REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura, Ano 14, Número 31, p.270-291 ISSN: 1980-3141

Aplicação de regras matemáticas na perspectiva wittgensteiniana da linguagem

Application of mathematical rules in the wittgensteinian perspective of language

Pablo Roberto de Sousa Neto
Instituto Federal do Maranhão (IFMA) – MA/Brasil

RESUMO

O presente texto tem o objetivo de apresentar a perspectiva wittgensteiniana acerca da aplicação de regras matemáticas. Para tanto, buscamos subsídios na segunda fase da filosofia de Ludwig Wittgenstein (2013), com o intuito de mostrar que as interpretações subjetivas que fazemos sobre as regras matemáticas muitas vezes são investigadas em detrimento da linguagem. O trabalho foi dividido em três partes. A primeira parte trata sobre a perspectiva da linguagem wittgensteiniana. Na segunda, discorremos o que Wittgenstein pensa sobre o treinamento de seres humanos, no sentido do exercício assistido das regras matemáticas. Por fim, na terceira parte, apresentamos as análises dos dados produzidos em situação de aprendizagem durante encontros realizados com estudantes.

Palavras-Chave: Linguagem. Treino. Wittgenstein.

ABSTRACT

The present text aims to present the Wittgensteinian perspective on the application of mathematical rules. To this end, we seek subsidies in the second phase of Ludwig Wittgenstein Philosophy (2013), with the intent to show that the subjective interpretations we make about mathematical rules are often investigated at the detriment of language. The work was divided into three parts. The first part deals with the perspective of Wittgensteinian language. In the second, we discuss what Wittgenstein thinks about the training of human beings, in the sense of the assisted exercise of the mathematical rules. Finally, in the third part, we present the analysis of data produced in a learning situation during meetings with students.

Keywords: Language. Training. Wittgenstein.

Introdução

Como professor de matemática da Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica (RFEPCT), amparados por nossas memórias e experiências docentes, passamos a observar as relações de ensino e aprendizagem no âmbito da matemática durante a ministração de uma disciplina de Cálculo em um curso de graduação do Instituto Federal do Maranhão (IFMA). Nossas observações nos levaram à percepção de que tais relações necessitam de melhores estratégias, considerando o elevado índice de reprovação em tal disciplina bem como certos aspectos de aversão, por exemplo, a crença de que "a matemática é difícil e é para poucos" (SILVEIRA, 2005, p. 21).

Percebemos durante a ministração da disciplina a necessidade de se trabalhar com simplificação e fatoração de expressões algébricas, tendo em vista as dificuldades dos estudantes com relação a esses conteúdos. Assim, com base nos escritos do filósofo austríaco Ludwig Wittgenstein (1889-1951) sobre linguagem e treinamento, buscamos compreender como os estudantes procedem com a aplicação de regras matemáticas, atentando para a leitura que fazem das regras quando estão em situação de aprendizagem, os conceitos e os contextos que esteiam seus pensamentos e os passos do seguimento dessas regras. Para tanto, propusemos estudar esses conteúdos, fora do horário da disciplina, tendo em vista dissolver essas dificuldades.

Desse modo, visando sustentar nossas ideias, determinamos inicialmente os fundamentos teóricos que contribuem com o conceito de seguir regras no âmbito da matemática, asseverando a compreensão dos significados apenas nos aspectos da linguagem, em detrimento de concepções que apostam a compreensão dos significados fora da linguagem, tal como no mundo empírico (exterior) ou mental (interior).

Este trabalho se configura, portanto, como uma pesquisa de abordagem qualitativa empírica com produção de dados que se pauta nos estudos das ciências sociais, considerando a educação um campo desta, com ênfase na educação matemática. Com relação aos objetivos, trata-se de uma pesquisa descritiva, onde a opinião dos agentes sociais, suas atitudes e valores fazem parte do plano da subjetividade humana (MINAYO, 2010).

A produção de dados se deu pelos registros feitos por imagens fotografadas e registros realizados no diário de campo do pesquisador das situações de aprendizagem dos estudantes quando estavam praticando exercícios sobre os conteúdos trabalhados, tendo em vista o desenvolvimento dos argumentos que contribuíram para o seguimento dos passos adotados nos exercícios propostos. Os relatos dos estudantes foram registrados por meio da gravação de áudios durante a pesquisa, considerando os aspectos dos *jogos de linguagem,* durante o treino de aplicação de regras matemáticas. Os registros não se ativeram apenas às resoluções das questões feitas pelos estudantes, mas também sobre as várias formas de expressão dos seus pensamentos, como seus argumentos, crenças, certezas, manipulações, confusões etc.

O trabalho foi dividido em três partes. A primeira trata sobre a perspectiva da linguagem da segunda fase da filosofia de Wittgenstein. Na segunda, discorremos o que Wittgenstein pensa sobre o treinamento de seres humanos, no sentido do exercício assistido das regras matemáticas. Por fim, na terceira parte, apresentamos as análises dos dados produzidos em situação de aprendizagem durante os encontros realizados com os estudantes, denotados neste trabalho por nomes fictícios.

A perspectiva wittgensteiniana da linguagem

A perspectiva wittgensteiniana trabalhada neste texto é a das *Investigações Filosóficas,* livro publicado postumamente em 1953. Os comentadores de Wittgenstein atribuem a essa fase do pensamento wittgensteiniano a expressão "segundo Wittgenstein". Nessa segunda fase do pensamento a visão do filósofo se expande a ponto de abandonar quase por completo sua primeira tese, ou seja, a perspectiva da linguagem que ele próprio faz críticas nas páginas iniciais das Investigações Filosóficas sobre a visão referencial da linguagem proposta por santo Agostinho na obra *Confissões*. A essência que buscava santo Agostinho para o significado das palavras foi refutada por Wittgenstein em sua nova filosofia. Daí passou a considerar que a linguagem não poderia ser reduzida a condição de ferramenta do pensamento como instrumento de descrição e representação (WITTGENSTEIN, 2013). Por essa perspectiva, seus argumentos e cogitações encetaram o sentido de que o significado de uma palavra não poderia ser dado exclusivamente de forma designatória, passando com isso a adotar o seguinte princípio para a sua nova filosofia, a chamada máxima wittgensteiniana: "O significado de uma palavra é seu uso na linguagem" (WITTGENSTEIN, 2013, p. 38).

A partir dessas ilações, o filósofo austríaco passa a mudar o rumo e a forma de enxergar o mundo pelo viés da linguagem, enfatizando que o *significado* de uma palavra depende do seu *uso* conforme o *contexto* de utilização. Dessarte, caso uma palavra seja pronunciada de forma isolada ou dentro de outro contexto, seu significado pode diferir de um contexto para o outro, isso depende das regras estabelecidas para cada contexto. Portanto, as significações atribuídas às palavras "são criadas no específico contexto local de utilização e são estritamente limitadas aos contextos" (BLOOR, 1986, p. 396).

Nas Investigações Filosóficas, Wittgenstein apresenta a expressão *jogo de linguagem*, cujo conceito amplia consideravelmente o universo de suas discussões acerca das diferentes interpretações sobre aquilo que falamos e suas aplicações dentro dos diversos tipos de contextos. Olhando por essa perspectiva, o autor das Investigações Filosóficas procura desvincular o sentido referencial da linguagem atribuído às palavras, contrapondo-se à ideia de concepções teóricas cognitivistas, a exemplo do construtivismo que busca o significado das palavras fora da linguagem (GOTTSCHALK, 2004).

O conceito de jogo de linguagem construído por Wittgenstein pode ser observado nas Investigações Filosóficas na passagem do aforismo vinte e três (§ 23), a saber:

> A expressão "*jogo* de linguagem" deve salientar aqui que falar uma língua é parte de uma atividade ou de uma forma de vida. Tenha presente a variedade de jogos de linguagem nos seguintes exemplos, e em outros:
> Ordenar, e agir segundo as ordens –
> Descrever um objeto pela aparência ou pelas suas medidas –
> Produzir um objeto de acordo com uma descrição (desenho) –
> Relatar um acontecimento –
> Fazer suposições sobre o acontecimento –
> Levantar uma hipótese e examiná-la –
> Apresentar o resultado de um experimento por meio de tabelas e diagramas –
> Inventar uma história; e ler –
> Representar teatro –
> Cantar cantiga de roda –
> Adivinhar enigmas –
> Fazer uma anedota; contar –
> Resolver uma tarefa de cálculo aplicado –
> Traduzir de uma língua para outra –
> Pedir, agradecer, praguejar, cumprimentar, rezar.

> – É interessante comparar a variedade de instrumentos da linguagem e seus modos de aplicação, a variedade das espécies de palavras e de frases com o que os lógicos disseram sobre a estrutura da linguagem. (Inclusive o autor do *Tratado Lógico-Filosófico*). (WITTGENSTEIN, 2013, p. 27).

A expressão *forma de vida* apresentada por Wittgenstein nas Investigações Filosóficas remete às práticas humanas que compartilham/socializam de contextos sociais: "lugar onde as múltiplas significações, ações, instituições dão vida à linguagem" (CONDÉ, 2012, p. 90). Com outras palavras, Wittgenstein sustenta a ideia dos jogos de linguagem numa perspectiva sociológica a que chamou de forma de vida.

As comunidades de seres humanos aquinhoam costumes, comportamentos, crenças etc., por meio de linguagens peculiares que contribuem com a realização de suas práticas cotidianas. Assim, dentro desses contextos sociais se formam, ao longo dos anos, através das experiências vivenciadas por todos aqueles que deles fazem parte, consensos para o uso das palavras, cujas compreensões se dão na socialização das convenções (regras) que compõem tais contextos (SOUSA NETO & SILVEIRA, 2018). Por conseguinte, cada sujeito quando interage em um meio social tem sua atuação configurada nas expressões de linguagem do modo de vida a que pertence, isto é, as aspirações que corrobora adquirem sentido dentro do jogo de linguagem no qual atua.

Wittgenstein explica o conceito de jogo de linguagem por meio de uma analogia que faz entre o jogo e a linguagem, considerando que para a prossecução tanto do jogo quanto da linguagem é necessário seguir regras. As palavras que são pronunciadas pelos sujeitos possuem sentido em diversos contextos de comunicação, mas cada sentido é regido por regras peculiares às formas de vida a que cada sujeito pertence. Podemos fazer uso de uma variedade de jogos de linguagem como descrito por Wittgenstein na citação acima, entretanto, as palavras são empregadas de diversos modos e seus sentidos usados de acordo com a necessidade de cada forma de vida, ou seja, o sentido está no contexto (SOUSA NETO & SILVEIRA, 2018).

Por exemplo, se em meio a várias pessoas 'gritarmos' a palavra *vela*, que sentido essas pessoas conceberiam? Como tal palavra possui sentido em vários contextos de comunicação, caso não especifiquemos o contexto essa pronúncia poderá dar margem a vários sentidos, tais como: pano com alta resistência usado nos mastros de embarcações, objeto feito de cera e pavio usado para iluminação, peça usada nos motores dos automóveis, sentinela, aparelho em formato cilíndrico usado como sonda nos hospitais etc.

Para se comunicar, ou seja, expressar por palavras o pensamento, as pessoas pronunciam palavras que atribuem significados mediante os conceitos formulados por meio de suas vivências com o uso dessas palavras na prática da linguagem exercida dentro do contexto social a que pertencem. À vista disso, fazem uso de regras públicas de linguagem que incorporaram ao longo de suas trajetórias de vida no exercício dos jogos de linguagem. Por meio do exercício desses jogos, adquiriram experiências e passaram a dar sentido às palavras que pronunciam em meio às suas práticas linguísticas. Assim, as pessoas estão compartilhando das mesmas regras de linguagem quando o que é pronunciado faz sentido tanto para quem pronuncia quanto para quem escuta (SOUSA

NETO & SILVEIRA, 2018).

O emprego das palavras conforme as regras de uso destas nas práticas linguísticas pelas formas de vida possibilita a percepção do sentido que se atribui nas pronúncias, concebido em tais práticas por meio das experiências que vinculam as palavras às atividades dos sujeitos. Por isso, na concepção wittgensteiniana, "'seguir a regra' é uma prática" (WITTGENSTEIN, 2013, p. 114).

A linguagem é uma atividade humana que se faz presente de diferentes modos nas mais diversas formas de vida. Dependendo do modo de vida das pessoas, o sentido dado a uma palavra pode ser tomado de outra maneira, como no exemplo supracitado. Assim, sujeitos que externam interpretações distintas de uma mesma proposição estão seguindo regras de jogos de linguagens diferentes. Os saberes inseridos nas diversas formas de vida, oriundos de inúmeros fatos históricos, estão impregnados na memória das pessoas. Cada forma de vida faz uso de regras peculiares que garantem o funcionamento de sua linguagem. Contudo, essas regras não são definidas *a priori* para serem seguidas de forma rígida e/ou ordenada, mas incorporadas ao longo dos anos através dos diálogos praticados no exercício dos jogos de linguagem (SOUSA NETO & SILVEIRA, 2018). Por meio desse exercício, os sujeitos constroem seus conceitos, o que possibilita atribuir significados às palavras, entretanto, "quando os jogos de linguagem mudam, há uma modificação nos conceitos, e, com as mudanças nos conceitos, os significados das palavras mudam também" (WITTGENSTEIN, 2000, p. 31).

O significado de uma palavra é obtido dentro do jogo de linguagem. Assim, aquilo que antes parecia uma designação passa a adquirir sentido quando se incorpora na linguagem do sujeito. A base do jogo de linguagem é seguir suas regras. Seguir regras faz parte da atividade humana, como seguir as regras jurídicas (leis) que abalizam o convívio social, as regras de trânsito ao fazer uso das vias públicas, as regras da matemática como necessidade de regular a atividade matemática etc. O processo de seguir regras é que permite compreender os significados atribuídos às palavras. Cada sentido é dado pela maneira com que se utilizam as palavras no jogo de linguagem, podendo adquirir outros sentidos se interpretadas em outros jogos de linguagem. Cada significado é subordinado às experiências com as palavras da maneira com que são utilizadas. Nenhum aspecto de significação se dá fora da linguagem, tudo aquilo que faz com que o sujeito atribua significado às palavras é oriundo da própria linguagem. Assim, na concepção de Wittgenstein, o "significado de uma palavra é um gênero de utilização desta. Porque é aquilo que aprendemos quando a palavra é incorporada na nossa linguagem" (WITTGENSTEIN, 2000, p. 31).

Através do conceito de jogo de linguagem, Wittgenstein nos faz refletir sobre o modo como utilizamos as palavras em meio às nossas práticas linguísticas. Assim, nos solicita a olhar, em vez de pensar, sobre como fazemos uso das palavras em nossas vidas, nos chamando a atenção para o fato de que se apenas olharmos o emprego das palavras encontraremos seus significados na própria linguagem, e não fora dela, como pensam os idealistas, realistas, dentre outros. Ademais, ele também nos mostra por meio de exemplos que não encontraremos nenhuma "essência por trás dos diferentes usos de uma palavra, mas apenas semelhanças entre eles" (GOTTSCHALK, 2013, p. 65), conforme a seguinte passagem das Investigações Filosóficas (§ 66):

> Observe, p. ex., os processos a que chamamos "jogos". Tenho em mente os jogos de tabuleiro, os jogos de cartas, o jogo de bola, os jogos de combate, etc. O que é comum a todos estes jogos? – Não diga: "*Tem que* haver algo que lhes seja comum, do contrário não se chamariam 'jogos'" – mas *olhe* se há algo que seja comum a todos. – Porque, quando olhá-los, você não verá algo que seria comum a *todos*, mas verá semelhanças, parentescos, aliás, uma boa quantidade deles. Como foi dito: não pense, mas olhe! (WITTGENSTEIN, 2013, p. 51).

A matemática institucionalizada trabalhada nas escolas também se configura como um jogo de linguagem. Os jogos de linguagens e a matemática se aparentam, pois ambos seguem regras. O sentido dado às expressões de linguagem utilizadas na matemática está no uso de suas regras. Segundo Wittgenstein, as proposições matemáticas não têm sua gênese em processos naturais. Os jogos de linguagem na matemática são independentes de qualquer realidade empírica, isto é, não se reduzem a um simples jogo em função de suas aplicações no mundo empírico. A matemática tem uma função normativa, ou seja, mostra em suas proposições o que tem sentido e o que não tem. As regras matemáticas foram instituídas de modo convencional. Trata-se de um jogo de linguagem consolidado ao longo dos anos e com regras bem definidas, uma construção humana. Ademais, caso "não houvesse um acordo completo, as pessoas também não aprenderiam a técnica que nós aprendemos" (WITTGENSTEIN, 2013, p. 292).

Partindo desse pressuposto, como se faz, então, para inserir o estudante nesse jogo de linguagem? Na década de 20, por um período em torno de seis anos, Wittgenstein, na fase de transição de seu pensamento para sua nova filosofia, ministrou aulas para crianças do ensino primário no interior da Áustria. Essa experiência contribuiu significativamente para uma reflexão sobre como somos inseridos em um jogo de linguagem como o da matemática. Ao longo das Investigações Filosóficas, ele nos mostra, por meio de exemplos, diversas situações de como um sujeito é inserido em determinado jogo de linguagem, tanto em jogos mais simples como em jogos complexos. Nesses exemplos, um termo bastante usado pelo filósofo é a palavra "treinamento". Dessarte, com o intuito de compreender qual o sentido dado ao uso de tal palavra, sobrelevamos alguns desses exemplos, voltando nossas observações para o contexto em que ela é empregada.

O treino em termos wittgensteinianos

Nas Investigações Filosóficas, Wittgenstein se refere a treinamento logo no início da obra quando faz uso da palavra "treinar" no § 5, onde propõe que se pense no exemplo abordado no § 1, nos solicitando para refletirmos sobre um tipo de emprego de um modo primitivo de linguagem, como descrito a seguir:

> Pense agora no seguinte emprego da linguagem: eu envio alguém às compras. Dou-lhe uma folha de papel onde se encontram os signos:

> "cinco maçãs vermelhas". Ele leva o papel ao comerciante. Este abre a gaveta sobre a qual está o signo "maçã". Ele procura a palavra "vermelho" numa tabela e encontra defronte a ela uma amostra de cores. Ele diz a sequência dos numerais – suponho que ele a saiba de cor – até à palavra "cinco", e a cada número tira da gaveta uma maçã que tem a cor da amostra. – Da mesma forma, operamos com palavras. – "Como ele sabe onde e como deve procurar a palavra 'vermelho' e o que tem que fazer com a palavra 'cinco'?" – Ora, suponho que ele *aja* conforme descrevi. As explicações encontram um fim em algum lugar. – Qual é o significado da palavra 'cinco'? – Aqui não se falou disso, mas somente de como a palavra 'cinco' é usada (WITTGENSTEIN, 2013, p. 16).

Com menção desse exemplo, Wittgenstein faz uso da palavra "treinar" no § 5 referindo-se à linguagem inicial a ser praticada por uma criança pertencente a essa forma de vida, enfatizando que quando uma criança está aprendendo a falar, ela não questiona o significado da palavra, apenas faz uso conforme é instruída. Nessa fase, a criança não consegue exteriorizar os seus desejos, pois ainda não foi inserida no jogo de linguagem. Segundo Wittgenstein, "ensinar a linguagem aqui não é explicar, mas treinar" (WITTGENSTEIN, 2013, p. 17).

Outro exemplo em que Wittgenstein fala sobre treinamento está no § 6. Nesse aforismo o filósofo refere-se à linguagem usada por um construtor e seu ajudante, a que chamou de A e B, respectivamente, sobre determinados comportamentos com relação a alguns materiais usados na construção civil, onde nos faz refletir sobre o modo de como um aprendiz é treinado a fazer uso das palavras "bloco", "coluna", "laje" e "viga", como descritas no § 2 e no § 6, respectivamente:

> A linguagem deve servir ao entendimento de um construtor A com um ajudante B. A constrói um edifício usando pedras de construção. Há blocos, colunas, lajes e vigas. B tem que lhe passar as pedras na sequência em que A delas precisa. Para tal objetivo, eles se utilizam de uma linguagem constituída das palavras: "bloco", "coluna", "laje", "viga". A grita as palavras; – B traz a pedra que aprendeu a trazer ao ouvir esse grito. – Conceba isto como uma linguagem primitiva completa (WITTGENSTEIN, 2013, p. 16).

> Poderíamos imaginar que a linguagem no § 2 é toda a linguagem de A e B; e até, toda a linguagem de um povo. As crianças são educadas para executar essas atividades, para usar essas palavras e para reagir dessa *maneira* às palavras dos outros.
> Uma parte importante do treinamento consistirá em o instrutor apontar para objetos, dirigir a atenção da criança para eles enquanto profere uma palavra, por exemplo, a palavra "laje", mostrando esta forma. (Não quero chamar isto de "explicação ostensiva" ou de "definição", porque a criança ainda não pode *perguntar* pela denominação. Quero chamar isto de "ensino ostensivo das palavras". – Digo que esta é uma parte importante do treinamento, porque é o que ocorre entre as pessoas e não porque não dá para imaginar outra coisa.) (WITTGENSTEIN, 2013, p. 17-18).

Em tais passagens, Wittgenstein nos faz refletir sobre um determinado grupo de pessoas que partilham de uma linguagem primitiva que é composta por algumas poucas palavras que remetem a determinados materiais usados na construção civil, prática realizada por todos os integrantes dessa forma de vida. A linguagem usada pelas pessoas que compõem esse grupo é considerada completa e se limita tão somente à pronúncia das palavras: bloco, coluna, laje e viga. Trata-se de uma linguagem simples socializada a todos os sujeitos pertencentes ao grupo. Desse modo, todos os sujeitos seriam treinados para pegar os objetos à medida que ouvissem "o grito" de seus respectivos nomes (sons). Assim, cada sujeito vai aprendendo a linguagem de acordo com as instruções passadas por aqueles sujeitos que já fazem parte desse jogo de linguagem, que procuram chamar a atenção dos aprendizes apontando para o objeto e dizendo o nome correspondente à medida que deles precisam.

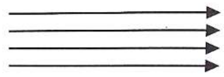
Nessa perspectiva, surge então a pergunta: como saber se uma criança aprendeu a relacionar o nome dito pelo adulto (som) com o material de construção específico? Seria por meio da reação apresentada pela criança, se ela foi ou não pegar o objeto que corresponde ao som que ouviu?

Conforme descrito na passagem acima, apontar e "gritar" o nome do objeto é uma parte importante do treinamento. Assim, almejando que a criança pegue o objeto certo de acordo com o som que ela ouviu o adulto lhe mostra o objeto e faz com que sua atenção se volte para ele, ou seja, mostra à criança como se faz e espera que ela faça o mesmo. Caso a criança tenha uma reação diferente da esperada, o adulto a corrige e lhe mostra novamente como se deve fazer, isto também faz parte do treinamento. Dessa maneira, a criança é estimulada aos poucos a reagir conforme os comandos dados pelo adulto. E a garantia de que realmente aprendeu está na reação de pegar o objeto de acordo com a ordem recebida. Compreender a ordem nesse simples jogo de linguagem é "ser capaz de seguir a regra expressa pelo som da palavra internamente ligada ao gesto indicativo de direção" (GOTTSCHALK, 2013, p. 66).

O objetivo não é contemplar imagens quando se aponta para o objeto e "grita" o seu nome, mas simplesmente pegar o objeto conforme a ordem que foi dada. O treinamento é realizado de acordo com as reações da criança, a qual demonstra por meio do seu agir, se aprendeu ou não. Portanto, as crianças são treinadas para seguir regras. Aos poucos são inseridas nas práticas sociais da forma de vida na qual pertencem.

Em outra passagem das Investigações Filosóficas, no § 86, Wittgenstein usa a linguagem descrita no § 2 para descrever um tipo de treinamento onde um aprendiz seria inserido no jogo de linguagem dos construtores por meio de uma relação de correspondência com base em elementos descritos em uma tabela:

> Joga-se um jogo de linguagem como (2) com o auxílio de uma tabela. Os signos que A dá a B são os caracteres. B tem uma tabela; na primeira coluna estão os signos que são usados no jogo; na segunda, figuras de formas de pedra de construção. A mostra a B um tal caractere; B procura-o na tabela, olha para a figura que se encontra em frente, etc. A tabela é, portanto, uma regra pela qual ele se orienta ao executar a ordem. – Aprende-se a procurar uma figura na tabela com treinamento, e uma parte deste treinamento consiste em o aluno aprender a percorrer a tabela com

> o dedo, em sentido horizontal, da esquerda para a direita; assim ele aprende, digamos, a traçar uma série de riscos horizontais.
> Imagine então que fossem introduzidas as maneiras diferentes de ler a tabela, a saber: uma vez, como acima, segundo o esquema:
>
> 
>
> outra vez segundo este esquema:
>
> 
>
> ou segundo um outro esquema. – Um tal esquema é anexado à tabela como regra que indica como ela deve ser usada.
> Não podemos imaginar agora outras regras para a explicação *desta*? E, por outro lado, estava incompleta aquela primeira tabela sem o esquema de setas? E o são as outras tabelas sem os seus esquemas? (WITTGENSTEIN, 2013, p. 62).

Aqui o aprendiz procura relacionar a palavra bloco, coluna, laje e viga com a imagem correspondente. Wittgenstein nos chama a atenção para a maneira com que o aprendiz busca na tabela a imagem que corresponde à palavra mostrada pelo construtor. Ele relaciona a palavra com a figura correspondente sempre olhando a tabela na linha horizontal da esquerda para a direita. Ele foi treinado assim! A maneira de ler a tabela lhe foi convencionada dessa forma.

Wittgenstein também evidencia outras formas diferentes de relacionar a palavra com a figura corresponde, isto é, outras formas de ler a tabela. Para o filósofo, a tabela não contém em si mesma a regra de seu uso, ou seja, não consta escrito na tabela como devemos proceder. Como exemplo, no aforismo anterior, ele nos faz refletir sobre nossa reação ao nos depararmos com uma placa de orientação com uma seta indicativa de direção, tipo as placas de trânsito. Seguramente nós seguiremos a direção dada pela seta desenhada na placa. Para nós, isso é uma reação natural (automatismo), se a seta aponta para a direita, seguiremos para a direita, caso ela aponte para a esquerda, seguiremos para a esquerda. Na concepção de Wittgenstein, isso ocorre porque assim fomos treinados. Com outras palavras: fomos inseridos no jogo de linguagem das placas de orientação.

O que garante, então, que não seguiremos o caminho contrário ao indicado pela seta na placa? "Mas onde está dito em qual sentido eu devo segui-la, se na direção da mão ou (p.ex.) na direção oposta?" (WITTGENSTEIN, 2013, p. 61). Não há nada na placa determinando o caminho que devemos seguir. A regra aqui é seguir a placa de orientação, foi esse o treinamento que nos deram. Mas, o que a placa de orientação "tem a ver com as minhas ações? Que tipo de ligação existe entre elas? Bem, talvez a seguinte: fui treinado para ter uma determinada reação frente a este signo, e é assim que reajo agora" (WITTGENSTEIN, 2013, p. 112).

Para Wittgenstein, os signos foram instituídos por convenção, uma construção humana, não os concebemos de forma natural. Existe um jogo de linguagem composto pela gramática das placas de orientação. Fomos instruídos para poder participar desse jogo de linguagem em meio a uma forma de vida, por isso, agimos conforme suas regras. Caso fossemos treinados a seguir o lado oposto da seta de orientação, assim, o faríamos. É uma questão de convenção, apenas nos apropriamos das regras do jogo de linguagem. Portanto, "seguir uma regra, fazer uma comunicação, dar uma ordem, jogar uma partida de xadrez, são *hábitos* (usos, instituições)" (WITTGENSTEIN, 2013, p. 113).

Outro momento em que Wittgenstein faz uso do termo treinamento consta num excerto do § 189, onde se refere à reação das pessoas diante do uso de uma fórmula algébrica sobre as passagens que se seguem nas resoluções dos problemas matemáticos, a saber:

> Empregamos a expressão: "as passagens são... determinadas por uma fórmula". *Como* ela é empregada? – Talvez possamos falar do fato de as pessoas serem levadas, através da educação (treinamento), a empregar a fórmula $y = x^2$ de tal maneira que todos, quando substituem o mesmo número por x, calculam o mesmo número por y. Ou podemos dizer: "Estas pessoas são treinadas de tal maneira que todas, à ordem '+ 3', fazem a mesma passagem no mesmo nível. Poderíamos expressá-lo assim: A ordem '+ 3' determina plenamente para essas pessoas cada passagem de um número para o número seguinte". (Em contraposição a outras pessoas que, dada a ordem, não sabem o que têm de fazer; ou que reagem com plena segurança, mas cada qual à sua maneira.)
> Por outro lado, podemos opor umas às outras as diferentes espécies de fórmulas e as diferentes espécies de aplicação pertinentes (diferentes espécies de treinamento) (WITTGENSTEIN, 2013, p. 107).

Em um jogo de linguagem mais complexo do que o do construtor e seu ajudante como o de realizar operações com números na aritmética somos também treinados a seguir regras. Por exemplo, quando um professor solicita que um estudante calcule o resultado da potência 2^3, espera que esse estudante calcule da mesma maneira que ele, o professor, calcula. O cálculo da potência exige um treinamento de iniciação do aprendiz no jogo de linguagem da aritmética. Os signos e as regras desse jogo de linguagem são apresentados ao aprendiz, daí ele passa a fazer uso em diversas situações sob a orientação do professor. Esperar que o aprendiz calcule a potência do mesmo modo que o professor calcula, isto é, que o aprendiz siga as mesmas passagens que o professor segue, é de se supor que ambos passaram por treinamentos semelhantes.

Wittgenstein nos faz refletir sobre o modo de resolução dos problemas matemáticos quanto às suas passagens, ou seja, sobre o motivo pelo qual todos os participantes desse jogo de linguagem quando realizam um determinado cálculo encontram o mesmo resultado. Ao solicitar que um aprendiz calcule, por exemplo, com o uso da fórmula $y = x^2$, o valor de y para $x = 3$, o professor já dispõe de um modelo em sua mente com todas as passagens bem definidas e espera que o aprendiz proceda em sua resolução do mesmo modo. O aprendiz, por sua vez, procede em suas resoluções da forma como compreendeu as explicações do professor, isto é, o aprendiz também tem em mente um modelo para resolver o problema. Em sua concepção, sua maneira de resolução seria semelhante a do professor, foi assim que ele intuiu o sentido da explicação que recebeu. "É *assim*, portanto, que ter-em-mente pode, de antemão, determinar as passagens" (WITTGENSTEIN, 2013, p. 108).

Não é nossa intenção aqui dar uma definição específica do termo treinamento, mas nos orientar por meio da terapia filosófica que Wittgenstein nos proporciona através de seus diversos exemplos, onde diz, ou melhor, nos mostra como um sujeito é inserido em um jogo de linguagem, para assim situarmos o sentido com que empregaremos neste trabalho.

Segundo Wittgenstein, "seguir uma regra é análogo a cumprir uma ordem. Treina-se para isto e reage-se à ordem de uma maneira determinada" (WITTGENSTEIN, 2013, p. 114). Mas como entender isso "se a reação das pessoas tanto diante da ordem como diante do treinamento é diferente: um reage *assim* e o outro de *modo diferente*? Quem está então com a razão?" (WITTGENSTEIN, 2013, p. 114). Com o intuito de nos levar a uma resposta a tal pergunta, Wittgenstein remete nossa reflexão sobre o conceito de "regularidade". Qual seria, então, o sentido do termo regularidade na concepção wittgensteiniana? Gottschalk faz a seguinte leitura: "*ser regular não significa ser uniforme*. A regra não determina a ação. Duas pessoas que reagem a uma ordem diferentemente podem ter razão, há um espaço de manobra, que é dado pelo jogo de linguagem" (GOTTSCHALK, 2013, p. 68). Por conseguinte, a linguagem matemática "é baseada em regularidades, em acordos sobre ações: $3 + 2 = 5$ porque 5 é o resultado comum a todas as pessoas que praticam a ação de somar 3 e 2" (SILVEIRA, 2017, p. 81).

Para que possamos compreender o sentido atribuído à palavra regularidade, Wittgenstein nos propõe que imaginemos uma situação onde configuraríamos como um sujeito pesquisador que fosse realizar uma determinada pesquisa num determinado país em que a língua seria completamente por nós desconhecida. Posteriormente, nos faz refletir sobre o seguinte questionamento: "Em que circunstâncias você diria que as pessoas de lá dão ordens, entendem as ordens, cumprem ordens ou se insurgem contra elas etc.?" (WITTGENSTEIN, 2013, p. 115). Poderíamos, em nossa terapia, por exemplo, nos perguntar: como iremos compreender se uma pessoa está dando uma ordem à outra, ou cumprindo, se não conhecemos o sentido empregado nos sons (palavras) que emitem ao falar? E mesmo que conhecêssemos os sentidos desses sons, seriam eles os mesmos que os nossos? E os instrumentos linguísticos a que fazem uso como o gesto de apontar, as expressões faciais, os movimentos corporais etc., se configuram assim como os nossos? Para compreender isso, Wittgenstein nos chama a atenção para "o modo de agir comum dos homens". Para ele, seria esse modo de agir comum "o sistema de referência por meio do qual interpretamos uma língua estrangeira" (WITTGENSTEIN, 2013, p. 115). Sobre isso, Gottschalk complementa afirmando que "é a regularidade entre sons e modos de agir que permite a comunicação e a compreensão de uma língua" (GOTTSCHALK, 2013, p. 68). Assim, segundo Wittgenstein, só se pode "falar alguma coisa quando se aprendeu a falar. Se alguém, portanto, *quer* dizer alguma coisa, tem que ter aprendido para tanto, tem que ter aprendido a dominar uma língua; e, por certo, é evidente que pode-se querer falar, sem ter que falar" (WITTGENSTEIN, 2013, p. 148).

O treinamento além de se fazer necessário para iniciar o estudante nos jogos de linguagem, configura-se como garantia das regularidades que sustentam o funcionamento desses jogos. Ademais, o processo do treinamento mostra como devemos seguir as regras que regulamentam os jogos de linguagem. Wittgenstein nos mostra, no § 208 das Investigações Filosóficas, técnicas de como proceder num treinamento, vejamos:

> Para alguém, digamos, que só fala francês, vou explicar essas palavras mediante outras palavras francesas correspondentes. Mas, quem não possui ainda esses *conceitos*, vou ensiná-lo a usar as palavras mediante *exemplos* e *exercícios*. – E não vou lhe transmitir menos do que eu mesmo sei.
> Nesta instrução vou lhe mostrar, portanto, as mesmas cores, os mesmos comprimentos, as mesmas figuras, vou fazê-lo encontrá-las e produzi-las etc. Vou instruí-lo a dar continuidade a ornamentos em série, "uniformemente", seguindo uma ordem. – Além disso, vou instruí-lo a dar continuidade a progressões. E assim, por exemplo, seguindo . .. ... continuar assim: ....
> Mostro-lhe como se faz, ele faz como lhe mostro; e eu o influencio mediante manifestações de consentimento, de rejeição, de expectativa, de animação. Deixo-o fazer, ou impeço-o de fazer; etc. (WITTGENSTEIN, 2013, p. 115-116).

Como podemos observar nos escritos acima, Wittgenstein nos mostra como treinar um estudante de modo a inseri-lo num jogo de linguagem. Caso ele fale determinada língua estrangeira, o treinaremos considerando o vocabulário de sua língua. Caso contrário, mostraremos por meio de exemplos e exercícios de forma semelhante à que fomos inseridos no jogo de linguagem. Mostraremos como ele deve fazer e passaremos a acompanhar seus passos com o objetivo de que ele faça da maneira como fazemos. Caso ele faça o uso inadequado da regra, devemos nos manifestar com o propósito de corrigi-lo, mostrando-o como se deve fazer, para que aprenda a usar a regra de forma correta, ou seja, da maneira com que ela foi instituída. Entretanto, se a resolução do problema estiver tomando um caminho certo, isto é, de acordo com as passagens que temos em mente, considerando que passamos por treinamentos análogos, devemos encorajá-lo a continuar, dizendo palavras de incentivo, tais como: "muito bem!", "é isso mesmo!", "parabéns!", "continue!" etc.

Ressaltamos também a insatisfação de diversos teóricos da educação sobre o termo "treinamento" usado por Wittgenstein. Alguns aduzem que Wittgenstein compara o treinamento de seres humanos ao treinamento de animais, como cachorro, cavalo etc. Outros remetem ao retrocesso das práticas educacionais em que configurava o estudante como um mero ser passivo em sala de aula. Também pode estar por traz dessas críticas, a tradução da palavra treinamento, que na língua alemã se escreve como *Abrichtung*, cujo significado é adestramento, termo usualmente utilizado pelo senso comum para se referir ao treinamento de animais. Tudo isso pode ser motivado pela não compreensão do sentido da palavra treinamento empregada por Wittgenstein nas Investigações Filosóficas, vista neste trabalho por meio do contexto em que ela é empregada. Para nós, tais críticas, são apenas pontos de vista em meio a vários outros. Faremos aqui uso das palavras de

Gottschalk em defesa da filosofia wittgensteiniana: “Investigar estas diferenças de desempenho não compete ao filósofo, mas a ramos das ciências empíricas que se interessam por processos psicofisiológicos, e que possuem outras finalidades de investigação” (GOTTSCHALK, 2013, p. 66).

Nestes aspectos, com base nas seguintes palavras do próprio Wittgenstein: “O fundamento de qualquer explicação está no treinamento (os educadores deveriam se lembrar disso)” [1] (tradução nossa), passaremos a analisar a ‘desenvoltura’ dos estudantes do IFMA ao longo do treinamento a que foram submetidos, evidenciando pontos relevantes que possam assistir o desvelamento desta pesquisa quanto aos contributos do treino de aplicação de regras na aprendizagem da matemática.

Discussão e resultados

Os textos matemáticos são regidos por regras que buscam em linguagem cifrada sentido para suas proposições. Assim, impende ao professor de matemática e aos estudantes interpretá-las, almejando compreender seus significados. O professor no exercício da docência utiliza-se de vários meios com o propósito de cumprir com seu papel de ensinar. Entretanto, ele não tem acesso ao pensamento do estudante, é por meio da linguagem que conduz seu trabalho no âmbito do ensino, visando em meio ao diálogo compreender as palavras pronunciadas pelo estudante, como também contribuir para a expansão de seu vocabulário. Pensando por esse viés, percebemos a necessidade do estudante em se apropriar da linguagem matemática como algo imprescindível para a compreensão das regras matemáticas e suas aplicações.

A linguagem que nós professores usamos em sala de aula é polissêmica tal como a dos estudantes. Nesse sentido, os estudantes por não terem domínio da linguagem cifrada da matemática muitas vezes fazem leituras equivocadas/distorcidas sobre os significados das regras matemáticas. O professor de matemática usufrui de vivências com relação a linguagem matemática que lhe proporcionam uma maneira peculiar de interpretar as regras matemáticas. Contudo, não pode esperar do estudante que compreenda as regras matemáticas da mesma forma como compreende, uma vez que existe um modo característico de interpretá-las. Algo ainda não propício ao estudante que não foi submetido, conforme defendido pela filosofia wittgensteiniana, a um treinamento específico.

Por essa perspectiva wittgensteiniana, passamos a analisar como a incompreensão da linguagem matemática reflete na aplicação de regras matemáticas. Nossa concepção é formada pela ideia de que a matemática é também uma linguagem, que foi construída pela humanidade ao longo de sua história, com seus códigos, signos e regras bem definidos, cuja compreensão é vista como pré-requisito para que possamos desenvolver técnicas que nos possibilite agir conforme todos aqueles que participam desse jogo de linguagem. Assim, refletir sobre a matemática como uma linguagem, o modo como deve ser lida, o

---

[1] Aforismo número 419 de *Zettel.*

significado de seus códigos e simbologias, para quais fins suas regras foram instituídas etc., se faz necessário "para exorcizar as vertigens na matemática" (WITTGENSTEIN, 2013, p. 272).

Essas vertigens como chama Wittgenstein necessitam de esclarecimento, tendo em vista que

> a linguagem matemática com seus códigos, dentre outras coisas, representa de forma abreviada o texto escrito pela linguagem natural. Esta abreviatura surge por meio da formalização da linguagem, mas que comporta um resíduo indicador dos sentidos contidos no texto não abreviado, que foram suprimidos no processo de abreviação (SILVEIRA, 2014, p. 48).

Assim, com o propósito de disseminar estas incompreensões na matemática, buscamos interagir com os estudantes por meio de uma linguagem natural cotidiana, tencionando contextos possíveis de se criar conjecturas que pudessem nos ajudar a explicar os resíduos deixados pela formalização da linguagem matemática. Além de chamar a atenção dos estudantes para os equívocos cometidos na resolução de determinados problemas matemáticos, colocamo-los para fazer e refazer vários outros exercícios sobre situações que levariam a erros semelhantes. O propósito se firmou na ideia de que por meio da resolução assistida desses exercícios pudessem observar em suas resoluções os esclarecimentos que lhes foram dados, evitando, por conseguinte, cometerem erros semelhantes.

Nossa concepção versa sobre a ideia de que "somente de uma pessoa que é *capaz* disto e daquilo, que aprendeu e domina isto e aquilo, tem sentido dizer que ela vivenciou *isto*" (WITTGENSTEIN, 2013, p. 272). Isto é, quando um sujeito olha para determinado objeto matemático[2] a ponto de descrevê-lo imediatamente com rigor de detalhes diante da resolução de um problema matemático, significa dizer que esse objeto já lhe foi apresentado, por conseguinte, conhece seu significado, suas propriedades, aspectos, extensões etc. Além disso, deve de ter vivenciado tal objeto em diversas situações, seja por meio de exercícios realizados em diversos contextos ou por situações práticas através de aplicações matemáticas.

Uma primeira situação que trazemos para esta discussão diz respeito ao problema de simplificação da seguinte expressão algébrica: $\frac{x^2-9}{x+3}$. Para a simplificação dessa expressão há a necessidade do uso de uma regra matemática, a saber: $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$, isto é, a regra converte a diferença de dois quadrados no produto da soma pela diferença de dois termos, onde esses termos são respectivamente as bases das potências que representam os quadrados. Para tanto, é necessário preparar a expressão $x^2 - 9$ conforme o formato exigido pela regra, ou seja, a regra nos mostra como devemos

[2] Objeto matemático para fins do exposto neste artigo não trata dos objetos 'sensíveis' encontrados no cotidiano. Por conseguinte, números, expressões algébricas, figuras geométricas, funções e gráficos, por exemplo, são para nós representações de objetos matemáticos. Mesmo que abstratas tais representações são inteligíveis e compõem uma linguagem.

proceder. Assim, para o uso da regra é preciso escrever o número 9 de um modo diferente, tomando uma simbologia de outro contexto, o da potenciação. Saber ler a regra é compreender os resíduos contidos na abreviação da regra por meio dos símbolos matemáticos.

Na resolução desse problema, um dos estudantes (João) apresentou a seguinte resposta (Figura 01):

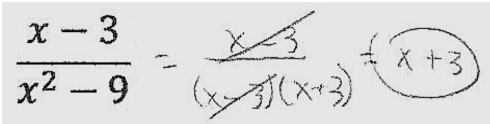


Figura 01: Resolução de João
Fonte: Fotografia tirada pelo autor

Observando a resolução apresentada por João, é possível notar que ele fez o uso correto da regra matemática escrevendo a expressão $x^2 - 9$ como $(x-3)\cdot(x+3)$. Porém, ao realizar a simplificação da fração algébrica $\frac{x-3}{(x-3)\cdot(x+3)}$, apresenta como resposta a expressão $x+3$. Aqui se percebe que ele não atentou para o fato de que ao dividir o numerador e o denominador da fração algébrica pela expressão $x-3$, restaria como resultado o número 1 no numerador e a expressão $x+3$ no denominador. Em sua resolução, simplesmente cancelou as expressões iguais presentes no numerador e denominador, apresentando como resposta aquilo que sobrou após o cancelamento, sem se preocupar com a existência do traço característico que distingue o numerador do denominador em uma fração.

Silveira (2008) também registrou em uma de suas pesquisas erros dessa natureza, enfatizando que alunos de uma disciplina de cálculo diferencial e integral durante o processo de derivação ou integração de uma função ao se depararem com situações como, por exemplo, simplificar a expressão $\frac{(x+1)}{(x+1)\cdot(x-1)}$, simplesmente simplificam e igualam a $x-1$, ao se depararem com um vazio no numerador. Isto é, "o aluno, com a intenção de simplificar a fração, depara-se com a "ausência do numerador". Como essa "ausência" o perturba, ele coloca o denominador na posição do numerador e acaba modificando o conceito" (SILVEIRA, 2008, p. 100).

A regra do cancelamento utilizada pelo estudante não remete simplesmente em eliminar os termos iguais no numerador e denominador de uma fração algébrica, essa é uma leitura feita pelo próprio estudante, é ele quem modifica o conceito. Mas a uma maneira de efetuar a divisão do numerador e denominador da fração por um divisor comum, tornando-a uma fração equivalente mais simples. O estudante quando faz o corte dos termos iguais apresentando como resposta simplesmente aquilo que 'sobra', parece não se dar conta do traço característico que simboliza o quociente de expressões algébricas quando apresenta o denominador como resposta. Caso essa dita 'sobra' ocorra no numerador, obviamente, não haveria problema, entretanto, o que ocorre é que o estudante demonstra não distinguir uma situação da outra.

Com o intuito de esclarecer essa questão e dissolver essas vertigens, buscamos dialogar com os estudantes a fim de discutir sobre o que diz a regra da simplificação de frações algébricas, comumente chamada em sala de aula de regra do cancelamento. Assim, indagamo-los sobre seus conceitos a respeito dessa regra, ou seja, qual compreensão eles têm da regra. Registramos algumas falas:

> *"Eu faço assim... quanto estou resolvendo questões... quando eu vejo coisas iguais em cima e em baixo... eu vou e corto" (Rafael, estudante do IFMA).*
>
> *"A gente faz do jeito que a gente vê o professor fazer... ele cancela os termos iguais e pronto... aí é só a gente escrever o que ficou" (Ana, estudante do IFMA).*
>
> *"Mas é isso mesmo que eu fiz professor... olha aqui... eu cancelei x menos três aqui em cima com esse aqui de baixo... aí sobrou aqui esse x mais três... aí como não sobrou mais nada... então a resposta é esse x mais três aqui... não é não?" (João, estudante do IFMA).*

Percebe-se nas falas registradas que nenhum deles mencionou algo relacionado à ideia de que simplificar frações significa dividir numerador e denominador por um divisor comum. O que eles têm em mente é que se existem termos iguais em "cima" e em "baixo", estes devem ser cortados/cancelados, foi esse o conceito que construíram. Outra observação é sobre o que contribui para a construção do conceito, como é possível perceber na fala de um deles, ao que parece, constroem seus conceitos a partir da fala do professor, ou melhor, a partir do que compreende daquilo que diz o professor.

Muitas vezes o professor durante a resolução de um problema matemático faz uso de regras matemáticas de forma rápida e sem esclarecer com detalhes o motivo pelo qual procede daquela forma. O estudante por sua vez ao assistir o professor realizando os 'cortes' em determinado cálculo, projeta um sentido para aquela atitude e procura repetir isso durante suas atuações em suas resoluções, sem se atentar para o contexto em que o professor utilizou aquela regra. E essa suposta 'certeza' se dissemina entre eles a ponto de uns concordarem com os outros, como é caso de João afirmando que foi assim mesmo que ele fez, acreditando ter seguido a regra corretamente.

O ato de cortar por cortar sem observar o contexto de uso da regra pode acarretar em outros erros além do sobredito, como podemos observar na resolução de Rafael (Figura 02) a seguir:

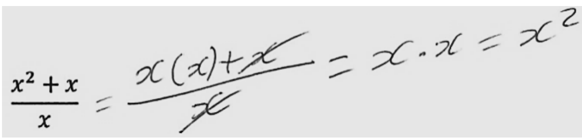


Figura 02: Resolução de Rafael
Fonte: Fotografia tirada pelo autor

O estudante corta o x do numerador com o x do denominador em seu processo de simplificação, agindo conforme intui a regra: "quando eu vejo coisas iguais em cima e em baixo... eu vou e corto". Entretanto, não observa que esse contexto difere do outro. Sua resolução apresenta no numerador uma operação de adição, e não de multiplicação, que inviabiliza a aplicação da regra como no outro caso. Essas falsas analogias realizadas pelos estudantes são concebíveis mediante o acesso que eles têm à linguagem matemática, que é por meio da linguagem natural cotidiana exercita em sala de aula. Lidar com a linguagem matemática implica em se apropriar de sua simbologia e regras, entretanto, o fato de simplesmente reconhecê-las não implica dizer que o estudante saiba utilizá-las corretamente, isso é fruto de instruções e usos.

Outra situação que registramos, diz respeito à resposta apresentada por Pedro na resolução de um problema semelhante (Figura 03). O estudante se dar conta da existência do traço característico da fração, porém demonstra também não ter compreendido o sentido da regra de simplificação, apresentando em seu resultado o número zero para representar aquele "vazio" no numerador, como segue:

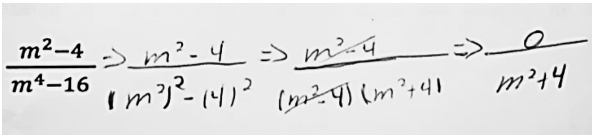


Figura 03: Resolução de Pedro
Fonte: Fotografia tirada pelo autor

Muitas vezes se fala em sala de aula sobre o cancelamento de dois termos em uma expressão algébrica, mas não necessariamente se especifica em que contexto isso é permitido, apenas se faz o corte, levando o estudante a confusões conceituais como essa. Ao que parece, para o estudante, cancelar termos em uma expressão algébrica implica em simplesmente suprimir esses termos da continuidade da resolução em detrimento do resultado que a simplificação pode gerar. É preciso deixar claro ao estudante para qual contexto a regra foi instituída, lhe mostrando também situações onde ela não se aplica, para que ele perceba as diferenças de contexto. Assim, confusões do tipo a seguir (Figura 04) poderiam ser evitadas:

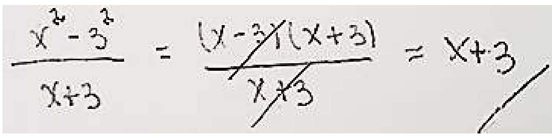


Figura 04: Resolução de Ana
Fonte: Fotografia tirada pelo autor

A estudante, na apresentação de sua resposta, em vez de apresentar a expressão $x - 3$, apresentou $x + 3$, demostrando o uso inadequado da regra. Considerando ser este um erro diferente dos demais, indagamos a estudante sobre o motivo que a levou a realizar o cancelamento das expressões $x - 3$ e $x + 3$, sendo elas diferentes. Sua resposta foi a seguinte:

> *"Eu achei que no caso aqui eu teria que resolver cancelando os sinais diferentes... no caso os simétricos... porque um positivo com um negativo dá zero" (Ana, estudante do IFMA).*

Percebemos por meio de sua resposta que a estudante faz confusão entre a regra de cancelamento usada na adição de termos simétricos, $a + (-a)$ que resulta em 0, com a regra de cancelamento usada no quociente de termos iguais, $\frac{a}{a}$ que resulta em 1, válida para $a \neq 0$. Essas confusões são recorrentes em sala de aula, muitos dos estudantes utilizam as regras matemáticas da maneira com que compreendem em face dos limites de seus vocabulários. Diversas regras matemáticas apresentam em seus signos significados próprios da matemática que exigem leituras específicas e que muitas vezes são feitas de maneira equivocada pelo estudante. Uma regra matemática não contém em si mesma suas instruções de uso. Este é um dos ofícios do professor: traduzir aos estudantes a linguagem matemática. Amiúde, o professor não procura explicar aos estudantes as restrições de uso das regras, apenas faz uso, como se o estudante já compreendesse a linguagem matemática. Assim, o estudante passa a fazer uso da maneira que intuiu a regra na explicação do professor, sem se atentar para o contexto adequado ao uso. Algumas vezes aplicando a contextos inapropriados, outras, distorcendo a regra para adaptar ao contexto que lhe convém.

Diante de tal problema, buscamos interagir com os estudantes provocando situações que pudessem fazer com que compreendessem o sentido de simplificar uma fração algébrica, ou seja, explicar o sentido com que as regras foram constituídas. Começamos por situações mais simples como a simplificação de frações numéricas. Apresentamos diversas frações numéricas e pedimos que eles as representassem por meio de números decimais, dividindo numerador por denominador. Na sequência, solicitamos que eles dividissem numerador e denominador de cada fração por um mesmo número natural não nulo e em seguida realizassem o mesmo processo, representando a fração resultante através de número decimal. Observando que obtiveram o mesmo resultado, argumentamos com eles que o fato de dividir numerador e denominador de uma fração por um mesmo número não muda seu valor no contexto numérico. Assim, explicamos que mesmo obtendo outro numerador e outro denominador não implicaria em outro resultado, pois as frações são equivalentes. Com a ideia desses exercícios argumentamos que com frações algébricas o processo é análogo. Desse modo, mostramos a eles que ao dividir numerador e denominador de uma fração algébrica por uma mesma expressão algébrica obtém-se outra fração algébrica, porém mais simples e equivalente à primeira. E que o processo de simplificação se finda quando se obtém uma fração irredutível.

Por exemplo, propomos aos estudantes que realizassem a simplificação da seguinte fração algébrica: $\frac{4x^2-9}{2x-3}$. Durante o exercício percebemos a dificuldade que tiveram para escrever o termo $4x^2$ na forma de quadrado, considerando que o termo x^2 dessa vez não se apresentava só. Assim, resolvemos fazer alguns exercícios com relação ao uso da regra matemática, convertendo expressões do tipo $a^2 - b^2$ em $(a + b) \cdot (a - b)$. De início, fizemos o uso da regra em expressões mais simples como, por exemplo, $x^2 - 4$.

Chamamos a atenção deles para o fato de que escrever uma expressão como a outra, e vice-versa, não traz prejuízo algum, tendo em vista as expressões serem equivalentes.

Iniciamos o exercício dando-lhes as instruções necessárias para o uso da regra. Uma dessas instruções remete a um olhar inicial sobre o número quatro, que deve ser apresentado na forma de uma potência com expoente igual a 2 . Dessa forma, perguntamos a eles se viam algum problema em escrever 4 como 2^2, eles nos responderam que não, já que tudo é quatro. Nesse sentido, orientamos que eles procurassem, sempre antes de querer de qualquer jeito fazer uso da regra, preparar a expressão conforme a regra nos mostra, nesse caso a regra parte da expressão $a^2 - b^2$, nos mostrando que se trata da diferença de dois quadrados. Assim sendo, escrevemos $x^2 - 4$ como $x^2 - 2^2$. Por conseguinte, mostramos a eles que $x^2 - 2^2 = (x + 2) \cdot (x - 2)$, conforme determina a regra.

Fizemos também esse exercício com expressões do tipo $x^2 - \frac{1}{9}$ e $x^2 - \sqrt{5}$, mostrando como deve ser escrita a diferença de quadrados em cada uma delas. O foco por enquanto consistia em escrever um número real como uma potência de expoente 2 . Posteriormente, passamos a exercitar como escrever expressões que apresentam um número real multiplicando o termo x^2 na forma de quadrado. Para isso tivemos que resgatar algumas regras da potenciação que muitos deles já não lembravam mais, por exemplo, as regras: $a^2 \cdot b^2 = (a \cdot b)^2$ e $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$. Assim, foi possível escrever $4x^2$ como $(2x)^2$, $9x^2$ como $(3x)^2$, $\frac{1}{4}x^2$ como $\left(\frac{1}{2}x\right)^2$, $\frac{9}{16}x^2$ como $\left(\frac{3}{4}x\right)^2$, dentre outros.

Após os exercícios realizados retomamos a expressão $4x^2 - 9$ e a escrevemos da forma adaptada ao uso da regra, ou seja, escrevemos $4x^2 - 9$ como $(2x)^2 - 3^2$. Desse modo, os estudantes puderam perceber que tal expressão poderia ser expressa na forma $(2x + 3) \cdot (2x - 3)$. A partir daí notaram como deveriam proceder com a simplificação da fração algébrica, considerando a existência da expressão $2x - 3$ no denominador. E assim o fizeram, todos obtendo êxito, encontrando o mesmo resultado, conforme mostra a resolução de um deles (Figura 05):

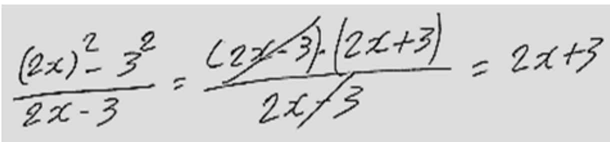


Figura 05: Resolução de Rafael
Fonte: Fotografia tirada pelo autor

O problema que trouxemos para nossas análises versa sobre o cancelamento de termos iguais respectivamente no numerador e denominador de frações algébricas. Para que a regra da simplificação de frações algébricas possa ser usada pelo estudante se faz necessário que se trabalhe no contexto da operação de multiplicação. É comum entre os estudantes erros como os apresentados. Os estudantes parecem não observar a presença de outros contextos que implicam na proibição do uso da regra. Segundo Rostand (1960), “uma impropriedade, um absurdo, uma re-negação, uma generalização abusiva, uma omissão, uma substituição de um caso a um outro caso, análogo mas não idêntico, podem ser dados a um lapso, a uma confusão" (Apud SILVEIRA, 2005, p. 116).

Nesse sentido, com o propósito de dissolver essas confusões, descontruindo generalizações equivocadas, mudanças repentinas de contextos, omissões, abusos etc., colocamos os estudantes para fazerem e refazerem diversos exercícios. Aliás, uma boa quantidade deles, considerando seus diversos aspectos, proporcionando as orientações necessárias ao uso adequado das regras matemáticas, sempre buscando por meio do jogo de linguagem condições que permitissem que eles compreendessem a linguagem matemática através de nossas palavras, seja por meio de traduções, analogias, aplicações em contextos como o cotidiano etc. O propósito não consistiu em resolver um número grande de exercícios de forma repetitiva e exagerada, mas o uso orientado das regras matemáticas nas diversas situações para as quais elas foram instituídas, de modo direto ou por meio de adaptações, transformações, manobras, aplicações, dentre outras estratégias possíveis, reconhecidas, legítimas e definidas pela linguagem matemática.

Procuramos, portanto, mostrar através de exercícios que as regras foram instituídas em dados contextos e que se a utilizarmos fora desses contextos estaríamos fadados ao erro. Assim, deveríamos sempre nos perguntar diante da resolução de um problema se aquelas condições são propícias ao uso da regra, que muitas vezes necessitam de algumas estratégias de ajustes, mas não de mudança de contexto. Todas essas dúvidas de como utilizar uma regra matemática podem ser dissolvidas no jogo de linguagem praticado por professores e estudantes em sala de aula, mas não se pode por si só criar contexto para uma regra que já foi predeterminada para um dado contexto. Dessarte, coadunamos com o pensamento de Wittgenstein quando afirma que essas confusões conceituais "originam-se, por assim dizer, quando a linguagem está em ponto morto, não quando ela trabalha" (WITTGENSTEIN, 2013, p. 76).

Algumas considerações

A resolução de um problema matemático pressupõe a aplicação de regras. Nessa perspectiva, em face da filosofia wittgensteiniana, Bouveresse (1987) afirma que as proposições matemáticas são regras gramaticais independentes, elas não se engajam umas às outras, somos nós que nos engajamos a elas (Apud SILVEIRA, 2008, p. 96). Assim, as proposições matemáticas são vistas como regras a que devemos seguir, são frutos de convenções humanas, isto é, são instituições. Trata-se de um jogo de linguagem consolidado ao longo dos anos com regras bem definidas, cuja nossa participação nesse jogo depende do apoderamento de suas regras. Na concepção wittgensteiniana seguir uma regra é semelhante a fazer uma comunicação, dar uma ordem, jogar uma partida de xadrez etc., isto é, são hábitos que se adquirem por meio do uso. De modo análogo, "pode-se dizer na matemática, frequentemente: Deixe que a *demonstração* lhe ensine o *que* foi demonstrado" (WITTGENSTEIN, 2013, p. 285).

Mas afinal, como devemos ensinar as regras matemáticas bem como suas aplicações aos estudantes? Wittgenstein nos responde essa pergunta da seguinte forma:

"Não consigo descrever uma forma (em geral) de como uma regra deve ser aplicada, exceto ensinando-o, treinando-o a aplicar a regra"[3] (tradução nossa).

Referências

BLOOR, D. **"Some determinants of cognitive style in science"**. In: Cohen, Robert: Schnelle, Thomas (ed.). *Cognition and fact*: materials on Ludwik Fleck. Boston: Reidel, 1986.

BOUVERESSE, J. **Wittgenstein: la rime et la raison (Science, Éthique et Esthétique)**. Paris: Les Editions Minuit, 1973.

CONDÉ, M. L. L. (org.). **Ludwik Fleck: estilos de pensamento na ciência**. Belo Horizonte: Fino Traço, 2012.

GOTTSCHALK, C. M. C. **A inserção nos jogos de linguagem da perspectiva de uma epistemologia do uso**. International Studies on Law and Education, v.15, p. 63-70, 2013.

__________ . **A Natureza do Conhecimento Matemático sob a Perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais**. Cad. Hist. Fil. Ci., Campinas, Série 3, v. 14, n. 2, p. 305-334, jul.- dez. 2004.

MINAYO, M. C. S. (Org). **Pesquisa Social: teoria, método e criatividade**. 29 ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2010.

SILVEIRA, M. R. A. **Linguagem, matemática e conhecimento**. V Jornada Nacional de Educação Matemática e XVII Jornada Regional de Educação Matemática Universidade de Passo Fundo – Passo Fundo, Rio Grande do Sul – 05 a 07 de maio de 2014.

__________ . **Aplicação e interpretação de regras matemáticas**. Educ. Mat. Pesqui., São Paulo, v. 10, n. 1, p. 93-113, 2008.

__________ . **Produção de sentidos e construção de conceitos na relação ensino/aprendizagem da matemática**. Tese de Doutorado em Educação. Porto Alegre: UFRGS, 2005.

__________ . **Jogos de Linguagem entre Professor e Alunos: Possibilidades de Aprender e Ensinar Matemática**. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, n. 50, p. 78-91, 2017.

__________ . **Tradução de textos matemáticos para a linguagem natural em situações de ensino e aprendizagem**. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.16, n.1, pp. 47-73, 2014.

SOUSA NETO, P. R.; SILVEIRA, M. R. A. **Pesquisa-ação: uma questão de linguagem**. Interfaces da Educ., Paranaíba, v.9, n.25, p. 291-315, 2018.

[3] Aforismo número 318 de *Zettel.*

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Investigações Filosóficas**. 8 ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.

___________ . **Observaciones sobre los fundamentos de la matemática**. Madrid, Alianza, 1987.

___________ . **Zettel**. Oxford: Basil Blackwell, 1967.

____________ . **Da certeza**. Lisboa: Edições 70, 2000.

Pablo Roberto de Sousa Neto

Instituto Federal do Maranhão (IFMA) – MA/Brasil

pablo.neto@ifma.edu.br

ORCID: https://orcid.org/0000-0003- 1900-5808