

Conocimiento del contenido y la enseñanza de un profesor de matemática al enseñar los conceptos básicos de función

Knowledge of the content and teaching of a mathematics teacher in teaching basic concepts of function

Jonathan Espinoza González

Miguel Picado Alfaro

Universidad Nacional de Costa Rica – Costa Rica

RESUMEN

Este artículo caracteriza los conocimientos que utiliza un profesor de matemática durante su práctica de enseñanza. Se enfoca en el conocimiento pedagógico del contenido (Shulman, 1986 y Hill, Ball y Schilling, 2008) y describe en profundidad uno de los tres subdominios de este: el conocimiento del contenido y la enseñanza. El estudio realizado se deriva de una investigación cualitativa descriptiva basada en los estudios de caso. Los resultados muestran que el sistema de categorías y subcategorías empleado permite identificar los componentes e indicadores del conocimiento del contenido y la enseñanza que caracterizan a un docente cuando enseña los conceptos básicos de función.

Palabras clave: Conocimiento pedagógico del contenido. Conocimiento del contenido y la enseñanza. Formación de profesores. Enseñanza de las matemáticas.

ABSTRACT

This article characterizes the knowledge that a mathematics teacher uses during his teaching practice. It focuses on the pedagogical knowledge of content (Shulman, 1986 y Hill, Ball y Schilling, 2008) and describes in depth one of the three subdomains of this: knowledge of content and teaching. The study is derived from a descriptive qualitative research based on the case studies. The results show that the system of categories and subcategories employed allows to identify the components and indicators of knowledge of the content and teaching that characterize a teacher when he teaches the basic concepts of function.

Keywords: Pedagogical knowledge of content. Knowledge of content and teaching. Teacher training. Teaching of mathematics.

Introducción

Conocer sobre la práctica y el desempeño del profesor de matemática en el aula es crucial para determinar actitudes y comportamientos de los estudiantes en el ambiente escolar. Por ejemplo, es común escuchar los comentarios de los alumnos sobre algunos docentes que saben mucha matemática, pero no saben enseñarla (González, 1999). Este tipo de percepciones refuerzan el hecho de que no es suficiente poseer un dominio adecuado del contenido matemático, sino que también es necesario profundizar en su enseñanza (Manterola, 1995).

En este sentido, el Conocimiento Pedagógico del Contenido (CPC) hace referencia a los conocimientos sobre la enseñanza de un tema específico que todo profesor debe dominar.

Este otorga mayor valor por la profesión de la enseñanza y cubre un vacío sobre el conocimiento del profesor (Pinto y González, 2006), además de ser una de las particularidades que presentan los profesionales considerados como buenos profesores (Shulman, 2005).

En el año 2010, el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP) realizó un examen diagnóstico a todos los profesores de Educación Secundaria del país. Este pretendía evaluar el conocimiento que poseían los docentes sobre contenidos matemáticos que se estudian en educación secundaria, principalmente aquellos abordados de los últimos dos años de este nivel educativo (la educación secundaria en Costa Rica abarca un periodo de cinco años). Los resultados son poco alentadores, alrededor del 43% de estos docentes presentaron limitaciones en cuanto al dominio de los contenidos evaluados (Programa Estado de la Nación en Desarrollo Humano Sostenible, 2013). Aunado a lo anterior, se destaca que el MEP, quien es el principal empleador de docentes de Matemática en el país, no posee un mecanismo que permita conocer las habilidades y destrezas para la enseñanza de contenidos matemáticos de aquellos docentes que contrata. La problemática descrita podría repercutir tanto en la enseñanza como en el rendimiento académico de los estudiantes en esta asignatura.

En el caso de los escolares (estudiantes de educación secundaria), los resultados de las pruebas de bachillerato¹, evidencian las dificultades que tienen en esta asignatura (MEP, 2012a). En general, muchos de los contenidos tienen niveles de aprobación menores al 50%; entre estos, los vinculados a las funciones se encuentran entre los de más bajo rendimiento. Sin embargo, las dificultades en el tema de funciones también se manifiestan en algunos profesores en servicio y en otros en formación inicial (Argawal, 2006; Morales y Font, 2017; Shumway, 2003).

Este estudio considera al docente como el principal responsable de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática. Se enmarca en las investigaciones sobre el conocimiento matemático del profesor para la enseñanza, iniciadas por Shulman (1986, 1987) y desarrolladas por Ball y colaboradores (Ball, Hill y Bass, 2005; Hill, Ball y Schilling, 2008; Ball, Thames y Phelps, 2008). El modelo propuestos por estos autores enfatiza la diferencia entre el conocimiento del contenido matemático (CCM) y el CPC. Además propone tres subdominios para cada uno de estos conocimientos. También, se empleó el Análisis Didáctico (Gómez, 2007) y los aportes de Rojas, Flores y Ramos (2013) para identificar dominios de conocimiento matemático específicos ligados al concepto matemático abordado.

El problema de investigación enfoca las características que desde el Conocimiento del Contenido y la enseñanza (CCEn) manifiesta un profesor de Matemática al enseñar los conceptos básicos de función en cuarto año de la Educación Secundaria en Costa Rica, desde el marco del CPC. Para abordar el problema se han definido tres objetivos específicos:

1. Describir el proceso de enseñanza que realiza un docente de Matemática de Educación Secundaria al enseñar los conceptos básicos de función.
2. Identificar los componentes del CCEn que pone de manifiesto un docente de Matemática de Educación Secundaria al enseñar los conceptos básicos de función.
3. Determinar indicadores sobre el CCEn que caracterizan a un docente de Matemática de Educación Secundaria que enseña los conceptos básicos de función.

¹ Prueba estandarizada que realizan estudiantes de quinto año de educación secundaria, para obtener el título de bachillerato en educación secundaria.

Marco Teórico

A continuación, se presentan las principales ideas teóricas en las cuales se ha fundamentado esta investigación.

Conocimiento profesional del profesor de matemática

El conocimiento profesional del profesor corresponde a aquellos saberes y experiencias que pone en práctica el docente, que viene construyendo desde su formación inicial y durante el desarrollo de su profesión (Climent, 2002).

En sus estudios, Shulman (1986,1987) ha precisado las diferencias entre el Conocimiento del Contenido y el Conocimiento del Contenido para la Enseñanza. El primero corresponde a la cantidad y a la organización del contenido en la mente del profesor (Shulman, 1986), mientras que el conocimiento del contenido para la enseñanza se refiere a la combinación del contenido y la pedagogía (Shulman, 1987).

Dominios del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (CME)

Hill, Ball y Schilling (2008) definen el Conocimiento Matemático para la Enseñanza como “el conocimiento matemático que los profesores utilizan en el aula para producir aprendizaje y crecimiento en los alumnos” (p. 374). Así, el profesor debe poseer un conocimiento específico para la enseñanza que va más allá del conocimiento matemático.

Para estudiar el conocimiento que se desarrolla en las mentes de los profesores, es necesario distinguir tres tipos de conocimiento: (a) conocimiento del contenido temático de la materia, (b) conocimiento pedagógico del contenido, “el tema de la materia para la enseñanza”, y (c) conocimiento curricular (Shulman, 1987, p. 9).

En particular el conocimiento pedagógico del contenido incluye “las formas más útiles de representación de estas ideas; las analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones más poderosos; en pocas palabras, las formas de representación y formulación del tema que lo hace comprensible a otros” (Shulman, 1987, p. 9), es decir, “todo el esfuerzo que hace el profesor para hacer comprensible su tema en particular” (Garriz y Trinidad-Velasco, 2004, p. 3).

A partir de los planteamientos de Shulman (1986, 1987), Hill, Ball y Schilling (2008) proponen un modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (figura 1) en el que enfatizan la diferencia entre el CCM y el CPC. Así mismo establecen tres subdominios para cada uno de los dominios propuestos.

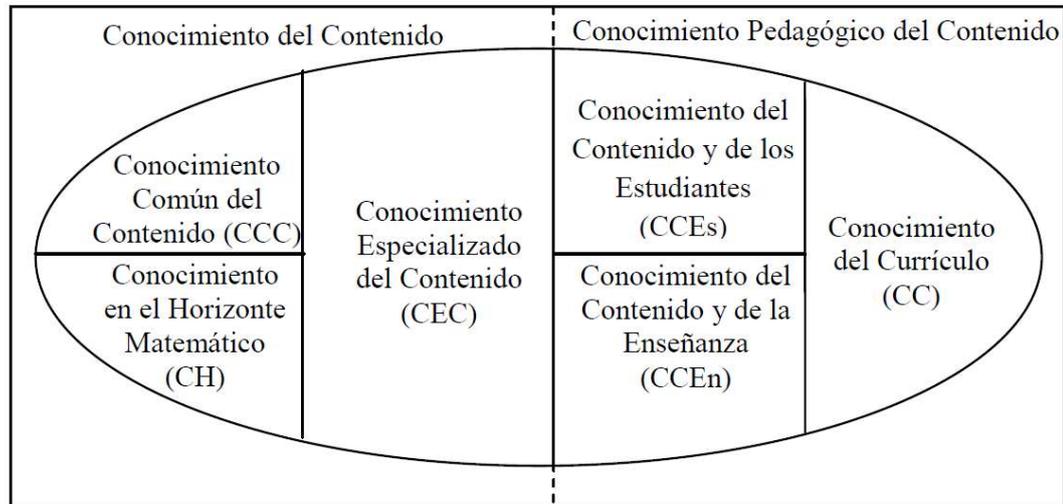


Figura 1. Dominios de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (CME) (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 377)

Subdominios del Conocimiento del Contenido Matemático

El conocimiento del contenido matemático —que enfatiza las matemáticas— incluye el conocimiento común del contenido (CCC), el conocimiento especializado del contenido (CEC) y el conocimiento del horizonte matemático (CH). Para una mayor caracterización de estos componentes pueden consultarse los trabajos de Hill, Ball y Schilling (2008), Rojas (2010), Rodríguez, Picado y Espinoza (2015); Rodríguez, Picado, Espinoza y Rojas (en prensa); Rodríguez, Picado, Espinoza, Rojas y Flores (2016).

Subdominios del Conocimiento Pedagógico del Contenido

El conocimiento pedagógico del contenido—que enfoca los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas— se compone del conocimiento del contenido y de los estudiantes (CCEs), el conocimiento del contenido y la enseñanza (CCEn) y el conocimiento del currículo (CC).

En cuanto al CCEs, Hill, Ball y Schilling (2008) lo definen como el “conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben o aprenden un contenido particular” (p. 375). Incluye el conocimiento de los errores comunes y las dificultades más habituales que presentan los estudiantes, por ejemplo “saber que los niños tienen dificultad para entender el orden de magnitud de los sucesivos restos en el algoritmo de la división” (Climent, Romero, Carrillo, Muñoz y Contreras, 2013, p. 17).

El CCEn, foco central de este estudio, es “el conocimiento que combina el conocimiento sobre la enseñanza con el matemático” (Ball, Thames y Phelps, 2008, p. 401). Implica “conocer el funcionamiento matemático de recursos y materiales, así como de estrategias y otras cuestiones de cómo enseñar los contenidos específicos, por ejemplo, saber cómo los bloques en base 10 permiten abordar la división en clase” (Climent et al., 2013, p. 17).

Por último, el CC alude al conocimiento de los objetivos, contenidos, fines, orientaciones curriculares, materiales y recursos disponibles para la enseñanza, que permiten

al profesor guiar su práctica y seleccionar las tareas adecuadas para el aprendizaje de sus estudiantes (Ball, Thames y Phelps, 2008, p. 391). Por ejemplo, “saber en qué curso se inicia la división” (Climent et al., 2013, p. 17).

Así, un docente con conocimiento del CPC:

Anticipa los principales errores y las dificultades más comunes que presentan los estudiantes al aprender un contenido matemático (CCEs), además conoce sobre diversos recursos, materiales y estrategias para enseñar un tema (CCEn) y también domina las orientaciones curriculares relacionadas con los objetivos, contenidos, fines que permiten al docente guiar su práctica y seleccionar las tareas adecuadas al nivel educativo de los estudiantes (CC). (Espinoza y Picado, 2017, p. 58)

Análisis didáctico

Otro referente para este estudio es el análisis didáctico (Gómez, 2007). Este es un procedimiento que permite diseñar, implementar y valorar actividades de enseñanza y aprendizaje, a partir de los distintos significados del contenido escolar. Está compuesto por cinco análisis parciales: análisis conceptual, análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación (evaluación).

El análisis conceptual aborda la diversidad de significados del concepto matemático, mientras que el de contenido se enfoca en su estructura conceptual, sus aplicaciones y representaciones. El análisis cognitivo se centra en el aprendizaje de los conceptos, considera las expectativas (objetivos, capacidades, competencias), las limitaciones (errores y dificultades) y las oportunidades (tareas) para este aprendizaje. El diseño, selección y la secuencia en que se presentan las tareas en una unidad didáctica se estudia desde el análisis de instrucción. Por último, el análisis de evaluación considera la valoración tanto del aprendizaje de los estudiantes como del diseño de la unidad didáctica.

Para identificar el conocimiento que pone en práctica un profesor cuando enseña los conceptos básicos de función, se emplea la propuesta desarrollada por Rojas, Flores y Ramos (2013). Estos autores combinan los componentes del análisis didáctico con el CPC. Para establecer tales relaciones consideraron tres análisis parciales del análisis didáctico: de contenido, cognitivo e instrucción y las distintas dimensiones que los conforman.

Metodología

La investigación realizada es de carácter cualitativo descriptivo enfocada en un estudio de caso. Tal como señala Stake (2007) “el estudio de casos es el estudio de la particularidad y complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes” (p. 11). En este sentido, el estudio pretende caracterizar y comprender el caso de un profesor de Matemática en un momento específico de su actividad pedagógica: la enseñanza de los conceptos básicos de función en un grupo de cuarto año de la Educación Secundaria costarricense.

El participante de la investigación es un profesor de Matemática de Educación Secundaria que ha impartido, al menos en una ocasión, los conceptos básicos de función. Su selección se realizó con base en criterios técnicos y de profesor experto, esto con el objetivo

de disponer de un informante con características especiales que maximice el CPC, es decir, que manifieste la mayor cantidad de elementos o componentes vinculados al CPC.

Entre los criterios técnicos considerados para su selección se encuentran: interés y disponibilidad para participar en la investigación, trabajar en una institución pública de educación secundaria, contar con una plaza fija y disponibilidad para que sus clases sean observadas y grabadas en audio y video. Con relación a los criterios de profesor experto (Rojas, Carrillo y Flores, 2012) se tomaron en cuenta los siguientes aspectos: al menos 5 años de experiencia en la enseñanza de la matemática en una institución de Educación secundaria, ser un profesor destacado según evaluaciones institucionales, contar con recomendación de pares y directivos del centro, poseer experiencia en la enseñanza del tema de funciones y ser consciente de las nuevas directrices curriculares del MEP para la enseñanza de las Matemáticas.

La selección del profesor participante se dividió en dos fases. En la primera se solicitó a la asesoría regional de Matemática la recomendación de docentes que cumplieran con los criterios descritos. En la segunda fase y con la aprobación y recomendación del director de la institución, se presentó la investigación a los profesores identificados para determinar cuál estaba anuente a participar. Seleccionado el docente se procedió a solicitar el visto bueno de los padres de familia de los estudiantes para grabar en audio y video las clases de matemática a las que asistieran sus hijos.

El docente seleccionado posee 15 años de experiencia en la Educación Secundaria, tiene plaza en propiedad en un colegio de la región central del país, ha impartido el tema de funciones por al menos 10 años y ha participado en capacitaciones que imparte el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica sobre los actuales programas de estudio de Matemática. La información se recolectó por medio de la observación no participante. En total se lograron observar y sistematizar cinco sesiones de clase, que fueron organizadas en episodios. Cada episodio corresponde a una sesión de grabación que pueden corresponder a una o dos lecciones de clase. En la educación secundaria en Costa Rica cada lección de clase es de 40 minutos.

Categorías de análisis

El análisis de la información se realiza desde la óptica del CPC enfocando las especificidades del CCEn. Para esto se elaboró una serie de categorías de análisis basadas en las propuestas de Hill, Ball y Schilling (2008) y Rojas, Flores y Ramos (2013). En total se construyeron 10 categorías. Para cada una de estas se diseñaron subcategorías y unidades de análisis relacionadas con los conceptos básicos de función considerados en el estudio. La tabla 1 muestra estas categorías y subcategorías.

Tabla 1 - *Categorías y subcategorías de análisis para el CCEn*

Categoría	Subcategoría
------------------	---------------------

Tabla 1 - *Categorías y subcategorías de análisis para el CCEn*

Categoría	Subcategoría
1. Adecuación entre los sistemas de representación empleados para enseñar las ideas matemáticas específicas.	<ul style="list-style-type: none"> - Efectúa cambios de sistema de representación para enseñar el concepto de... - Las representaciones verbales utilizadas son adecuadas para la enseñanza del concepto de... - Las representaciones icónicas utilizadas son adecuadas para la enseñanza del concepto de... - Las representaciones tabulares utilizadas son adecuadas para la enseñanza del concepto de... - Las representaciones gráficas utilizadas son adecuadas para la enseñanza del concepto de... - Las representaciones simbólicas algebraicas utilizadas son adecuadas para la enseñanza del concepto de... - Las representaciones simbólicas numéricas utilizadas son adecuadas para la enseñanza del concepto de...
2. Paralelismo entre las habilidades específicas planteadas (implícita o explícitamente) y el desarrollo de la instrucción.	<ul style="list-style-type: none"> - Existe relación entre la habilidad específica... y las actividades de instrucción - La instrucción realizada refleja la habilidad específica...
3. Adecuación de las tareas propuestas para cada habilidad específica.	<p>Procesos cognitivos:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Propone tareas matemáticas de reproducción durante la enseñanza de la habilidad específica... - Propone tareas matemáticas de conexión durante la enseñanza de la habilidad específica... - Propone tareas matemáticas de reflexión durante la enseñanza de la habilidad específica... <p>Situación:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Propone tareas matemáticas de carácter personal durante la enseñanza de la habilidad específica... - Propone tareas matemáticas de carácter educativo/profesional durante la enseñanza de la habilidad específica... - Propone tareas matemáticas de carácter público durante la enseñanza de la habilidad específica... - Propone tareas matemáticas de carácter científico durante la enseñanza de la habilidad específica... <p>Contexto:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Propone tareas matemáticas auténticas durante la enseñanza de la habilidad específica... - Propone tareas matemáticas hipotéticas durante la enseñanza de la habilidad específica...
4. Variedad de sistemas de representación que se emplean en las tareas planteadas.	<p>Procesos cognitivos:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Propone tareas matemáticas de reproducción durante la enseñanza y emplea el sistema de representación... - Propone tareas matemáticas de conexión durante la enseñanza y emplea el sistema de representación... - Propone tareas matemáticas de reflexión durante la enseñanza y emplea el sistema de representación... <p>Situación:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Propone tareas matemáticas de carácter personal durante la enseñanza

Tabla 1 - *Categorías y subcategorías de análisis para el CCEn*

Categoría	Subcategoría
	<p>y emplea el sistema de representación...</p> <ul style="list-style-type: none"> - Propone tareas matemáticas de carácter educativo/profesional durante la enseñanza y emplea el sistema de representación... - Propone tareas matemáticas de carácter público durante la enseñanza y emplea el sistema de representación... - Propone tareas matemáticas de carácter científico durante la enseñanza y emplea el sistema de representación... <p>Contexto:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Propone tareas matemáticas auténticas durante la enseñanza y emplea el sistema de representación... - Propone tareas matemáticas hipotéticas durante la enseñanza y emplea el sistema de representación...
5. El grado en que las tareas planteadas permiten adquirir o reforzar los conceptos matemáticos.	<p>Procesos cognitivos:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Propone tareas matemáticas de reproducción durante la enseñanza del concepto de... - Propone tareas matemáticas de conexión durante la enseñanza del concepto de... - Propone tareas matemáticas de reflexión durante la enseñanza del concepto de... <p>Situación:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Propone tareas matemáticas de carácter personal durante la enseñanza del concepto de... - Propone tareas matemáticas de carácter educativo/profesional durante la enseñanza del concepto de... - Propone tareas matemáticas de carácter público durante la enseñanza del concepto de... - Propone tareas matemáticas de carácter científico durante la enseñanza del concepto de... <p>Contexto:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Propone tareas matemáticas auténticas durante la enseñanza del concepto de... - Propone tareas matemáticas hipotéticas durante la enseñanza del concepto de...
6. La evidencia de que el profesor dispone de un esquema de instrucción.	<p>Esquema de instrucción general (Gagné, 1979):</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Dirigir la atención (capturar la atención del estudiante) 2. Informar al estudiante del objetivo a conseguir (el alumno debe conocer los objetivos del aprendizaje) 3. Evocar los conocimientos previos (asociación de la nueva información con el conocimiento previo facilita el aprendizaje) 4. Presentar el contenido (nueva información) 5. Guiar el aprendizaje (ayuda adicional) 6. Provocar el desempeño (se pide poner en práctica la nueva habilidad) 7. Proporcionar retroalimentación (feedback) 8. Evaluar el desempeño (evaluación formativa) 9. Promover la retención y fomentar la transferencia (contextos más amplios)
7. Adecuación entre las tareas presentadas y los caminos de aprendizaje que se intuyen.	<ul style="list-style-type: none"> - Se evidencia un planteamiento o camino de aprendizaje - Los caminos de aprendizaje describen capacidades para resolver la tarea - Los caminos de aprendizaje mostrados incluyen el reconocimiento de posibles errores - Presenta una variedad de caminos de aprendizaje para resolver una tarea

Tabla 1 - *Categorías y subcategorías de análisis para el CCEn*

Categoría	Subcategoría
	- Los caminos de aprendizaje planteados son adecuados para la resolución de la(s) tarea(s)
8. La riqueza de materiales y recursos didácticos empleados.	- Utiliza recursos didácticos para abordar el concepto de... - Utiliza materiales didácticos para abordar el concepto de...
9. La adecuación de los recursos y materiales según el nivel de enseñanza y las finalidades previstas de adquisición de conceptos y propiedades.	- El uso de materiales didácticos forma parte de una secuencia de enseñanza del concepto de... - El uso de recursos didácticos forma parte de una secuencia de enseñanza del concepto de... - Los materiales utilizados responden a las habilidades específicas planteadas para el concepto de... - Los recursos utilizados responden a las habilidades específicas planteadas para el concepto de... - Los materiales didácticos utilizados permiten la adquisición del concepto de... - Los recursos didácticos utilizados permiten la adquisición del concepto de... - Los materiales didácticos utilizados permiten la adquisición de las propiedades del concepto de... - Los recursos didácticos utilizados permiten la adquisición de las propiedades del concepto de...
10. La relación entre acciones que permiten el empleo de recursos y situaciones, que envuelvan diversos significados y contextos.	- La presentación del concepto de ... promueve el uso de recursos didácticos - El uso de recursos se vincula a un contexto particular - Los recursos utilizados contribuyen a presentar significados diversos sobre el concepto de... - Las situaciones mostradas para enseñar el concepto de... utilizan un recurso didáctico para su comprensión

Particularmente, para un mejor entendimiento de los datos mostrados en la tabla 1, se destaca lo siguiente.

Las habilidades específicas relacionadas con los conceptos básicos de función consideradas en el programa oficial de matemática para el cuarto año de la Educación Secundaria en Costa Rica son:

- Distinguir entre cantidades constantes y variables.
- Identificar y aplicar relaciones entre dos cantidades variables en una expresión matemática.
- Identificar si una relación dada en forma tabular, simbólica o gráfica corresponde a una función.
- Evaluar el valor de una función dada en forma gráfica o algebraica, en distintos puntos de su dominio.
- Interpretar hechos y fenómenos mediante relaciones que corresponden a funciones.
- Identificar el dominio, codominio, ámbito, imágenes y preimágenes de una función a partir de su representación gráfica.

Los sistemas de representación considerados en el estudio son: verbal, icónica, tabular, gráfica, simbólico algebraico, simbólico numérico.

Los conceptos básicos de función considerados en el estudio son: Relación, función, cantidad constante, cantidad variable, variable dependiente y variable independiente, imagen, preimagen, criterio de asociación, gráfica, dominio, codominio y rango o ámbito.

Se entiende por *camino de aprendizaje de una tarea* a una secuencia de capacidades que los estudiantes pueden desplegar para resolverla (Gómez, 2007).

En la figura 1 se muestran las relaciones existentes entre los componentes del CCEn a partir de las categorías, subcategorías y unidades de análisis definidas. Destaca el papel de las tareas como un elemento trascendental para el estudio de conceptos matemáticos, el uso de sistemas de representación, el logro de habilidades específicas y la definición de caminos de aprendizaje. Junto a las tareas se acentúan los materiales y recursos y la instrucción como elementos sobresalientes (en un nivel inferior en relación con las tareas) para el análisis de la información.

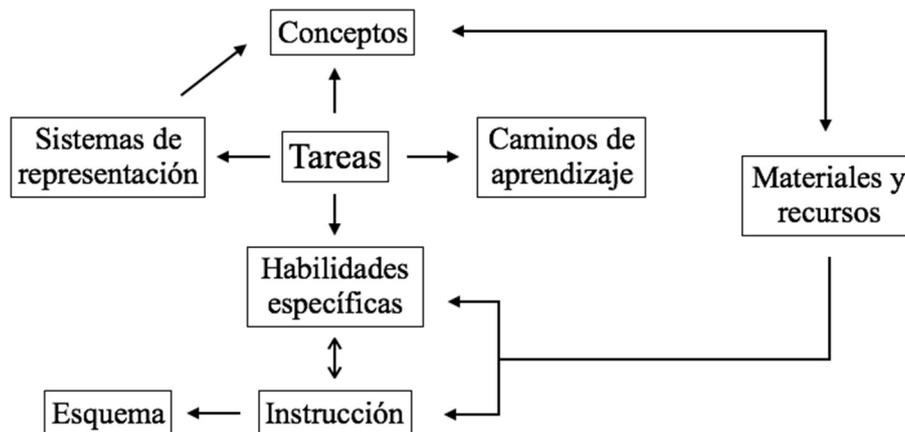


Figura 1. Relaciones entre los componentes del CCEn de acuerdo al sistema de Categorías, subcategorías y unidades de análisis definidas

Análisis y Discusión

Para iniciar este apartado se describen los cinco episodios observados en la fase de recolección de información. Seguidamente, se presentan los principales resultados obtenidos para el subdominio del CCEn.

Descripción general de los episodios

En el primer episodio el profesor introdujo el concepto de función mediante la metodología de resolución de problemas propuesta por el MEP, en este caso la situación presentada a los estudiantes se relaciona con el costo y la producción de artículos. Los estudiantes resolvieron el problema en subgrupos de trabajo, mientras que el docente aclaraba las dudas que se presentaban. Posteriormente, el docente resolvió el problema en la pizarra a partir de los aportes de los estudiantes. Además del concepto de función, se abordaron de forma implícita los conceptos de relación, preimagen e imagen, gráfica de una función y plano cartesiano.

Durante el segundo episodio se abordaron los conceptos de: relación, función, imagen, preimagen, dominio, codominio y ámbito (definiéndolos explícita y formalmente). Para esto, el profesor retomó elementos del problema presentado en el episodio anterior. En general, la clase se centró en el dictado de definiciones con apoyo de explicaciones y representaciones simbólicas y gráficas.

A lo largo del tercer episodio, se retomaron los conceptos de dominio y rango, para ser identificados a partir de la representación gráfica de una función. Para esto el docente utilizó una tarea relacionada con el trazo de una gráfica, mediante la cual explicó a los estudiantes como determinar el dominio y el rango de una función. Luego, los estudiantes en subgrupos resolvieron tareas similares a la presentada por el profesor. Durante el trabajo en subgrupos el docente atendió dudas y consultas. Por último, las tareas fueron revisadas por el docente cuando los estudiantes las resolvieron en la pizarra.

En el cuarto episodio no se presentaron nuevos conceptos. Los estudiantes de forma individual resolvieron tareas que requerían el reconocimiento del rango y ámbito de una función a partir de su representación gráfica. El docente acudió a los pupitres de los estudiantes para aclarar las dudas que se presentaron.

Finalmente, en el quinto episodio, el docente mostró representaciones gráficas para identificar, a partir de estas, imágenes y preimágenes.

Cabe destacar que los conceptos básicos de función abordados por el docente durante los cinco episodios de clase son: relación, función, dominio, codominio, rango o ámbito, imagen y preimagen. No se estudiaron los conceptos de cantidad constante, cantidad variable, variable independiente, variable dependiente, criterio de asociación y gráfica.

Adecuación entre los sistemas de representación empleados para enseñar las ideas matemáticas específicas

Los resultados obtenidos en esta categoría se presentan en la tabla 2.

Tabla 2 - *Distribución de los sistemas de representación según el concepto*

Conceptos	Sistemas de representación						Total
	Verbal	Icónica	Tabular	Gráfica	Simbólico algebraico	Simbólico numérico	
Relación	✓	-	-	✓	✓	✓	4
Cantidad constante	-	-	-	-	-	-	0
Cantidad Variable	-	-	-	-	-	-	0
Variable dependiente	-	-	-	-	-	-	0
Variable independiente	-	-	-	-	-	-	0
Función	✓	-	-	-	✓	-	2
Dominio	✓	-	-	✓	✓	✓	4
Codominio	✓	-	-	-	✓	-	2
Rango	✓	-	-	✓	✓	✓	4
Imagen	✓	-	-	✓	✓	✓	4
Preimagen	✓	✓	-	✓	-	✓	4
Criterio de asociación	-	-	-	-	-	-	0
Gráfica	-	-	-	-	-	-	0

Total	7	1	0	5	6	5	24
--------------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	-----------

Nota. ✓=Presente; -=Ausente.

El uso de sistemas de representación enfoca los de tipo verbal (utilizada en todos los conceptos básicos de función abordados por el docente), simbólico algebraico (excepto en el concepto de preimagen), representación gráfica y simbólico-numérico, siendo la representación icónica la menos utilizada (únicamente en el concepto de preimagen) y la tabular que no fue empleada por el docente (figura 2).

Las representaciones se combinan para presentar conceptos determinados, por ejemplo, al presentar los conceptos de relación, dominio, rango e imagen, el profesor empleó, en el desarrollo de cada uno de ellos, cuatro sistemas de representación: verbal, gráfica, simbólico algebraico y simbólico numérico, mientras que para los conceptos de función y codominio se combinaron el verbal y el simbólico algebraico. En cuanto a las representaciones gráficas, estas se presentan —en algunos casos— sin la precisión adecuada, que puede llevar a un entendimiento confuso de lo mostrado (no se traza una escala numérica apropiada).

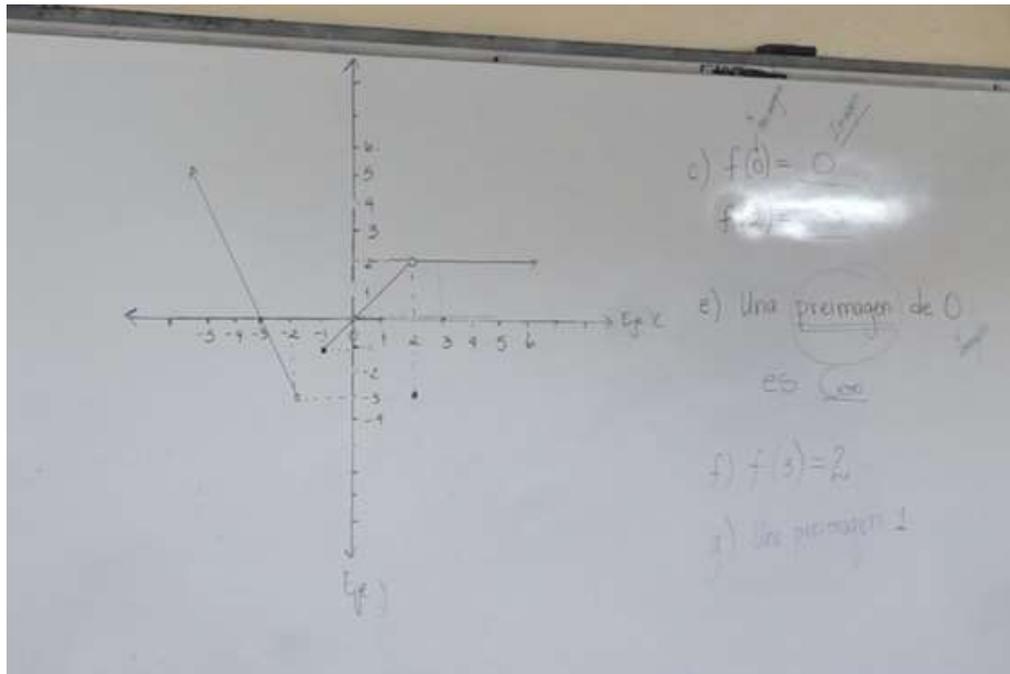


Figura 2. Algunas representaciones gráfica y simbólico algebraica mostradas

Para los conceptos de cantidad constante, cantidad variable, variable independiente, variable dependiente, criterio de asociación y gráfica no hay sistemas de representación asociados porque no fueron abordados por el docente en alguno de los cinco episodios observados.

Paralelismo entre las habilidades específicas planteadas (implícita o explícitamente) y el desarrollo de la instrucción

En cuanto a las habilidades específicas propuestas por el MEP para este nivel educativo, vinculadas a los conceptos básicos de función, se refleja en los episodios un vínculo entre estas y las actividades de instrucción mostradas por el docente. Las explicaciones y tareas presentadas responden a estos logros esperados.

Adecuación de las tareas propuestas para cada habilidad específica

La tabla 3 muestra la distribución de las habilidades específicas de acuerdo al nivel de complejidad, tipo de situación y contexto de los problemas (tareas) utilizados por el profesor durante los episodios.

Tabla 3 - *Distribución de las habilidades específicas de acuerdo al nivel de complejidad, tipo de situación y contexto de las tareas empleadas en clase*

Habilidades específicas	Complejidad				Tipo de Situación			Contexto	
	Rep	Con	Ref	Per	Edu	Pub	Cien	Aut	Hip
Distinguir entre cantidades constantes y variables.	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Identificar y aplicar relaciones entre dos cantidades variables en una expresión matemática.	✓	-	-	-	-	✓	-	✓	-
Identificar si una relación dada en forma tabular, simbólica o gráfica corresponde a una función.	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Evaluar el valor de una función dada en forma gráfica o algebraica, en distintos puntos de su dominio.	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Interpretar hechos y fenómenos mediante relaciones que corresponden a funciones.	✓	-	-	-	-	✓	-	✓	-
Identificar el dominio, codominio, ámbito, imágenes y preimágenes de una función a partir de su representación gráfica.	✓	✓	-	-	✓	✓	-	✓	✓

Nota. ✓=Presente; -=Ausente; Rep=Reproducción; Con=Conexión; Ref=Reflexión; Per=Personal; Edu=Educativo; Pub=Público; Cien=científico; Aut=Auténtico; Hip=hipotético.

Se reconoce que las tareas propuestas corresponden a algunas de las habilidades cognitivas planteadas por el programa de estudio. No se logró observar el planteamiento de tareas relacionadas con tres de las seis habilidades propuestas en este plan curricular, estas son: distinguir entre cantidades constantes y variables, evaluar el valor de una función dada en forma gráfica o algebraica en distintos puntos de su dominio e identificar si una relación dada en forma tabular, simbólica o gráfica es una función. La ausencia de tareas vinculadas con esta última habilidad está relacionada con la falta de representaciones tabulares durante las lecciones.

En relación con los niveles de complejidad de las tareas, el currículo de Matemática para la Educación Secundaria en Costa Rica propone tres niveles de complejidad para los problemas que se presenten durante las lecciones, ya sean estos para introducir un conocimiento nuevo o para reforzar alguno ya adquirido. El primer nivel de complejidad es el de *reproducción*. Los problemas de este nivel son familiares para el estudiante y demandan la aplicación de conocimientos ya practicados con anterioridad. El segundo corresponde al de *conexión*: en estos la solución no es rutinaria, pero hacen referencia a contextos familiares para el estudiante. Se caracterizan principalmente por la aplicación de conocimientos

matemáticos en la solución de problemas de otras disciplinas científicas. El tercer nivel de complejidad es el de *reflexión*. En los problemas de reflexión se requiere que el estudiante realice generalizaciones, reflexione, argumente y justifique los hallazgos realizados, además que comunique sus descubrimientos.

Al respecto, se observó la utilización de problemas de reproducción y conexión, no así de reflexión, siendo los más frecuentes los problemas de reproducción, los cuales se utilizaron en las tres habilidades abordadas con el propósito de reforzar conocimientos.

Por otra parte, predomina el uso de tareas inmersas en situaciones de tipo público. No se plantearon tareas de carácter personal ni científico. Predomina el uso de tareas auténticas sobre las hipotéticas.

En general, el docente enfatiza la identificación de conceptos básicos como dominio, codominio, rango, imagen, preimagen, mediante representaciones gráficas y el uso de símbolos.

Variedad de sistemas de representación que se emplean en las tareas planteadas

Durante la enseñanza se observó la utilización de una gran variedad de sistemas de representación (tabla 4). El sistema de representación empleado por el docente con mayor frecuencia corresponde al verbal, sin embargo, las representaciones simbólicas de tipo algebraico y numérico, y las gráficas tienen un uso significativo durante la presentación de conceptos. Se obtuvieron resultados similares cuando se analizó el tipo de representación empleado en las distintas clasificaciones que se previeron para las tareas utilizadas en clase (complejidad, tipo de situación y contexto); es decir, a pesar de que las categorías de análisis pretendían diferenciar el tipo de representación según el nivel de dificultad de las tareas, su carácter y su tipo, el uso de los distintos tipos de representaciones es similar en todos los casos.

Tabla 4 - *Distribución de los distintos sistemas de representación de acuerdo al nivel de complejidad, el tipo de situación y el contexto de las tareas utilizadas en clase*

Sistema de representación	Complejidad			Tipo de Situación				Contexto	
	Rep	Con	Ref	Per	Edu	Pub	Cien	Aut	Hip
Verbal	✓	✓	-	✓	✓	✓	-	✓	✓
Icónica	✓	-	-	✓	✓	-	-	-	✓
Tabular	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Gráfica	✓	-	-	✓	✓	-	-	✓	✓
Simbólica algebraica	✓	✓	-	✓	✓	✓	-	✓	✓
Simbólica numérica	✓	✓	-	✓	✓	✓	-	✓	✓

Nota. ✓=Presente; -=Ausente; Rep=Reproducción; Con=Conexión; Ref=Reflexión; Per=Personal; Edu=Educativo; Pub=Público; Cien=Científico; Aut=Auténtico; Hip=hipotético.

El grado en que las tareas planteadas permiten adquirir o reforzar los conceptos matemáticos

Una vez resuelta la tarea sobre “costo y producción de artículos”, propuesta para introducir el concepto de función, las otras tareas empleadas para reforzar y movilizar conceptos matemáticos mantienen su caracterización (tabla 5): son tareas principalmente de reproducción y conexión, siendo las de reproducción las de mayor uso, de carácter público y educativo, auténticas o hipotéticas.

Las tareas de conexión se emplearon en todos los conceptos básicos de función; esto no indica que se hayan utilizado más tareas de conexión que de reproducción, sino que entre las tareas (pocas) cuyo nivel de complejidad corresponde al de conexión se consideraron todos los conceptos básicos de función. Las tareas inmersas en situaciones de tipo públicas y de contexto auténtico también fueron utilizadas para todos los conceptos abordados.

También, se logró observar que los conceptos dominio, rango, imagen y preimagen se abordaron empleando tareas con dos niveles de dificultad (reproducción y conexión), dos tipos de situaciones (educativas y públicas) y los dos tipos de contextos establecidos (auténticos e hipotéticos). Esto demuestra una mayor riqueza en las tareas utilizadas para estos conceptos.

Tabla 5 - *Distribución de los conceptos básicos de función de acuerdo al nivel de complejidad, el tipo de situación y el contexto de las tareas utilizadas en clase*

Conceptos	Complejidad				Tipo de Situación			Contexto	
	Rep	Con	Ref	Per	Edu	Pub	Cien	Aut	Hip
Relación	✓	-	-	-	-	-	-	-	-
Cantidad constante	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Cantidad variable	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Variable dependiente	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Variable independiente	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Función	✓	✓	-	-	-	✓	-	✓	-
Dominio	✓	✓	-	-	✓	✓	-	✓	✓
Codominio	-	✓	-	-	-	✓	-	✓	-
Rango	✓	✓	-	-	✓	✓	-	✓	✓
Imagen	✓	✓	-	-	✓	✓	-	✓	✓
Preimagen	✓	✓	-	-	✓	✓	-	✓	✓
Criterio de asociación	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Gráfica	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Nota. ✓=Presente.

La evidencia de que el profesor dispone de un esquema de instrucción.

Para esta categoría en particular se ha empleado el modelo instruccional propuesto por Gagné (1979), el cual propone nueve acciones (eventos) que el docente debe realizar durante el proceso de instrucción (tabla 6).

Tabla 6 - *Eventos que permiten determinar si el docente dispone de un esquema de instrucción*

Eventos de instrucción (Gagné, 1979)	Episodio				
	1	2	3	4	5
Captura la atención de los estudiantes	✓	✓	✓	✓	×
Informa a los estudiantes del objetivo a conseguir	✓	✓	✓	✓	✓
Evoca conocimientos previos	×	✓	✓	✓	✓
Presenta el contenido	✓	✓	✓	✓	✓
Guía el aprendizaje	✓	✓	✓	✓	✓
Provoca desempeño	×	×	✓	✓	×
Proporciona retroalimentación	✓	×	×	✓	×
Evalúa formativamente el desempeño de los estudiantes	✓	×	✓	✓	✓

Eventos de instrucción (Gagné, 1979)	Episodio				
	1	2	3	4	5
Promueve la retención y fomenta la transferencia	×	×	×	×	×

Nota. ✓=Sí; ×=No.

Sobre el esquema instruccional, se logró constatar que el profesor procura capturar la atención de los estudiantes en casi todos los episodios de clase observados (a excepción del quinto episodio), esto a pesar de ciertos distractores que se presentaron en algunas sesiones (partidos del mundial de fútbol 2014). Además, al iniciar cada episodio comunicó a los estudiantes los objetivos que se pretendía abarcar cuyo logro fue evidente, excepto en el cuarto episodio en el que no se abordaron las habilidades propuestas.

En relación con los conocimientos previos, el profesor hizo mención de estos a partir del episodio 2. Es posible que no lo hiciera en el primero por el tipo de metodología empleada: resolución de problemas. Además, a partir de este episodio presentó los contenidos de forma explícita y, en todos los episodios, guió el aprendizaje. Sin embargo, solo en los episodios 3 y 4 intentó provocar el desempeño del grupo (lo logra con parte del grupo), esto por medio de tareas que deben ser resueltas por los estudiantes.

Por otra parte, únicamente en los episodios 1 y 4 se recurrió a una retroalimentación por parte de los estudiantes. En el episodio 1 lo hizo cuando los estudiantes daban las respuestas al problema planteado y en el episodio 4 cuando los estudiantes realizaban el trabajo individual. También se observó que el docente realizó una evaluación formativa constante a través de cuestiones sobre lo que se estaba presentando y explicando (excepto en el episodio 2). Sin embargo, debe señalarse que se reconoce una deficiencia en el evento de instrucción sobre la promoción de la retención y el fomento de la transferencia del conocimiento, esto principalmente porque no se ofrece al estudiante la oportunidad de aplicar los conocimientos y habilidades adquiridas en contextos distintos a los ofrecidos por el docente.

Adecuación entre las tareas presentadas y los caminos de aprendizaje que se intuyen.

Para determinar si las tareas propuestas por el docente se adecuaron a los caminos de aprendizaje mostrados, se diseñó una serie de indicadores. Estos, junto a los resultados obtenidos al observar los cinco episodios de clase, se muestran en la tabla 7.

Tabla 7 - *Indicadores para determinar la adecuación entre las tareas presentadas y los caminos de aprendizaje*

Indicadores	Episodios				
	1	2	3	4	5
Hay evidencia de un planteamiento o camino de aprendizaje	✓	n/a	✓	✓	✓
Los caminos de aprendizaje describen capacidades para resolver tareas	✓	n/a	✓	✓	✓
Los caminos de aprendizaje mostrados incluyen el reconocimiento de posibles errores	×	n/a	✓	✓	×
Presenta variedad de caminos de aprendizaje para resolver la tarea	✓	n/a	×	✓	✓

Indicadores	Episodios				
	1	2	3	4	5
Los caminos de aprendizaje planteados son adecuados para la resolución de las tareas	✓	n/a	✓	✓	✓

Nota. ✓=Sí; ×=No; n/a =No aplica.

Las tareas utilizadas por el docente permiten identificar un plan de resolución basado en caminos de aprendizaje, que resalta capacidades específicas que se deben lograr (o reforzar). No obstante, en algunos de estos planes de resolución se omite el reconocimiento de posibles errores.

La solución de las tareas que se utilizaron en los episodios 1, 4 y 5 se caracteriza por la variedad de caminos de aprendizaje mostrados. Por ejemplo, se distinguen dos caminos de aprendizaje para resolver una de las tareas del episodio 4 sobre la identificación del rango de una función desde su representación gráfica. Primero, seleccionar el eje coordenado en que se localiza el rango, asociar valores de este eje con el trazo de la gráfica y establecer el intervalo real que corresponde al rango (figuras 3).

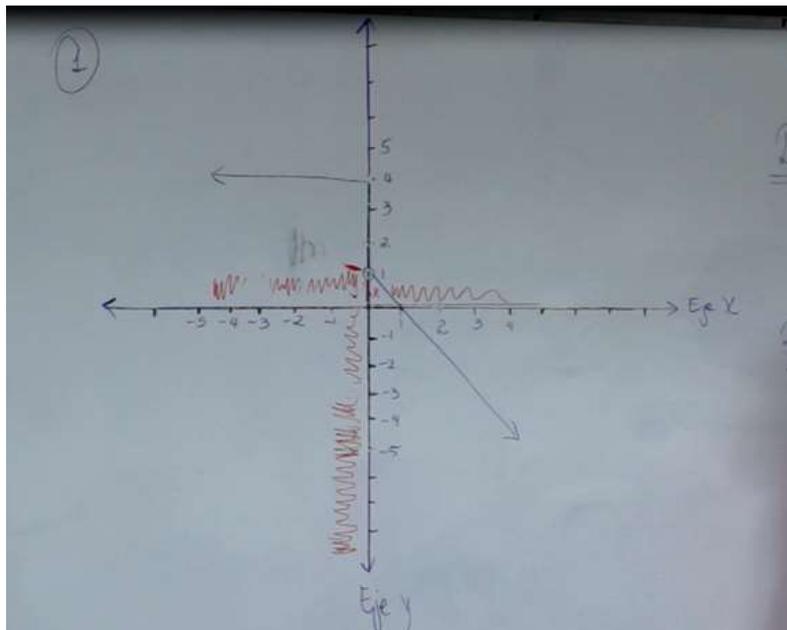


Figura 3. Asociación de valores del eje de las ordenadas con el trazo de la gráfica

Segundo, extraer el trazo de la gráfica del sistema de coordenadas como una figura independiente, realizar “una lectura” vertical —de abajo hacia arriba— de esa figura sin considerar escalas numéricas o el plano cartesiano, trasladar esta “lectura vertical” a la gráfica ubicada en el plano cartesiano, establecer los valores que pertenecen al rango (figura 4). Las tareas presentadas en el segundo episodio no muestran un camino de aprendizaje para su solución, estas se presentaron resueltas y no en proceso de resolución.

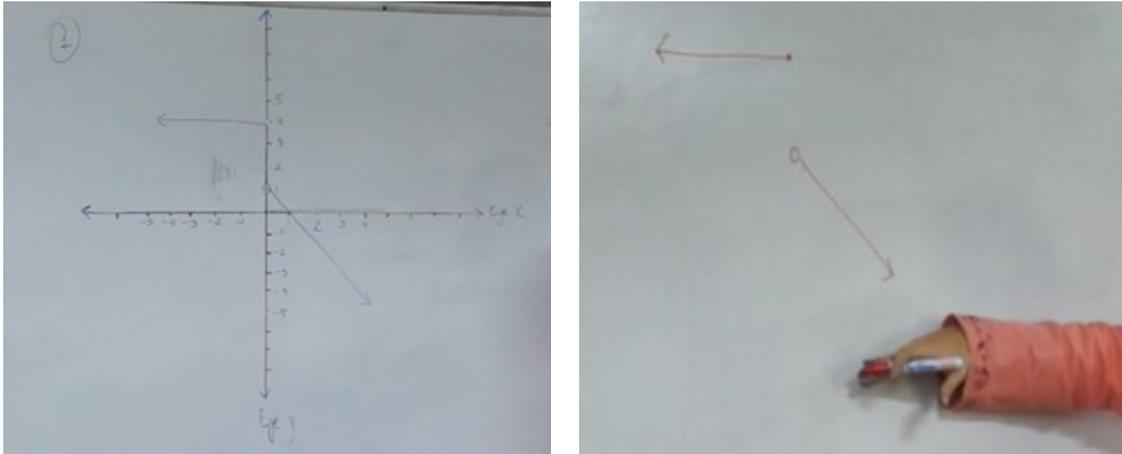


Figura 4. Trazo de la gráfica como figura independiente

La riqueza de materiales y recursos didácticos empleados

Los recursos didácticos identificados son de uso común: pizarra y regla (metro). Estos recursos se emplean durante todos los episodios observados para definir los conceptos o para plantear y resolver tareas. El profesor tiene la necesidad de utilizar la pizarra y la regla para trazar una gráfica (que modela una función) que permita reconocer, desde este tipo de representación, conceptos como ámbito, dominio, imagen y preimagen; sin embargo, desaprovechó este recurso para mostrar diversidad de significados y la relación entre los conceptos.

En cuanto a los materiales didácticos, el docente utilizó un libro de tareas (folleto), que también tienen los estudiantes, para reforzar conceptos como dominio, ámbito, imagen y preimagen. El plan didáctico elaborado por el docente contempla el uso de este material y de las tareas que contiene. Por ejemplo, las tareas utilizadas en el episodio 3, para reforzar la habilidad de identificar el dominio y rango de una función a partir de su representación gráfica, se tomaron de este material. Su uso se implementó a partir del tercer episodio.

En el episodio 1 el docente entrega a los estudiantes una hoja donde estaba anotado el problema que se debía resolver, esto con el propósito de introducir el concepto de función. En el episodio 2 no se cuenta con un material didáctico de apoyo, sino que el docente utiliza una hoja donde están anotadas las definiciones de los conceptos básicos de función, que fueron dictadas a sus estudiantes.

La adecuación de los recursos y materiales según el nivel de enseñanza y las finalidades previstas de adquisición de conceptos y propiedades

El material utilizado (folleto) forma parte de una secuencia de enseñanza que pretende identificar, a partir de la gráfica de una función, los conceptos de dominio y ámbito, aunque también se empleó para la enseñanza de los conceptos de relación, imagen y preimagen. Además, respondía a las habilidades planteadas en el programa de estudio para los conceptos básicos de función y fomentaba la adquisición de estos conceptos y sus propiedades. Las tareas planteadas en el material se adecúan al nivel de enseñanza, tanto por la dificultad que muestran, como por el lenguaje empleado.

Los recursos empleados para enseñar los conceptos básicos de función también formaron parte de una secuencia de enseñanza. Estos recursos promovían la adquisición de las

propiedades de los conceptos mencionados. Se destaca que los recursos utilizados en el episodio 1 permitieron mostrar los conceptos de relación y función mediante una situación problema particular; no obstante, dado que el profesor no formalizó estos conceptos, se considera que no son adquiridos por parte de los estudiantes. La formalización de ambos conceptos se llevó a cabo hasta el episodio 2.

La adquisición de las propiedades de los conceptos se evidenció en los procedimientos realizados por los estudiantes cuando utilizaron los recursos y materiales propuestos por el docente.

La relación entre acciones que permiten el empleo de recursos y situaciones, que envuelvan diversos significados y contextos

La presentación de los conceptos promovió en cada una de los episodios el uso de recursos didácticos, principalmente la pizarra, para resolver tareas o para realizar representaciones gráficas de funciones. Se observó que los recursos empleados por el profesor se vinculan principalmente con el contexto matemático (hipotético). Solo en el episodio 1 se constató que los recursos empleados permitieron presentar diversos significados del concepto de relación. Se observó que en todos los episodios el profesor empleó al menos un recurso didáctico para transmitir ideas matemáticas.

Conclusiones

A continuación se muestran las conclusiones obtenidas en el estudio. Estas se presentarán con base en tres indicadores derivados del sistema de categorías, subcategorías y unidades de análisis empleadas: las tareas, la instrucción y los materiales y recursos utilizados.

En relación con las tareas se concluye que es posible establecer una correspondencia (no uno a uno) entre estas y las habilidades específicas sobre los conceptos básicos de función consideradas en el Plan de Estudios de Matemática para Educación Secundaria (MEP.). Se caracterizan, principalmente, por emplearse para reforzar conceptos y procedimientos matemáticos, sin llegar a promover la movilización del conocimiento en áreas que vayan más allá de lo expuesto por el docente durante la enseñanza. Se destaca la variedad de sistemas de representación vinculadas a las tareas, independientemente del nivel de complejidad, tipo de situación o contexto en el que se desarrollan. Sobresalen las tareas mostradas para enseñar los conceptos de dominio, rango, imagen y preimagen ya que presentan una mayor riqueza, en el sentido que consideran distintos niveles de dificultad, situaciones y contextos.

Se reconoce que las tareas propuestas por el docente consideran al menos un camino de aprendizaje en su resolución, pero estos caminos no toman en cuenta el reconocimiento de errores. También se adecúan al nivel de enseñanza (cuarto año de secundaria) y permiten la adquisición de los conceptos básicos de función y sus propiedades.

En cuanto a la instrucción, se reconoce un esquema de instrucción diseñado para lograr la atención de los estudiantes, comunicar los objetivos que se persiguen, reconocer los conocimientos previos requeridos y dar seguimiento al avance alcanzado por medio de evaluaciones formativas. Se echa en falta la retroalimentación y la movilización de los

conceptos básicos de función en otros contextos distintos al contexto matemático presentado durante la enseñanza.

De los resultados se concluye que las actividades realizadas por el docente se vinculan con las habilidades específicas del plan de estudios para matemáticas. Se reconoce un predominio de la clase magistral acompañada por una leve participación espontánea de los estudiantes.

El esquema de instrucción identificado se caracteriza por el uso de una combinación de sistemas de representación para la enseñanza de un determinado concepto básico de función. La enseñanza se realiza para que el estudiante conozca el contenido, pero no se le enseña a utilizarlo en otros contextos distintos al matemático formal.

Sobre los materiales y recursos didácticos utilizados se concluye que el material didáctico (folleto) está acorde con las habilidades propuestas en el Plan de Estudios y que se utiliza como parte de una secuencia de aprendizaje, principalmente para reforzar distintos conceptos a partir de las tareas que contiene. Los recursos utilizados: la pizarra y la regla, son recursos que se combinan para presentar los conceptos básicos de función. Además, forman parte de una secuencia de enseñanza que promueve la adquisición de conceptos, sin embargo, no se aprovechan para presentar distintos significados de un mismo concepto o para mostrar las relaciones entre los mismos.

Reconocimientos

Esta investigación forma parte de un estudio más amplio que se realiza en el proyecto “Conocimiento Matemático para la Enseñanza de las funciones de dos profesores en el Ciclo Diversificado de la Educación Matemática en Costa Rica”, código SIA 0127-13, adscrito a la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica.

Referencias Bibliográficas

Agarwal, S. (2006). *The Nature of Pre-service Secondary Mathematics Teachers' Knowledge of Mathematics for Teaching of Functions*. (Tesis doctoral). University of New York at Buffalo, Estados Unidos de América.

Ball, D. L., Hill, H.C., y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(3), 14-22.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. Recuperado de <http://dlavertydotcom.wordpress.com/2012/01/17/ball-thames-and-phelps-content-knowledge-for-teaching-what-makes-it-special-2008/>

Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso*. (Tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.

Climent, N., Romero J. M., Carrillo J., Muñoz M. C. y Contreras L. C. (2013). ¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un vídeo de aula? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime* 16(1), 13-36.

- Espinoza, J. y Picado, M. (2017). Conocimiento pedagógico que pone en práctica un profesor de Matemática al enseñar los conceptos básicos de función en Educación Secundaria. En Y. Morales-López, M. Picado, R. Gamboa, C. Martínez, M. Castillo y R. Hidalgo (Eds.), *Memorias del VI Encuentro Provincial de Educación Matemática, Costa Rica, 2017* (pp. 55-65). Heredia, Costa Rica: Universidad Nacional. DOI: <http://dx.doi.org/10.15359/epem.6.15>
- Gagné, R. (1979). *Las condiciones del aprendizaje*. CDMX, México: Nueva editorial Interamericana. México.
- Garritz, A. y Trinidad-Velasco, R. (2004). El conocimiento pedagógico del contenido. *Educación Química*, 15(2), 98-102.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- González, F. (1999). Los nuevos roles del profesor de matemática: retos de la formación de docentes para el siglo XXI. En R. M. Farfán, C. E. Matías, D. Sánchez y Á. Tavarez (Eds.), *Conferencia inaugural de la Decimotercera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa: Relme 13* (pp. 1-27). Santo Domingo, República Dominicana: Grupo Editorial Iberoamérica S.A.
- Hill, H., Ball, D. y Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
- Manterola, C. (1995). La formación docente, un reto imprescindible. *Planiuc*, 14(21), 73-93.
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012a). *Informe Nacional 2011. Resultados de las pruebas nacionales de bachillerato de la Educación Formal*. San José, Costa Rica: Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad.
- Ministerio de Educación Pública. (2012b). *Programa de Estudios de Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. Recuperado de <http://www.reformamatematica.net/comunidad/sites/default/files/programas.pdf>
- Morales, Y. y Font, V. (2017). Análisis de la reflexión presente en las crónicas de estudiantes en formación inicial en educación matemática durante su periodo de práctica profesional. *Revista ACTA SCIENTIAE*, 19(1), 122-137. Descargado de <http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/2975/2280>
- Pinto, J. E. y González, M. T. (2006). Sobre la naturaleza conceptual y metodológica del conocimiento del contenido pedagógico en Matemáticas: una aproximación para su estudio. En M. Bolea, M. Moreno y M. J. González (Eds.), *Investigación en educación matemática: Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 237-255). Huesca, España: Instituto de Estudios Altoaragoneses. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/1293/>
- Programa Estado de la Nación en Desarrollo Humano Sostenible (2013). *Cuarto Informe del Estado de la Educación: Desempeño de la Educación General Básica y el ciclo diversificado en Costa Rica. Informe final*. Recuperado de http://estadonacion.or.cr/files/biblioteca_virtual/educacion/004/castro_desempeno-ed-basica-y-diversificado.pdf
- Rodríguez, A., Picado, M. y Espinoza, J. (2015). Conocimiento en el Horizonte Matemático de un profesor para enseñar funciones en cuarto año de secundaria en Costa Rica. *Actas de la Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Tuxtla Gutiérrez, México.

Recuperado de http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/view/352/177.

Rodríguez, A., Picado, M., Espinoza, J. y Rojas, N. (en prensa). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de caso sobre la enseñanza de los conceptos básicos de función. *UNICIENCIA*.

Rodríguez, A., Picado, M., Espinoza, J., Rojas, N. y Flores, P. (2016). Conocimiento común del contenido que manifiesta un profesor al enseñar los conceptos básicos de funciones: un estudio de caso. *UNICIENCIA*, 30(1), 1-16.

Rojas, N. (2010). *Conocimiento para la enseñanza y calidad matemática de la instrucción del concepto de fracción: estudio de caso de un profesor chileno*. (Tesis de maestría). Universidad de Granada, España.

Rojas, N., Carrillo, J. y Flores, P. (2012). Características para identificar a profesores de matemáticas expertos. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 479-485). Jaén, España: SEIEM.

Rojas, N., Flores, P. y Ramos, E. (2013). El análisis didáctico una herramienta para identificar dominios de conocimiento matemático para la enseñanza. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, innovación curricular y formación de profesores* (pp. 191-210). Granada, España: Editorial Comares.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching. Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-23.

Shulman, L. S. (2005). Conocimiento y enseñanza: Fundamentos de la nueva reforma. *Revista de currículum y formación del profesorado*, 9(2), 1-30.

Shumway, M. (2003). *Preservice mathematics teachers' knowledge of functions and its effect on lesson planning at the secondary level*. (Tesis doctoral). The University of Iowa, Estados Unidos de América.

Stake, R. (2007). *Investigación en estudios de caso*. Madrid, España: Morata. Recuperado de http://books.google.es/books?id=gndJ0eSkGckC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

Jonathan Espinosa González
Universidad Nacional – Costa Rica
E-mail: espinosa25@gmail.com

Miguel Picado Alfaro
Universidad Nacional – Costa Rica
E-mail: miguel.picado.alfaro@una.cr