamente a importância de se dar nome a um quadrilátero, e que a palavra $ABCD$ representa todo o conteúdo descrito em (14) e (15).

Dentre os quadriláteros, os mais estudados, devido a suas propriedades notáveis, são os *paralelogramos* (e seus casos particulares: losangos, retângulos e quadrados).

Um quadrilátero é dito um *paralelogramo* quando seus lados opostos forem paralelos[15]. Lembramos que os *lados opostos* de um quadrilátero são aqueles que não possuem extremos em comum. Em um quadrilátero $ABCD$, os pares de lados opostos são AB e CD, e BC e DA. Assim, para descrever um paralelogramo, em linguagem matemática, precisa-se citar suas características essenciais. Sendo assim, a frase

$$ABCD \mid AB//CD,\ BC//DA \tag{16}$$

significa que o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo, cujos pares de lados opostos são AB e CD, e BC e DA.

Como não existe um nome específico para um paralelogramo, em linguagem matemática, sua descrição deve aparecer na expressão de toda e qualquer propriedade referente a ele. Por exemplo, uma conhecida propriedade de paralelogramos é a seguinte: "*Os lados opostos de um paralelogramo são congruentes.*". Sua descrição, em linguagem matemática, é

$$ABCD \mid (AB//CD,\ BC//DA)\ \ \Rightarrow\ \ AB \equiv CD,\ BC \equiv DA.$$

A partir da definição de paralelogramo, pode-se estabelecer a noção de seus casos particulares, cuja descrição em linguagem matemática é indicada a seguir:

- *losango* é um paralelogramo equilátero ($ABCD \mid AB//CD,\ BC//DA,\ AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA$);
- *retângulo* é um paralelogramo *equiângulo*, isto é, cujos ângulos internos são todos congruentes ($ABCD \mid AB//CD,\ BC//DA,\ \angle A \equiv \angle B \equiv \angle C \equiv \angle D$)[16];
- *quadrado* é um paralelogramo *regular*, isto é, um polígono equiângulo e equilátero ($ABCD \mid AB//CD,\ BC//DA,\ AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA,\ \angle A \equiv \angle B \equiv \angle C \equiv \angle D$).

Embora estas sejam as definições desses casos particulares de paralelogramos, em Cunha e Velasco (2019) observa-se que existem descrições mais simples do que estas apresentadas, não sendo entretanto consideradas como definições. Por exemplo, a frase

$$ABCD \mid AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA \tag{17}$$

[15] Na verdade, na definição de paralelogramo exige-se que o quadrilátero $ABCD$ seja *convexo* (conceito este não tratado neste artigo). Porém, é possível provar que a condição de convexidade pode ser suprimida, pois o fato de os lados opostos serem paralelos já garante que o quadrilátero é convexo.

[16] Na verdade, como retângulo é um quadrilátero equiângulo, e a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é sempre $360°$, tem-se que todos os seus ângulos internos são retos.

também descreve, em linguagem matemática, que $ABCD$ é um losango, pois todo quadrilátero equilátero (que é o significado da frase (17)) é necessariamente um paralelogramo (isso pode ser provado) e, consequentemente (por também ser equilátero), é um losango. Porém, enfatizamos que (17) não representa uma definição de losango, visto que a essência de um losango é ele ser um **paralelogramo e equilátero**, mas sim uma descrição mais simples desse quadrilátero, decorrente de uma propriedade.

Comparação entre *Geometriquês* e *Algebrês*

Como dito anteriormente, o estudo da Gramática da Linguagem Matemática, e seus dialetos, permite descrever um determinado conceito matemático (ou uma determinada propriedade) *exclusivamente* em linguagem matemática, isto é, sem o auxílio da língua portuguesa (ou de qualquer outra língua natural). Para ilustrar as particularidades dos dialetos, façamos um paralelo entre o *Geometriquês* e o *Algebrês.*

As regras gramaticais que caracterizam um determinado objeto são, digamos, mais simples em *Algebrês* do que em *Geometriquês*. Por exemplo, *constantes desconhecidas* e *variáveis* (*reais* ou *inteiras*) são normalmente caracterizadas por um subconjunto de letras do alfabeto latino (em minúsculas), a saber (CUNHA; VELASCO, 2019): *constantes desconhecidas inteiras* são nomeadas pelas letras latinas k, m e n; enquanto que *constantes desconhecidas reais*, pelas primeiras letras do alfabeto latino $a, b, c, \ldots$ Por outro lado, *variáveis inteiras* são nomeadas pelas letras latinas[17] i, j e k; enquanto que *variáveis reais*, pelas últimas letras do alfabeto latino x, y e z.

Além disso, caso necessitemos utilizar outras letras (do alfabeto latino ou mesmo grego) para representar valores, inteiros ou reais, em função da situação a ser descrita, basta indicarmos a que conjunto este valor *pertence*. Por exemplo, $p \in \mathbb{N}$ e $t \in \mathbb{R}$, para indicar, respectivamente, que p é um valor inteiro positivo e t, um valor real.

Há ainda outros exemplos, como o de um número par, representado por $2k$. Na verdade, a palavra $2k$ indica *o dobro de* k, cujo valor é obtido pela operação $2 \times k$; daí a formação da palavra por justaposição de 2 (indicando dobro ou fator multiplicador 2) e k . Assim, para *definir* um número par, é necessário dizer "um objeto *que* possui determinada característica (ou propriedade)"; desta forma a definição de um número par é dada por

$$m \mid m = 2 \times k.$$

Por outro lado, alguns objetos geométricos (ou propriedades) necessitam ser descritos com detalhes, visto que em muitos casos, estes não possuem um nome específico em linguagem matemática, necessitando assim serem descritos por suas características essenciais ou propriedades. Por exemplo, lembramos que um *paralelogramo* (que não possui um nome específico em linguagem matemática) é um *quadrilátero cujos lados opostos são paralelos*. Assim, para descrever um paralelogramo, em linguagem matemática, é necessário caracterizá-lo como quadrilátero *que* possui os lados opostos paralelos; em outros termos, como visto em (16),

[17] Observe que k é então uma palavra *polissêmica*.

$$ABCD \mid AB//CD,\ BC//DA$$

indica que o *quadrilátero* $ABCD$ possui lados opostos paralelos, representando portanto um paralelogramo.

Desta forma, para descrever, em *Geometriquês*, a propriedade de que "*As diagonais de um paralelogramo se intersectam em seus respectivos pontos médios.*" (propriedade mais conhecida como "*As diagonais de um paralelogramo se cortam ao meio.*"), uma propriedade relativamente simples, é necessário descrever um paralelogramo e dizer que suas diagonais se intersectam em um ponto, que não é um ponto qualquer, mas o ponto médio de cada uma das diagonais. Antes, porém, lembremos que "as *diagonais* de um quadrilátero convexo são os segmentos que ligam um vértice a seu oposto (isto é, ao vértice não adjacente)" (CUNHA; VELASCO, 2019). Assim, a frase

$$ABCD \mid (AB//CD,\ BC//DA) \Rightarrow AC \cap BD = \{M\},\ AM \equiv MC,\ BM \equiv MD$$

descreve esta propriedade em linguagem matemática.

Observemos agora uma propriedade de Álgebra: "*O quadrado de um número inteiro que termina por* 6 *também termina por* 6.". Ora, um número inteiro que termina por 6 possui algumas dezenas e 6 unidades; em *Algebrês*, $10k + 6$ (uma locução, onde k representa a quantidade de dezenas); o quadrado de um número é descrito pelo acréscimo do *sufixo superior* "2" à palavra que o representa (ou seja, 5^2, m^2, x^2 significam, respectivamente, o quadrado da constante 5, o da constante inteira desconhecida m e o da variável real x). Assim, "o quadrado de um número inteiro que termina por 6" (isto é, o quadrado de $10k + 6$) é escrito na forma[18] $(10k + 6)^2$. E, para dizer que este valor também termina por 6, se escreve

$$(10k + 6)^2 = 10m + 6.$$

É interessante notar que dentre as duas propriedades exemplificadas, a de Geometria é descrita, em português, com menos palavras do que a de Álgebra. No entanto, dada a necessidade, como dissemos, de descrever em detalhes um objeto em *Geometriquês*, sua expressão é bem maior do que a propriedade exemplificada em *Algebrês*. Isto faz com que seja necessário estar bem atento a cada característica descrita em *Geometriquês*.

Considerações Finais

O estudo da linguagem matemática como o de uma língua estrangeira visa facilitar a compreensão de expressões e textos matemáticos. O aprendizado de sua gramática e a aquisição de seu vocabulário (ainda que aos poucos) permitem uma melhor compreensão de textos escritos nesta linguagem, como ocorre com qualquer língua estrangeira. É o caso, por exemplo, de um alemão que tenha aprendido o português (isto é, o português, neste caso, é

[18] Observe a pontuação (THOMÉ; CUNHA, 2018 e CUNHA; VELASCO, 2019) indicando o quadrado de um número descrito na forma $(10k + 6)^2$. Sem a pontuação (ou seja, $10k + 6^2$) seria indicada a soma de k dezenas com o quadrado de 6.

a língua estrangeira). Após ter compreendido a formação de palavras, ele pode compreender que "*analogamente*" significa "***de maneira** análoga*", do mesmo modo que "*infelizmente*" significa "***de maneira in**feliz*" (ou seja, "***de maneira não** feliz*"). Inicialmente, este alemão pode necessitar fazer uma análise gramatical destas palavras para compreendê-las; mas, com o passar do tempo e com a utilização de tais termos, ele não necessitará mais de tal análise. E isto se reproduzirá com todas as palavras e conceitos aprendidos na língua portuguesa.

O mesmo ocorre com o aprendizado da linguagem matemática. Neste texto, por exemplo, foi apresentado parte do vocabulário do *Geometriquês*, como nomes de retas e semirretas, polígonos, ângulos (com seus diversos sinônimos), vértices, entre outros nomes de objetos, bem como parte do vocabulário associado a relação entre objetos (por exemplo, congruência e igualdade). Com este vocabulário adquirido, sabe-se, por exemplo, que qualquer coisa que se diga a respeito de

$$ABCD \mid AB//CD,\ BC//DA$$

trata-se de algo sobre um paralelogramo. Em outros termos, uma vez adquirido este vocabulário, não há mais necessidade de analisar gramaticalmente esta expressão para compreendê-la como a representação de um paralelogramo em *Geometriquês*. Aliás, nesta expressão, já se compreende a aquisição de duas outras palavras do vocabulário do *Geometriquês*, a saber: "$ABCD$" (quadrilátero) e "$//$" (paralelismo entre objetos).

Além disso, ainda considerando o vocabulário descrito neste artigo, pode-se descrever *exclusivamente* em linguagem matemática o Teorema de Pitágoras enunciado na Introdução[19]:

$$ABC \mid (\hat{A} = 90°) \;\Rightarrow\; (\overline{BC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2.$$

Desta forma, quando se compreende bem a linguagem matemática, não é mais necessário simplesmente "decorar" fórmulas e sim, compreender seu significado e exprimi-las nesta linguagem.

Referências

CUNHA, S.; VELASCO, J. *Introdução à Gramática da Linguagem Matemática.* Ed. Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2019. ISBN: 978-85-399-1047-3.

CUNHA, S.; VELASCO, J. *Los afijos en el lenguaje matemático* – In II CEMACYC – II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe. Cali (Colômbia). 2017 (29 de outubro a 1 de novembro). Disponível em <http://ciaem-redumate.org/cemacyc/index.php/ii_cemacyc/iicemacyc/paper/viewFile/77/8>. Acesso em 24/02/2019.

MICHAELIS. *Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa*. Melhoramentos. Disponível em <https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/>. Acesso em 24/02/2019.

[19] Lembrando que um triângulo retângulo é aquele que possui um ângulo reto. Além disso, sua *hipotenusa* corresponde ao lado oposto a esse ângulo, e seus catetos são os lados adjacentes a ele. Ademais, a menos de uma renomeação dos nomes dos vértices, podemos supor que o ângulo reto de um triângulo retângulo ABC possui vértice em A.

ROSA, J.J.; CUNHA, S.; VELASCO, J. *Definição versus Propriedade*. – In: II SENALEM – II Seminário Nacional de Linguagem e Educação Matemática – UERJ. Rio de Janeiro – RJ. 2018 (03 a 05 de dezembro). Disponível em < http://ii.senalem.ime.uerj.br/Definicao-versus-propriedade.pdf?attredirects=0&d=1>. Acesso em 24/02/2019.
THOMÉ, M.; CUNHA, S. *Eliminando ambiguidades de expressões aritméticas com uso de regras gramaticais da Linguagem Matemática*. – In: II SENALEM – II Seminário Nacional de Linguagem e Educação Matemática – UERJ. Rio de Janeiro – RJ. 2018 (03 a 05 de dezembro). Disponível em < http://ii.senalem.ime.uerj.br/Eliminando-ambiguidades-de-expressoes-aritmeticas.pdf?attredirects=0&d=1>. Acesso em 24/02/2019.

Jaime Velasco
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ/Rio de Janeiro/Brasil
jaimevelasco@ime.uerj.br
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3359-0038

Sueli Cunha
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ/Rio de Janeiro/Brasil
sueli.cunha@ime.uerj.br
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8655-1521