Ensino de conteúdos matemáticos usando a sequência prateada

Teaching mathematical content using the silver sequence

Paula Catarino
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro – Vila Real/Portugal

RESUMO

Muitas têm sido as sequências de números estudadas e que servem de motivação para o ensino de matemática. É disso exemplo a bem conhecida sequência de *Fibonacci*, não só pela sua ligação com várias formas da natureza, com a arte, com o belo, com a harmonia e o número de ouro, mas também pelos mais variados desafios que proporciona aos professores para ensinar conteúdos matemáticos usando as suas propriedades. Neste artigo dedicamos a nossa atenção a uma outra sequência de números - a sequência prateada - ainda pouco divulgada na literatura, apresentando, sucintamente, algumas das suas interessantes propriedades e mostrando que também ela pode ser útil no ensino de alguns conteúdos matemáticos.

Palavras-chave: Sequência de números. Trigonometria. Geometria. Ensino de matemática.

ABSTRACT

A number of sequences of numbers have been studied and used to motivate for teaching mathematics. An example is the well-known Fibonacci sequence, not only for its connection with various forms of nature, with art, with the beautiful, the harmony and the golden number, but also the most varied challenges that provides teachers to teach mathematical content using its properties. In this paper we will focus our attention to another sequence of numbers - the silver sequence - still little known, briefly featuring some of its interesting properties and showing that it can also be useful in teaching some mathematical content.

Key Words: Sequence of numbers. Trigonometry. Geometry. Teaching of mathematics.

1. Introdução

Os números, desde muito cedo foram para a humanidade uma ferramenta primordial para a resolução dos problemas do dia-a-dia. A Teoria de Números é a ciência que tem, como um dos objetivos principais, estudar as propriedades e relações entre os números.

Os números têm sido uma importante ferramenta em diversas áreas da matemática, servindo de apoio para resultados significativos, não só em matemática, como em ciências afins. Existem muitas referências publicadas de trabalhos relacionados com os conceitos básicos da Teoria de Números e suas aplicações, (ver, por exemplo, (KOCH, 1997), (LANDAU, 1999), (ALENCAR, 1989), entre muitos outros).

Muitas têm sido as sequências de números que têm sido estudadas, destacando-se os estudos da bem conhecida sequência de *Fibonacci* (e consequentemente da sequência de Lucas) que está relacionada com a razão áurea. Muitos são os artigos publicados, desde muito cedo, acerca da sequência de *Fibonacci*, como é o caso de (HOGGATT, 1969) e de (VOROBIOV, 1974), entre outros e mais recentemente temos o caso de (CALDWELL; KOMATSU, 2010), (LAURO, 2005), (MARQUES, 2013), (SHATTUCK, 2013), (SUNG, 2012) e

(WILBERSTAEDT, 2004). São conhecidas interessantes propriedades relacionadas com esta sequência que está intimamente ligada com várias formas da natureza, com a arte, com o belo, com a harmonia, etc. e é talvez uma das sequências mais estudadas desde sempre.
Neste artigo propomo-nos estudar uma outra sequência de números - a sequência prateada - ainda pouco divulgada, que se define por recorrência, tal como acontece com a sequência de *Fibonacci*, e à qual está ligada o número irracional $1 + \sqrt{2}$ que, ao longo do texto, será denotado por δ. Procuraremos, tanto quanto possível, dar uma visão clara acerca de alguns resultados interessantes envolvendo esta sequência, começando por introduzir uma breve referência ao número prateado δ e as suas relações com alguns conteúdos matemáticos já conhecidos. Seguidamente, apresentaremos, de forma mais detalhada, a sequência prateada, referindo algumas das suas propriedades gerais e apresentaremos algumas ligações desta sequência com conteúdos de matemática elementar e que podem ser usadas para os ensinar aos nossos jovens.

2. O número prateado e o seu conjugado

De acordo com algumas publicações em Teoria de Números, pensa-se que o número $\sqrt{2}$ tenha sido o primeiro número irracional, reconhecido como tal, sendo esta descoberta atribuída a *Hipaso de Metaponto*[56] da escola pitagórica. Até se pensa que este filósofo grego foi expulso da escola pitagórica quando provou a existência deste tipo de números – os números irracionais. Até então os pitagóricos pensavam que apenas os números racionais eram aqueles que podiam descrever toda a geometria e como tal esta descoberta veio colocar em causa toda a teoria que era defendida pela escola pitagórica. Não é propósito deste artigo, debruçarmo-nos sobre a história do aparecimento deste número e de outros números irracionais, mas apenas registar esta curiosidade que pode servir de mote para um desafio a deixar aos nossos alunos como mais adiante é proposto. De qualquer modo, para um leitor mais interessado poderá consultar, por exemplo, (PALHARES, 2004), onde encontrará uma breve explicação acerca deste tema, a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ e outros temas ligados com a história do aparecimento dos variados conjuntos de números que hoje conhecemos. O número irracional $\sqrt{2}$ não é mais do que a medida do comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são iguais e medem 1 unidade de medida (Figura 1).

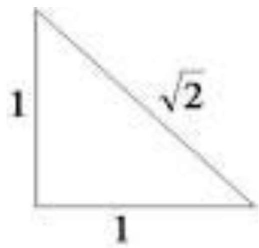

Figura 1: Triângulo retângulo cujos catetos medem 1 unidade de medida[57]

[56] Filósofo grego, membro da escola pitagórica, nasceu em torno do ano 500 a.C. em Metaponto, cidade grega da Magna Grécia situada no Golfo de Tarento, ao sul do que agora é a Itália.
[57] Imagem retirada de http://www.google.pt/search?hl=pt-PT&site=imghp&tbm=isch&source=hp&biw=1024&bih=509&q=aparecimento+de+ra%C3%ADs+de+dois&oq=aparecimento+de+ra%C3%ADs+de+dois&gs_l=img.3...1640.13453.0.14390.31.15.0.16.16.0.328.1860.8j6j0j1.15.0...0.0...1ac.1.11.img.tcW5EUdW5zo#imgrc=2uo_D2rxZtrozM%3A%3BaFVPy67fhycPZM%3Bhttp%253A%252F%252Fupload.wikimedia.org%252Fwikipedia%252Fcommons%252Fthumb%252Ff%252Ff2%252FSqu

Basta utilizarmos o célebre Teorema de Pitágoras e de imediato verificamos que a medida do comprimento da hipotenusa do triângulo representado na Figura 1 é exatamente igual ao número $\sqrt{2}$. A partir deste número irracional consideremos um outro número irracional dado por $1 + \sqrt{2}$ que, doravante, denotaremos por δ e que designaremos de número prateado. Notemos que

$$\delta = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}4142135623\ldots$$

e neste texto também iremos ter em conta o seu conjugado $\bar{\delta} = 1 - \sqrt{2}$.

1. A sequência prateada

Associado ao número prateado δ temos a chamada sequência prateada de quem nos ocuparemos detalhadamente a seguir. De forma análoga a muitas outras sequências de números bem conhecidas, esta também é definida por uma relação de recorrência. Assim para encontrarmos o termo geral de ordem n temos de conhecer os $n - 1$ termos anteriores da sequência. Numa sequência os elementos estão dispostos segundo uma determinada ordem e sempre que conseguimos, definindo as condições iniciais, a seguir, definir os elementos subsequentes a partir dos elementos anteriores, obtemos uma sequência que se diz estar definida por recorrência. A sequência prateada é mais um exemplo de uma sequência que se define por recorrência, constituída pelos elementos

$$1, 2, 5, 12, 29, 70, \ldots.,$$

que são alguns dos bem conhecidos números naturais. Assim, esta sequência $(P_n)_n$, é definida por

$$\begin{cases} P_1 = 1 \\ P_2 = 2 \\ P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} \end{cases}, n \geq 3. \qquad (1).$$

Até agora a sequência prateada foi representada por uma equação de recorrência. Encontraremos a expressão de P_n ($n \in \mathbb{N}$), sendo $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, envolvendo apenas o índice n e usaremos resultados conhecidos envolvendo relações de recorrência. Para relembrar alguns desses resultados com relações de recorrência, consultar, por exemplo, o capítulo 3 em (BALAKRISHNAN, 1996). Primeiro vamos encontrar as sequências que satisfazem a equação de recorrência $a_n = 2a_{n-1}+a_{n-2}$, e dentre as soluções, aquelas que satisfazem a $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$.

Uma equação cuja incógnita é uma sequência $(a_n)_n$ e que relaciona k termos, a_n, a_{n+1}, ... ,a_{n+k-1} é chamada de equação em diferença linear.

O próximo resultado dá-nos a solução de equações em diferenças linear da forma

$$a_n + pa_{n-1} + qa_{n-2} = 0,$$

are_root_of_2_triangle.png%252F200px-Square_root_of_2_triangle.png%3Bhttp%253A%252F%252Fpt.wikipedia.org%252Fwiki%252FRaiz_quadrada_de_dois%3B200%3B200 no dia 26 de abril de 2013.

onde p e q são constantes reais, isto é, p e q elementos do conjunto $\mathbb{R}$, sendo q não nula. De referir que a prova deste resultado e o próprio resultado podem ser consultados em (GUSMÃO, 2003), razão pela qual não apresentaremos aqui a sua demonstração. O resultado referido é o seguinte:

Lema 1 (GUSMÃO, 2003, Lema 1, p.61): A equação em diferença linear dada por

$$x_n + px_{n-1} + qx_{n-2} = 0$$

com $x_1 = a_1$ e $x_2 = a_2$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, possui uma única solução.

Também em (GUSMÃO, 2003) é referenciado um resultado que permite estabelecer a ligação entre a anterior equação em diferença linear e uma equação do 2.º grau com duas raízes distintas. O resultado que relaciona estas duas equações e cuja demonstração se encontra também em (GUSMÃO, 2003), é o seguinte:

Teorema 1 (GUSMÃO, 2003, Teorema 2, p.61): Se a equação $r^2 + pr + q = 0$ possui raízes r_1 e r_2 distintas, a sequência $a_n = c_1(r_1)^n + c_2(r_2)^n$ onde $n \in \mathbb{N}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, é a solução de $x_n + px_{n-1} + qx_{n-2} = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n > 2$.

A equação de recorrência (1) a que satisfaz a sequência prateada pode ser escrita da seguinte forma

$$P_n - 2\,P_{n-1} - P_{n-2} = 0, \tag{2}$$

com $p = -2$ e $q = -1$. Então a equação característica que lhe está associada é dada por:

$$r^2 - 2\,r - 1 = 0,$$

que tem duas raízes distintas, $r = 1 \pm \sqrt{2}$. Pelo Teorema 1, temos que

$$P_n = c_1\left(1+\sqrt{2}\right)^n + c_2\left(1-\sqrt{2}\right)^n \tag{3}$$

é solução de (2).

Vamos agora determinar as constantes c_1 e c_2 de tal forma que $P_1 = 1$ e $P_2 = 2$. Para tal, teremos de resolver o seguinte sistema de equações lineares nas incógnitas c_1 e c_2 que é dado por:

$$\begin{cases} c_1\left(1+\sqrt{2}\right) + c_2\left(1-\sqrt{2}\right) = 1 \\ c_1\left(1+\sqrt{2}\right)^2 + c_2\left(1-\sqrt{2}\right)^2 = 2 \end{cases}.$$

Trata-se de um sistema possível determinado com, portanto, uma única solução. Após a resolução do sistema suprarreferido, encontramos que

$$c_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ e } c_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\,.$$

Logo substituindo estes valores em (3), obtemos, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right),$$

que é a fórmula geral dos termos da sequência prateada, equivalente à bem conhecida fórmula de *Binet* tão bem conhecida para a sequência de *Fibonacci*. Tendo em conta que $\delta = 1 + \sqrt{2}$ e $\bar{\delta} = 1 - \sqrt{2}$, então a equação anterior toma agora o seguinte aspeto:

$$P_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\delta^n - \bar{\delta}^n\right). \qquad (4)$$

Já a seguir, neste texto, apresentaremos uma outra expressão para δ^n e para $\bar{\delta}^n$, envolvendo o número prateado e seu conjugado e ainda a expressão geral dos termos de ordem *n* e de ordem *n*-1 da sequência prateada.

3. Algumas propriedades da sequência prateada

A seguir demonstramos algumas das propriedades gerais desta sequência.

3.1 – Sendo $(P_n)_n$ a sequência prateada definida como em (1) e considerando o número prateado $\delta = 1 + \sqrt{2}$, temos que:

$$\begin{cases} P_1\delta = \delta \\ P_n\delta = \delta^n - P_{n-1} \end{cases}, n \geq 2. \qquad (5)$$

Demonstração: Utilizando indução matemática, temos que para $n = 1$, $P_1\delta = \delta$, uma vez que o primeiro termo da sequência prateada é igual a 1, o que mostra a veracidade desta igualdade. Suponhamos agora que é verdade para *n* que $P_n\delta = \delta^n - P_{n-1}$ e mostremos que tal igualdade continua a ser verdade para $n + 1$. Assim temos que, $\delta^{n+1} - P_n = \delta\delta^n - P_n = \delta\left(P_n\delta + P_{n-1}\right) - P_n = P_n\delta^2 + P_{n-1}\delta - P_n = P_n\left(3+\sqrt{2}\right) + P_{n-1}\left(1+\sqrt{2}\right) - P_n = 2P_n + P_{n-1} + \sqrt{2}\left(2P_n + P_{n-1}\right) = \left(1+\sqrt{2}\right)\left(2P_n + P_{n-1}\right) = \left(1+\sqrt{2}\right)P_{n+1} = P_{n+1}\delta$, como pretendíamos demonstrar.

A próxima propriedade (semelhante à anterior) demonstra-se de modo análogo, daí a razão de não ser aqui apresentada a sua demonstração.

3.2 – Sendo $(P_n)_n$ a sequência prateada definida como em (1) e considerando o conjugado $\bar{\delta} = 1 - \sqrt{2}$ do número prateado $\delta = 1 + \sqrt{2}$, temos que:

$$\begin{cases} P_1\bar{\delta} = \bar{\delta} \\ P_n\bar{\delta} = \bar{\delta}^n - P_{n-1} \end{cases}, n \geq 2. \qquad (6)$$

Uma fórmula bem conhecida da sequência de *Fibonacci* (e já referenciada antes neste texto) é a chamada fórmula de *Binet*. Também, no caso da sequência prateada, temos o equivalente à fórmula de *Binet* que é a fórmula (4), já apresentada. Agora voltamos a apresentar a mesma fórmula, mas aparecendo como consequência das propriedades anteriores. Assim temos que:

3.3 – Sendo $(P_n)_n$ a sequência prateada definida como em (1) então o termo geral desta sucessão pode ser calculado através da seguinte expressão geral:

$$P_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\delta^n - \bar{\delta}^n\right), \text{ para } n \geq 1. \tag{7}$$

Demonstração: para chegarmos a esta expressão (7) do termo geral de ordem n da sequência prateada, basta subtrairmos as expressões (6) a (5) e obtemos, para o caso de $n = 1$, que $\delta - \bar{\delta} = P_1\delta - P_1\bar{\delta} = P_1\left(\delta - \bar{\delta}\right) = 2\sqrt{2}\,P_1$, o que implica que $P_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\delta - \bar{\delta}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\delta - \bar{\delta}\right)$. Para $n \geq 2$, mais uma vez obtemos que $\delta^n - \bar{\delta}^n = P_n\left(\delta - \bar{\delta}\right) = 2\sqrt{2}\,P_n$, implicando, mais uma vez, o pretendido.

A propriedade que se segue diz respeito à soma dos n primeiros termos da sequência prateada e a sua demonstração.

3.4 – A soma dos n primeiros termos da sequência prateada é dada por

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_{n-1} + P_n = \frac{1}{2}\left(P_n + P_{n+1} - 1\right). \tag{8}$$

Demonstração: Temos que $P_1 = P_3 - 2P_2$, $P_2 = P_4 - 2P_3$, $P_3 = P_5 - 2P_4$, …, $P_{n-1} = P_{n+1} - 2P_n$, $P_n = P_{n+2} - 2P_{n+1}$. Então somando membro a membro as equações anteriores, obtemos que $P_1 + P_2 + \ldots + P_{n-1} + P_n = -2P_2 + P_{n+2} - (P_3 + P_4 + \ldots + P_n + P_{n+1})$. Então resulta que $2(P_1 + P_2 + \ldots + P_{n-1} + P_n) = -2P_2 + P_{n+2} - (P_3 + P_4 + \ldots + P_n + P_{n+1}). + P_1 + P_2 + \ldots + P_{n-1} + P_n$,
o que é equivalente a $2(P_1 + P_2 + \ldots + P_{n-1} + P_n) = -2P_2 + P_{n+2} + P_1 + P_2 - P_{n+1}$. Atendendo a que $P_1 = 1$, $P_2 = 2$ e que $P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$, concluímos que:

$$2(P_1 + P_2 + \ldots + P_{n-1} + P_n) = -1 + P_{n+1} + P_n,$$

ou seja,

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_{n-1} + P_n = \frac{1}{2}(-1 + P_{n+1} + P_n).$$

❑

No *website* da autoria de Sérgio (2013), podemos encontrar a demonstração desta propriedade, usando (5).

3.5 – A razão entre dois termos consecutivos da sequência prateada tende para o número prateado quando n tende para infinito, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \delta. \tag{9}$$

Demonstração: Temos que $\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^n}{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}$, usando (7). Atendendo também que (7) é equivalente a $2\sqrt{2}\ P_n = (1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n$ e, portanto, que $(1+\sqrt{2})^n = 2\sqrt{2}P_n + (1-\sqrt{2})^n$, substituindo no limite a calcular, obtemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{(1+\sqrt{2})\left(2\sqrt{2}P_n + (1-\sqrt{2})^n\right) - (1-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}P_n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) + \lim_{n\to\infty} \frac{(1-\sqrt{2})^n\left((1+\sqrt{2}) - (1-\sqrt{2})\right)}{2\sqrt{2}P_n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = (1+\sqrt{2}) + \lim_{n\to\infty} \frac{(1-\sqrt{2})^n}{P_n}. \qquad (10)$$

Atendendo a que o mínimo do conjunto dos termos da sequência prateada é o número 1, temos que $\left|\frac{(1-\sqrt{2})^n}{P_n}\right| \leq \left|(1-\sqrt{2})^n\right| < 1$. Assim $\lim_{n\to\infty} \left|(1-\sqrt{2})^n\right| = 0$, e então concluímos que $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(1-\sqrt{2})^n}{P_n}\right| = 0$, o que implica que $\lim_{n\to\infty} \frac{(1-\sqrt{2})^n}{P_n} = 0$. Substituindo em (10), obtemos o pretendido.

❑

3.6 –Também

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n+1}} = \frac{1}{\delta}. \qquad (11)$$

Demonstração: Temos que $\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{P_{n+1}}{P_n}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n}}$ e, atendendo, a (9), de imediato obtemos o que pretendíamos mostrar.

❑

3.7 – A soma de dois termos consecutivos da sequência prateada é um número ímpar.

Demonstração: Atendendo a (8), temos que $P_n + P_{n+1} = 2(P_1 + P_2 + \ldots + P_{n-1} + P_n) + 1 = 2k + 1$, sendo k um inteiro positivo.

❑

3.8 – Qualquer que seja o número natural n, temos que

$$(P_{n+1})^2 = P_n P_{n+2} - (-1)^{n+1}. \qquad (12)$$

Demonstração: Utilizando (7), aplicada a produto $P_n P_{n+2}$ e a $(P_{n+1})^2$ obtemos respetivamente que:

$$P_n P_{n+2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 \left(\delta^n - \bar{\delta}^n\right)\left(\delta^{n+2} - \bar{\delta}^{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(\delta^{2n+2}-\left(\delta\bar{\delta}\right)^{n}\bar{\delta}^{2}-\left(\delta\bar{\delta}\right)^{n}\delta^{2}+\bar{\delta}^{2n+2}\right)$$

e

$$(P_{n+1})^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2\left(\delta^{n+1}-\bar{\delta}^{n+1}\right)^2=\frac{1}{8}\left(\delta^{2n+2}-2\left(\delta\bar{\delta}\right)^{n+1}+\bar{\delta}^{2n+2}\right).$$

Basta agora ter em conta que $\delta\bar{\delta}=-1$ e substituindo nas igualdades anteriores obtemos formas mais simplificadas:

$$P_nP_{n+2}=\frac{1}{8}\left(\delta^{2n+2}-(-1)^{n+1}\bar{\delta}^{2}-(-1)^{n+1}\delta^{2}+\bar{\delta}^{2n+2}\right)$$
$$(P_{n+1})^2=\frac{1}{8}\left(\delta^{2n+2}-2(-1)^{n+1}+\bar{\delta}^{2n+2}\right).$$

Subtraindo membro a membro e tendo também em conta que $\bar{\delta}^2=3-\sqrt{2}$ e que $\delta^2=3+\sqrt{2}$, obtemos

$$\begin{aligned}(P_{n+1})^2-P_nP_{n+2}&=\frac{1}{8}\left(-2(-1)^{n+1}+(-1)^{n+1}\bar{\delta}^{2}+(-1)^{n+1}\delta^{2}\right)\\&=\frac{3}{4}(-1)^{n+1}+\frac{1}{4}(-1)^{n+1}\\&=(-1)^{n+1},\end{aligned}$$

como pretendíamos mostrar.

❑

3.9 – A soma dos termos da sequência prateada com índice par é dada por:

$$P_2+P_4+P_6+\ldots+P_{2n}=\frac{1}{2}\left(P_{2n+1}-1\right). \qquad (13)$$

Demonstração: Vamos mostrar esta propriedade como aplicação da fórmula (4). Assim, usando (4) temos que

$$\begin{aligned}P_2+P_4+P_6+\ldots+P_{2n}&=\left(\frac{\delta^2-\bar{\delta}^2}{2\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{\delta^4-\bar{\delta}^4}{2\sqrt{2}}\right)+\ldots+\left(\frac{\delta^{2n}-\bar{\delta}^{2n}}{2\sqrt{2}}\right)\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\delta^2+\delta^4+\ldots+\delta^{2n}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\bar{\delta}^2+\bar{\delta}^4+\ldots+\bar{\delta}^{2n}\right)\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\delta^{2n+2}-\delta^2}{\delta^2-1}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\bar{\delta}^{2n+2}-\bar{\delta}^2}{\bar{\delta}^2-1}\right).\end{aligned}$$

Atendendo ao facto de que $\delta^2-1=2\delta$ e que $\bar{\delta}^2-1=2\bar{\delta}$, então substituindo na expressão anterior vem:

$$\begin{aligned}P_2+P_4+P_6+\ldots+P_{2n}&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\delta^{2n+2}-\delta^2}{2\delta}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\bar{\delta}^{2n+2}-\bar{\delta}^2}{2\bar{\delta}}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\delta^{2n+1}-\delta-\bar{\delta}^{2n+1}+\bar{\delta}\right)\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(\delta^{2n+1}-\bar{\delta}^{2n+1}\right)-\left(\delta-\bar{\delta}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\ (P_{2n+1} - P_1),$$

pelo que basta atender ao valor que inicial da sequência prateada para obtermos o resultado pretendido.

❑

3.10 – O número P_n é o número inteiro mais próximo do número $\frac{\delta^n}{2\sqrt{2}}$ e quando *n* cresce, a distância entre P_n e $\frac{\delta^n}{2\sqrt{2}}$ tende para zero.

Demonstração: Vamos mostrar que a distância entre P_n e $\frac{\delta^n}{2\sqrt{2}}$ é menor do que $\frac{1}{2}$. Para isso temos que $\left|P_n - \frac{\delta^n}{2\sqrt{2}}\right| = \left|\frac{\delta^n - \bar{\delta}^n}{2\sqrt{2}} - \frac{\delta^n}{2\sqrt{2}}\right| = \frac{|\bar{\delta}^n|}{2\sqrt{2}} = \frac{|\bar{\delta}|^n}{2\sqrt{2}}$. Como $|\bar{\delta}| < 1$ então concluímos que $\frac{|\bar{\delta}|^n}{2\sqrt{2}} < \frac{1}{2\sqrt{2}} < \frac{1}{2}$.

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{\bar{\delta}^n}{2\sqrt{2}} = 0$, temos que $\lim_{n\to\infty} \left|P_n - \frac{\delta^n}{2\sqrt{2}}\right| = 0$.

❑

4. Alguns desafios a propor aos nossos jovens usando a sequência prateada

O número $\sqrt{2}$, pode sugerir-nos um desafio interessante envolvendo um pouco de História da Matemática no Ensino. Assim deixamos uma primeira sugestão:

Desafio 1: Envolver os nossos jovens numa pesquisa acerca da irracionalidade deste número. Tal pesquisa envolverá História da Matemática que, na nossa opinião, deverá fazer sempre parte do nosso ensino.

Também podemos trabalhar a construção de números com régua e compasso, com o desafio que apresentamos a seguir:

Desafio 2: A partir do triângulo assinalado na Figura 1, construir com régua e compasso os números δ e $\bar{\delta}$ usando régua e compasso. Podemos ainda construir mais números a partir destes. Representar os números na reta numérica, estabelecida uma medida de comprimento.

Neste texto, já foram referidas (e foram usadas nas demonstrações de algumas das propriedades apresentadas) algumas das relações que podemos encontrar entre potências de δ e de $\bar{\delta}$
No caso do número prateado, é fácil mostrar que:

$$\delta^0 = 1;$$
$$\delta^1 = \delta = 1 + \sqrt{2};$$
$$\delta^2 = 2\sqrt{2} + 3 = 2\delta + 1;$$

$$\delta^3 = \delta(2\delta + 1) = 5\delta + 2;$$
$$\delta^4 = (2\delta + 1)(2\delta + 1) = 12\delta + 5$$
$$\vdots$$

permitindo concluir que a potência de ordem n ($n \geq 0$) é dada por

$$\delta^{n+2} = 2\delta^{n+1} + \delta^n. \tag{14}$$

Mostremos por indução em n que a relação (14) é verdadeira para todo o n. Para n = 0, temos que $\delta^2 = 2\delta + 1 = 2\delta + \delta^0$ e para n = 1, obtemos que $\delta^3 = 5\delta + 2 = \delta(2\delta + 1) = 2\delta^2 + \delta$. Suponhamos agora que a relação (14) é verdadeira para n e mostremos que continua a ser verdadeira para n + 1. Temos então que $\delta^{n+1} = \delta\delta^n = \delta(2\delta^{n-1} + \delta^{n-2}) = 2\delta^n + \delta^{n-1}$, como pretendíamos mostrar.
A potência de ordem n do número prateado depende de duas das suas potências anteriores, tal como acontece na sequência de *Fibonacci*.

Desafio 3: À semelhança das relações existentes entre as potências do número prateado também podemos trabalhar com os nossos jovens as relações entre as potências do seu conjugado. Podemos trabalhar as operações algébricas com potências, focando as propriedades básicas a ter em conta. Deduzir uma expressão geral análoga a (14) para as potências de $\bar{\delta}$.
A título de curiosidade, notemos ainda que

$$\delta + \bar{\delta} = 2,\ \delta - \bar{\delta} = 2\sqrt{2},\ \delta \times \bar{\delta} = -1$$

e que

$$\frac{\delta}{\bar{\delta}} = -\,\delta^2.$$

Também temos que

$$\bar{\delta}^2 = 3 - \sqrt{2} = 2\bar{\delta} + 1,\ \frac{1}{\bar{\delta}} = -\,\delta \text{ e } \frac{1}{\delta} = -\,\bar{\delta}.$$

De seguida, vamos apresentar uma interessante ligação do número prateado com a trigonometria, verificando que podemos encontrar este número no valor do seno, cosseno e tangente de um determinado ângulo – nomeadamente, o ângulo de $\frac{\pi}{8}$ radianos, equivalente a 22,º5. Este aspeto da ligação do número prateado com a trigonometria também se encontra abordado no *website* de autoria de Kilhian (2013). Atendendo a uma conhecida fórmula trigonométrica, $(\sin\alpha)^2 = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$, obtemos, para o caso particular de $\alpha = \frac{\pi}{8}$, que

$$\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2 = \frac{1-\cos(\frac{\pi}{4})}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} = \frac{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{4(2+\sqrt{2})} = \frac{1}{2(2+\sqrt{2})} = \frac{1}{2(1+\delta)}.$$

Assim podemos afirmar que:

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2(1+\delta)}} \tag{15}$$

A partir desta expressão, usando a fórmula fundamental da trigonometria, podemos chegar à expressão para $\cos\frac{\pi}{8}$ e, consequentemente, para $\tan\frac{\pi}{8}$, em termos do número prateado. Assim concluímos que:

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{1+\delta}}{2} \tag{16}$$

$$\tan\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{1+\delta} \tag{17}$$

Estas expressões vão permitir relacionar a área de um octógono regular com o número prateado, assunto a que já é feito referência no *website* de Kilhian (2013). Para tal, consideremos então a seguinte figura

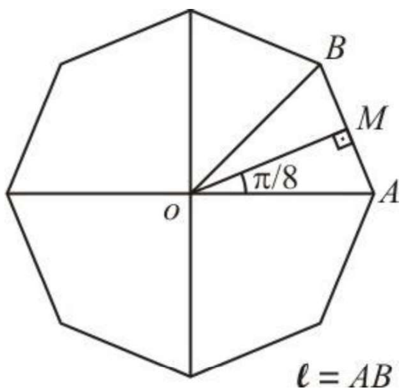

Figura 2: Octógono regular[58]

onde temos, um octógono regular no qual destacamos um triângulo retângulo de vértices O, B e A. Notemos que temos que o ângulo ∢AOB tem uma amplitude igual $\frac{\pi}{4}$ radianos e sendo M o ponto médio do segmento de reta [AB] temos que o ângulo ∢AOM tem amplitude igual a $\frac{\pi}{8}$. Então, como o triângulo $\triangle$[AMO] é um triângulo retângulo em M, temos que $\tan\frac{\pi}{8} = \frac{l}{2\overline{OM}}$, sendo *l* a medida do comprimento do segmento de reta [AB]. Atendendo a (17) obtemos então que a medida do comprimento do segmento [OM] é dado por $\overline{OM} = \frac{l(1+\delta)}{2\sqrt{2}}$. Reparemos que um octógono é formado por 8 triângulos iguais ao triângulo $\triangle$[AOB]. Como a área do triângulo $\triangle$[AOB] é igual a

[58] Imagem retirada de http://www.google.pt/search?hl=pt-PT&q=hipaso+de+metaponto+biografia&bav=on.2,or.r_qf.&bvm=bv.45645796,d.d2k&biw=1024&bih=509&um=1&ie=UTF-8&tbm=isch&source=og&sa=N&tab=wi&ei=1dB6UYbYN6iJ7Abp2YD4DA#um=1&hl=pt-PT&tbm=isch&sa=1&q=octogono+regular&oq=octogono+regular&gs_l=img.3..0j0i24l3.56104.60854.12.63510.16.16.0.0.0.0.344.1953.10j4j0j2.16.0...0.0...1c.1.11.img.zqvOVG3CP-Q&bav=on.2,or.r_qf.&bvm=bv.45645796,d.ZGU&fp=276e75c12b363e28&biw=1024&bih=509&imgrc=zYq87ZwLxHsoFM%3A%3Bbpi9twSQ44Q1OM%3Bhttp%253A%252F%252Flh3.ggpht.com%252F_Qmjqb2Gk9no%252FTTLnapaC7ZI%252FAAAAAAAALSM%252FURZPDZrp3CA%252FOctogono%252520Regular_thumb%25255B1%25255D.jpg%253Fimgmax%253D800%3Bhttp%253A%252F%252Fobaricentrodamente.blogspot.com%252F2011%252F01%252Fo-numero-prateado-e-area-do-octogono.html%3B279%3B268, no dia 27 de abril de 2013.

$$\frac{base \times altura}{2} = \frac{\overline{AB} \times \overline{OM}}{2} = \frac{l \times \frac{l(1+\delta)}{2\sqrt{2}}}{2} = \frac{l^2(1+\delta)}{4\sqrt{2}}.$$

Concluímos então que a área A do octógono regular e dada pela expressão:

$$A = 8 \times \left(\frac{l^2(1+\delta)}{4\sqrt{2}} \right) = \frac{2l^2(1+\delta)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\, l^2(1+\delta) = 2l^2\delta.$$

Temos então a expressão da área de um octógono regular em termos do número prateado e da medida de cada lado deste polígono regular. De imediato deixamos mais um desafio:

<u>Desafio 4</u>: Investigar (se existem) mais ligações do número prateado com outros conteúdos matemáticos.

Por exemplo e uma resposta ao desafio anterior é a ligação do número prateado com a área de um outro polígono regular. Assim, inspirando-nos neste processo, também podemos ainda investigar mais uma ligação do número prateado com a área e o perímetro de um quadrado inscrito numa circunferência. No caso que apresentamos a seguir está em causa um outro ângulo conhecido da trigonometria, o ângulo de 45º do qual são conhecidos os valores do seno e cosseno. Com efeito, consideremos um quadrado

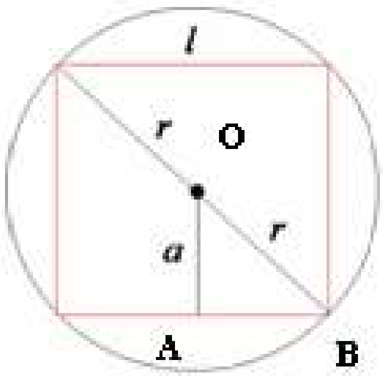

Figura 3[59]**:** quadrado de lado *l* inscrito numa circunferência de raio *r*

de lado medindo l (Figura 3). Reparemos que o ângulo $\measuredangle$ AOB mede $\frac{\pi}{4}$ radianos e que é bem conhecido da trigonometria que $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Então, em termos do número prateado, $\sin\frac{\pi}{4}$

[59] Imagem adaptada de http://www.google.pt/search?hl=pt-PT&site=imghp&tbm=isch&source=hp&biw=1024&bih=509&q=quadrado+inscrito+numa+circunfer%C3%AAncia+de+raio+r&oq=quadrado+inscrito+numa+circunfer%C3%AAncia+de+raio+r&gs_l=img.3...1423515.1438609.0.1439187.47.11.0.36.36.0.360.1375.7j2j1j1.11.0...0.0...1ac.1.11.img.Y_IRtc9pVEY#imgrc=myC3x4wzGeG4NM%3A%3BOQ4Qc-N_d-m86M%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.brasilescola.com%252Fupload%252Fe%252FUntitled-11(48).jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.brasilescola.com%252Fmatematica%252Fpoligonos-regulares-circunferencia.htm%3B349%3B340, consultada no dia 27 de abril de 2013.

$= \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\delta-1}{2}$ e, portanto, sendo também $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\overline{AB}}{r}$, concluímos que $\frac{\delta-1}{2} = \frac{\overline{AB}}{r}$, o que implica que $\overline{AB} = \frac{r(\delta-1)}{2}$. Logo, $l = 2\overline{AB} = r(\delta - 1)$ e assim temos que o perímetro $P_{\square}$ do quadrado considerado é igual a

$$P_{\square} = 4l = 4\,r(\delta - 1)$$

e a área do mesmo quadrado tem a expressão dada por

$$A_{\square} = l^2 = r^2(\delta - 1)^2.$$

Nota: as expressões encontradas para $\sin\frac{\pi}{4}$ e para $\cos\frac{\pi}{4}$ em termos do número prateado, também podiam ter sido derivadas das igualdades (15) e (16) usando as bem conhecidas fórmulas do seno e cosseno do duplo ângulo, já que $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$.

Deixamos aqui uma exemplificação do que acabamos de mostrar.

Exemplo 1: Consideremos um quadrado inscrito numa circunferência de raio $r = 5cm$. Neste caso, de imediato concluímos que este quadrado tem $4 \times 5 \times \sqrt{2}$ *cm* de perímetro e 50 cm^2 de área. Reparemos que este quadrado tem de lado $l = \sqrt{2}\ r\ cm$, pelo que concluímos que $l = 5\sqrt{2}$ *cm* e, portanto, $P_{\square} = 20\sqrt{2}$ *cm* e $A_{\square} = 50\ cm^2$, valores coincidentes com os anteriormente calculados.

O mesmo pode ser pensado para o conjugado do número prateado. Deixamos então o último desafio:

<u>Desafio 5</u>: Investigar (se existem) mais ligações do conjugado do número prateado com medidas de área e de perímetro de polígonos regulares.

Considerações finais

Somos de opinião de que um professor deve procurar sempre utilizar material diversificado para ensinar os diferentes temas e conteúdos matemáticos integrados nos programas.

As sequências de números constituem um grande potencial que pode ser usado em ambiente de sala de aula para com elas e com as suas propriedades podermos contribuir para melhorar e enriquecer o ensino da matemática. Precisamos apenas de ser capazes de as integrar nas finalidades e objetivos do ensino da matemática e dos conteúdos a ensinar.

Ensinar matemática é, sem dúvida um grande desafio, pois todos os dias devemos proporcionar aos nossos alunos experiências diversificadas e enriquecedoras, que os levem a ter uma atitude positiva perante os tópicos em estudo. Foi com este espírito que apresentamos alguns desafios, que esperamos venham a ser motivadores para os professores os experimentarem em sala de aula e criarem outros a partir dos aqui propostos.

Fica então mais este desafio…

Referências

ALENCAR, FILHO. E., **Teoria Elementar dos Números**. São Paulo: Livraria Nobel, 1989.

BALAKRISHNAN, V. K., **Introductory Discrete Mathematics**. New York: Dover Publications, Inc., 1996.

CALDWELL, C. K. ; KOMATSU, T. (2010). Some Periodicities in the Continued Fraction Expansions of Fibonacci and Lucas Dirichlet Series. *Fibonacci Quart*. **48**, no. 1, 47–55.

GUSMÃO, G. de A. P. (2003). A sequência de Fibonacci. *Revista da olimpíada* – IME – UFG, nº 4, pp.55-71.

HOGGATT, V. E. **Fibonacci and Lucas Numbers**. A publication of the Fibonacci Association. University of Santa Clara, Santa Clara. Houghton Mifflin Company, 1969.

KILHIAN, K. O Baricentro da Mente. A Matemática em seus Neurónios. Disponível em: <http://obaricentrodamente.blogspot.pt/2011/01/o-numero-prateado-e-area-do-octogono.html >. Acesso em: abril. 2013.

KOCH, H. **Algebraic Number Theory**. 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1997.

LANDAU, E. **Elementary number theory**. Ams Chelsea Publishing, American Mathematical Society – Providence, Rhode Island, 1999.

LAURO, M. M. (2005). A razão áurea e os padrões harmónicos na natureza, artes e arquitetura. *Exacta*, São Paulo, V. **3**, 35-48.

MARQUES, D. (2013). The Order of Appearance of the Product of Consecutive Lucas Numbers, *Fibonacci Quart*. **51**, no. 1, 38–43.

PALHARES, P. **Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico**, Lisboa: LIDEL – Edições Técnicas, Lda., 2004.

SÉRGIO, P. Fatos Matemáticos. Disponível em: <http://fatosmatematicos.blogspot.pt/2011/01/algumas-propriedades-da-sequencia.html>. Acesso abril. 2013.

SHATTUCK, M. (2013). Combinatorial Proofs of Determinant Formulas for the Fibonacci and Lucas Polynomials. *Fibonacci Quart*. **51**, no. 1, 63–71

SUNG, V. S. H. (2012). **Sequência de Fibonacci e suas Aplicações**. Trabalho de conclusão do curso B da Licenciatura em Matemática. Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

VOROBIOV, N. N. **Números de Fibonacci**, Editora MIR, URSS, 1974.

WILBERSTAEDT, G. (2004). **As formas e os números da natureza**. Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática, como requisito à obtenção do título de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis.

Paula Catarino
Departamento de Matemática da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro - Portugal
Centro de investigação da Universidade do Minho - Portugal

E-mail: pcatarin@utad.pt