

Elementos contextuais do instrumento jacente no plano de Pedro Nunes a partir do tratado de navegação *De arte atque ratione navigandi*

Contextual elements of the instrument to find the altitude of sun of the Pedro Nunes' in the navigation treatise *De arte atque ratione navigandi*

Elementos contextuales del instrumento que miente en el plan de Pedro Nunes del tratado de navegación *De arte atque ratione navigandi*

Francisco Wagner Soares Oliveira

Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM/UECE)

Ana Carolina Costa Pereira

Universidade Estadual do Ceará

RESUMO

Este estudo é parte de uma pesquisa que busca construir interfaces entre a história e o ensino da matemática, a partir do processo de fabricação e uso de instrumentos matemáticos. Nessa direção, propõe-se apresentar elementos contextuais do instrumento nomeado jacente no plano a partir do tratado *De arte atque ratione navigandi*, de Pedro Nunes (1502-1578), publicado em 1573. Assim, notou-se que o jacente no plano é mencionado apenas uma vez no texto, direcionado a instruções para sua construção e uso, associado à determinação da latitude. Outro ponto é a concepção teórica do instrumento, pois não foram encontradas réplicas em museus e figuras em obras da época, apenas esquemas matemáticos.

Palavras-chave: Instrumento jacente no plano; *De arte atque ratione navigandi*; Pedro Nunes.

ABSTRACT

This study is part of a research that seeks to build interfaces between history and the teaching of mathematics, from the process of manufacturing and use of mathematical instruments. In this sense, it is proposed to present contextual elements of the instrument to find the altitude of sun from Pedro Nunes' treatise *De arte atque ratione navigandi* (1502-1578), published in 1573. Thus, it was noted that instrument to find the altitude of sun is mentioned only once in the text, directed to instructions for its construction and use, associated with the determination of latitude. Another point is the theoretical conception of the instrument, since no replicas were found in museums and figures in works of the time, only mathematical schemes.

Keywords: The new instrument to find the altitude of sun; *De arte atque ratione navigandi*; Pedro Nunes.

RESUMEN

Este estudio es parte de una investigación que busca construir interfaces entre la historia y la enseñanza de las matemáticas, basadas en el proceso de hacer y usar instrumentos matemáticos. En este sentido, se propone presentar elementos contextuales del instrumento llamado que miente en el plan del tratado *De arte atque ratione navigandi* de Pedro Nunes (1502-1578), publicado en 1573. Por lo tanto, se observó que el jacente en el plano se menciona solo una vez en el texto, dirigido a instrucciones para su construcción y uso, asociado con la determinación de la latitud. Otro punto es

Submetido em: 20 de Maio de 2020.

DOI:

Aprovado em: 31 de Julho de 2020.

<http://dx.doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2020.n0.p212-229.id240>

la concepción teórica del instrumento, ya que no se encontraron réplicas en museos y figuras en obras de la época, solo esquemas matemáticos.

Palabras clave: Instrumento que miente en el plan; *De arte atque ratione navigandi*; Pedro Nunes.

Introdução

A interface entre história e ensino da matemática pretendida tem como pressuposto estudar o instrumento jacente no plano a partir de questões históricas e didáticas¹. Essa abordagem de pesquisa tem como algumas de suas características, no que se refere ao objeto de estudo, a busca por contextualizá-lo em seu tempo e seu espaço e a procura por levar em consideração diferentes práticas envolvidas em seu contexto de elaboração (SAITO, 2015).

É, nesse sentido, que se propôs apresentar elementos contextuais do instrumento jacente no plano, utilizado para encontrar a altura do Sol acima do horizonte, partindo da obra *De arte atque ratione navigandi*, publicado em 1573, por Pedro Nunes (1502-1578)², como forma de possibilitar interpretações e inferências para o seu contexto de elaboração no século XVI. Compreende-se que considerar, de forma isolada para estudo, apenas a descrição do autor acerca do processo de construção e instrução de uso do aparato, poder-se-ia estar deixando de lado tantas outras questões historiográficas e epistemológicas sobre o instrumento.

Dessa forma, o instrumento jacente no plano é apresentado no segundo livro, em particular, no sexto capítulo, no tratado *De arte atque ratione navigandi*. Em sua descrição, o autor instrui procedimentos tanto para o seu processo de construção como também dá breves instruções sobre seu uso³. Em alguns elementos iniciais de seu contexto, é possível observar que existem registros de sua utilização apenas em aulas teóricas⁴. Um deles se refere às aulas de João Baptista de Lavanha (1550-1624?), as quais têm seu conteúdo descrito no *Tratado del arte de navegar*, publicado em 1588 e que indicam “[...] que Lavanha se baseou essencialmente nas obras de Pedro Nunes, para as ideias que explanou nas suas lições” (CANAS, 2011a, p. 178).

No que se refere ao *De arte atque ratione navigandi*, à luz de seu título, nota-se que ele trata de temas voltados à navegação, e que é feita a enunciação de um navegar pela arte e outro pela razão. Essa posição está associada ao programa que sugere que:

[...] não tem correspondência em qualquer outro texto do autor de náutica na época. Em nenhum outro texto de náutica portuguesa ou espanhola, por exemplo, se encontram explanadas semelhantes noções. É possível nesses escritos encontrar breves referências à matemática, (sobretudo as referências habituais à sua utilidade, à sua nobreza, à sua certeza) mas

¹ Para mais informações sobre o processo de construção de interface entre história e ensino da matemática, a partir de uma perspectiva historiográfica atualizada, ver: Castilho e Saito (2016), Saito (2016a, 2016b), Saito e Dias (2013), Pereira e Saito (2018, 2019).

² Quanto a elementos da biografia de Pedro Nunes, ver Leitão (2003): “Para uma biografia de Pedro Nunes: o surgimento de um matemático, 1502-1542”.

³ Para maiores detalhes sobre o instrumento jacente no plano, consulte: Almeida (2011), Canas (2011a, 2011b), Leitão (2008), Nunes (2012), Oliveira e Pereira (2019), Reis (2003), Albuquerque (1988).

⁴ Informações sobre essas abordagens teóricas do instrumento jacente no plano, ver: Canas (2011a, 2011b), Leitão (2008).

nenhum apresenta assim tão claramente delineado um programa de fundamentação da navegação em princípios matemáticos (LEITÃO, 2006, p. 193).

Essa obra está dividida em dois livros. O primeiro discorre *Sobre dois problemas acerca da arte de navegar* e o outro, *Sobre as regras e os instrumentos para descobrir as aparências das coisas tanto marítimas como celestes, partindo das ciências matemáticas*. Eles foram apresentados, inicialmente, por Pedro Nunes no *Tratado da Sphera*, publicado em 1537 e em uma segunda publicação de 1566, na obra *Petri Nonii Salaciensis Opera*, isso após algumas modificações e ampliações, as quais ocorreram em maior parte no segundo livro (SILVA, 1921).

Mesmo após essa nova edição, mantendo o seu conteúdo, o tratado ainda teve uma outra publicação em 1573 e passou a ter como título principal: *De arte atque ratione navigandi*⁵. Uma das justificativas para tanto, segundo António Mariz, tipógrafo responsável pela edição, foi devido à edição de 1566 ter

[...] sido de tal modo adulterada que sem dúvida haveria de naufragar quem navegasse seguindo o método indicado. Faltavam muitas coisas, outras tinham sido atrevidamente substituídas, tudo de tal forma desfigurado que o próprio autor não reconhecia o seu parto mas, antes, indignado por justa dor, difamaria e enjeitaria o livro que fervilha de erros por todas as partes (NUNES, 2008, p. 255).

Ainda, no que se refere ao conteúdo da *De arte atque ratione navigandi*, sabe-se que ela

[...] compõe-se de dois livros. O primeiro, de título “De duobus problematis circa nauegandi artem” [*Acerca de dois problemas da arte de navegar*] é simplesmente a versão latina do “Tratado sobre certas dúvidas da navegação”, que publicara em 1537; mas o segundo livro é uma composição essencialmente nova, a partir também de um texto de 1537 que foi muito ampliado e estendido (LEITÃO, 2006, p. 196).

A edição do tratado utilizada, neste estudo, foi a publicada pela Academia das Ciências de Lisboa, em conjunto com a Fundação Calouste Gulbenkian, em 2008, intitulada Pedro Nunes – Obras vol. IV. Essas instituições compilaram em oito volumes a obra completa de Pedro Nunes sob a coordenação de Henrique Sousa Leitão, em que se encontram os tratados originais do autor, tradução para o português e comentários.⁶

Feitas essas considerações, no passo seguinte, apresenta-se a descrição desses dois livros. Antes, porém, trazem-se os elementos metodológicos da pesquisa. A esse respeito,

⁵ No frontispício, tem-se como título: *Petri Nonii Salaciensis de arte atque ratione navigandi libri duo. Eiusdem in Theoricis planetarum Georgij Purbachij annotationes, et in problema mechanicum Aristotelis de motu navigij ex remis annotatio una. Eiusdem de erratis Orontij Finoei liber unus. Eiusdem de crepusculis lib. I cum libello Allacen de causis crepusculorum. Conimbricæ: Antonij à Marijs, 1573.*

⁶ Quanto à obra *De arte atque ratione navigandi* (1573), consulte: Almeida (2011), Leitão (2006, 2008), Nunes (2012), Penteadó (2011), Silva (1921).

como forma de alcançar o objetivo, utilizou-se uma metodologia do tipo qualitativa documental, visto que, nela, o pesquisador tem que buscar “[...] compreender as características, estruturas e/ ou modelos que estão por trás dos fragmentos de mensagens tomados em consideração” (GODOY, 1995, p. 23).

Nesse sentido, pensando-se em estudos posteriores sobre o tema, entende-se que as características, estruturas e/ou modelos incorporados na descrição dos livros poderão possibilitar e favorecer futuras interpretações e inferências que indiquem ainda mais elementos para o contexto de elaboração do instrumento jacente no plano no século XVI.

Livro I - Sobre dois problemas acerca da arte de navegar

Esse primeiro livro é composto por apenas 14 páginas, sem divisão de capítulos. Como apontado anteriormente, ele se refere ao tratado sobre certas dúvidas da navegação, publicado por Pedro Nunes em 1537. Sobre essa nova versão, o autor destaca que “[...] decidimos agora verter para latim, para que possa ser lido não só pelos portugueses, mas também pelos demais homens” (NUNES, 2008, p. 268).

Em argumento apresentado por Pedro Nunes, em *De arte atque ratione navigandi*, sobre a escrita desse primeiro livro, o autor ressalta que, com a escrita, procurava responder duas indagações de Martim Afonso de Sousa (1500-1571):

Uma delas resultava de ter ele observado, quando o Sol estava no equador, isto é, nos dias dos equinócios, que o Sol lhe nascia sempre em leste, em qualquer lugar em que navegasse, ao norte ou ao sul da linha, donde concluía Martim de Sousa que navegando com a prôa sempre em leste, iria ter ao equador; e tal não acontecia, pois, com a prôa constantemente neste rumo, percorria um mesmo paralelo. A outra dúvida provinda de, quando o Sol andava no trópico de Capricórnio, o ter visto nascer ao sueste e quarta de leste, estando Martim de Sousa em 35 graus de latitude austral; ele esperava que, nesta situação ao sul dos trópicos, o Sol lhe nascesse ao nordeste e quarta de leste (SILVA, 1921, p. 98).

Ao apresentar suas respostas, Pedro Nunes aborda a noção de ângulo de posição, de linha de rumo, envolvendo considerações quanto a um navegar por círculo máximo e por rumo constante, elementos iniciais referentes ao cálculo da latitude, dentre outros temas. Em alguns momentos, ele se refere a contribuições de Virtrúvio, Ptolomeu e Euclides.

Da exposição, cabe destacar que, por vezes, Pedro Nunes traz imagens para representar suas considerações e, ainda, indica que: “tudo quanto escrevemos sobre estas matérias deve ser acolhido sem qualquer hesitação, visto que nada existe de mais exacto, nada de mais certo e nada de mais evidente de que a demonstração matemática [...]” (NUNES, 2008, p. 282). Entretanto, nesse livro, o autor não faz menção ou apresenta nenhum instrumento utilizado na navegação.

Livro II - Sobre as regras e os instrumentos para descobrir as aparências das coisas tanto marítimas como celestes, partindo das ciências matemáticas

Mantendo a abordagem de temas voltados à navegação, já apresentada em algumas de suas obras, em *Sobre as regras e os instrumentos para descobrir a aparências das coisas [...]*, nota-se que Pedro Nunes continua a divulgar suas considerações para a náutica, em

especial, para a ciência de navegar. Nesse livro, ele dá espaço a tratar de temas voltados à carta de marear, à construção de instrumentos para se achar a altura e à distância dos astros, ao processo de traçar rumos em um dado globo, à determinação da distância entre dois lugares, com base na latitude e longitude, dentre outros.

Esses temas estão dispostos pelo cosmógrafo-mor em 27 capítulos, os quais, na edição moderna, Pedro Nunes – Obras vol. IV (2008), versam da página 283 a 504. Para uma descrição geral sobre esse livro, destaca-se o quadro 1:

Quadro 1 – Capítulos de *Sobre as regras e os instrumentos para descobrir a aparências das coisas [...]. Livro II.*

CAP.	TÍTULO
C1	Sobre a carta de marear ou planisfério dos mareantes.
C2	Sobre a tábua de números usada pelos mareantes para determinar a extensão do caminho directo, bem como a diferença de longitude, entre quaisquer dois lugares colocados na carta de marear.
C3	De como encontrar a diferença de longitude de dois lugares a partir da carta de marear.
C4	Da declinação do Sol.
C5	Sobre a declinação das partes da eclíptica usando um instrumento.
C6	Sobre os instrumentos com que se tomam as alturas e as distâncias dos astros.
C7	Sobre a distância da Estrela Polar ao pólo ártico do mundo e sobre o seu lugar verdadeiro. Também se examina o modo que os mareantes usam para achar a altura do pólo acima do horizonte por meio das estrelas da Ursa Menor.
C8	Acerca do modo de achar a altura do pólo por meio das alturas meridianas do Sol e das estrelas fixas.
C9	Antiga regra nossa para achar ao meio dia a latitude de um lugar por meio dos raios solares.
C10	Examina-se o método de Pedro Apiano, na «Cosmografia», para encontrar a altura do pólo a qualquer hora do dia, por meio do conhecimento da hora.
C11	Examina-se o método de Jacob Ziegler para achar a altura do pólo por meio da distância horizontal do Sol ao meridiano.
C12	Sobre a diversa relação do Sol com o ponto vertical a que se chama zénite, em diferentes lugares da terra, antes e depois do meio-dia.
C13	Processo para achar a altura do pólo pelos raios do Sol, quando se conhece a posição do meridiano.
C14	Processo para achar a altura do pólo por meio dos raios do Sol, ainda que se desconheça a posição do meridiano.
C15	Processo para achar a altura do pólo por meio dos raios do Sol, desconhecendo-se a posição do meridiano e a declinação do Sol.
C16	Achar a altura do pólo no plano de um círculo, desconhecendo-se, uma vez mais, a declinação do Sol e a posição do meridiano.
C17	Achar a altura do pólo acima do horizonte durante a noite.
C18	Acerca do instrumento com que se acham as distâncias do Sol ao meridiano, quer pela equinocial, quer pelo horizonte, e ainda acerca da relação das sombras com o gnómon.

C19	Construir um instrumento com o qual seja possível, sem tabelas de números, achar as cordas e os senos de arcos dados, e também a razão da equinocial para qualquer paralelo, e outras coisas.
C20	Determinar a distância entre dois lugares, dadas as suas latitudes e longitudes.
C21	Dos pressupostos necessários para traçar no globo aquelas linhas a que os mareantes chamam rumos.
C22	Que é possível traçar rumos num dado globo.
C23	Construção de uma tábua numérica para o traçado de quaisquer rumos num globo.
C24	Acerca do comportamento dos rumos, quer em relação aos pólos do mundo, quer uns em relação aos outros.
C25	Que relação têm entre si os arcos de um mesmo rumo.
C26	Traçar rumos num dado globo.
C27	Do uso do globo em que estão traçados os rumos.

Fonte: Elaborado pelos autores.

O primeiro capítulo (C1) é iniciado com elogios à navegação portuguesa. Ele se refere tanto aos avanços para rotas além da equinocial, como também pelos métodos, instrumentos, observações dos astros e tabelas numéricas do movimento do sol e da lua utilizados na navegação. Posteriormente, ele trata de apresentar considerações relativas à elaboração e ao uso da carta de marear, desta indica, por exemplo, que ela servia para fazer marcações em graus da latitude e longitude de lugares afastados do círculo equinocial.

Em C2, ele trata de apresentar considerações mais específicas sobre a carta de marear, diferença de longitude entre dois lugares e tábua de números, a qual era elaborada pelos matemáticos para uso dos mareantes ao se tencionar conhecer uma distância nas direções da rota. Observa-se que tais considerações concebidas por ele fazem, por vezes, referência ao trabalho de Ptolomeu, Menelau, Campano e Euclides, dentre outros.

Ainda, no que diz respeito a questões sobre a carta de marear, em C3, observa-se que ele ensina, com base nela, um método para determinar a diferença de longitude de dois lugares, de forma a validar sua indicação, sustenta-a por meio de demonstrações ancoradas em elementos das matemáticas do período. Como exemplo desse fato, tem-se o momento no qual se utiliza as proporções dos senos⁷ como forma de demonstrar o método enunciado.

O quarto capítulo (C4) trata das discussões sobre o método utilizado no período para determinar a declinação do sol. Em linhas gerais, ele inicia destacando que, para encontrar a declinação, além da observação do grau expresso para o dia do mês na tábua de declinação do sol, deve-se levar em consideração, ainda, o grau do zodíaco em que ele se encontra. Ao final, após uma discussão sobre sua afirmação, ele apresenta e indica uma tábua astronômica, em que também contempla o signo sob o qual o sol se encontra, para quando se quiser achar a sua declinação (figura 1).

⁷ Sobre o uso feito da proporção dos senos, ver Nunes (2008, p. 314-315).

Figura 1 – Tábua da declinação do sol com declinação máxima de 23°30'

		Carneiro		Touro		Gêmeos	
		Balança		Escorpião		Sagitário	
gr.	Gr.	m.	Gr.	m.	Gr.	m.	
0			11	30	20	12	30
1		24	11	51	20	25	29
2		48	12	12	20	37	28
3	1	12	12	33	20	49	27
4	1	36	12	53	21	0	26
5	2	0	13	13	21	11	25
6	2	23	13	33	21	22	24
7	2	47	13	53	21	32	23
8	3	11	14	13	21	42	22
9	3	35	14	32	21	51	21
10	3	58	14	51	22	0	20
11	4	22	15	10	22	9	19
12	4	45	15	28	22	17	18
13	5	9	15	47	22	25	17
14	5	32	16	5	22	32	16
15	5	55	16	23	22	39	15
16	6	19	16	40	22	46	14
17	6	42	16	57	22	52	13
18	7	5	17	14	22	57	12
19	7	28	17	31	23	3	11
20	7	50	17	47	23	7	10
21	8	13	18	3	23	12	9
22	8	35	18	19	23	15	8
23	8	58	18	34	23	19	7
24	9	20	18	49	23	22	6
25	9	42	19	4	23	24	5
26	10	4	19	18	23	26	4
27	10	26	19	32	23	28	3
28	10	47	19	46	23	29	2
29	11	9	19	59	23	30	1
30	11	30	20	12	23	30	0
		Virgem		Leão		Caranguejo	
		Peixes		Aquário		Capricórnio	

Fonte: Nunes (2008, p. 350).

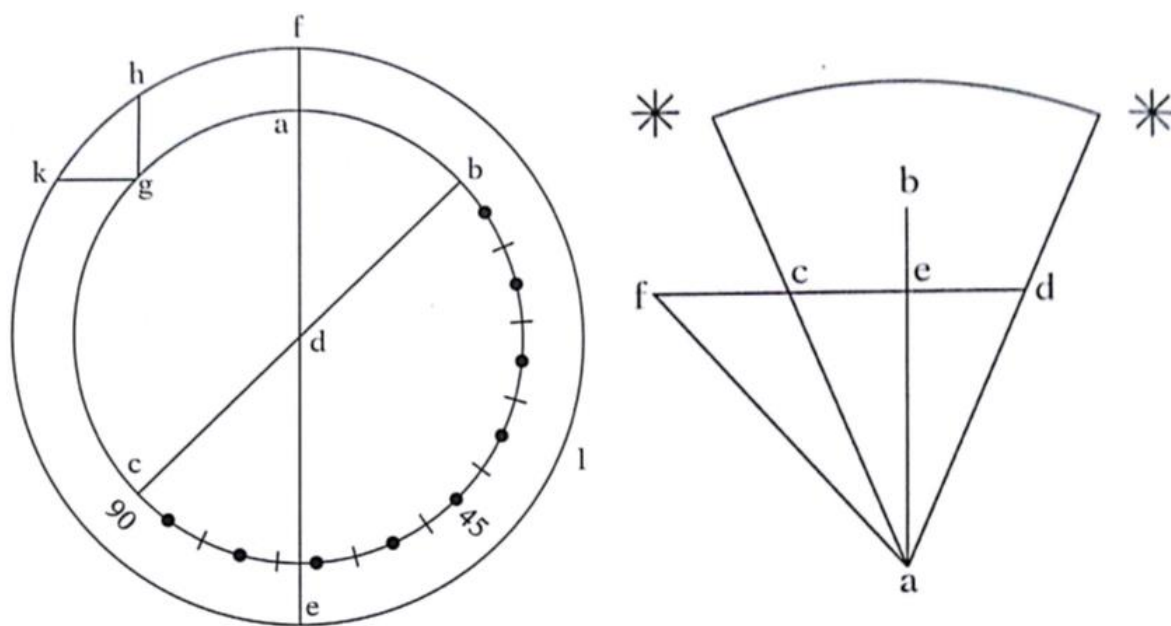
O quinto capítulo (C5) trata sobre o cálculo da declinação das partes da eclíptica, usando, para tanto, um método que utiliza o astrolábio, outro que necessita do analema⁸ de Virtrúvio e, por último, indica um diagrama considerado um aparato matemático de utilização muito simples. Durante sua abordagem, observa-se a incorporação de considerações teóricas de Euclides e Teodósio, dentre outros.

⁸ Informações sobre o analema, vide Leitão (2008, p, 679).

O sexto capítulo (C6) se dispõe a discutir sobre alguns instrumentos que podem ser utilizados para tomar a altura e as distâncias dos astros e, posteriormente, apresenta algumas considerações quanto a assuntos voltados à determinação de medidas (quantidades) astronômicas.

Os instrumentos abordados são o *anel náutico*, a *balestilha* (figura 2) e o instrumento jacente no plano, sobre os quais, nesse capítulo, apresenta algumas considerações quanto à construção e uso deles, expõe, ainda, quanto a esse último, uma demonstração matemática de sua validade.

Figura 2 – Esquema do *anel náutico* e *balestilha* em Nunes (2008).



Fonte: Nunes (2008, p. 357 e 362).

O *anel náutico* foi concebido por Pedro Nunes como alternativa para a determinação da altura do Sol acima do horizonte. Para a realização da medida, ele deve ser posto de forma perpendicular ao plano do horizonte, de maneira que os raios solares ultrapassem um orifício cravado em seu anel e, assim, indiquem a altura procurada. Em relação à *balestilha*, aponta algumas de suas utilidades e, ainda, discute elementos relacionados à sua validade na determinação de medidas.

Também discorre sobre o *quadrante*, dando destaque a seu respeito sobre a possibilidade de inexatidão da medida (quantidade) encontrada por meio dele, visto, por vezes, ser construído em tamanho pequeno. Como forma de solucionar esse possível problema, indica que: “divida-se o quadrante da escala de fora em 90 partes iguais. A mais próxima desta em 89, e a que se segue em 88 e assim sucessivamente a partir daqui, tal como ensinamos no livro sobre os crepúsculos” (NUNES, 2008, p. 360). O que o lusitano está trazendo diz respeito à espécie de escala (*o nónio*), que descreve em detalhes no *De crepusculis* (1542).

O sétimo capítulo (C7) trata de examinar tanto alguns pontos que se referem à localização da distância da estrela polar, como também o método utilizado pelos homens do

mar para encontrar a altura do polo acima do horizonte a partir das estrelas da Ursa Menor. Para tanto, diante desses temas, ele leva em consideração algumas investigações já elucidadas por figuras como Cláudio Ptolomeu, Albaténio e João Verner.

O capítulo oito (C8) aborda, resumidamente, as considerações e as regras sobre o modo utilizado pelos mareantes para encontrar a altura do polo por meio da localização meridiana do sol e das estrelas fixas. É, nesse capítulo, que o autor descreve as regras para encontrar ao meio-dia, através dos raios, a latitude de um lugar.

O décimo capítulo (C10) traz o método descrito por Pedro Apiano (1495-1551), em sua cosmografia⁹, para determinar a altura do polo mediante o conhecimento da hora. Através de uma demonstração que leva em consideração, dentre outras, a quarta proposição presente no primeiro livro dos *elementos* de Euclides, a qual declara que:

[...] caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham o ângulo contido pelas retas iguais igual ao ângulo, também terão a base igual à base, e o triângulo será igual ao triângulo, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais (EUCLIDES, 2009, p. 101).

A partir de definições teóricas dessa natureza, ao final, o cosmógrafo-mor conclui que “[...] em geral, a altura do pólo acima do horizonte não pode encontrar-se nem por aquele instrumento cuja utilização Apiano ensina na Cosmografia, nem por qualquer outro dentre aqueles três que adopta” (NUNES, 2008, p. 390). No que se refere ao conteúdo criticado por Pedro Nunes, sabe-se que ele diz respeito aos “[...] processos apresentados por Pedro Apiano no capítulo nono, «Quomodo altitudo poli seu latitudo terrae per organum speciale sit exploranda»” (LEITÃO, 2008, p. 720).

O décimo primeiro capítulo (C11) apresenta uma crítica às considerações de Jakob Ziegler¹⁰ quanto a seu método para determinar a altura do polo por meio da distância horizontal do Sol ao meridiano, isso porque ele observou alguns equívocos que comprometem a validade do método. Como forma de indicar os problemas observados no método do Jakob Ziegler, nesse capítulo, o autor apresenta justificativas para sustentar suas inferências em proposições de figuras como Teodósio, Menelau e Nicolau Copérnico.

No décimo segundo capítulo, tem-se uma análise sobre a relação do sol com o Zênite, em diferentes lugares da terra, antes e depois do meio-dia. Para tanto, com base nessa relação, o quinhentista supõe algumas possíveis configurações para determinadas localizações e horas do dia e, sobre elas, passa a fazer inferências que ajudam a compreender o fato.

Em seguida, Pedro Nunes passa a tratar, nos C13, C14, C15 e C16, sobre como se deve proceder para determinar a latitude a partir de medidas da altura extrameridiana do Sol. Apresenta os seguintes procedimentos para obter a altura do polo pelos raios do Sol: ao se conhecer ou não a posição do meridiano, desconhecendo-se a posição do meridiano e a

⁹ Sobre essa cosmografia, consulte Apiano (1524): “Cosmographicus Liber Petri Apiani Mathematici studiose collectus”.

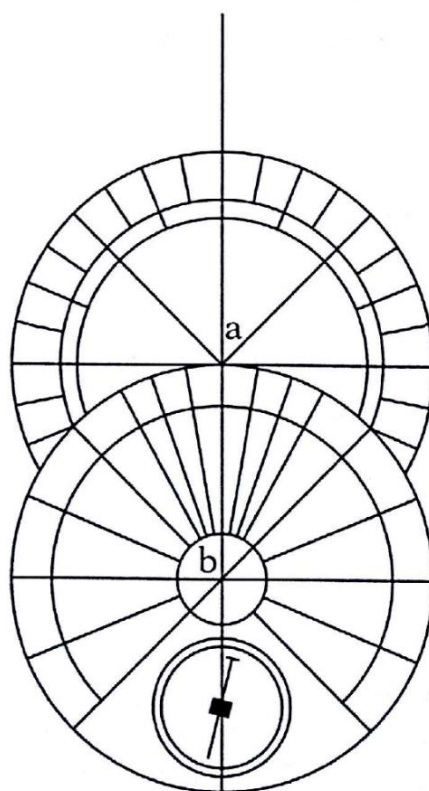
¹⁰ Sobre Jakob Ziegler, vide algumas informações em Leitão (2008): “Anotações ao De arte atque ratione nauigandi”.

declinação do Sol e, por fim, para o caso em que se deve achar a altura do polo no plano de um círculo, quando não se sabe a declinação do Sol e a posição do meridiano.

O capítulo dezessete (C17) aborda procedimentos para encontrar a altura do polo acima do horizonte, contudo, dá destaque ao caso dessa “quantidade” ser observada durante a noite. A esse respeito, indica que caso se tenha uma estrela de declinação conhecida e ela esteja em sua altura máxima em relação ao observador, pode-se utilizar o método empregado para a determinação por meio dos raios do sol. Para o caso de não ser possível aplicar a “fórmula” indicada para o sol, o quinhentista ainda dá outra possibilidade.

Em C18, ele traz considerações acerca de um instrumento (relógio do sol) que pode ser utilizado para determinar o azimute do sol e a hora do dia (figura 3). Em linhas gerais, nesse texto, são feitas a indicação desse aparato para encontrar a distância do sol ao meridiano, seja pela equinocial ou pelo horizonte, uma crítica ao método empregado pelos marinheiros para indicar as horas por meio do azimute do sol, uma discussão relativa à propagação de raios solares, dentre outros temas (LEITÃO, 2008).

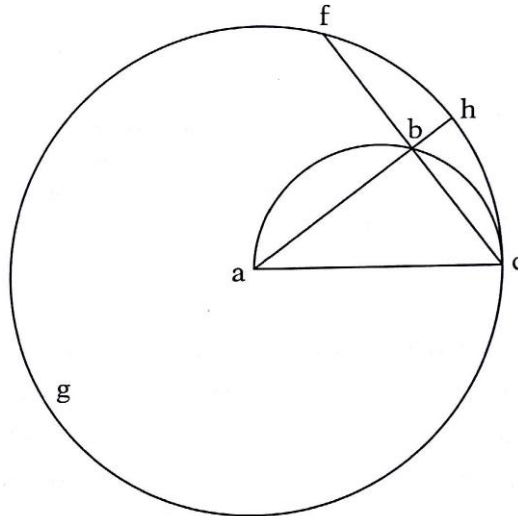
Figura 3 – Esquema do relógio do sol de Nunes (2008).



Fonte: Nunes (2008, p. 424).

Já no C19, são apresentadas umas instruções para construção e uso de um instrumento (figura 4), o qual tem como uma de suas funções possibilitar encontrar as cordas e os senos de arcos e também a razão equinocial e, ainda, eliminar a necessidade de uma tabela numérica. A partir desse aparato, abordar considerações sobre seno verso e reto de um arco.

Figura 4 – Esquema do instrumento para encontrar as cordas e os senos de arcos e também a razão equinocial.

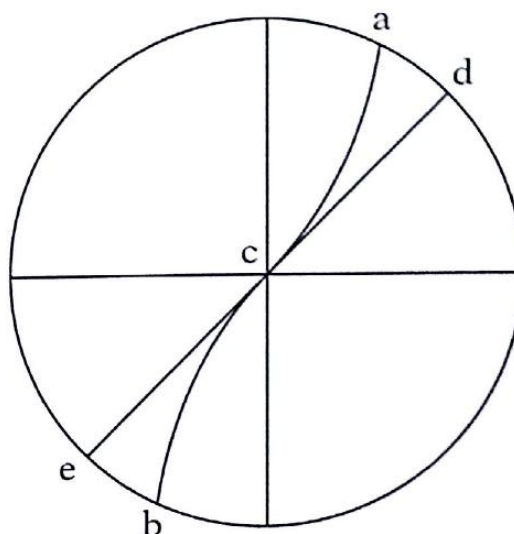


Fonte: Nunes (2008, p. 444).

O capítulo vinte (C20) trata de apresentar uma discussão sobre os procedimentos para se determinar a distância entre dois lugares, sendo conhecidas as suas latitudes e longitudes. Suas considerações abordam vários casos possíveis de localização para os dois lugares, quando os dois se encontram em mesmo meridiano ou paralelo, diferentes meridianos e paralelos, encontram-se austral ao boreal, dentre outras disposições.

No capítulo vinte e um (C21), são apresentados alguns pressupostos referentes à *linha de rumo*. A princípio, alerta que no início “[...] do livro primeiro mostrámos que a linha que o navio descreve com o seu curso – exepualmente o meridiano ou a equinocial – não é circular, mas sim formada por pequenos segmentos de círculo máximo” (NUNES, 2008, p. 466). A seguir, tem-se uma ilustração do quinhentista apresentada no primeiro livro, a qual faz referência a uma linha de rumo.

Figura 5 – Linha de rumo de 45 graus.



Fonte: Nunes (2008, p. 277).

Na figura 5, notam-se tanto o círculo máximo que passa pela linha do equador, como a referida linha de rumo de 45 graus. Sobre a linha de rumo, tem-se a seguinte definição:

Uma linha de rumo (também chamada “curva loxodrômica”) é uma curva sobre a esfera com uma definição muito simples: supondo traçados sobre a esfera meridianos como no globo terrestre (isto é, círculos máximos passando por dois pólos), trata-se de uma curva que corta todos os meridianos segundo um mesmo ângulo. O interesse de um tal tipo de curva para a navegação é óbvio. De facto, a maneira mais natural de navegar no mar alto – ou seja sem pontos de referência costeiros – é obrigar o barco a manter um ângulo constante com o norte da bússola. A rota seguida deste modo é uma linha de rumo (QUEIRÓ, 2002, p. 42).

Essa definição foi elaborada à luz do que o autor traz sobre essa curva. Em linhas gerais, no vigésimo primeiro capítulo, é possível observar, por exemplo, algumas considerações sobre o conceito de *linhas de rumo*, as quais o cosmógrafo-mor sustenta tendo como amparo proposições teóricas de figuras como Euclides, Gebre e Menelau.

Do C22 ao C27, apresentam-se considerações referentes à relação da linha de rumo com um globo. Instrui como se deve proceder para traçar um rumo, o processo para determinação da linha de rumo, as propriedades matemáticas incorporadas na noção de linha de rumo e o método para marcar as linhas em um globo, dentre outras instruções.

Diante do exposto nos capítulos desse segundo livro, nota-se que “[...] este texto de PEDRO NUNES consiste numa investigação, bastante sistemática, dos mais habituais procedimentos, regras e instrumentos usados na náutica do tempo, à luz da demonstração matemática” (LEITÃO, 2008, p. 540). No que concerne às referências teóricas do autor, vê-se que:

“[...] os *Elementos* são o texto a que explicitamente se refere o maior número de vezes – a obra de Euclides constituiu sobretudo para Pedro Nunes o próprio modelo da correcta estruturação do raciocínio matemático, um modelo que procurou imitar em quase todos os seus trabalhos” (LEITÃO, 2002, p. 39).

Algumas observações sobre o instrumento jacente no plano a partir do tratado

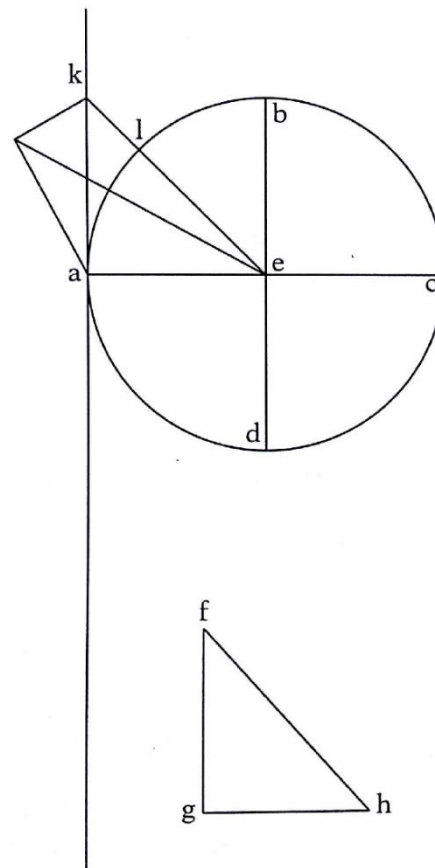
Diante do observado no decorrer da *De arte atque ratione navigandi*, o instrumento jacente no plano é apresentado apenas no sexto capítulo do segundo livro, em que Pedro Nunes dedica para expor os instrumentos com que se tomam as alturas e as distâncias dos astros. No que se refere aos instrumentos, nota-se que ele traz como imagem, para ilustrar os aparatos, apenas esboços geométricos.

[...] essas propostas têm muito mais interesse como concepções teóricas do que como instrumentos reais. Além disso, ele nunca teve interesse diretamente ligado à construção de quaisquer artefatos (instrumentos, globos ou mapas), afastando-se, por isso, do perfil de alguns seus eminentes contemporâneos, como Gemma Frisius ou Pedro Apiano, que,

apesar de tudo, apresentam importantes semelhanças com ele (LEITÃO, 2013, p. 25).

Esse fato aponta que os interesses de Pedro Nunes eram, em grande parte, teóricos e que ele utilizava uma “[...] metodologia matematizada de interpretação da realidade natural” (LEITÃO, 2006, p. 185). No caso particular do instrumento jacente no plano, traz o seguinte esboço:

Figura 6 – Instrumento jacente no plano.



Fonte: Nunes (2008, p. 258).

Ao apresentar o instrumento jacente no plano, o autor destaca apenas que “a altura do Sol pode tomar-se não só com instrumentos erectos sobre o plano do horizonte como também usando instrumento que estão jacentes, paralelos a esse plano”(NUNES, 2008, p. 358). Em seguida, já passa a tratar sobre as instruções para sua construção e uso. Sobre sua fabricação, cabe destacar que, em linhas gerais, ele indica duas configurações para o aparato: “[...] i) numa tábua redonda, com um triângulo colocado perpendicularmente a esse tábua, e também com um estilete vertical; ii) numa tábua quadrada, apenas com um triângulo colocado perpendicularmente”(LEITÃO, 2008, p. 688).

Em relação ao uso, faz breves instruções, para a versão com o estilete, indica que:

[...] Quando se quiser achar a altura do Sol acima do horizonte, rodar-se-á o instrumento até que a sombra do estilete se projecte sobre a recta **bd**.

Então, a sombra do lado **fh**, ou **fe**, no quadrante **ab**, indicará a altura procurada, calculada a partir do ponto **b** na direção de **a**. A restante parte do quadrante até **a** será a distância entre o Sol e o Zênite (NUNES, 2008, p. 358).

Ainda, no que se refere ao conteúdo da descrição do instrumento jacente no plano, em particular, na demonstração de validade do aparato, nota-se menção a proposições dos *Elementos* de Euclides, fato que vai ao encontro do observado no decorrer de todos os dois livros de navegação e que reforça o apreço do quinhentista pelas matemáticas.

Com relação à altura que o instrumento jacente no plano fornece (altura do Sol acima do horizonte), com base na obra *De arte atque ratione navigandi*, é possível observar que ela pode, provavelmente, estar associada ao cálculo da latitude no século XVI.¹¹ No capítulo quatorze do segundo livro, ao descrever um dos procedimentos para o cálculo da referida coordenada geográfica, o autor indica ser necessário conhecer a altura do Sol acima do horizonte.

Como se pode observar no decorrer dos livros da obra *De arte atque ratione navigandi*, ela está voltada a temas ligados à navegação. Mesmo inserido nesse contexto, o instrumento jacente no plano é pouco apropriado para uso no mar:

A limitação que torna este instrumento muito pouco adequado ao uso no mar é óbvia: exige um plano horizontal estável, o que nunca se dá a bordo. Esta inadequação ao uso no mar tornou-o apenas numa concepção teórica e explica porque está praticamente ausente da literatura de náutica da época, e porque não se conhecem quaisquer exemplares. Pela sua menção em notas de aulas manuscritas, sabe-se, contudo, que foi descrito e comentado em lições de náutica e no treino de navegantes (LEITÃO, 2008, p.688-689).

Assim, entende-se que o interesse de Pedro Nunes, com o instrumento jacente no plano, pode estar associado apenas à apresentação de uma concepção teórica. Na descrição do aparato, nota-se que são elucidados alguns objetos, tais como plano do horizonte, triângulo retângulo isósceles, semidiâmetro do círculo, altura do Sol acima do horizonte, zênite e reta tangente. Nesse sentido, vê-se que, em um estudo teórico sobre ele, podem ser discutidos tanto temas da navegação, como também das matemáticas.

Considerações finais

Diante do estudo desenvolvido, notou-se uma ligação existente entre os temas abordados nos dois livros. Como exemplo disso, têm-se as considerações preliminares que Pedro Nunes menciona no primeiro livro sobre a linha de rumo e o cálculo da latitude, temas esses que, no segundo livro, são explorados de forma mais extensa. No último livro, notam-se algumas relações entre os seus vinte e sete capítulos, uma delas ocorre no caso da

¹¹ Sobre a aproximação do instrumento jacente no plano com o cálculo da latitude, vide Oliveira e Pereira (2019): “Elementos iniciais da relação entre o instrumento de Pedro Nunes, jacente no plano, e o cálculo da latitude no século XVI”.

determinação da latitude, procedimento que requer, dentre outros elementos, o conhecimento da declinação do Sol, tema esse que foi abordado em um dos capítulos anteriores.

No que se diz respeito ao instrumento jacente no plano, destaca-se que foi difícil apresentar elementos de seu contexto somente a partir do conteúdo do tratado. Essa dificuldade se deve ao fato de Pedro Nunes se referir ao aparato apenas no sexto capítulo do segundo livro, limitando-se a falar apenas sobre as instruções de construção e de uso.

Entretanto, considerando todo o conteúdo da obra, a partir da medida que o instrumento jacente no plano fornece, foi possível apontar que ele pode estar associado à determinação da latitude. Também se pode observar, no aparato, traços das matemáticas do período, em particular, da descrita nos *Elementos* de Euclides, fato que reforça o interesse de Pedro Nunes por analisar questões de náutica de forma matematizada.

Nesse sentido, nota-se a importância de assumir uma perspectiva historiográfica atualizada¹² para o estudo a que se pretende elencar elementos do contexto do instrumento jacente no plano. Essa perspectiva possibilita ao pesquisador considerar não só o trecho de descrição do instrumento, mas um conjunto de textos/temas que podem indicar elementos de seu contexto de elaboração.

Além disso, à luz dela e a partir das informações levantadas neste estudo, com base na descrição dos dois livros de náutica de Pedro Nunes, pretende-se, em estudos posteriores, elencar ainda mais elementos do contexto de elaboração do instrumento no século XVI e atrelá-lo com atividades didáticas para a formação do professor de matemática.

Referências

ALBUQUERQUE, Luís de. **Instrumentos de Navegação**. Lisboa: Comissão Nacional para a Comemoração dos Descobrimentos Portugueses, 1988.

ALMEIDA, Bruno José M. G. Pereira de. **A influência da obra de pedro nunes na náutica dos séculos XVI e XVII: um estudo de transmissão de conhecimento**. 2011. 595 f. Tese (Doutorado) - Universidade de Lisboa Faculdade de Ciências Secção Autónoma de História e Filosofia das Ciências, Curso de Doutoramento em História e Filosofia das Ciências, Lisboa, 2011. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/handle/10451/6699>. Acesso em: 12 jul. 2018.

APIANO, Pedro. **Cosmographicus Liber Petri Apiani Mathematici studiose collectus**. Landshut, J. Weyssenburger, 1524.

CANAS, António José Duarte Costa. Apropriação de Pedro Nunes por João Baptista Lavanha. In: 6º Encontro luso-brasileiro de história da matemática, 2011b. Minas Gerais. **Anais do 6º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática**. Rio Grande do Norte: Sbhmat, 2014. p. 45-70.

CANAS, António José Duarte Costa. **A obra náutica de João Baptista Lavanha (c. 1550 – 1624)**. 2011a. 401 f. Tese (Doutorado) - Universidade de Lisboa Faculdade de Letras, Departamento de história, História dos Descobrimentos e Expansão, Lisboa, 2011a.

¹² Detalhes sobre a perspectiva historiográfica atualizada podem ser consultados em Saito (2015): “História da matemática e suas (re)construções contextuais”.

Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/handle/10451/6140>. Acesso em: 08 nov. 2018.

CASTILLO, Ana Rebeca Miranda; SAITO, Fumikazu. Algumas considerações sobre o uso do báculo (*baculum*) na elaboração de atividades que articulam história e ensino de matemática. In: J. Flores Salazar & F. Ugarte Guerra (eds.). **Investigaciones en Educación Matemática**. Lima: Fondo Editorial PUCP, 2016, p. 237-251

EUCLIDES. **Os Elementos**. São Paulo: UNESP, 2009. Tradução de: Irineu Bicudo.

GODOY, Arilda Schmidt. Pesquisa Qualitativa Tipos Fundamentais. **Raje-revista de Administração de Empresas**, São Paulo, v. 35, n. 3, p.20-29,1995. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rae/v35n3/a04v35n3.pdf>. Acesso em: 15 maio 2018.

LAVANHA, João Baptista, **Tratado del arte de navegar**. Ms. 2317, fols. 20r-45v, 1588. Disponível em: <https://repositorio.ul.pt/handle/10451/6140>. Acesso em: 15 maio 2018.

LEITÃO, Henrique. Anotações ao *De arte atque ratione nauigandi*. In **Pedro Nunes. Obras, vol. IV**, Lisboa: Academia das Ciências de Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, 2008, p. 515-794.

LEITÃO, Henrique. **Ars e Ratio: A Náutica e a Constituição da Ciência Moderna**, In: *La ciencia y el mar*. Valladolid: Los autores, p. 183-207, 2006.

LEITÃO, Henrique. Para uma biografia de Pedro Nunes: o surgimento de um matemático, 1502-1542. **Cadernos de Estudos Sefarditas**, Lisboa, v. 3, p.45-82, 2003. Disponível em: http://www.catedraalbertobenveniste.org/_fich/15/HENRIQUE_LEITAO.pdf. Acesso em: 12 jul. 2018.

LEITÃO, Henrique. Pedro Nunes e a matemática do século XVI. **História da Ciência Luso-brasileira**: Coimbra entre Portugal e o Brasil, Coimbra, p.19-33, 2013.

LEITÃO, Henrique. Pedro Nunes, leitor de textos antigos e modernos. In: Aires A. Nascimento (Coord.), **Pedro Nunes e Damião de Góis, Dois rostos do humanismo português, Actas de colóquio no V Centenário do Nascimento 2002 – 28 de junho** (Lisboa: Faculdade de Letras de Lisboa, Centro de Estudos Clássicos, Guimarães Editores), p. 31-58. 2002.

NUNES, Paulo Jorge Antunes. **Os instrumentos náuticos na obra de Pedro Nunes**. 2012. 162 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado de História Marítima, Universidade de Lisboa Faculdade de Letras Departamento de História, Lisboa, 2012. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/handle/10451/8968>. Acesso em: 12 jul. 2018.

NUNES, Pedro. **Obras: De Arte Atque Ratione Navigandi**. vol. IV, Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2008.

OLIVEIRA, Francisco Wagner Soares; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Elementos iniciais da relação entre o instrumento de Pedro Nunes, jacente no plano, e o cálculo da latitude no século XVI. **História da Ciência e Ensino: Construindo interfaces**, São Paulo, v. 19, p. 39-53, 2019. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/hcensino/article/view/42112/29300>. Acesso em: 14 set. 2019.

PENTEADO, Aline Mendes. **Pedro Nunes e a Distinção de Dois Tipos de Trajetórias na Navegação: A Linha de Rumo e o Círculo Máximo**. 2011. 208 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista Instituto de Geociências e Ciências Exatas Câmpus de Rio Claro, São Paulo, 2011. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/91026>. Acesso em: 12 jul. 2018.

PEREIRA, Ana Carolina Costa; SAITO, Fumikazu. A reconstrução do báculo de Petrus Ramus na interface entre história e ensino de matemática. **Cocar**, Belém-PA, V. 13, n 25, p. 342-372, 2019.

PEREIRA, Ana Carolina Costa; SAITO, Fumikazu. Os instrumentos matemáticos na interface entre história e ensino de matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**. v.5, 2018, p.109-122.

QUEIRÓ, João Filipe. Pedro Nunes e as linhas de rumo. **Gazeta de Matemática**, 143. (2002). 42-47

REIS, António Estácio do. Os instrumentos de medida. **As Novidades do Mundo: conhecimento e representação na Época Moderna, Lisboa**, Edições Colibri, 2003, pp. 145-167.

SAITO, Fumikazu. Construindo interfaces entre história e ensino da matemática. **Ensino da Matemática em Debate**, São Paulo, v. 3, n. 1, 2016a, p.3-19. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/29002/20273>. Acesso em: 03 jun. 2017.

SAITO, Fumikazu; DIAS, Marisa da Silva. Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. **Ciências & Educação (Bauru)**, São Paulo, vol. 19, n. 1, 2013. p.89-111. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S151673132013000100007&lng=pt&tlng=pt. Acesso em: 31 Jul. 2017

SAITO, Fumikazu. **História da matemática e suas (re)construções contextuais**. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

SAITO, Fumikazu. História e Ensino de Matemática: Construindo Interfaces. In: SALAZAR, Jesús Flores; GUERRA, Francisco Ugarte. **Investigaciones en Educación Matemática**. Lima: Fondo Editorial PUCP, 2016b. p. 253-291.

SILVA, Luciano Pereira da. **A primeira edição dos tratados latinos sobre a arte de navegar, de Pedro Nunes**. *Obras Completas*, Vol. II, (Lisboa: Agência Geral das Colónias, 1945) 209-217. Originalmente em: *Anais das Bibliotecas e Arquivos*, 2 (1921) 98-101.

Francisco Wagner Soares Oliveira

Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM/UECE) – Brasil

franciscowagner2007@gmail.com

ORCID : <http://orcid.org/0000-0001-9296-8200>

Ana Carolina Costa Pereira

Universidade Estadual do Ceará – Brasil

carolina.pereira@uece.br

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3819-2381>