Um estudo do *Liber Quadratorum* (1225) e suas potencialidades para o ensino de Matemática

A study of the *Liber Quadratorum* (1225) and its potentials for Mathematics teaching

José dos Santos Guimarães Filho
João Claudio Brandemberg
Universidade Federal do Pará – UFPA/Brasil

RESUMO

Neste artigo buscamos a partir de uma tradução de proposições escolhidas do livro *Liber Quadratorum* de Leonardo Fibonacci (1170-1240), apresentar alguma potencialidade do uso das ideias contidas no texto para o ensino de conteúdos matemáticos; mais especificamente conteúdos de aritmética que versam sobre números quadrados e sua importância matemática. Além disso, fazemos um passeio pelo período vivenciado por este importante personagem, que foi professor e escreveu sobre a matemática, e sua influencia para o desenvolvimento e divulgação dos métodos algorítmicos da matemática árabe na Europa no inicio do século XIII.

Palavras-chave: Leonardo Fibonacci, *Liber Quadratorum*, Aritmética no século XIII, História da Matemática.

ABSTRACT

In this paper we seek from a translation of selected propositions from the book *Liber Quadratorum* by Leonardo Fibonacci (1170-1240), to present some potentiality of the use of the ideas contained in the text for the teaching of mathematical contents; more specifically arithmetic contents that deal with square numbers and their mathematical importance. In addition, we take a tour of the period experienced by this important personage, who was a teacher and wrote about mathematics, and its influence for the development and dissemination of algorithmic methods of Arab mathematics in Europe in the early thirteenth century.

Keywords: Leonardo Fibonacci, *Liber Quadratorum*, Arithmetic in the thirteenth century, History of Mathematics.

Introdução

Nos caminhos do ensino e da aprendizagem de matemática são muitos os obstáculos a serem superados; para esta minimizá-los, muitos estudiosos da área constituem consideráveis esforços na adequação de metodologias visando mais possibilidades de um ensino efetivo. Estas adequações munidas de um *corpus teórico*, então, passam a se configurar, em um meio tão plural de teorias em desenvolvimento são as ditas tendências para o ensino de matemática (em Educação).

Em nossa pesquisa, optamos pelo uso da História da Matemática como componente metodológica, em um uso didático/pedagógico das informações históricas, no intuito de contribuir na efetivação de um ensino com significado dos conteúdos matemáticos, pois, percebemos que esta não é uma possibilidade isolada defendida por apenas um grupo de entusiastas, mas trabalhada por um grupo sério de pesquisadores.

Outro ponto a ser destacado, relacionado a esta tendência, é a indicação de uma abordagem a partir da história, apontada nos documentos oficiais como os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) e a BNCC (Base Nacional Comum Curricular).

Estes documentos oficiais apresentam argumentos favoráveis à inserção da História da Matemática no ensino, do mesmo modo que sugerem formas de utilização desta. Como, por exemplo, quando a BNCC infere possibilidades de desenvolvimento de projetos com o uso da História da Matemática, visando o estudo de um determinado conteúdo e sua função social quando apresenta que,

> [...] é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos (BRASIL, 2016, p. 254).

Mendes e Chaquiam (2016) expõem que os estudos sobre a possibilidade de abordagens didáticas que podem ser propostas para o ensino da matemática com base na história, atualmente vêm se ampliando.

Uma forma de se fazer essa abordagem se fundamenta no estudo de um determinado conteúdo matemático e seu contexto histórico, que envolve questões político-sociais e outros aspectos dos personagens envolvidos. Possibilitando aos estudantes,

> Uma oportunidade enriquecedora de se inserir o máximo possível no contexto em que o matemático, o texto matemático escrito por ele, a comunidade que viveu, trabalhou e produziu tal matemática, em busca de estabelecer uma [...] de multiplicidade explicativa para as noções matemáticas que precisará aprender (MENDES e CHAQUIAM, 2016, p. 11).

Nesse sentido, em meio a destacados personagens, elegemos Leonardo de Pisa, mais conhecido por Fibonacci, o qual evocamos por Leonardo Fibonacci (1170-1240), ou simplesmente por Fibonacci, para que desta forma possamos fazer alusão ao seu nome sem perder a denominação que lhe foi dada seiscentos anos mais tarde pelo historiador Guillaume de Libri (1803-1869), termo italiano que significa filho de Bonaccio.

Este matemático brilhante do décimo segundo século influencia a Europa com suas obras de tal forma que os europeus passam a utilizar os algarismos indo-arábicos, a partir da publicação do seu livro *Liber Abaci* (1202). O qual se consolida como uma espécie de manual para o estudo e ensino de matemática (SERRÃO, 2014).

Uma de suas obras que nos chama a atenção é o *Liber Quadratorum* (1225), por seu conteúdo, pelas formas com as quais Leonardo Fibonacci demonstrava as proposições contidas neste livro e a sua interpretação de número. Desta forma, objetivamos apresentar um estudo do *Liber Quadratorum*, produzindo uma tradução para o português.

No entanto, aqui, discutimos apenas três de suas proposições iniciais, em um estudo que visa elencar possíveis potencialidades didático/pedagógicas do uso do texto ou de parte do mesmo em sala de aula.

Neste sentido, apresentamos o contexto histórico e social em que Leonardo Fibonacci estava inserido, bem como do momento de produção de sua obra. Nosso intuito é delinear em tempo e espaço o lócus deste matemático medieval e apresentar os contextos que impulsionaram ao desenvolvimento do seu *Liber Quadratorum,* e posteriormente, apresentarmos outras informações que julgamos necessárias a respeito desta obra histórica.

Após a construção do contexto histórico da obra e sua exposição, apresentamos possíveis potencialidades para o ensino de matemática, fundamentadas em autores como Miguel (1993 e 1997) e Mendes (2015).

Desta forma, e com este direcionamento, iniciamos nossa apresentação sobre Leonardo Fibonacci e seu *Liber Quadratorum*.

Sobre a vida e obra de Leonardo Fibonacci (1180-1250)

O matemático italiano Leonardo Fibonacci se encontra historicamente localizado, como um cidadão que viveu no período que compreende a segunda metade do décimo segundo século e a primeira metade do décimo terceiro século, fazendo parte do pré-renascimento ou renascimento italiano.

Assim, iniciamos com o renascimento do século XII, que advém de um extenso período marcado por instabilidades, quando a Europa passa por grandes transformações. Em meio a essas transformações, de cunho social, político, econômico e cultural, três nos chamam a atenção: a transformação na forma de produzir, o crescimento demográfico e expansão do comercio (SESTITO e OLIVEIRA, 2010).

Nesse contexto de transformações, com o surgimento das cidades e da burguesia, temos um florescimento das práticas comerciais. Com o aumento da produção agrícola, da produção artesanal urbana e o contato com povos orientais o comércio ganha um expressivo impulso, desenvolvendo rotas locais e internacionais, tanto para o norte quanto para o sul.

Esta ocasião propicia o surgimento de alguns personagens que vem a influenciar, de forma direta ou indireta, na produção de Fibonacci, enter os quais destacamos: João de Buralli (1208 – 1289), Al-Jazari (???? – 1206) e o rei Frederico II (1194 – 1250), imperador romano-germânico, com o intuito de apresentar suas contribuições para a formação de Leonardo Fibonacci.

Buralli, que designamos aqui como João de Parma, pois é dessa forma que ficou conhecido, um mestre e doutor em filosofia, lecionava lógica e era muito reconhecido, tendo lecionado na Bolonha, em Nápoles e em Paris. Segundo o caderno de espiritualidade franciscana (2009), ele foi eleito ministro geral em 1247.

Al-Jazari, um engenheiro muçulmano que viveu nas intermediações dos séculos XII e XIII no sul da Turquia. Não se dedicou apenas a engenharia, mas a inventos, a Matemática e ao artesanato. No entanto, ficou conhecido em nossos dias por sua obra intitulada *Livro de Conhecimento de Dispositivos Mecânicos Geniais*, publicada em 1206, trazendo engenhosidades de cinquenta máquinas, em sua maioria hidráulicas.

O terceiro personagem que trazemos é o rei Frederico II, imperador do sacro império Romano-Germânico, o qual possuía uma linhagem real, órfão, ainda criança, cresceu sob a tutela do papa Inocêncio III e que foi coroado imperador de Roma, no ano de 1220, pelo papa Honório III (LOSSIO JUNIOR, 2006).

De acordo com Lossio Junior (2006), o imperador Frederico II, organizou o sistema administrativo romano, aquecendo o comércio, a indústria e a agricultura e incentivando os estudos e as artes em geral. Fundou em Nápoles a primeira universidade laica, foi mestre da Escola Siciliana de Poesia, e reescreveu, um manual sobre a arte da falcoaria.

Sendo um poliglota, escritor e matemático, Frederico II, conseguiu reunir ao seu redor, uma nata de sábios: judeus, árabes e cristãos, transformando a corte em ponto de encontro das diversas correntes culturais da época.

Entendendo mais um pouco, com o exposto, as circunstancias relacionadas a época de Leonardo Fibonacci, voltamos nossa atenção para este personagem de forma mais acentuada.

Esta figura ilustre nasceu em 1180 em Pisa na Itália, um centro comercial importante, neste momento pré-renascentista, no qual seu pai Guiglielmo Bonaccio, era um secretário da República de Pisa ligado aos negócios mercantis, ou seja, um mercador italiano com interesse no norte da África (OLIVEIRA, 2013) e (CASTILLO, 2007).

Seu pai começara seus negócios, trabalhando com assuntos de contabilidade mercantil, os quais despertaram o interesse do jovem Leonardo Fibonacci, pelos números. Uma matemática, que foi além das aplicações práticas comerciais de compra e venda de mercadorias.

Viajando com o seu pai nos últimos anos do décimo segundo século, ele fez uma turnê pelo Oriente, onde visitou os grandes mercados do Egito e da Ásia Menor, viajando através da Síria, e voltando por Constantinopla.

Figura 01. O matemático Leonardo Fibonacci

Fonte: http://berg.com.ua/profile/fibonacci/

Diferentemente da maioria dos viajantes, Fibonacci não se contentou em dar um simples olhar para o novo que o rodeava, mas, estudou cuidadosamente os costumes dos povos, e especialmente, procurou instrução no sistema aritmético que estava conhecendo, e que era usado de uma forma tão vantajosa pelos comerciantes orientais (MCCLENON, 1919).

De acordo com Devlin (2012), durante a realização dessas viagens, a pedido de seu pai, Leonardo Fibonacci (Figura 01), estudou o manuseio do ábaco em um lugar cujo nome era escola do ábaco, pois, seu pai considerava útil e apropriado este conhecimento para o filho, que provavelmente o ajudaria em seus empreendimentos.

> Muitas das grandes cidades comerciais italianas daqueles tempos mantinham entrepostos em várias partes do mundo mediterrâneo. Esse foi o caminho que levou Leonardo a receber parte de sua educação em Bejaia, norte da África, onde seu pai fora desempenhar uma função alfandegária (EVES, 2011, p. 292).

Assim, ainda jovem, passou a ter contato com comerciantes de diversas culturas da região mediterrânea, aprendendo técnicas matemáticas desconhecidas do ocidente (OLIVEIRA, 2013).

Castillo (2007) traz em seu texto, que Leonardo Fibonacci nessas viagens estudou sobre a supervisão de um professor árabe (sem citar seu nome). Isso o levou a entrar em contato direto, com os procedimentos matemáticos orientais e árabes, passando a ser um sério defensor dos números indo-arábicos, os quais conhecera recentemente em suas viagens.

Fibonacci se sentiu tão motivado a estudar os números indo-arábicos, que seus estudos o levaram a escrever um livro chamado de *Liber Abaci* (o livro do ábaco ou do cálculo) em 1202, logo depois de retornar a sua cidade natal, sendo este livro reeditado em 1228.

Segundo Garbi (2007), o *Liber Abaci*, torna Leonardo Fibonacci o primeiro cristão a discorrer sobre álgebra na Europa. Um livro, que segundo Boyer (1974), trata de uma maneira mais acentuada dos números, que da Geometria, descrevendo as nove cifras indianas, assim como o símbolo zero.

De fato, Fibonacci objetivava com este livro propor outro caminho para as realizações de cálculos que iam além do uso do ábaco.

Posteriormente a essa publicação sua fama se estende pela a Europa e seus estudos contínuos o levam a escrever seu segundo livro, intitulado de *Practica Geometriae* (1220) [Geometria Prática], o qual, segundo Oliveira (2013) descreve seus conhecimentos de geometria e trigonometria.

Esta obra, dividida em oito capítulos, traz uma grande coleção de problemas geométricos e teoremas baseados nos *Elementos* de Euclides. Este livro foi dedicado ao astrônomo Imperial Dominicus Hispanus, o qual lhe havia apresentado ao imperador Frederico II. (OLIVEIRA 2013).

Sua terceira publicação, escrita no ano de 1225, foi um tratado intitulado *Flos* (Flor) em que há problemas indeterminados que lembram Diofanto de Alexandria e problemas determinados que nos remetem aos *Elementos* de Euclides, aos árabes e aos chineses (BOYER, 1974).

Nesse período Fibonacci chama a atenção do imperador Frederico II, pela repercussão causada por suas obras e seu conhecimento de matemáticas. Assim, Fibonnaci recebe um convite para participar de um torneio matemático. Este torneio resulta em sua quarta obra o *Liber Quadratorum* publicado no mesmo ano do livro *Flos*.

Assim, sua matemática, influenciada fortemente pela matemática árabe, como os trabalhos dos jovens matemáticos italianos do século XII, se torna uma referencia, se expandindo com a publicação de seus trabalhos. No entanto, sua influência, que direciona as atividades matemáticas na Europa, só se efetiva a partir do século XIII. Fibonacci é o principal representante dessa escola. Estas características levam o matemático pisano a ser contratado como o primeiro professor público de cálculo a quem os governantes italianos destinaram pagamento como consultor de matemática.

Com o exposto, entendemos que este contexto de ampliação da exportação agrícola, assim como, a necessidade de maior conhecimento do processo mercantil, vem influenciar a Fibonacci, em suas viagens e em sua busca pelo conhecimento, de mesmo modo tal contexto no qual ele está inserido é influenciado direta ou indiretamente pelos personagens que nos referimos anteriormente, principalmente, com as decisões de Frederico II.

Uma influencia que resulta para nosso personagem principal a profusão de um conjunto de obras que acabaram influenciando o seu mundo de tal forma que sentimos suas consequências até em nossos dias.

Uma introdução ao *Liber Quadratorum* (1225)

O *Liber Quadratorum*, que segundo Oliveira (2013) significa "livro dos quadrados", carrega em seu conteúdo a teoria dos números que dentre outros, examina o método para encontrar as ternas pitagóricas. Faz-se necessário saber, que esta obra advém de um torneio matemático que Leonardo Fibonacci participou a convite de Frederico II.

Nesse torneio, foram propostos três problemas dentre os quais o mais famoso é o primeiro, onde Fibonacci é desafiado a encontrar um número quadrado que quando somado ou subtraído cinco continua sendo um quadrado de um número racional, (CASTILLO 2007).

Em acordo com Boyer (1974), tanto a resposta (41/12) quanto a solução são encontrados no *Liber Quadratorum* na proposição dezessete: *Find a square number which increased or diminished by five yields a square number* [Encontre um número quadrado, o qual se aumentado ou diminuído de cinco resulta em um numero quadrado].

Os trabalhos de Leonardo Fibonacci, segundo Oliveira (2013), trazem uma forte influência dos matemáticos al-Khwârizmî (708 – 850) e Abû Kâmil (850 – ???), entre outros mestres árabes; bem como, de Euclides e de seus elementos.

> Devem-se mencionar Abû Kâmil e al-Karkhî, que escreveram nos séculos X e XI, por seu trabalho em Álgebra. O primeiro escreveu um comentário sobre a álgebra de Al-Khowârizmî que posteriormente foi usado pelo matemático europeu Fibonacci (1202) (EVES, 2011, p. 261).

Para dar uma ideia do conteúdo notável do *Liber Quadratorum*, apresentaremos algumas proposições que este livro contém, na mesma ordem encontrada no original, de forma a garantir veracidade. Assim, para esta exposição seguimos Siegler (1987).

Fibonacci inicia seu livro com uma pequena introdução expondo seus pensamentos a respeito do crescimento ordenado dos números impares consecutivos e a sequência de números quadrados, que passa a ser a ideia central, o que desencadeia as proposições ou problemas contidos no livro,

> e eles surgiram da sequência crescente de números impares; para a unidade é um quadrado, e disso é feito o primeiro quadrado, chamado 1; para essa unidade é adicionado 3, formando o segundo quadrado chamado 4, com raiz 2; se para a soma é adicionado o terceiro número ímpar, chamado 5, o

> terceiro quadrado é criado, chamado 9, com raiz 3; e portanto somas de números ímpares consecutivos e a sequência de quadrados sempre crescem juntas em ordem (FIBONACCI, 1225, apud, SIGLER, 1987, p. 4. Tradução nossa).

Posteriormente a essa introdução, o autor parte para a apresentação e demonstração de vinte e quatro proposições que compõe o *Liber Quadratorum*, e das quais trazemos apenas três, que estão na mesma ordem do livro original.

Importante frisar que, para as suas demonstrações, Fibonacci entende números como seguimentos de retas e que apresentamos suas demonstrações com uma notação atual, a qual Fibonacci não dispunha a época. Além disso, os parágrafos destacados em itálico indicam comentários do próprio Fibonacci, pois o livro é escrito em primeira pessoa do singular.

Vejamos as proposições que selecionamos para nosso estudo inicial.

Proposição 1: Encontrar dois números quadrados cuja soma seja um número quadrado.

Fibonacci nos apresenta sua resolução: *Para encontrar dois números quadrados cuja soma seja um número quadrado, eu devo pegar qualquer quadrado ímpar e eu devo tê-lo como um dos dois quadrados mencionados; o outro eu encontro em uma soma de todos os números ímpares da unidade até o anterior ao quadrado ímpar tomado.*

Em notação moderna: admitindo que $2n + 1 = x^2$, temos $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + x^2 = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$.

Leonardo Fibonacci comenta: *Por exemplo, eu devo tomar o 9 como um dos dois quadrados mencionados, o outro irá ser obtido na soma dos números ímpares que são menores que 9, nomeados 1, 3, 5 e 7, que tem como soma 16, que é um quadrado, que adicionado a 9 irá chegar a 25, que é um número quadrado. E se nós desejarmos uma demonstração geométrica, qualquer quantidade de números ímpares desde a unidade em ordem crescente são acrescentados, fazendo com que o fim seja quadrado; e deixemos .ab ser 1, .bc ser 3, .cd ser 5, .de ser 7, .ef ser 9; e por ef. ser 9, temos um número quadrado e .ae 16, é um quadrado, criado da soma dos números ímpares .ab, .bc, .cd e .de, o número total .af é da mesma forma quadrado; e portanto da soma de dois quadrados .ae e .ef é feito o quadrado .af.*

Fibonacci, inicialmente, quis mostrar que,

$$(1 + 3 + 5 + 7) + 9 = 25$$
$$16 + 9 = 25$$
$$4^2 + 3^2 = 5^2$$

De forma geométrica, temos um seguimento de reta, o qual Fibonacci utiliza para representar sua sequencia de números, onde, $\overline{ab} = 1, \overline{bc} = 3, \overline{cd} = 5, \overline{de} = 7$ e $\overline{ef} = 9$.

Desta forma temos que,

$$(\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{de}) + \overline{ef} = \overline{af}$$
$$\overline{ae} + \overline{ef} = \overline{af}.$$

Logo, $\overline{ae}$ é um número quadrado (soma de ímpares consecutivos), $\overline{ef}$ é um número quadrado (tomado na sequencia) e $\overline{af}$ é um número quadrado (soma de ímpares consecutivos).

É interessante que, com esta ideia, Fibonacci amplia o seu pensamento, que denominamos aqui de desdobramentos e para esta proposição apresentamos dois desses desdobramentos.

1º Desdobramento: Se tomamos um número par que seja um quadrado, dividirmos por dois, adicionarmos um a uma parte e subtrairmos um da outra, a soma continua igual ao número quadrado tomado. Desta forma, por exemplo, se pegarmos o número 36, temos que,

$$36 \div 2 = 18$$
$$18 + 1 = 19$$
$$18 - 1 = 17.$$

De fato, $19 + 17 = 36$. Assim, se tomamos a soma dos números impares de 1 até 15 que é o número impar que antecede o menor número impar encontrado, que neste caso é o 17, temos que,

$$(1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15) + 36 = 100$$
$$64 + 36 = 100$$
$$8^2 + 6^2 = 10^2$$

Com o proposto temos dois números quadrados que somados formam um número quadrado.

2º Desdobramento: Se tomamos um número impar que seja um número quadrado e dividirmos por três, teremos um número impar. Se somarmos a este número impar encontrado os números impares que são o seu sucessor e o seu antecessor resultará no número impar tomado. Assim, se tomamos como o número impar quadrado o número 81 temos,

$$81 \div 3 = 27$$
$$24, \mathbf{25}, 26, \mathbf{27}, 28, \mathbf{29}, 30$$

Logo, $25 + 27 + 29 = 81$, e se tomamos uma soma dos números impares do 1 até o 23, que é o número impar que antecede o antecessor de 27 que é o resultado da divisão, mais 81, temos que,

$$(1 + 3 + 5 + \cdots + 23) + 81 = 225$$
$$144 + 81 = 225$$
$$12^2 + 9^2 = 15^2$$

Assim como, $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 29 = 225$. E da mesma forma temos dois números quadrados que somados formam um número quadrado.

Após discutirmos estes desdobramentos, seguimos com a segunda proposição.

Proposição 2: Qualquer número quadrado excede o quadrado imediatamente anterior pela soma das raízes.

Leonardo Fibonacci comenta: *Eu encontrei que qualquer quadrado excede o quadrado imediatamente anterior pela soma das raízes desses quadrados. Por exemplo, 121,* *do qual a raiz é 11, excede 100, do qual a raiz é 10, pela soma de 10 e 11, nomeados pela soma das próprias raízes. É por isso que um quadrado excede o segundo antes dele pela quantidade que é quatro vezes a raiz do quadrado que está entre eles, como 121, que excede 81 por quatro vezes 10; e, portanto, pode ser encontrada diferenças entre os quadrados pelas distâncias entre as próprias raízes.*

De fato, ele quis mostrar que, se tomamos $121 = 11^2$ e $100 = 10^2$, teremos que $121 = 100 + 11 + 10$, ou seja, de 100 até 121 temos o intervalo de $21 = 11 + 10$, que são a soma das raízes quadradas de 100 e de 121. Fibonacci apresenta uma explicação geométrica para esta proposição.

Fibonacci ainda nos diz: *Parece que todo quadrado excede seu quadrado precedente, como nós dissemos, por tanto quanto a soma das próprias raízes, que serão evidentes se nós colocarmos as raízes nos segmentos $\overline{ab}$ e $\overline{bg}$. E desde que $\overline{ab}$ e $\overline{bg}$ sejam números consecutivos, um será maior que o outro por um. Deixemos então $\overline{bg}$ ser maior que $\overline{ab}$ por um, e subtraído da unidade $\overline{dg}$ de $\overline{bg}$, e então permanecerá $\overline{bd}$ igual a $\overline{ba}$;*

e desde que $\overline{bg}$ seja um número dividido em duas partes, chamado $\overline{bd}$ e $\overline{dg}$; $\overline{dg}$ o produto de $\overline{bd}$ por ele mesmo acrescentado ao produto de $\overline{dg}$ por ele mesmo acrescentado a duas vezes $\overline{bd}$ vezes $\overline{dg}$ será igual ao produto de $\overline{bg}$ com ele mesmo. Mas o produto de $\overline{bd}$ com ele mesmo é igual ao produto de $\overline{ab}$ com ele mesmo. Portanto, o quadrado do número $\overline{bg}$ excede aquele do número $\overline{ab}$ pela quantidade que é a soma de $\overline{gd}$ vezes ele mesmo e duas vezes $\overline{gd}$ vezes $\overline{bd}$. Mas o produto de $\overline{dg}$ com ele mesmo é um, que se iguala e é o mesmo que a unidade $\overline{dg}$; e duas vezes $\overline{dg}$ vezes $\overline{bd}$ torna duas vezes $\overline{bd}$, como $\overline{dg}$ é 1; portanto, duas vezes $\overline{bd}$ é $\overline{ad}$; portanto, o quadrado do número $\overline{bg}$ excede o quadrado feito pelo número $\overline{ab}$ pela quantidade que é a soma das próprias raízes, que são $\overline{ab}$ e $\overline{bg}$. Isso é o que tinha de ser demonstrado.

Fibonacci nos mostra, de forma geométrica, que: Se tomamos um segmento de reta $\overline{ag}$ (como representado a seguir) com mais dois pontos que são b e d contidos neste seguimento, temos que:

Com isso temos:

- ✓ $\overline{ab}$ e $\overline{bg}$ são consecutivos;
- ✓ $\overline{bg} - \overline{dg} = \overline{bd}$;
- ✓ $\overline{bd} = \overline{ab}$;
- ✓ $\overline{dg} = 1$.

Com estas questões preliminares, Leonardo Fibonacci apresenta a seguinte relação: $\overline{bg}^2 = \overline{bd} \times \overline{bd} + \overline{dg} \times \overline{dg} + 2\overline{bd} \times \overline{dg}$, onde $\overline{dg} \times \overline{dg} + 2\overline{bd} \times \overline{dg}$ compõe a diferença de um quadrado para outro. Se admitirmos $\overline{ab} = 7$, $\overline{bg} = 8$ e $\overline{dg} = 1$, temos que,

$$\overline{bg}^2 = \overline{bd} \times \overline{bd} + \overline{dg} \times \overline{dg} + 2\overline{bd} \times \overline{dg}$$
$$8^2 = 7 \times 7 + 1 \times 1 + 2 \times 7 \times 1$$

$$8^2 = 49 + 15 = 64$$

Percebemos que $15 = 7 + 8$, no qual a soma das raízes é a diferença entre os quadrados como queríamos mostrar. Vale ressaltar que esta proposição contem dois desdobramentos.

1º Desdobramento: se escolhemos o maior quadrado de três números quadrados consecutivos, como $9^2, 10^2$ e 11^2, teremos que, o maior quadrado será o menor quadrado mais o quádruplo da raiz do quadrado médio, assim, temos que $11^2 = 9^2 + (4 \times 10)$.

2º Desdobramento: Se admitimos um número quadrado impar como o 9 e multiplicarmos por quatro, temos 36, e tomando o quadrado do antecessor de 9, temos $8^2 = 64$ e agora somando o quádruplo do quadrado impar escolhido mais o quadrado do seu antecessor encontramos o quadrado do seu sucessor, logo, $36 + 64 = 100 = 10^2$.

Proposição 3: Existe outra forma de encontrar um número quadrado pela soma de dois quadrados.

Leonardo Fibonacci comenta: *Há de fato outra forma de encontrar dois quadrados que formem um número quadrado com sua soma, e isso se encontra no livro X de Euclides. Juntando dois números quadrados, ambos pares ou ambos ímpares,* $\overline{ab}$ *e* $\overline{bg}$*; então a soma* $\overline{ag}$ *será par. Deixe* $\overline{ab}$ *ser maior que* $\overline{bg}$*, e* $\overline{ag}$ *é dividido em duas partes iguais por* d*. O número* $\overline{ad}$ *é então um número inteiro por ser metade do número* $\overline{ag}$*. E se subtrai* $\overline{ad}$ *do número* $\overline{ab}$*; restará o número inteiro* $\overline{db}$*.*

E pelo número $\overline{ag}$ *ser dividido em duas partes iguais por* d*, e em partes diferentes por* b*, o produto de* $\overline{ab}$ *e* $\overline{bg}$*, mais o quadrado do número* $\overline{db}$*, será igual ao quadrado do número* $\overline{dg}$*; mas aquele que é feito de* $\overline{ab}$ *vezes* $\overline{bg}$ *é um quadrado, como* $\overline{ab}$ *e* $\overline{bg}$ *são quadrados; aquele que é feito pelo número* $\overline{db}$ *vezes* $\overline{db}$ *é um quadrado, e, portanto, são encontrados dois quadrados com a soma de um número quadrado, nomeando o número* $\overline{dg}$*. Isso que tinha de ser feito.*

Fibonacci nos mostra que se tomamos este seguimento de reta como um número, e admitirmos $\overline{ab}$ e $\overline{bg}$ sendo números quadrados pares ou impares e d sendo o ponto médio de $\overline{ag}$, temos que,

- $\overline{ab} > \overline{bg}$;
- $\frac{\overline{ag}}{2} = \overline{ad}$ ou $\overline{dg} \rightarrow \overline{ag}$ ser um número par;
- $\overline{ab} - \overline{ad} = \overline{db}$.

Desta forma Leonardo Fibonacci faz a seguinte relação, $\overline{ab} \times \overline{bg} + \overline{db}^2 = \overline{dg}^2$, o que implica em $\overline{ab} \times \overline{bg}$ ser um número quadrado, pois é mostrado que a multiplicações de dois números quadrados forma um número quadrado.

Exemplificando temos,

- $\overline{ab} = 16$;

- $\overline{bg} = 4$;
- $\overline{ad}$ ou $\overline{dg} = 10$;
- $\overline{db} = 6$.

Aplicando estes valores na relação de Fibonacci, temos que,

$$\overline{ab} \times \overline{bg} + \overline{db}^2 = \overline{dg}^2$$
$$16 \times 4 + 6^2 = 10^2$$
$$64 + 36 = 10^2$$
$$100 = 10^2$$

Como $60 = 8^2$ e $36 = 6^2$, temos outra forma de encontrar dois números quadrados que somados formem um número quadrado.

O potencial didático do *Liber Quadratorum*

Percebemos com exposto, que estes problemas são ricos, possuidores de potenciais para o ensino e para a aprendizagem da matemática. Possibilitando propostas para a efetivação das habilidades exigidas pelo currículo de matemática. Assim, entendemos que a exploração criativa dos textos matemáticos históricos podem fazer (trazer) contribuições para o encaminhamento conceitual e didático de noções das componentes curriculares (LOPES, 2017).

Desta forma, examinar situações específicas com um aprofundamento consistente, como no *Liber Quadratorum*, pode viabilizar respostas mais satisfatórias para o ensino. Assim, temos a oportunidade de suprir competências levantadas na BNCC referente à matemática, a exemplo da competência de número nove que diz respeito a levar o aluno a reconhecer que Matemática é uma ciência humana, construção referente as necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, que contribuíram para solucionar problemas científicos e tecnológicos enfatizando as descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho (BRASIL, 2016).

Desta forma, queremos nesta seção elencar possíveis potenciais didáticos a serem explorados no *Liber Quadratorum*. Para tal, faz-se necessário delinear o que vem a ser potencial didático para nós.

Assim, caracterizamos neste trabalho primeiramente a didática como um ramo de estudo próprio da pedagogia, sendo esta uma ciência da e para a educação, que estuda a educação, a instrução e o ensino. Para tanto, nos apoiamos em Libâneo (1990), que traz considerações que julgamos importantes para este momento de construção do conhecimento.

Libâneo (1990) salienta ainda que os aspectos didático-pedagógicos determinam,

> [...] um campo que investiga a natureza das finalidades da educação numa determinada sociedade, bem como os meios apropriados para a formação dos indivíduos, tendo em vista prepara-los para as tarefas da vida social. Uma vez que a prática educativa é o processo pelo qual são assimilados conhecimentos e experiências acumulados pela prática social da humanidade, e criando um conjunto de condições metodológicas e organizativas para viabiliza-lo (LIBÂNEO, 1990, p. 24).

Neste sentido, percebemos que a didática investiga os fundamentos, condições e modos de instrução do ensino. O didático articulado a pedagógico difundem processos e procedimentos na investigação das matérias específicas da ciência, que servem de base para o ensino e a aprendizagem de situações concretas da prática docente (LIBÂNEO, 1990).

Construir um pensamento de didática se torna importante, para que possamos elencar as possíveis potencialidades didático/pedagógicas encontradas no *Liber Quadratorum*, pois esperamos contribuir para a ampliação da compreensão dos estudantes acerca das dimensões conceituais de conteúdos, como as ternas pitagóricas, os números quadrados ou até mesmo contribuir para a Teoria dos números, já que segundo Mcclenon (1919), Fibonacci está no ranking como o maior gênio deste campo.

Neste sentido utilizar didaticamente ou pedagogicamente as informações históricas nas atividades de ensino de matemática será o caminho traçado por nós. Desta forma entendemos potencial didático, como as qualidades ou fatores positivos que viabilizem a prática docente, ou seja, toda a informação histórica que pode passar por uma transposição didática, com a função de operacionalizar o ensino, torna-se um potencial didático para nós, seja no campo epistemológico ou ético de Miguel e Miorin (2004).

A transposição didática aqui mencionada refere-se ao que Mendes e Chaquiam (2016) apontam como constituição do saber escolar ou acadêmico, já que a educação escolar ou acadêmica não se limita apenas em fazer uma seleção de saberes que estão disponíveis na cultura em algum momento histórico, no entanto em transformá-los em saberes possíveis de serem ensinados e aprendidos (MENDES e CHAQUIAM, 2016).

Concordamos da mesma forma com os autores quando mencionam o termo transposição didática em relação a transposição do saber, a reorganização, a mediação ou a reestruturação dos saberes historicamente constituídos tipicamente escolares ou acadêmicos.

Desta forma, Mendes e Chaquiam (2016) definem a transposição didática como o processo que faz com que os objetos do saber matemático erudito se transformem em saberes a ensinar, inscritos no projeto de ensino, e depois em saberes de ensino (MENDES e CHAQUIAM, 2016, p. 21).

> As informações históricas, portanto, passam a ser tomadas como o saberes já estabelecidos socialmente, que podem ser tomados como matéria-prima a ser vetorizada com a finalidade de transformar o conhecimento a ser aprendido em algo mais próximo do aprendiz. Trata-se, na verdade, de uma reinvenção matemática que deveria ser melhor apropriada aos objetivos de trabalho do professor e do nível de aprofundamento que precisa ser dado ao aprendiz, ou seja, ao aluno (MENDES e CHAQUIAM, 2016, p. 22).

Neste sentido de potencialidades buscamos em Miguel (1993), Miguel (1997) e Miguel e Miorim (2004), argumentos favoráveis ou que reforcem as potencialidades do uso da história da matemática no ensino. A esse respeito, o pesquisador Antônio Miguel destaca alguns argumentos que entendemos como áreas de atuação das propostas operacionalizadas ou vetorizadas, que utilizam as informações históricas voltadas para o ensino de matemática, ou seja, a história construída do ponto de vista do educador matemático.

Assim, Miguel (1997) nos apresenta alguns desses argumentos, dos quais destacamos os seguintes:

- A História é uma fonte de motivação para o ensino aprendizagem da matemática;

- A história constitui-se numa fonte de objetivos para o ensino da matemática;
- A história constitui-se numa fonte de métodos adequados de ensino da matemática;
- A história constitui-se num instrumento de formalização de conceitos matemáticos;
- A história constitui-se num instrumento de conscientização epistemológica;
- A história é um instrumento que pode promover a aprendizagem significativa e compreensiva da matemática.

É importante evidenciar que o autor em publicações posteriores constrói esses argumentos em dois tipos (o epistemológico e o ético), bem como, argumentos questionadores do uso da História da Matemática.

Após a construção discursiva do que vem a ser potencial didático neste trabalho, temos a segurança ou os subsídios necessários para elencar as possíveis potencialidades didático-pedagógicas do *Liber Quadratorum*, apoiados nos argumentos salientados por Miguel (1997).

Assim, apontamos as seguintes potencialidades a serem explorados a partir do conteúdo presente nas proposições deste livro do décimo terceiro século:

- Construção de diversas formas de encontrar as ternas pitagóricas;
- Atividades de potenciação de índice dois;
- A utilização da história da humanidade;
- A investigação da vida e obra de um matemático: Leonardo Fibonacci;
- Investigações das representações numéricas;
- A evolução da linguagem (algébrica- geométrica – aritmética).

Entendemos que estas potencialidades por nos elencadas coadunam com os argumentos que destacamos aqui, bem como, pertencem aos dois tipos de argumentos, tanto o epistemológico como o ético que comentamos anteriormente. Desse modo, o educador matemático terá a oportunidade e os mecanismos necessários para propor situações que possam conduzir os alunos a (re) descoberta do conhecimento através dos problemas históricos investigados, através de relações ou estudos bibliográficos, para que nesta perspectiva metodológica, eles aprendam o *que* e o *porquê* fazem ou sabem desta ou daquela maneira, para que tenham oportunidade de construir sua aprendizagem por meio da aquisição de conhecimentos e da redescoberta de princípios e métodos (MENDES, 2009).

Dessa maneira, para que a História da Matemática seja considerada como um elemento (recurso) didático para o ensino é importante que as abordagens históricas utilizadas em sala de aula estejam vinculadas ao conteúdo matemático a ser estudado, procurando encontrar justificativas, fatos interessantes, os porquês e os para quês, necessários para suprir a curiosidade dos alunos (TRIVIZOLI e MARIOTTO, 2011).

Nesse direcionamento, a investigação histórica do *Liber Quadratorum* pode ser utilizada como uma aliada pedagógica no ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos.

Considerações Finais

Percebemos que o uso didático-pedagógico das informações históricas pode em muito contribuir para o ensino e para a aprendizagem de matemática, afinal, há vários argumentos para confirmar as potencialidades da história da matemática, no entanto, há argumentos, como mostra Miguel (1997) e Miguel e Miorim (2004), que questionam essas potencialidades da história da matemática voltada para educação/ensino.

Desta forma, temos que ser prudentes no que diz respeito ao uso das informações históricas, com o intuito de assumirmos uma posição intermediária em meio a esses argumentos, pois os dois extremos apresentam perigos para o ensino, ou seja, não podemos assumir um papel em que cola a história da matemática como uma solução para tudo e todos, bem como em uma posição que não pode nada contribuir.

Assim, com o exposto nas seções anteriores, compreendemos que é possível redefinir o *Liber Quadratorum* para uma história reescrita na visão do educador matemático, ou como Miguel (1997) nos propõe uma história pedagogicamente vetorizada.

Uma vez que o uso de histórias vetorizadas

> Tentariam e tenderiam a privilegiar certos temas e não outros, determinados problemas e métodos e não outros, a enfatizar a reconstituição, não apenas dos resultados matemáticos, mas sobre tudo dos contextos epistemológico, psicológico, sócio-político e cultural nos quais esses resultados se produziriam, contribuindo, desse modo, para a explicitação das relações que a matemática estabelece com a sociedade em geral e com as diversas atividades teóricas específicas e práticas produtivas setorizadas (MIGUEL, 1997, p. 101 - 102).

Neste sentido, a reconstrução do *Liber Quadratorum* para fins explicitamente pedagógicos articulados com as demais variáveis que auxiliam no processo de ensino-aprendizagem, pode assumir um papel pedagogicamente vetorizado, se contrapondo a uma tendência tecnicista e aparentemente neutra do ensino da utilização da história da matemática, que pode em muito prestar grande auxilio para o educador matemático que queira traçar caminhos que vão de encontro às necessidades do aluno.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: educação é a base**. Brasília, 2016.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo, SP: Edgard Blücher, 1974.

CASTILLO, R. M. **Fibonacci**: el Primer Matemático Medieval. 2. ed. Coleção La matemática em sus personajes. Espaha: Nivola, 2007.

DEVLIN, K. **The Man of Numbers:** Fibonacci's arithmetic revolution. Volume 59, Number 5. Book Review. May, 2012.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. 5. ed. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Ed. da Unicamp, 2011.

FRANCO JÚNIOR, H. **A Idade Média:** nascimento do ocidente. 2. ed. rev. e ampl. São Paulo, SP: Brasiliense, 2001.

GARBI, G. G. **O Romance das Equações Algébricas**. 2. ed. São Paulo, SP: Ed. Livraria da Física, 2007.

LIBÂNEO, J. C. **Didática**. São Paulo: Cortez, 1990.

LOPES, G. L. O. **A Criatividade Matemática de John Wallis na Obra Arithmetica Infinitorum: contribuições para ensino de cálculo diferencial e integral na licenciatura em matemática**. Tese (Doutorado em Educação). Programa de Pós-graduação em Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 2017.

LOSSIO JÚNIOR, W. O. **As Relações Culturais e as Viagens Entre e o Ocidente Europeu e o Oriente Mongol: o exemplo de marco polo**. UFPR. Curitiba, 2006.

MCCLENON, R. B. **Leonardo of Pisa his Liber Quadratorum**. The American Mathematical Monthly, Vol. 26, No. 1. pp. 1-8. jan., 1919.

MENDES, I. A. **História da Matemática no Ensino**. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2015.

MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. **História nas Aulas de Matemática**: fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHMat, 2016.

MIGUEL, Antonio. **Três Estudos Sobre História e Educação Matemática**. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas, 1993.

MIGUEL, A. **As Potencialidades Pedagógicas da História da Matemática em Questão**: argumentos reforçadores e questionadores. Zetetiké, Campinas, v. 5, n. 8, p.73-105, jul./dez. 1997.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática**: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

OLIVEIRA, J. J. **Sequências de Fibonacci**: possibilidades de aplicações no ensino básico. UFBA. Salvador, BA, 2013.

SERRÃO, M. M. **Problemas Matemáticos da Antiguidade como Estratégia para o Ensino de Matemática na Educação Básica**. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do Pará. Belém, PA: 2014.

SESTITO, E. A. B.; OLIVEIRA, T. **As Transformações do Pensamento na Baixa Idade Média e as Mudanças na Arte**. Londrina, 2010.

SIGLER, L. E. **The Book of Squares**. An annotated traslation into modern english. Academic Press, USA: 1987.

TRIVIZOLI, L. M.; MARIOTTO, R. **O Problema de Apolônio**: panorama histórico e sua resolução utilizando um software geométrico. In: IX Seminário Nacional de História da Matemática, Aracaju-Sergipe, Coleção História da Matemática para professores. 50 p. 2011.

Cadernos de Espiritualidade Franciscana. Braga: Editorial Franciscana, 2009.

José dos Santos Guimarães Filho
Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas - UFPA/Brasil
E-mail: js_guima@hotmail.com

João Cláudio Brandemberg
Universidade Federal do Pará - UFPA/Brasil
E-mail: brand@ufpa.br