

Matemática mesopotâmica: história para o professor de matemática

Mesopotamic mathematics: history for the mathematics teacher

Bernadete Morey

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Severino Carlos Gomes

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

RESUMO

Ministrar o componente curricular História da Matemática em cursos de formação de professores tem sido um desafio de diversas ordens. No entanto, um novo olhar para a História da Matemática apoiando-se em publicações mais recentes (a partir da última década do século XX) pode trazer insights de possíveis caminhos a seguir. Nosso estudo se volta para os aspectos historiográficos da História da Matemática na busca de visualizar novos elementos que se mostrem relevantes na formação do professor de matemática. O presente artigo traz uma breve narrativa do surgimento da matemática mesopotâmica recorrendo a autores da vertente da historiografia atualizada. O objetivo do artigo é apresentar resumidamente a história da matemática mesopotâmica conta por historiadores da vertente atualizada com o intuito de tecer reflexões de caráter pedagógico que favoreçam o amadurecimento de propostas para componente curricular História da Matemática em cursos de formação inicial ou continuada de professores de matemática. No final, algumas observações são feitas e sugestões são apontadas.

Palavras chaves: História da Matemática; História da Matemática como componente curricular; Historiografias atualizada e tradicional; Matemática mesopotâmica; Matemática cuneiforme.

ABSTRACT

Teaching History of Mathematics in teacher training courses has been a challenge of several orders. However, a new look at the History of Mathematics based on more recent publications (from the last decade of the twentieth century) may bring insight into possible ways forward. Our study focuses on the historiographic aspects of the History of Mathematics in the search of visualizing new elements that are relevant in the formation of the mathematics teacher. This article presents a brief narrative of the emergence of Mesopotamian mathematics using authors of the updated historiography. The purpose of this article is to present briefly the history of Mesopotamian mathematics by historians of the updated historiography with the intention of weaving reflections of pedagogical character that favor the maturation of proposals for curricular component History of Mathematics in courses of initial or continued formation of mathematics teachers. In the end some comments are made and suggestions are pointed out.

Keywords: History of Mathematics; History of Mathematics as a curricular component; Historiographies updated and traditional; Mesopotamian mathematics; Cuneiform mathematics.

1. Introdução

O presente artigo se propõe a trazer reflexões e propostas que contribuam para com as respostas das indagações relacionadas a História da Matemática enquanto componente curricular nos cursos de formação inicial ou continuada do professor de matemática. Buscamos nos autores de uma historiografia atualizada as narrativas históricas que nos forneça os elementos que contribuam para uma proposta diferenciada de componente curricular, que responda as necessidades de formação do professor de matemática.

Entre os docentes que ministram História da Matemática em cursos de formação de professores são frequentes as indagações mútuas sobre qual conteúdo priorizar, que texto adotar como básico, sobre priorizar ou não o conteúdo propriamente dito, e mais uma infinidade de outras perguntas. Não parece haver respostas prontas, cabendo ao docente, juntamente com seus pares, dar encaminhamento que leve a possíveis respostas.

O presente artigo, parte de uma pesquisa maior em andamento, vai na direção dessa busca por caminhos. Nossa meta é traçar recomendações de propostas metodológicas para o

componente curricular em questão. Nossa hipótese é que narrativas históricas atreladas a uma historiografia atualizada, ou seja, que mostre o viver, o existir e o lutar da sociedade deixando que o leitor compreenda como se estrutura a sociedade, como produzem os meios de sua própria subsistência, das pessoas comuns que produzem os meios de subsistência, como criam seus filhos, como recebem o que lhe é devido, como vivem e como morrem, como o saber é gerado, quem se apossa e usufrui deste novo saber etc. É acompanhando a narrativa histórica deste tipo que esperamos poder visualizar as relações entre a sociedade e o saber emergente e, em particular, o saber matemático. O que nos move em última instância é possibilitar ao professor de matemática um novo olhar para a disciplina que ele leciona, que ele a veja sob uma nova luz, como um produto da atividade humana.

O artigo está estruturado em quatro sessões sendo a presente introdução a primeira delas. A segunda sessão discorre sobre as dificuldades relacionadas à proposta de um componente curricular para ensinar matemática e as bases em que estamos procurando resolver tais dificuldades. A terceira sessão do artigo constitui-se num relato que procura contar o desenvolvimento da sociedade mesopotâmica entrelaçada com sua matemática. Tal sessão, por sua vez, está dividida em partes correspondentes à periodização adotada pelos historiadores e abrange a história da região desde os primeiros assentamentos humanos até o final do séc. III a. E. C. A quarta sessão reservamos para reflexões, sugestões e recomendações de cunho pedagógico.

2. Qual história da matemática?

O presente trabalho é parte de uma investigação mais ampla em andamento cujo objeto é o componente curricular História da Matemática (HM) que aparece nos cursos de formação de professores de matemática. Já há alguns anos os cursos de licenciatura em matemática no Brasil vêm inserindo a HM entre seus componentes curriculares. Ao docente que numa dada instituição é responsável por ministrar a HM, vê-se então com muito mais indagações do que respostas: a respeito da adequação do componente ao currículo do curso; a respeito de quais conteúdos históricos dar prioridade, uma vez que o tempo dedicado ao componente curricular é curto; a respeito de quais aspectos da HM seriam mais relevantes à formação do professor de matemática, e muitas outras indagações.

Mesmo reconhecendo a pertinência de todos os questionamentos apontados acima, o presente artigo vai se deter apenas em um deles, aquele que procura discutir qual narrativa, qual a natureza do relato da HM seria relevante para o professor de matemática, esteja ele em formação inicial ou continuada.

Para examinar esta questão partiremos das reflexões de Roque (2012) ao dizer das questões que aparecem frequentemente na experiência dos que ensinam matemática, bem como nas discussões sobre as dificuldades no ensino e na aprendizagem desta disciplina, é a de como seria possível torná-la mais concreta. Reconhecendo o quão paradoxal é esta questão, a de tornar a Matemática mais “concreta” sem abdicar da capacidade de abstração, não nos deteremos para investigar a natureza desta aparente contradição, mas tomaremos um rumo distinto que nos parece atender, de certo modo, as solicitações daquele que quer aprender matemática.

Talvez, como supõe Roque (2012) os alunos demandem compreender seus conceitos em relação com algo que lhes dê sentido e a Matemática pode ser ensinada de uma maneira mais “concreta”, caso seus conceitos forem tratados a partir de um contexto.

Tal contextualização vai ser buscada na presente proposta não a partir de problemas de nosso cotidiano, mas a partir de elementos da própria narrativa histórica.

Para isto precisamos oferecer uma narrativa que contenha elementos que permitam ao licenciando e futuro professor de matemática perceber a rede de significados em que as práti-

cas matemáticas foram se estabelecendo e os conceitos sendo formados. Em outras palavras, a narrativa histórica que nos parece apropriada é aquela que nos permite investigar o contexto em práticas matemáticas ou como os conceitos matemáticos despontaram. Investigar o contexto não significa, porém, traçar um panorama histórico de caráter geral que funcionaria como um pano de fundo, mas, sim proceder a ações que terminem por *explicitar as relações intrínsecas entre as práticas matemáticas e seu contexto* (ROQUE, 2012, p. vii).

Os debates que se deram ainda no início da primeira década do século XXI que envolveram professores e pesquisadores da história da matemática e educação matemática, continuam até hoje com níveis de vivacidade, direcionamento e abordagem distintos, dependendo de qual comunidade de pesquisadores e suas escolhas feitas. Do Brasil talvez se possa dizer que o debate se tornou mais silencioso, o que não quer dizer que a investigação neste sentido tenha cessado. Entre os pesquisadores brasileiros mais recentes, podemos apontar Saito (2015) e Roque (2012a), cujas publicações em história da matemática

Fauvel e van Maanen (2001) organizaram a publicação do livro *History in Mathematics Education - The ICMI Study*, que veio a ser um marco nos estudos dedicados às diferentes questões ligadas à integração da história da matemática ao ensino e à aprendizagem de matemática. De modo geral, os estudos posteriores priorizaram aspectos que proovessem e justificassem os usos da história da matemática como recurso didático ou pedagógico carecendo um uma reflexão maior sobre os aspectos historiográficos. Consideramos muito pertinente as observações em de Saito (2018, p. 606) ao dizer que

considerar, ou pelo menos discutir e refletir sobre a historiografia de referência, que orienta as narrativas históricas que serão utilizadas na elaboração de atividades, pode-se revelar bastante interessante, uma vez que a escolha historiográfica determina uma série de ações na própria articulação entre história e ensino.

Na verdade, não foi senão recentemente que voltamos nossa atenção para as reflexões de natureza historiográfica, ou seja, estamos dizendo que nossos estudos anteriores não incluíam um estudo “crítico” da escrita da história. Munidos de um novo olhar, nossa busca agora é para apresentar aos alunos dos cursos de formação inicial ou continuada em matemática, um texto de história da matemática que lhes permita vislumbrar o contexto e distinguir as práticas matemáticas tendo que dali afloram.

Há na literatura atual dois termos que caracterizam vertentes historiográficas que aparecem, por exemplo em Saito e Roque: historiografia tradicional e historiografia atualizada. A vertente atualizada é aquela *cujas abordagens valoriza os contextos de elaboração, transformação, transmissão e disseminação do conhecimento matemático em diferentes épocas e cultura*, enquanto que a perspectiva historiográfica tradicional *ênfatiza apenas a coerência interna do discurso matemático, tendo como ponto de partida o que nós entendemos por matemática nos dias de hoje*. (SAITO, 2018, p. 608). Um grande problema que se apresenta é grande parte do material disponível para os professores traz a marca da historiografia tradicional. Saito (2018) caracteriza a situação dizendo que

Do ponto de vista historiográfico, essas narrativas são essencialmente lineares e progressistas no sentido positivista do termo. Elas são caracteristicamente panorâmicas e abrangem grandes períodos históricos, geralmente da antiguidade clássica até o século XX. Além disso, ao enfatizar apenas as descobertas e enaltecer os gênios e os precursores da matemática moderna, tais narrativas referem-se apenas a história daquilo que deu certo, legitimando a ideia de que só havia um único caminho para a matemática moderna (SAITO, 2018, p. 608).

Para os nossos propósitos, uma historiografia da vertente atualizada é a mais indicada, pois, muito mais do que a coerência interna das ideias matemáticas, queremos perceber, analisar e refletir sobre as condições em que tais ideias foram surgindo. Além do mais, perseguir tais propósitos nas condições de uma sociedade moderna e complexa se torna mais difícil. Nossa proposta então para um primeiro trabalho de tal natureza é dirigir nossa atenção para uma sociedade antiga esperando que os elementos que queremos submeter a escrutínio possam ser destacados mais facilmente. Nossa escolha recai então sobre a sociedade mesopotâmica e sua matemática, pois, ali tem-se uma profusão de testemunhos físicos que serviram de apoio para que historiadores e antropólogos enunciassem suas teorias e hipóteses não apenas sobre a matemática, mas também sobre o funcionamento da sociedade. Para citar alguns apenas podemos falar de Denise Shamandt-Besserat, Jens Høyrup e Igor Dyakonoff, mas, é principalmente, nos trabalhos de Høyrup que se apoia o presente artigo.

3 Narrativa histórica

3.1 O povoamento da Mesopotâmia

Na presente sessão recuaremos no tempo milhares de anos. Isto nos parece necessário para situar o leitor num contexto mais amplo e ao mesmo tempo ter a oportunidade falar sobre um dos antecedentes das práticas aritméticas, que se deu com a contagem concreta e o uso de tokens.

Em Damerow (1996), faz menção a pelo menos duas grandes mudanças na organização social humana: a chamada Revolução Neolítica por volta de 8000 a.C. e a Revolução Urbana começando por volta de 4000 a.C. A primeira delas, marcada pela transição do sistema de sobrevivência humana por meio coleta de alimentos para a vida em assentamentos estáveis, trouxe uma mudança radical no modo de subsistência dos seres humanos; a região era rica em grãos, tâmaras, aves, peixes, betume e barro e foi um avanço no controle do homem sobre seu meio ambiente.

This revolution probably resulted in a dramatic population increase, and it was accompanied by several innovations which must have had a cognitive impact: techniques for building dwellings, the cultivation of land, animal domestication, the invention of tools like the hoe and later the plow, the development of food preparation techniques such as baking and brewing, the development of weaving techniques, as well as the use of clay and the production of pottery, developing into a striking variety of regionalized and successive styles of painted pottery. There are, furthermore, indications of early forms of trade, in particular the dispersion of luxury objects like shells into areas far away from their places of origins and the distribution of tools such as stone axes manufactured at the source of the stone. At the end of the Neolithic Period, flint and other stone tools were gradually replaced by copper and, eventually, bronze implements (DAMEROW, 1996, p. 16).

De fato, com a passagem para o neolítico os povos da região abandonaram a vida nômade e se fixaram num lugar que pudessem cultivar a terra e domesticar animais, o que acabou por levar à invenção de instrumentos agrícolas, ao desenvolvimento do preparo de alimentos, à fabricação de utensílios de barro, construção de moradias e desenvolvimento de formas iniciais de comércio, o escambo. Foi somente no final do período neolítico que instrumentos de pedra foram gradualmente sendo substituídos por instrumentos de cobre ou bronze.

A segunda revolução teve um caráter distinto da primeira, pois, aqui as mudanças não foram nos meios de subsistências, mas sim na esfera das relações sociais entre os indivíduos:

The second change, the so-called Urban Revolution, is indicated by the emergence of large, i.e. the early cities, the differentiation of the population into specialized occupational groups, the stratification of the society into social classes with different access to resources, and the emergence of monumental architecture. This process of urbanization was a long-term consequence of the achievements of farming. Intensive agriculture produced a surplus which made possible the proliferation of administrators and specialists, freed from primary subsistence activities. Urbanization emerged in the Near East in the 4th millennium B.C. and approximately at the same time in Egypt, in the Indus valley in the 3rd millennium B.C., in China probably in the 2nd millennium B.C. and in the New World in the first millennium B.C. From these centers urbanization spread into the surrounding regions, in particular into Europe and across Asia (DAMEROW, 1996, p. 17).

A Revolução Urbana, aconteceu graças ao desenvolvimento da agricultura que, com o decorrer do tempo, foi gerando uma sobra que permitiu o surgimento grupos ocupacionais diferenciados. Permitiu também a estratificação da sociedade com graus diferenciados de acesso aos recursos e o aparecimento de administradores e especialistas livres das atividades de subsistência. A Revolução Urbana foi portadora de uma complexidade muito maior de padrões de organização social que não mais se assemelham a estruturas sociais conhecidas das culturas pré-literatas existentes. Como o nome indica, é nesse período que surgem as grandes cidades.

De grande importância foi a existência de um sistema de contabilidade antiga com base em pequenas figuras de argila queimada (tokens), , um tipo especial de símbolos de argila com formas geométricas simples (esfera, cone, tetraedro, cilindro, etc.), que aparentemente eram usados, entre outras coisas, como contadores para registrar dados quantitativos.com formato de pequenas e grandes esferas, cones, cilindros, discos, etc. A partir do oitavo milênio, o uso de tokens tinha se expandido e eram encontrados nas regiões correspondentes à Anatólia, à Síria, ao Irã e ao Iraque. Os tokens eram usados para representar medidas-padrão de grãos, óleo e outros bens, e cabeças de gado; eles eram usados dentro de um sistema de distribuição de alimentos, religiosamente legitimado e baseados em controle em nível de aldeia. Inicialmente os tokens eram simples (Figura 1), mas com o tempo, foram se tornando mais complexos para poder atender as demandas de uma sociedade que ia se tornando também mais complexa.

Figura 1: Tokens de Tepe Gawra, Iraque moderno, 4000 a.C. O cone, a esfera e o disco: medidas de cereal; tetraedro: medida de trabalho diário.



Fonte: SCHMANDT-BESSERAT, http://sites.utexas.edu/dsb/files/2014/03/tokens_article.pdf

A responsabilidade pela gestão da redistribuição e do controle era uma tarefa de muito prestígio e era levada a cabo pelos sacerdotes do templo; os escribas, como classe profissional distinta, ainda não existiam. Remanescentes de edifícios representativos nos centros das cidades atestam a existência de

templos e palácios que eram os centros administrativos de uma **economia redistributiva de escambo**. Um sofisticado aparato de oficiais organizava a mobilização de mão-de-obra e supervisionava a distribuição dos produtos de trabalho coletados nos armazéns centrais. Na verdade, quando as cidades começaram a surgir elas se organizavam em torno dos grandes templos. O pessoal do templo tinha dupla função: a de sacerdote e a de administrador dos bens que enviados ao templo na forma de tributos. Uma parte destes tributos ficava com o templo, uma parte para as famílias dos funcionários do templo e uma parte era redistribuída de volta. Tal sociedade é conhecida como redistributiva.

Além disso, havia os recipientes padronizados, selos que eram prensados em superfícies de argila e posteriormente selos cilíndricos para serem rolados sobre a superfície tabletes de argila antes de serem secos ao sol ou queimados no forno, recipientes abastecidos com rolhas seladas, sinais com significados numéricos. (Figura 2)

Figura 2. Selo cilíndrico, recipiente selado para tokens, tablete numérico.



Fonte: Damerow, 1999

Para refletir e resumir o dito até agora, elaboramos a Tabela 1 que traz o início do povoamento da região mesopotâmica e os eventos que caracterizaram cada etapa. Observe-se que tanto a Revolução Neolítica como a Revolução Urbana aparecem no período pré-literato, ou seja, anterior à invenção da escrita. Já o estabelecimento das cidades se dá no período proto-literato, ou seja, período em que a escrita surge e se estabelece. O período proto-literato termina em torno do início do terceiro milênio, com o declínio de Uruk.

Tabela 1. Primórdios do povoamento na Mesopotâmia

Período Pré-Literato		Período Proto-Literato	
Revolução Neolítica Em torno do 8o. milênio a. E. C. Grupos humanos se fixam na região entre rios.	8o. até 4o. milênio a. E. C. Desenvolve-se a agricultura; Aumenta a população; Invenções tecnológicas impulsionam a geração de uma sobra; A sociedade se estratifica; Bens são trocados em escambo; Tokens surgem e Tokens são amplamente usados para controle de bens e produtos; seu uso se estende à Anatólia, à Síria, ao Irã e ao Iraque;	Revolução Urbana Em torno do 4o. milênio a. E. C. Formam-se grandes cidades com o templo no centro	A partir do 4o. milênio a. E. C. As cidades se estabelecem; Uruk emerge como cidade principal; A forma de governo é a democracia militar; Economia distributiva: o templo recebe os tributos, administra e redistribuem bens; Não existem escribas; São usados tokens, selos, tabletes contábeis;

			Desenvolve-se a escrita; A sociedade se diversifica em camadas administrativas e se estrutura num estado burocrático; Várias sequências numéricas para contagem e várias sequências numéricas para unidades de medidas; A matemática emerge como coordenação das práticas contar, gerenciar, medir.
--	--	--	--

Fonte: Elaboração dos autores

Mais adiante trataremos do período proto-literato mais detalhadamente, pois, neste período as práticas matemáticas evoluíram do uso de tokens físicos até chegar a uma matemática facilmente reconhecível. Além disso na região surgiu e se desenvolveu a escrita e se formou uma das primeiras estruturas de estado. Para dar conta do estudo destes e de muitos outros aspectos da história da região, os historiadores e arqueólogos a dividem cronologicamente em períodos cuja divisão e nomenclatura adotaremos no presente artigo nas tabelas por nós elaboradas.

Jens Høyrup (1991), historiador dinamarquês das ciências e da matemática defende a interessante tese relativa à matemática mesopotâmica: segundo, a matemática surgiu na região intrinsecamente ligada às necessidades burocráticas para administrar o estado nascente, o primeiro estado, com base na cidade de Uruk, o que levou à matemática mesopotâmica ter características próprias, distintas, por exemplo, da matemática grega.

3.2 Antecedentes e surgimento da escrita

Em torno da metade do quarto milênio, houve um aumento brusco de população na região que hoje é o sul do Iraque moderno, ali perto das desembocaduras dos rios Tigre e Eufrates. Na verdade, o que tornou isto possível foram condições ecológicas que permitiram a irrigação artificial em larga escala, que por sua vez foi consequência do surgimento de uma estrutura social caracterizada por vários níveis de controle administrativo e ampla divisão do trabalho, ou seja, um estado. Pelo que sabemos, este estado, centrado em torno dos grandes templos, foi o mais antigo da história da humanidade.

A região era rica em grãos, tâmaras, aves, peixes, betume e barro; no entanto de grande importância foi a existência de um sistema de contabilidade antiga com base em pequenas figuras de argila queimada (tokens), com formato de pequenas e grandes esferas, cones, cilindros, discos, etc. A partir do oitavo milênio, o uso de tokens tinha se expandido e eram encontrados nas regiões correspondentes à Anatólia, à Síria, ao Irã e ao Iraque. Os tokens eram usados para representar medidas-padrão de grãos, óleo e outros bens, e cabeças de gado; eles eram usados dentro de um sistema de distribuição de alimentos, religiosamente legitimado e baseados em controle em nível de aldeia. A responsabilidade pela gestão da redistribuição e do controle era uma tarefa de muito prestígio e era levada a cabo pelos sacerdotes do templo; os escribas, como classe profissional distinta, ainda não existiam.

O processo que levou à invenção da escrita na mesopotâmia pode ser encontrado em SCHMANDT-BESSERAT (2009, 2012) e teve início com o uso de tokens para controle de bens. De maneira breve, as largas etapas foram:

- a) Tokens são usados para registro de bens entregues como tributos;
- b) Depois de 3500 os tokens eram colocados em invólucros ocios e lacrados. O conteúdo do invólucro era estampado na superfície do mesmo;
- c) O passo seguinte foi usar um “invólucro plano”, isto é, um tablete e estampar os tokens na superfície do mesmo. O processo de invenção termina aqui. Daqui por diante, é aperfeiçoamento.

O período proto-literato, durante o qual a escrita surgiu, vai até o início do terceiro milênio, em torno de 2900 a. E. C., coincidindo com o declínio de Uruk. Os tablettes deste período já trazem representação das unidades de medida. A principal sequência metrológica era a que era usada para grãos (cevada), e, na notação de Joran Friberg fica com a seguinte aparência:

Figura 2. Sequência metrológica para medidas de grãos



Fonte: Høyrup, 2007.

Como podemos ver na Figura 2, da direita para a esquerda, o primeiro símbolo (um cone pequeno, marcado no tablete de barro com um objeto cilindro na posição inclinada) vale uma unidade de medida de grão; a figura seguinte, um disco (marcado verticalmente no tablete com um objeto cilíndrico), vale seis vezes mais; o símbolo seguinte, a esfera grande vale dez vezes a anterior; o cone grande vale o triplo da esfera grande e o cone com uma esfera pequena vale dez vezes o cone grande. Toda a sequência se baseia em proporções numéricas fixas e agrupamento. Podemos dizer que esta era uma sequência metrológica específica para medidas de grãos com os números 1, 6, 60, 180, 1800.

A Figura 3 é um tablete oriundo de Susa (Elam) que contabiliza distribuição de cevada entre trabalhadores e aqui serve para ilustrar duas sequências numéricas distintas, uma para contagem e outra para medidas de capacidade. Nosso foco neste artigo é a matemática de Uruk. No entanto, nosso exemplo continua válido, uma vez que Friberg (1984, p.118) afirma que as sequências numéricas e os símbolos em Susa e Uruk eram os mesmos.

No período do qual estamos falando, o proto-literato, havia em uso várias sequências de metrológicas e de contagem, cada uma com seu propósito. Enquanto os mesmos sinais eram frequentemente usados para designar unidades de diferentes sistemas metrológicos, as relações numéricas entre as unidades variavam consideravelmente de um sistema metrológico para o outro. Além disso, o significado dos signos, isto é, as convenções pelas quais certas unidades eram representadas por certos signos, era determinado em um sistema sem levar em conta como o significado era determinado em outros sistemas.

Figura 3. Esboço de um tablete que contabiliza distribuição de ração de cevada entre os trabalhadores

Fonte: Friberg, 1984, p.118.

A título de ilustração, a Figura 3 mostra um texto proto-elamita oriundo de Susa sobre a ração distribuída a trabalhadores em cevada. Começando pelo canto superior direito vemos um triângulo com franjas que talvez indique autoridade que atesta o documento. A seguir, vem um arado, signo provável para trabalhador do campo. Seguem então signos numéricos (para contagem) que indicam: $1 \times 60 + 3 \times 10 + 3$, ou seja, 93 trabalhadores. Observe que o sinal para 3 está na linha de baixo. Depois vem o desenho de um feixe de grãos (cevada?), seguido de símbolos numéricos que indicam medidas de capacidade: $6 \times 6C + 1C + 1m$, onde C seria uma unidade básica de capacidade para grãos (cesto?), enquanto que 1m é uma medida menor de grãos equivalente a $1/5$ do cesto. Em conclusão, o texto diz que 93 trabalhadores receberam duas medidas menores de cevada cada um. (Friberg, 1984, p.118). Voltaremos a este exemplo na sessão de reflexões pedagógicas.

3.3 Períodos intermediários entre Uruk e Ur III

No início do terceiro milênio, Uruk ainda é a cidade hegemônica, a escrita já se estabeleceu (ainda não é cuneiforme), a matemática emergiu e tem-se a presença de várias sequências numéricas para contar e para medir. No entanto, estão para acontecer mudanças no campo social e político.

Høyrup, (s/d, p. 12) diz que após o período proto-literato surgem várias cidades-estados na região que competem pelos mesmos recursos hídricos. No período que vem a seguir, o período Dinástico Arcaico, que começa em torno de 2900 a. E.C. não existe mais a relativa estabilidade do período proto-literato. O estado de guerra era permanente e o rei é um líder militar. No entanto, ele não é mais um servidor da sociedade, mas sim, o seu senhor; a sociedade, por outro lado, nada mais é que um instrumento para sua grandeza. Além disso, os templos perdem sua autonomia e aos poucos vão passando para o controle dos reis das cidades que deles dispõem como se fosse sua propriedade. Pouco a pouco a sociedade perde seu caráter distributivo e o que era tributo passa a ser taxaço. Os escribas aparecem como uma classe profissional distinta. O cobre e a prata começaram a ser usadas como moeda, o que traz uma nova demanda: o aperfeiçoamento das medidas de peso. A metrologia muda para facilitar os procedimentos burocráticos e são realizadas reformas centralizadas na escrita e nos procedimentos burocráticos.

No período em torno de 2350 - 2200 a. E. C., a região da Suméria (e logo mais, toda a Mesopotâmia) foi unida pelos acádios em um único estado territorial, sendo Sargão de Acádia o seu mais conhecido rei. As criações literárias que os escribas tinham começado a criar como um meio de demonstrar sua identidade profissional, foi logo tomado pelos governantes sargônicos como propaganda. Enquanto a administração matemática certamente expandiu, o uso de

problemas supra-útilitários no ensino de matemática foi continuado; não há razão para presumir que eles cumpriram ou puderam cumprir qualquer papel fora da escola.

A tendência a ajustar a metrologia que já tinha aparecido no período anterior, aqui foi acelerada, pois, havia a preocupação pela regularidade matemática e também pela conveniência administrativa. A primeira preocupação (regularidade matemática) é especialmente visível no sistema de pesos, aparentemente um desenvolvimento recente da fase de emergência, onde o fator de multiplicação 60 recebeu uma posição de destaque. Mas outras metrologias também foram estendidas para cima e para baixo com esse fator.

Em suma, a relação entre o estado e sua matemática parece ter se desenvolvido durante o período dinástico arcaico e o período sargônico (acadiano) ao longo de linhas conhecidas de outros estados, providas de uma administração contábil ou matematicamente organizada: a matemática era ensinada de uma maneira que era necessária aos futuros funcionários, mas também foi permitida uma certa autonomia na escola. Certamente não foi ensinado por “matemáticos” - mas mesmo quando os professores devem ensinar para a prática, o ensino normalmente será afetado pelo fato de que a prática com a qual os professores estão realmente familiarizados é a prática do ensino. Assim também aqui, de acordo com as poucas evidências à nossa disposição. As inovações metrológicas eram guiadas por duas forças motrizes: uma era a sexagesimalização impulsionada pela busca pela coerência matemática interna; e a outra eram as necessidades ligadas à administração procedimentos do estado.

Høyrup (s/d, p.13) nos conta que por volta de 2200 a. E. C., o estado territorial acadiano perdeu a maior parte de seus territórios e estados menores foram restabelecidos. No entanto, apenas a figura de Gudea de Lagash deixou fontes que poderiam ser consideradas relevantes para o nosso tópico: inscrições com um relato meticuloso sobre o que ele tinha dado ao templo, e sobre como ele traçou o plano geométrico para os edifícios sagrados.

Terminamos a presente sessão com a Tabela 2 que ajuda a visualizar os períodos citados em ordem cronológica além de fixar seus principais eventos.

Tabela 2. Períodos intermediários entre Uruk (Proto-literato) e Ur III

Período Dinástico Arcaico	Período Acadiano	Guto
2900 – 2350	2350 -2200	2200 - 2100
Novas cidades-estados que competem pelos mesmos recursos; Os templos passam para o controle dos reis; Surgem os escribas como classe profissional; Matemática e escrita não têm avanços sensíveis; Cobre e a prata como moeda; Medidas de peso mais precisas.	Suméria conquistada pelos acádios; Toda a região reunida num estado despótico centralizado; Mais controle social e desenvolvimento da contabilidade tradicional; Duas forças no desenvolvimento da matemática escolar e burocrática: 1) sexagesimalização; 2) regularização para atender às exigências burocráticas.	Interlúdio pós-Sargônico descentralizado; Gudea de Lagash, o regente mais importante.

Fonte: Elaboração dos autores

3.4 Ur III ou Terceira Dinastia de Ur

Durante a primeira metade do terceiro milênio, um sistema policêntrico de cidades-estados governado por reis-líderes militares evoluiu no sul do Iraque e durante alguns séculos quase não se tem documentos escritos. Depois de 2400, seguiu-se uma fase de centralização, e por volta de 2350, Sargão, um chefe acadiano, subjogou todo o centro e o sul do Iraque. Seus sucessores a princípio estenderam o império até Susiana, Síria e Anatólia, mas por volta de

2200 ele entrou em colapso. Depois de um século, uma nova fase de centralização seguiu a Terceira Dinastia de Ur ou Ur III (2112-2004), que sujeitou o sul e o centro da Mesopotâmia a uma administração direta.

Ur III, justamente por ter sido um estado extremamente burocrático, é bem documentado. Segundo Høyrup (1991), o rei fundador da dinastia, Ur-nammu, subjuguou todo o sul do Iraque e empreendeu grandes programas de construção. Como relativamente poucos documentos escritos são conhecidos a partir de seu tempo, não temos conhecimento detalhado de suas políticas, nem dos primeiros vinte anos de seu sucessor Shulgi. Depois de vinte anos de governo, Shulgi instituiu uma reforma militar e administrativa e, a partir de então, enormes quantidades de tabuletas administrativas permaneceram para a posteridade. Elas mostram uma economia centralizada submetida a um controle metuculoso.

Todos esses desenvolvimentos políticos influenciaram a matemática. No nível mais geral, duas tendências são conspícuas: em primeiro lugar, extensa “sexagesimalização”, isto é, criação de unidades metrológicas e numéricas superiores e inferiores através da multiplicação e divisão por 60; em segundo lugar, a adaptação de metrologias a procedimentos administrativos (anulando quando necessário o princípio da sexagesimalização). Ambas as tendências reforçavam aquelas que estavam presentes no quarto milênio.

Podemos presumir que os tipos de matemática que conhecemos da era sargônica não desapareceram com o império sargônico, embora tenhamos poucas evidências das cidades-estados do século seguinte. Em Ur III, no entanto, podemos apontar mudanças nesta área. As mudanças estão atreladas a uma reforma militar em 2074, seguida imediatamente por uma reforma administrativa. No que talvez tenha sido introduzido como um estado de emergência, mas que se tornou permanente, a grande maioria dos trabalhadores do centro do império estava organizada em tropas sob escribas, que eram responsáveis pelo trabalho de sua unidade calculado de acordo com normas fixas.

As normas indicavam, por exemplo, quanto de barro tem de ser escavado diariamente, quanto de pano tem de ser tecido, e outras normas quantificadoras do trabalho diário. Tudo isto era convertido em unidades de contabilidade abstratas ($1/60$ de um dia de trabalho, ou unidades de peso de prata ou volumes de grão).

Para cada mês o trabalho exigido era equivalente a 30 dias (mesmo que a duração real fosse de 29 dias); o escriba supervisor tinha de pressionar seus trabalhadores para que tal resultado fosse obtido.

Os trabalhadores emprestados aos colegas e aqueles que estavam doentes ou mortos ou que haviam fugido eram inscritos na conta do escriba como crédito, aqueles tomados emprestados, como débito. O déficit do escriba era acumulado de ano para ano (o excedente é extremamente raro) e, ao morrer, a família era responsabilizada; se não pudessem pagar, a viúva e as crianças poderiam ser colocadas nas tropas de trabalho.

A tendência à sexagesimalização de que se falou acima acabou por propiciar uma grande realização de Ur III que foi a criação de uma matemática de ponto flutuante ou o “valor de lugar”.

First of all a new number notation was created as a final outcome the process of sexagesimalization: **the sexagesimal place value system**, which permitted indefinite continuation of numbers into the regions of large and small. The idea had been in the air for several centuries, as demonstrated firstly by the generalized use of the *gin* in the sense of $1/60$, and next also by the particular idiom of a late Sargonic school exercise discussed by Powell [1976:427], where a “*small gin*” is introduced for $1/60$ of $1/60$. But precisely the use of *names* for the fractional powers shows that the system was not positional, and was not extendable *ad libitum*. We can thus be fairly sure that the introduction of place value does not antedate Ur III (HØYRUP, 1991, p. 48).

Na avaliação de Høyrup, o passo mais difícil não foi chegar à ideia em si, uma vez que ela já vinha mais ou menos presente deste há séculos; o difícil era a decisão e a coragem para fazê-lo:

Segundo Høyrup (2007) foram produzidas em Ur III as seguintes tabelas:

- De recíprocos (por meio das quais, se podia proceder a divisão por n fazendo a multiplicação por $1/n$);
- De produtos de números importantes (não menos importante, os que figuram no quadro dos recíprocos) com os números 1, 2, 3, ..., 19, 20, 30, 40, 50;
- Tábuas metrológicas que expressavam as várias unidades metrológicas em termos de uma unidade básica. Por exemplo, um kush como 5 (isto é, 0; 5 nindan), e um dígito como 10 (i. e., 0; 0,10 nindan);
- Tabelas de “fatores fixos” listavam constantes técnicas, por exemplo, quanta barro ou terra um trabalhador deveria escavar em um dia.

A narrativa histórica hoje aceita caracteriza Ur III como um estado altamente burocrático e centralizador. As condições de trabalho duras ao extremo conduziam à doença, fugas e mortes por parte dos trabalhadores. Além disso, o alto custo burocrático levou o estado à falência dando oportunidade de invasão para outros povos.

Nossa breve narrativa da Mesopotâmia e de sua matemática termina aqui por enquanto. Fizemos uma recapitulação a passos largos desde as primeiras ideias matemáticas no período neolítico (pré-literato) até Ur III quando os conceitos matemáticos como numeração posicional já estão amadurecidos. Mas a matemática mesopotâmica não termina aqui. Depois da curta duração de Ur III (apenas um século) vem o período que os historiadores denominam Antiga Babilônia. A matemática ali se desenvolve e toma novas características, uma delas sendo os problemas cuja possibilidade de resolução algébrica levou a que se falasse (erroneamente, segundo Høyrup) de uma “álgebra babilônica”. No entanto, o fato é que a matemática da Antiga Babilônica goza de status especial e merece um estudo em separado. Mesmo assim, para fins de clareza na cronologia e no panorama geral, a Tabela 3 retrata o período Ur III e Antiga Babilônia.

Tabela 3. Períodos Ur III e Antiga Babilônia

Período Ur III	Período Antiga Babilônia
2100 a. E. C. até 2000 a. E. C.	2000 a. E. C. até 1600 a. E. C.
2074 – ano da reforma militar e administrativa de Shulgi; Criação de um estado despótico centralizador; Shulgi sobre o treinamento do escriba: adição, subtração, cálculo, contabilidade, escrita, medição de terras, desenho de plantas, agricultura; O alto custo do controle burocrático, das construções e da rede administrativa acarreta doenças, fugas e morte entre os trabalhadores; O estado faliu e foi invadido por bárbaros; Desenvolvem-se instrumentos matemáticos conceituais e técnicos para cálculos inerentes à reforma; Uma nova notação numérica: o sistema sexagesimal posicional continuado indefinidamente. Grande quantidade de tabelas facilitam o trabalho; Uma ideia de justiça que se reduz a uma metrologia unificada; Escribas: alto nível de competência matemática, mas, sem autonomia profissional.	Ur III se desintegrou em estados menores; A Babilônia-cidade, entre Sippar e Eshnunna, era centro de outro estado. Hamurabi: rei da Babilônia em 1792. Astuto diplomata e guerreiro, tornou-se senhor de toda a Mesopotâmia centro e sul com o centro do poder em Babilônia. Babilônia não politicamente estável; Babilônia foi invadida pelos hititas em 1595; A tomada de poder pelos cassitas marca o fim da Antiga Babilônia. A matemática deste período é relevante de merecer ser estudada separadamente.

Fonte: Elaboração dos autores

4. Algumas reflexões, observações e recomendações

A presente sessão é dedicada a reflexões, observações e recomendações de cunho pedagógico. Para fazer isto temos de retomar algumas posições teóricas que estão de uma forma ou de outra na base de nosso trabalho. Dissemos na segunda sessão deste artigo que nossa prioridade é criar oportunidades de perceber, analisar e refletir sobre as condições em que as ideias surgiram e se desenvolveram. Além disso, necessitamos então destacar na narrativa histórica aqueles elementos que possam fazer com que o licenciando e futuro professor de matemática perceba a rede de significados em que as práticas matemáticas foram se estabelecendo e os conceitos sendo formados. Para isto vamos então retomar desde o início a narrativa histórica e fazer alguns destaques.

Uso de tokens e escrita

Em primeiro lugar, deixemos claro que merece nossa atenção não apenas tópicos matemáticos, mas também tópicos de categorias extra matemáticas podem se configurar como relevantes. Assim, uma primeira questão seria a investigação, com base na literatura disponível e por meio de atividades coletivas (pesquisa bibliográfica, debates, encenação, etc.) a análise e compreensão do processo que levou o uso de tokens à invenção da escrita.

O tópico é tão instigante quanto relevante e existe literatura referente ao tema. Podemos citar, por exemplo, a página de Denise Schmandt-Besserat da Universidade do Texas que disponibiliza vários textos sobre tokens. Os textos são variados tanto no nível de complexidade, quanto no que tange ao aspecto dos tokens abordado: historiográfico, social e econômico, comunicativo, e etc. Exemplificando:

- *Em Making tokens talk* (SCHMANDT-BESSERAT, 2017), a autora examina o token como artefato de comunicação, buscando, entre outras coisas, despertar nos jovens aprendizes a curiosidade e o gosto pela investigação arqueológica.

- No curto texto de duas páginas *Tokens: their Significance for the Origin of Counting and Writing*, a autora se concentra no processo que o uso dos tokens levou à invenção da escrita.
- O texto *The Evolution of Writing* fala de como a escrita foi inventada independentemente no Oriente Próximo, na China e na Mesoamérica, fala sobre ser a escrita cuneiforme a mais antiga e sobre ser possível rastrear a escrita cuneiforme até sua mais antiga origem.
- O texto *Tokens and Writing: the Cognitive Development* (SCHMANDT-BESSERAT, 2009) fala sobre o desenvolvimento do poder da abstração proporcionado pela contagem concreta com tokens detendo-se em cada uma das etapas e níveis de abstração no processo de chegar a uma contagem abstrata. Números abstratos culminam o processo, seguindo a invenção da escrita.
- Em *Tokens in China, Europe and Africa – The significance* a autora fala sobre como nas escavações na China, Europa e África, foram encontrados marcadores de argila similares aos tokens do Oriente Próximo, precursores da escrita cuneiforme. Destaca a evolução do sistema de tokens até chegar à escrita como uma particularidade do estado de Uruk.

Os textos citados acima são apenas uma parte do que está disponível para leitura e exploração. O importante aqui é destacar que eles abrem possibilidades de exploração não apenas dos aspectos matemáticos das práticas do passado, mas permite também a ampliação das possibilidades de estudo e formação do professor de matemática permitindo que ele navegue por temas de antropologia, arqueologia, datação, sociologia, metrologia, história, historiografia, matemática, e muitos outros temas. Mas é justamente isto que buscamos: uma narrativa historiográfica que envolva o professor de matemática em formação e o leve a mergulhar na sociedade cuja matemática está sendo historiada e assim, procurar vislumbrar o entrelaçamento das práticas sociais e o saber matemático que vai surgindo na sociedade.

Metrologia

Outro tópico que pode ser explorado é o das sequências metrológicas. Friberg (1984) e Høyrup (s/d) são boas fontes para isto. Metrologia pode ser fonte de questões como, por exemplo: que mudanças houve no sistema metrológico existentes depois da introdução da prata e do cobre? Como era a sequência metrológica relacionada a estes metais? Por que prata e cobre? Porque não ouro? Onde ficavam as jazidas? O que mudou nas práticas comerciais depois disso? Faz ou não sentido a ideia de justiça difundida em Ur III? O que seria uma justiça reduzida a uma metrologia cuidadosa? O que significa? Quais seriam os argumentos a seu favor? E contra? Os sistemas metrológicos tinham unidades e subunidades múltiplos de 60? Ressalte-se que Høyrup (2009) é dedicado inteiramente ao tópico da justiça matemática.

Os escribas enquanto classe profissional

Mesmo que no período histórico que estamos examinando, não aflorem questões matemáticas a serem exploradas juntamente com os professores em formação, há sobre o que pensar e provocar curiosidade. Porque os escribas como classe profissional surgiu agora e não antes ou depois? Teria alguma relação com o uso do cobre e da prata como moedas? Teria alguma relação com a mudança na estrutura social? Teria alguma relação com a usurpação das riquezas do templo pelos reis? Teria a ver com uma maior facilidade de compra e venda de terra? O que seria uma competência profissional do escriba sem autonomia e sem criatividade, como em Ur III? Sob que pontos de vista? Tais perguntas podem ou não ter resposta, mas, o importante é que uma busca cuidadosa na literatura disponível permite traçar pistas, iniciar o debate, levantar e defender hipóteses.

Evolução dos conceitos, das ideias, das práticas

Importante notar que durante o estudo do texto histórico, os exemplos de escrita do período arcaico não traziam sinais cuneiformes. Inicialmente, se escrevia no barro com um cilindro de madeira parecido com um lápis sem ponta. Mais tarde, passou-se a usar um estilete de ponta triangular e os sinais apareciam na forma de cunha. Mas quando foi isto? Em que período? O que mudou na escrita?

Outra mudança acarretada com o tempo foi a do sistema de numeração. Como foi essa evolução do sistema de numeração?

A importância destas duas indagações está ligada ao fato de que nos relatos tradicionais de história da matemática aparecem somente as ideias matemáticas na sua forma mais acabada, ou seja, a forma sob a qual tais ideias circulavam na Antiga Babilônia, ou seja, de 2000 a. E. C. a 1600 a. E. C. Nada se diz sobre estas ideias terem se transformado com o tempo, o que leva a uma concepção equivocada da matemática, como um corpus de ideias permanentes.

Um problema especial

Uma afirmação de Høyrup sobre a criação do sistema sexagesimal posicional com ponto flutuante abre oportunidade para investigações diversas. Høyrup (2007) diz que a invenção do sistema posicional de base 60 em Ur III seria de pouca utilidade se não houvesse uma grande quantidade de tabelas disponíveis ao escriba. A necessidade das tabelas não nos parecia óbvia, mas, resolvemos investiga-la por meio da resolução de um problema de elaborados. Enunciamos um problema real que um escriba supervisor tivesse que resolver:

Suponhamos que um escriba fosse encarregado de abrir um canal de irrigação do braço do rio até uma plantação num prazo de 20. Quantos trabalhadores ele teria de colocar em sua brigada?

Observações sobre o enunciado do problema

1. Já que nosso problema foi simulado, valeria a pena debater com a classe sobre o quanto o enunciado de tal problema é crível, ou seja, seria este um problema real a ser resolvido naquelas condições? Se o docente conseguir o envolvimento dos alunos nesta fase, já é um muito bom começo. Por exemplo, o enunciado presume que o escriba poderia colocar mais ou menos trabalhadores sob sua supervisão. De fato, a literatura diz que o supervisor pode tanto pedir emprestado, como emprestar trabalhadores de sua brigada.
2. Para resolver o problema, temos de supor que canal de irrigação tem corte transversal padronizado. Suposições desta ordem tem de ser debatida na classe. Há ou não há na literatura fundamento para tal suposição? Se houver, teremos de justificar. Se não há, teremos de decidir o que fazer com o problema.
3. Supomos ser conhecido o comprimento do canal, mas isto não gera maiores inquietações, pois, é a distância do ponto ao longo do rio até plantação.

Observações sobre o que se encontrava disponível ao escriba

1. Um sistema de numeração sexagesimal posicional com ponto flutuante; pode ser continuado em ambas direções em potências positivas e negativas de 60; a adição e subtração é feita no ábaco; a multiplicação é feita usando o sistema de numeração; a divisão é feita por meio da multiplicação pelo recíproco
2. Tabelas de constantes absolutas onde se pode encontrar a quantidade de terra a ser escavada por dia de trabalho
3. Tabelas de recíprocos (inverso multiplicativo)
4. Tabelas de conversão das unidades de medida para o sistema sexagesimal
5. Tabelas de multiplicação por números importantes.

Discutidos e aclarados os pontos acima, pode-se partir para a resolução do problema. Destacamos que é importante esclarecer qual a natureza de nossa investigação. Nosso objetivo não é resolver o problema enunciado, achar um número. Pelo contrário, o que queremos aclarar é o quanto faz sentido a afirmação de Høyrup que diz ser sem valor o avanço que teve o sistema de numeração se o escriba calculista não tivesse à sua disposição as muitas tabelas para auxiliar os cálculos. Este é justamente o exercício mais difícil, mergulhar no contexto do passado e visualizar as práticas matemáticas que eram levadas a cabo naquele contexto. Uma vez os alunos engajados nessa busca, a resolução do problema propriamente dito não gera maiores dificuldades.

Para finalizar esta parte, resta chamar a atenção para o fato de uma simples afirmação do historiador possibilitou o desenvolvimento de horas de atividades de imersão no contexto histórico. Falemos então sobre um ponto controverso: o tempo. Claro que o tempo que se gasta nisso é longo, mas, nossa posição é que estamos fazendo o trabalho de levar o professor a ver a matemática com outro olhar, e para isto é necessário um mergulho no contexto histórico. Isto leva tempo. E não acho que este trabalho tenha de ser feito com cada período da história da matemática. Sendo assim, o componente curricular nestes moldes não teria possibilidade de fazer uma varredura e percorrer grande parte da história da matemática. A nosso ver, nem seria necessário.

5. Conclusão

Nossa premissa inicial era a busca de uma narrativa histórica que apresentasse aberturas de convite ao professor ou futuro professor de matemática refletir sobre o processo de criação matemática numa dada sociedade. Que possibilitasse uma visão da matemática como uma atividade humana, entrelaçada com o fazer das pessoas. Supomos desde o início que autores da vertente historiográfica atualizada nos proporcionariam tal narrativa histórica.

Com base nos escritos de Denise Shamandt-Besserat, Jens Høyrup, Igor Dyakonoff, Joran Friberg e Peter Damerow, fizemos um breve relato da história da sociedade mesopotâmica, de suas práticas e de sua matemática. Além disto, destacamos pontos ou aspectos do texto histórico que podem ser explorados envolvendo atividades com leitura, debate, cálculo, pesquisa complementar. Entendemos que as observações e sugestões de atividades para sala de aula aqui explicitadas são só uma amostra do que se pode fazer para mergulhar na história do homem e de suas ideias matemáticas.

Por último, este é um trabalho que apenas está começando e os autores agradecem ao leitor que nos retorne qualquer crítica que por ventura tenha surgido durante a leitura deste artigo. Seremos gratos por ter se dado ao trabalho e pela sua gentileza.

Referências

- DIAKONOFF, I. M. The Rise of the Despotic State in Ancient Mesopotamia. In: I. M. Diakonoff (ed.) **Ancient Mesopotamia, Socio-Economic History**. A Collection of Studies by Soviet Scholars. Moscow: Nauka, Department of Oriental Literature. 1969:173-202.1969a.
- DIAKONOFF, I. M. The Rural Community in the Ancient Near East. **Journal of the Economic and Social History of the Orient** 18, 121-133. 1975.
- DIAKONOFF, I. M. (Ed.). **Ancient Mesopotamia, Socio-Economic History**. A Collection of Studies by Soviet Scholars. Moscow: »Nauka« Publishing House, Central Department of Oriental Literature. 1969.
- DIAKONOFF, I. M. **Structure of Society and State in Early Dynastic Summer**. Sources and Monographs of the Ancient Near East. Monographs. Vol.1. fasc.3. Udena Publications, Los Angeles, 1974.
- DIAKONOFF, I. M. On the Structure of Old Babylonian Society. In: H. Klengel (Ed.) 1971. *Beiträge zur sozialen Struktur des alten Vorderasien*. (Schriften zur Geschichte und Kultur des Alten Orients,1). Berlin: Akademie-Verlag:15-31. 1971.
- FAUVEL, J.; VAN MAANEN, J. History in Mathematics Education. New York: Kluber Academic Publishers, 2001.
- FRIBERG, Jöran. **Numbers and Measures in the Earliest Written Records**. Scientific American, v. 250, n. 2 (February 1984), pp. 110-119.
- HØYRUP, Jens. **Mathematics and early state formation or The Janus face of early mesopotamian mathematics: bureaucratic tool and expression of scribal professional autonomy**. Text of preprint, Filosofi og videnskabsteori på Roskilde Universitetscenter. 3. Række: Preprints og Reprints 1991 nr. 2; not faithful to the original pagination.
- HØYRUP, Jens. State, “Justice”, Scribal Culture and Mathematics in Ancient Mesopotamia. *Sartonia*, 2009, 22:13-46
- HØYRUP, Jens. The roles of Mesopotamian bronze age mathematics tool for state formation and administration – carrier^[1] of teachers’ professional intellectual autonomy. *Educational Studies in Mathematics*, 2007, 66: 257-271.
- HØYRUP, Jens. A statal society shaped by and shaping its mathematics. Contribution au colloque^[1] LES MATHEMATIQUES ET L’ETAT Cirm-Luminy, 15 octobre–19 octobre. *Version préliminaire!*
- NISSEN, Hans J. **Grundzüge einer Geschichte der Frühzeit des Vorderen Orients**. (Grundzüge, 52). Darmstadt: Wissenschaftliches Buchgesellschaft. 1983
- ROQUE, Tatiana; Pitombeira, João Bosco. **Tópicos de história da matemática**. SBM: RJ, 2012.
- ROQUE, Tatiana. **História da matemática**. Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Zahar: RJ, 2012a.
- SAITO, Fumikazo. A pesquisa histórica e filosófica na educação matemática. **Revista Eventos Pedagógicos**. Edição Especial Temática: História, Filosofia e Educação Matemática Sinop, v. 9, n. 2 (24. ed.), p. 604-618, agosto/outubro 2018.
- SAITO, Fumikazo. **História da Matemática e suas (re)construções contextuais**. São Paulo: Ed. Livraria da Física; SBHMat, 2015^[1]
- SCHMANDT-BESSERAT, Denise; NILOUFAR, Moghimi. Making tokens talk. In: Jasink, Anna Margherita; Judith Weingarten; Silvia Ferrara (Eds). **Non-scribal Communication Media in the Bronze Age Aegean and Surrounding Areas** - The semantics of a-literate and proto-literate media (seals, postmarks, mason’s marks, seal-impressed pottery, ideograms and logograms, and related systems). Firenze University Press 2017, p. 175-183.

SCHMANDT-BESSERAT, Denise. **The Evolution of Writing**. Disponível em https://sites.utexas.edu/dsb/files/2014/01/evolution_writing.pdf Acesso em 21/09/2018.

SCHMANDT-BESSERAT, Denise. Tokens and Writing: the Cognitive Development. **Scripta**, Vol. 1 (Sept. 2009): 145-154

SCHMANDT-BESSERAT, Denise. Tokens in China, Europe and Africa – The significance. **Scripta**, September 2012, Volume 4:1-36.

SCHMANDT-BESSERAT, Denise. **Tokens: their Significance for the Origin of Counting and Writing**. Disponível em http://sites.utexas.edu/dsb/files/2014/03/tokens_article.pdf acesso em 21/09/2018.

DAMEROW, Peter. **Prehistory and Cognitive Development**. Invited Lecture at the Twenty-Fifth Annual Symposium of the Jean Piaget Society Berkeley, June 1 - June 3, 1995. PRE-PRINT 30 Max Plank Institute for History of Science. 1996.

Bernadete Morey

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

E-mail: bernadetemorey@gmail.com

Severino Carlos Gomes

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

E-mail: severocarlosgomes@gmail.com