O desenvolvimento da álgebra e a escola italiana Renascentista

Le développement de l'algèbre et l'ecole de la Renaissance italienne

Jefferson Leandro Ramos de Oliveira
Erika Monik A. de M. Ramos de Oliveira
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN – Brasil

RESUMO

Este artigo nasceu da necessidade de revisitar os acontecimentos no tocando ao desenvolvimento da Álgebra, em particular, aquela que emergiu durante o renascimento italiano, em busca de melhor compreender o contexto do surgimento das resoluções de equações de terceiro e quarto grau. As informações contidas no Artis Magnae, de Girolamo Cardano, relacionando esse período intelectualmente fértil à fatores históricos, sociais e culturais, não esquecendo a devida influência dos mercadores das repúblicas marítimas italianas, servem como fio condutor durante este estudo.

Palavras-chave: Equações algébricas de terceiro e quarto grau, Artis Magnae, Matemática italiana.

RESUME

Cet article est née de la nécessité de revenir sur les événements qui ont eu lieu au cours du développement de l'algèbre, en particulier, que c'est apparu au cours de la Renaissance italienne, à la recherche d'une meilleure compréhension du contexte de l'émergence des résolutions des équations du troisième et quatrième degré. Les informations contenues dans l'Artis Magnae, Jérôme Cardan, concernant cette période intellectuellement fertile à des facteurs historiques, sociaux et culturels, sans oublier la bonne influence des marchands des républiques maritimes italiennes, servent le leitmotiv de cette étude.

Mots-clés: Équations algébriques du troisième et quatrième degré, Artis Magnae, Mathématiques italiennes.

1. Introdução

O termo Renascimento foi empregado pela primeira vez em 1855, pelo historiador francês Jules Michelet[19] (1798-1874), ao se referir ao descobrimento do mundo e do homem. Alguns anos depois, o historiador suíço Jacob Burckhardt[20] (1818-1897), ampliou este conceito definindo a época como o renascimento da humanidade e da consciência moderna, após um longo período de decadência.

Foram cerca de duzentos anos caracterizados pela restauração dos valores do mundo clássico, ou por um renovado interesse pelo passado Greco-romano, renovação essa que veio acompanhada de uma ideia fundamental: a ruptura cultural com a tradição medieval. Embora, devemos salientar que o processo não se deu de forma abrupta. Pois, a sociedade medieval tinha suas bases alicerçadas numa hierarquia consagrada pela instituição religiosa, na qual cada indivíduo ocupa o lugar que Deus lhe havia predeterminado. A tentativa de se rebelar contra essa situação social, equivalia a se voltar

[19] MICHELET, J.. **Histoire de France au XVIe siècle**: Renaissance. Paris: Chamerot, 1855.
[20] BURCKHARDT, J.. **La civilisation de la Renaissance en Italie**. Genebra: Gonthier, 1958.

contra a vontade divina. Logo, a caminhada em direção ao humanismo seria um processo lento, porém inevitável.

Com a invenção da imprensa, no século XV, os indivíduos foram surpreendidos ao verem uma mesma obra, com suas características originais (gravuras, topografia, etc.) mantidas, ser duplicado em quantidades e num espaço de tempo inconcebíveis para época. Isto permitiu uma maior acessibilidade ao conhecimento e as ideias produzidas. E próximo ao final do século XV, as primeiras Álgebras cristãs[21] eram impressas.

Embora o Ocidente tenha começado a tomar conhecimento dos tratados árabes no século XII, graças a suas traduções para o latim, ainda nessa época de transição, a Matemática árabe era muito superior àquela produzida na Europa e, a partir do início do século XIII, os tratados árabes começaram a se difundir na Itália, com maior intensidade. Todavia, a crença na relação entre o mundo islâmico e o profano, e o desprezo dos humanistas para com as culturas árabes e escolásticas, dificultaram o processo.

Com a chegada do século XVI inicia-se um período de desenvolvimento da atividade intelectual, com a mente humana esforçando-se para alcançar a sua liberdade. Tentativas dessa natureza, em busca de uma emancipação frente ao autoritarismo eclesiástico já haviam surgido em outras épocas, mas foram sumariamente rechaçadas. Foi preciso que a Alemanha (Império Prussiano), com a prática de julgar com liberdade e independência as questões de religião, procedidas e acompanhadas pelo florescente espírito de pesquisa científica, desce a luz a nomes como Regiomontanus[22, 23] (1436-1476), Nicolau Copérnico (1473-1543) e Johannes Kepler (1571-1630), entre outros. Este fato, em parte, deve-se a prosperidade comercial daquela região, já que riqueza material é uma condição essencial para o progresso do conhecimento, pois sem ela, o individuo é obrigado a procurar meios para sua subsistência (não sobrando tempo para o seu ócio produtivo). Nesta época, estreitas relações comerciais existiam entre Alemanha e Itália, que, também, prosperara com a atividade e empreendimentos comerciais. (CAJORI, 2007).

Neste contexto, como exemplo de meio dispersador e receptor de cultura e conhecimento, podemos citar Veneza, cujo prestígio teve início com as cruzadas, ou, ainda, Florença, com seus banqueiros e sua manufatura de seda e lã, e que por essa razão tornaram-se grandes centros econômicos e intelectuais. E é durante este período, de renascimento, com relativa estabilidade política e prosperidade econômica, que a Itália, ou melhor, os Matemáticos italianos, tiveram as condições ótimas, e não mediram esforços para buscar resultados, anteriormente tidos como impossíveis.

O objetivo deste artigo é evidenciar os avanços da Álgebra renascentista italiana, enfatizando àqueles desenvolvidos no século XVI, e em particular, as informações contidas no *Artis Magnae*, de Cardano, relacionando esse período intelectualmente fértil a fatores

[21] Entenderemos "Álgebra cristã", como aquela Álgebra produzida em solo ou por indivíduos com crença cristã.

[22] Johannes Müller von Königsberg, mais conhecido pelo seu pseudônimo latino Regiomontanus, foi um astrônomo, matemático e astrólogo alemão. Seus tratados (entre eles, *De triangulis omnimodis*, 1464) e seus comentários ao Almagesto (séc. II), de Cláudio Ptolomeu, datam da origem da renascença da trigonometria na Europa. Embora tenha publicado, em 1464, *De triangulis omnimodis*, um notável tratado sobre trigonometria que marcou o renascimento deste ramo da matemática na Europa, sua obra só seria impressa definitivamente no século seguinte, em 1533.

[23] REGIOMONTANUS, J.. **De triangulis omnimodis libri quinque**. Nuremberg: Petreium, 1553.

históricos, sociais e culturais, não esquecendo da devida influência dos mercadores das repúblicas marítimas italianas.

2. A Matemática como uma expressão histórica, social e cultural humana

Partiremos do pressuposto de que a Matemática é um saber gerado pela sociedade e, por essa razão, é detentora de uma história. Poderíamos pressupor também que, esse mesmo saber, de maneira não linear e ao longo do tempo, se amplia em conteúdo, escrita e simbologia, embora, marcado por controvérsia, divergências, debates acalorados e renovações incessantes. Neste sentido, a produção de conhecimento matemático, no decorrer de sua história, caracteriza-se por uma constante criação e organização formal de códigos representativos da interpretação de situações sociais vivenciadas cotidianamente (modelos), passando a ser considerado, em algum momento, um conhecimento verdadeiro. Assim, é de suma importância, ao risco de estagnarmos esta marcha, que possamos cada vez mais a discutir o processo gerativo da construção do saber/fazer matemático.

Conforme Mendes (2006), historicamente as matemáticas socialmente construídas foram difundidas culturalmente, mantidas vivas por estudiosos da área, sendo selecionadas e reorganizadas de acordo com as necessidades da ciência, e armazenadas posteriormente em textos de divulgação científica ou em manuais escolares. Esse percurso histórico, entretanto, permite-nos estabelecer um dialogo entre o conhecimento aprendido e disseminado mecanicamente, a memória da prática manipulativa que utiliza os objetivos matemáticos, os textos e documentos, os relatos da prática e outros registros, de um modo geral, que os armazenam para torná-los públicos.

Partindo dessa realidade, é possível utilizarmos as matemáticas produzidas por outros povos, e em outras épocas, para produzirmos novas matemáticas, compará-las com a produção anterior e ampliar o corpo de conhecimento pré-existente. Este processo implica armazenar, selecionar e dispor das informações matemáticas conforme as necessidades configuradas em diferentes contextos e épocas, o que perpassa a produção sociocultural de cada sociedade. Neste contexto, percebemos que o indivíduo não é um mero observador passivo e, por essa razão, sempre acrescenta suas impressões ao conhecimento experienciado, nos permitindo concluir que o conhecimento produzido, está impregnado com a subjetividade inerente ao contexto sociocultural de quem o produz.

3. Prelúdio: o ressurgimento da Matemática na Itália

Por volta do ano 967, um beneditino francês conhecido como Gerbert d'Aurillac (950-1003) estudou na Espanha islâmica e ali familiarizou-se com a Astronomia e a Matemática árabe, e em particular, com o sistema de numeração por eles trazido da Índia. Ele ignorava a língua grega, como quase todos os letrados ocidentais de sua época, mesmo assim, d'Aurillac fez prova de um excepcional apetite pelo saber, ao aperfeiçoar seu conhecimento da cultura antiga, por intermédio de Virgílio, das traduções latinas de Aristóteles(384 a.C.-322 a.C.) e de Porfírio de Tyr ([ca. 234]-[ca. 305]), e as obras de Marco Túlio Cícero (106 a.C. - 43 a.C.), e sobretudo, de Anício Mânlio Torquato Severino Boécio ([ca. 480]-[524 ou 525]), para só então iniciar-se à Aritmética. Ele percebeu a numeração decimal (sem o zero) anotada em algarismos de Ghubar, no *Codex Vigilanus*, datado de 976 e proveniente do monastério aragonês de Albelda. Esses algarismos eram utilizados por muitos mercadores árabes em Barcelona. Foi assim que, libertado dos algarismos romanos, ele pôde então abordar os cálculos práticos e imaginar uma tábua de contagem, conhecida como *l'abaque de Gerbert* (o ábaco de Gerbert), mecanismo que sistematizou o princípio da numeração posicional e o procedimento do cálculo matricial de nossas quatro operações, etc. De retorno à Europa, d'Aurillac se tornou bispo de Rheims, na França, arcebispo de Ravena, na Itália, e por fim, Santo Papa da Igreja Católica Apostólica Romana, sob o nome de Silvestre II, o único matemático até hoje a ocupar o trono do São Pedro. Mesmo detentor deste poderoso título, e embora tenha estimulado o ensino da Matemática e tentado promover a substituição dos inadequados algarismos romanos, pelos indo-arábicos, foi impedido pelo colégio de cardeais que, consideravam "feitiçaria satânica" todo o que era oriundo do mundo islâmico.

Figura 01 – Mapa da Itália por volta do séc. X
Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Italia_1494-es.svg.

Algumas décadas depois, um erudito inglês, de nome Adelard de Bath (1075-1160), ao viajar por vários países do mundo islâmico, conseguiu contrabandear consigo uma cópia dos Elementos de Euclides em Árabe, tabelas astronômicas compiladas por al-Khwarizmi e informações detalhadas sobre o sistema indo-arábico de numeração. Após traduzir para o Latim tudo o que trouxera, Bath colocou o seu país em contato com a esquecida

Matemática grega e com as facilidades do pouco conhecido sistema de numeração indo-arábico (GARBI, 2009).

Foi nesse período de efervescência econômica, cultural e política, que viveu um dos mais proeminentes matemáticos europeus da Idade Média. Nascido em Pisa, Itália, foi educado em grande parte na cidade portuária de Bejaia, na Argélia, onde seu pai, Guglielmo Bonacci ([11--]-[12--?]) era o representante dos mercadores da República de Pisa, Veneza e Gênova. Na época, Bejaia era um importante centro comercial e intelectual, permitindo a Leonardo Bonacci de Pisa ([ca. 1175]-[ca. 1250]), também conhecido como Leonardo Fibonacci (filho de Bonacci), dar início a sua educação em matemática, e onde teve acesso aos trabalhos algébricos de Al-Khwarizmi. Tendo também viajado para o Egito, a Síria e a Sicília, Grécia, Sul da França e Constantinopla, pôde ter contato com vários matemáticos, ter acesso a uma diversidade conhecimentos, e estudar vários dos sistemas aritméticos então existentes. Isto ilustra os vínculos existentes entre a vitalidade comercial das cidades italianas da época, a criatividade científica e artística de seus membros. Em 1198, Fibonacci retorna à Pisa, e trás consigo os algarismos arábicos e notação algébrica (que alguns atribuem à introdução de Gerbert d'Aurillac). Em 1202, Fibonacci publica a sua primeira obra, o *Liber Abaci*, sendo, também a primeira obra produzida por cristãos a tratar sobre a Álgebra. Nela, ele descreve o sistema numérico indo-arábico, se dedicando intensamente ao tratamento das questões aritméticas. Convencido de que o método indo-arábico era o mais eficiente, passou a dedicar seus esforços a transmiti-lo a seus compatriotas italianos, o afastou totalmente das atividades comerciais de sua família. Esta terceira tentativa de introdução do novo sistema na Europa foi bem sucedida, porque a obra de Fibonacci foi bem difundida e sua ideias tiveram ampla aceitação na Itália. Foi desta forma que os algarismo indo-arábicos começaram a expulsar da Aritmética, em 1202, os desconfortáveis algarismos romanos. (BOYER, 1996; CAJORI, 2007; GARBI, 2009).

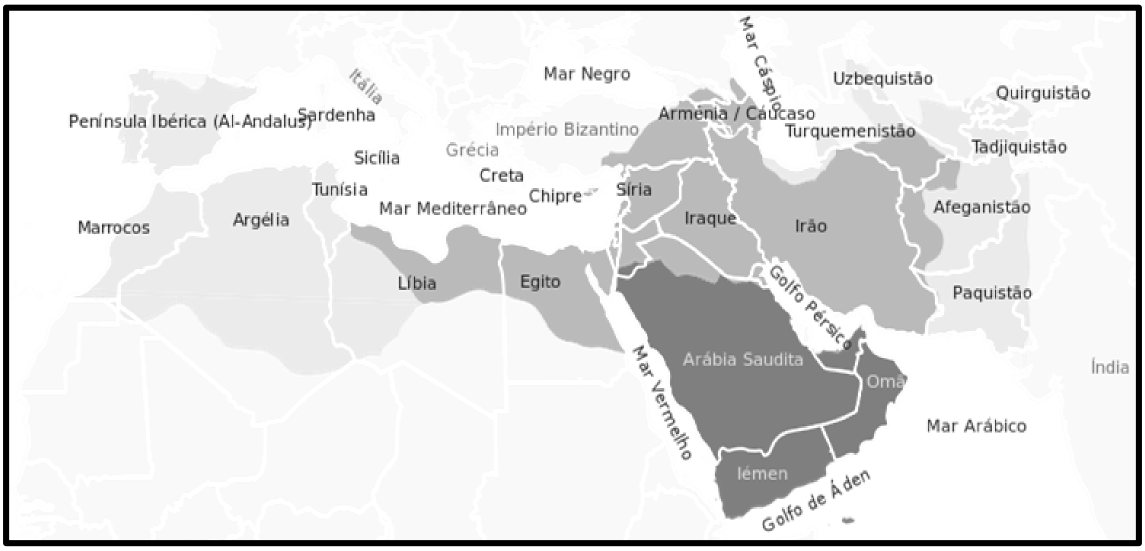


Figura 02 – Mapa do Mundo islâmico por volta do século X.
Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/50/Map_of_expansion_of_Caliphate-pt.svg.

4. O comercio, práticas sociais e as matemáticas renascentistas

Como ressalta Radford (2011), no período da Baixa Idade Média e da Renascença Ocidental, a matemática era basicamente instrumental, e voltada para a criação de novas formas de entender o mundo. A experiência comercial, deste período, fomentou a crença dos mercadores de que tudo tem uma causa, e foi através desses entendimentos emergentes que, eles perceberam que dados preciosos e completos são imprescindíveis para prever o futuro. Essa nova maneira racionalista de pensar, sustentada pela crescente sofisticação dos métodos matemáticos, é, por exemplo, abertamente declarada em um manuscrito florentino do século XIV, intitulado Conselho aos Mercadores.

Ainda, segundo Radford (2011, p. 233),

> Aqui estamos interessados em sensibilidade em termos de capacidade para criar novas formas de entendimento e novas formas de subjetividade. Nesta linha de raciocínio, é importante enfatizar que a matemática derivada de práticas sociais comerciais [...], não permaneceu confinada ao mundo dos mercadores ou das escolas de ábaco. Progressivamente, durante a Baixa Idade Média e a Renascença, a Matemática penetrou as várias esferas da vida cotidiana e ofereceu aos indivíduos novos modos de ação e formas de entender o mundo. É claro, nem todos tornaram-se mercadores ou matemáticos profissionais [...]. O que queremos ressaltar é que o conhecimento matemático veio a mediar a relação entre os indivíduos e sua cultura em mais de um aspecto [...].

Segundo o crítico de arte Michael Baxandall (1972 apud RADFOD, 2011, p. 233-234),

> existe algo em comum entre as habilidades cognitivas trazidas tanto para as parcerias ou problemas de troca e para a concepção e apreciação de imagem. A proporcionalidade daquela e o design baseado na perspectiva desta são expressões da mesma sensibilidade cultural, a diferença sendo que um é direcionado a questões comerciais e numéricas enquanto o segundo é direcionado à experiência visual. Porque as pessoas dos centros urbanos eram familiarizadas, mesmo que perifericamente, com os atos de trocar, comprar, medir, vender seu trabalho, etc., em termos proporcionais, elas eram sensíveis a imagens que carregavam processos similares [...]. Assim como havia muito mais uso de proporcionalidade e da Regra de Três em transações comerciais nos mercados do Quattrocento[24] de que houvera em épocas anteriores, da mesma maneira havia [...], muito mais ângulos retos, [...] linhas retas e [...] sólidos regulares em pinturas do período Quattrocento do que existem na natureza ou de que houvera anteriormente na pintura.

5. A história da Matemática algébrica: entre engenhosidades e novelas renascentistas

A mais antiga álgebra da Renascença, é a *Triparty em la science dês mombres*, do francês Nicolas Chuquet ([entre 1445 e 1455]-[1487 ou 1488]), datada de 1484, mas a álgebra mais conhecida desse período foi publicada dez anos depois na Itália. A obra do

[24] Refere-se aos eventos culturais e artísticos do século XV na Itália. Engloba tanto o final da Idade Média quanto o começo do Renascimento. (idem, p. 234).

frade toscano Luca Pacioli[25] (1445-1514) serviu de base, para a grande parte dos trabalhos desenvolvidos pelos matemáticos do século XVI. Ele elaborou – apoiando-se em alguns momentos no tratado de Leonardo de Pisa – a *Summa de arithmetica, geometrica, proporcioni et proportionalita* que circulou, pela primeira vez, em Veneza, em 1494. Esta obra obscureceu tanto a de Chuquet que, as exposições históricas mais antigas da álgebra desconsideram esta última ou a de outros autores de período intermediário, saltando do *Liber abaci*, de 1202, para o *Summa*, de 1494 (BOYER, 1996; CAJORI, 2007).

No entanto, o caminho para a obra de Pacioli tinha sido preparado por uma geração de algebristas, pois a Álgebra de al-Khowarizmi foi traduzida para o italiano ao menos por volta de 1464, a data de uma cópia manuscrita na Plimpton Collection em Nova York. O autor desse manuscrito, afirma que baseou sua obra em numerosos predecessores nesse campo, citando por nome alguns do século quatorze. Neste contexto, supõem-se com frequência que o renascimento na ciência foi resultado da recuperação de obras gregas antigas, mas na matemática ele se caracterizou principalmente pelo surto da álgebra, e isso era apenas uma continuação da tradição medieval.

A *Summa de arithmetica, geometrica, proporcioni et proportionalita* de Pacioli, teve influência superior à sua originalidade, embora seja uma notável compilação (com fontes de informação geralmente não indicadas) de material em quatro campos: aritmética. Álgebra, geometria euclidiana muito elementar, e contabilidade comercial. Pacioli durante algum tempo fora professor dos filhos de um rico comerciante de Veneza e sem dúvida estava ciente da crescente importância da aritmética comercial na Itália. A obra de Pacioli, assim como o Triparty, foi escrita em língua vernácula, e era um resumo de obras não publicadas, que ele escrevera anteriormente, bem como do conhecimento geral da época. A parte sobre aritmética se ocupa de processos para multiplicação e extração de raízes quadradas. Já a secção sobre álgebra inclui a resolução usual de equações lineares e quadráticas, o uso crescente de sincopação por abreviação. Pacioli julgava que as equações cúbicas não podiam ser resolvidas algebricamente (BOYER, 1996).

Até o final do século XV, as mentes dedicadas às matemáticas só foram capazes de resolver as equações determinadas dos dois primeiros graus, com algumas das equações derivativas dependentes, não se tinha, ainda, considerado as raízes negativas ou imaginárias, e muito mal, vislumbrado, a multiplicidade de raízes.

Devemos aos esforços dos algebristas italianos do século XVI que, enquanto a ciência ainda se encontrava engatinhado, desenvolveram a concepção do cálculo dos imaginários e a resolução das equações gerais do terceiro e quarto grau. A resolução destas equações foi uma descoberta notável que dependeu a criação de novos métodos e estratégias. Ironicamente, aquele que foi responsável pela primeira resolução, ao falecer, levou consigo os detalhes relacionados ao seu método. Este homem foi Scipione del Ferro[26] (1465-1526), professor de matemática da Universidade de Bologna que, por volta de 1515, resolveu algebricamente a equação cúbica

$$x^3 + ax = b,$$

[25] Na *Summa de arithmetica, geométrica, proportioni et proportionalita*, o autor se nomeia Frater Lucas de Borgo Sancti Sepulchri; já na primeira dedicatória da *Divina proportione*, ele se chama Frater Lucas Patiolus Burgensis, e na segunda, apenas, Lucas Pacioli. (tradução nossa de LIBRI, 1840, p133).

[26] Seu nome também aparece grafado como *Scipion* e *Scipio*, e ainda, *Ferri*, *Ferreo* e *Ferreus*.

baseando-se, provavelmente, em fontes árabes, e que ficou conhecida como "cubos e coisas iguais aos números". Embora, não tenha jamais publicado o seu resultado, revelou o seu método aos seus discípulos Annibale della Nave ([14--]-[15--]), seu enteado, e Antonio Maria Fior[27] ([14--]-[15--]), um veneziano que, em posse desta valiosa informação, passou a participar de desafios (concursos) matemáticos, muito populares na época.

Quando em 1512, tropas os franceses invadiram a Itália e tomaram a pequena cidade de Bréscia, seus habitantes indefesos refugiaram-se na catedral, o que não foi suficiente para evitar uma posterior chacina. Na manhã do dia 19 de fevereiro, depois da parta arrombada, soldados com espadas em punho partiram de assalto contra civis desarmadas. Entre os cadáveres abandonados no local, estava um jovem de 12 anos, ainda vivo. Com muitos ferimentos na cabeça, mutilado e sangrando muito, foi salvo por sua mãe que, extremamente pobre e sem recurso algum, procurou ajudar seu filho lambendo seus ferimentos, e assim salvou-lhe a vida. Devido às horríveis experiências, a criança ficou muda por cerca de seis meses e todos pensaram que fosse irreversível. Aos poucos recuperou a fala, mas uma perfuração de sabre no céu da boca o que lhe causou uma imperfeição permanente na fala, recebendo a alcunha de Tartaglia (o tartamudo). Niccolo Fontana de Bréscia ([ca. 1500]-1557), um dos mais proeminentes matemáticos italianos do século XVI, é mais conhecido por seu apelido e com ele publicou formalmente seus trabalhos. Autodidata, aprendeu latim, grego, Matemática e mecânica. Ele adquiriu tamanha proficiência, e tão indiscutível era o seu talento em Matemática que, se tornou professor de ciências em Verona, Vicenza, Brescia, e Veneza, onde ensinava a Astronomia de Ptolomeu e a Geometria de Euclides, por volta de 1535 (BOYER, 1996; CAJORI, 2007; EVES, 2004).

Em 1530, dentro do costume então vigente na época, entre os matemáticos, de proporem problemas uns aos outros como forma de desafio, o professor de Matemática, na cidade de Brescia, Zuanne de Tonini da Coi[28] ([14--?]-[15--]) submeteu duas equações cúbicas

$$x^3 + 3x^2 - 5 = 0 \text{ e } x^3 + 6x^2 + 8x - 100 = 0,$$

para Niccolo Tartaglia que, por sua vez, num primeiro momento foi incapaz de resolvê-las, mas após um tempo chegou a uma solução. O procedimento que encontrado por ele, em busca de solucionar as duas equações, foi um passo importante na solução do problema geral de equações cúbicas, ao ponto que, por volta de 1535, Tartaglia anunciou ter descoberto uma solução algébrica para a equação cúbica

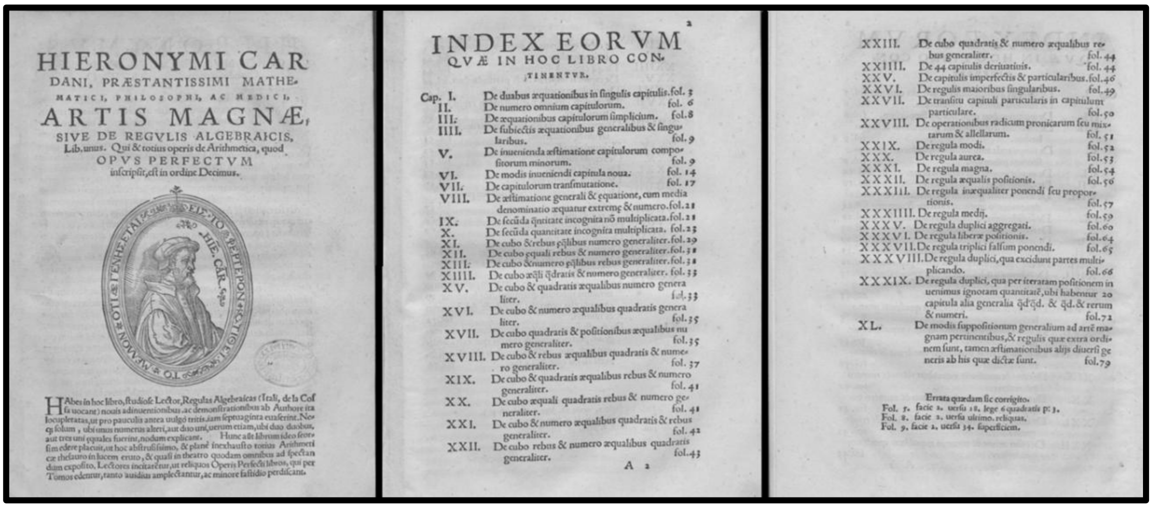
$$x^3 + ax = b.$$

Acreditando se tratar de um blefe, Fior o desafiou para uma disputa publica envolvendo a resolução de equações cúbicas. Com muito empenho Tartaglia conseguiu resolver, também, faltando poucos dias para a disputa, a equação cúbica desprovida de termo quadrático. Como no dia marcado sabia resolver dois tipos de cúbicas, ao passo que Fior só sabia resolver um, Tartaglia triunfou plenamente.

[27] Seu nome também aparece grafado como *Antonius Maria Floridus, Antonio Maria del Fiore* e *Antoniomaria Fior*.
[28] Seu nome aparece grafado como Zuane, Giovanni, Giovanno, e ainda, John, assim como Colle e Colla.

Figura 03 – Página de rosto do *General trattatodi numeri, et misure,*
Fonte: Tartaglia, 1556, p. 1.

Ele foi o primeiro a aplicar a matemática para a ciência da artilharia, em 1537, com sua obra *A Nova Scientia*, sendo posteriormente aperfeiçoado pelos franceses Jacques Ricard de Genouillac (1465-1546) e Jean d'Estrées Primeiro (1486-1571), apresentando, um século antes que Galileu Galilei (1564-1642), os fundamentos da balística. Em 1543 publicou o seu *Euclide Megarense philosopho: solo introdutore delle scientie mathematice / diligentemente reassettato, et alla integrita ridotto per il dengo professore di tal scientie Nicolo Tartalea brisciano, secondo le due tradottioni e per commvne commodo & utilita di latino in volgar tradotto"*, a primeira tradução de Os elementos de Euclides em idioma europeu moderno, contava, ainda, com o primeiro comentário moderno. Publicou, também, no mesmo ano, *A ópera archimedis*. Também escreveu o melhor tratado sobre aritmética publicado na Itália, em seu século, *General trattato di numeri, et misure*, o seu trabalho mais conhecido; nele, não apenas promoveu discussões completas acerca das operações numéricas e das regras comerciais usadas naquele período, mas também discute a vida e os costumes dos comerciantes, assim como, os esforços realizados para aprimoramento da aritmética no século XVI. Embora, não tivesse nenhuma fonte substancial de recursos, em parte talvez por causa de seu problema de dicção, com o passar do tempo, o humilde matemático galgou os degraus do reconhecimento (BOYER, 1996; SMITH, 1991; LIBRI, 1840).



HIERONYMI CARDANI, PRÆSTANTISSIMI MATHEMATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,

ARTIS MAGNÆ,

SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS, Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod OPVS PERFECTVM inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neq; solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aût librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

2

INDEX EORVM QVÆ IN HOC LIBRO CONTINENTVR.

A 2

Errata quædam sic corrigito.
Fol. 5. facie 2. uersu 18. lege 6 quadratis p: 3.
Fol. 8. facie 2. uersu ultimo. reliquas.
Fol. 9. facie 2. uersu 34. superficiem.

Figura 04 – Página de rosto do *Artis Magnae*, seguido da taboa de conteúdos
Fonte: Cardani, 1545, p. 1, 7 e 8.

Filho ilegítimo de um jurista chamado Fazio Cardano[29] (1444-1524), Girolamo Cardano[30] (1501-1576), cresceu em meio a maus tratos, moléstias e adversidades. Tido por alguns como um gênio inescrupuloso, era um homem de contrastes notáveis. A sua cultura enciclopédica e a sua inteligência versátil, permitiram-lhe escrever sobre os assuntos mais diversos. Smith (1991) ao tentar definir a personalidade de Cardano, explica que ele foi: um célebre astrólogo e um dedicado estudante de filosofia; um jogador inveterado e um algebrista de primeira classe; um físico de observações e hábitos precisos, e um homem cujas declarações foram extremamente pouco fiáveis; um médico e ainda o pai e defensor de um assassino condenado eexecutado em 1560; em um momento, professor na Universidade de Bolonha e em outro, um interno em um asilo para pessoas carentes; vítima da superstição cega e ainda o reitor do Colégio de Físicos, em Milão; um herege que se aventurou a publicar o horóscopo de Cristo e ainda um destinatário de uma pensão do Papa (BOYER, 1996; SMITH, 1991; LIBRI, 1840).

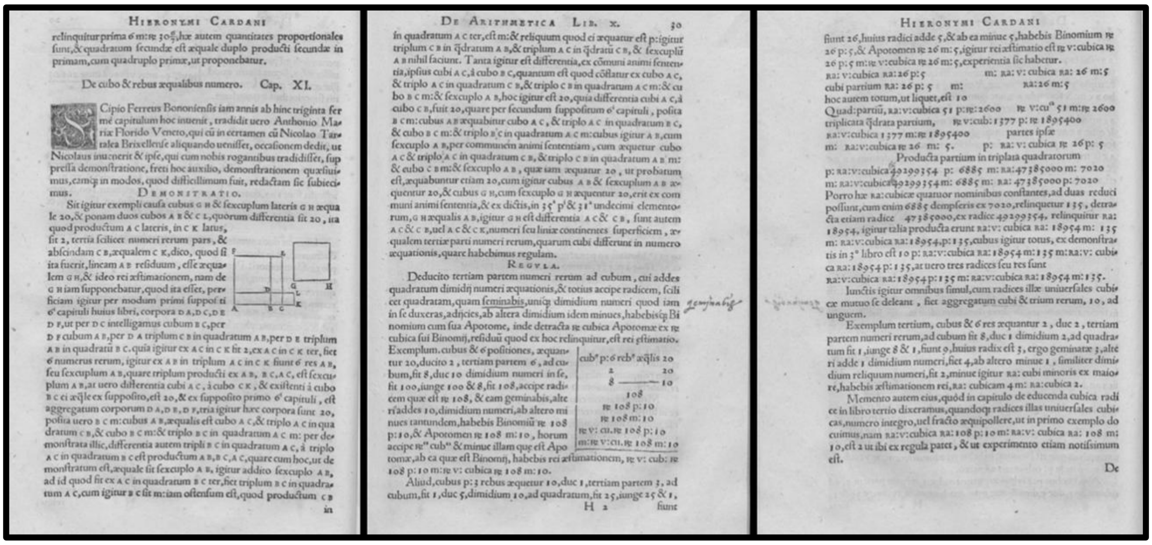
Em 1526, motivado pelo seu vício pelos jogos de azar, Cardano escreve *Liber de Ludo Aleae*, um pot-pourri com vários resultados, às vezes contraditórios, resolvendo diversos problemas de enumeração, e retomando problemas levantados por Luca Pacioli. No mesmo ano, após ter alcançado o título de doutor em Medicina na Universidade de Pádua, exerceu até 1550, em Saccolongo, uma comuna italiana da região do Vêneto, província de Pádua. Em 1534 obteve a cátedra de matemática, em Milão, mas deixou de exercer, estudar e publicar textos a respeito de medicina, misturada com práticas de astrologia e de magia (LIBRI, 1840; BELLHOUSE, 2005).

Conforme adverte Eves (2004), tanto os detalhes, quanto a veracidade das acusações, são menos importantes do que as descobertas, em si, já que os protagonistas dessa novela, segundo parece, nem sempre colocaram a verdade em primeiro plano, assim, encontram-se muitas variações para a mesma trama que narraremos a seguir.

[29] Professor de jurisprudência e da medicina, em Milão, foi amigo de Leonardo di Ser Piero da Vinci (1452-1519), além de editar a obra *Perspectiva communis*, do arcebispo John Peckham (c. 1230-1292).

[30]. Seu nome também aparece grafado como *Gerolamo* ou *Geronimo Cardano*, *Hieronymus Cardanus*, *Hieronymi Cardani* e *Jérôme Cardan*.

Certa vez, enquanto ensinava matemática e praticava medicina em Milão, após um juramento solene de segredo, conseguiu arrancar de Niccolo Tartaglia a chave de sua solução da cúbica. No entanto, conforme Eves (2004), no ano de 1545, em Nuremberg, no momento de publicação de sua obra *Artis magnae, sive de regulis algebraicis* – um grande tratado de Álgebra escrito em latim – lá estava a solução de Tartaglia. Os protestos enérgicos de Tartaglia foram rebatidos por Ludovico Ferrari[31](1522-[ca. 1560]), o mais brilhante dos discípulos de Cardano. Ele argumentou ter seu mestre recebido informações de Scipione del Ferro, por intermédio de um manuscrito impresso por Annibale della Nave, ao mesmo tempo que acusava Tartaglia de ter plagiado a mesma fonte. A partir deste fato, seguiu-se uma polêmica acerca da qual Tartaglia, deu-se por feliz de sair vivo.


HIERONYMI CARDANI

De cubo & rebus æqualibus numero. Cap. XI.

DE ARITHMETICA LIB. X.

HIERONYMI CARDANI

Figura 05 – Apresentação da resolução de Scipione del Ferro, onde são citados Fior e Tartaglia
Fonte: Cardani, 1545, p. 58-60.

Nascido em circunstâncias humildes, Ferrari foi levado para a casa de Cardano, em Milão, aos quinze anos de idade. Sua habilidade notável, logo foi reconhecida por Cardano que fez dele, seu secretário. Apesar de seu temperamento incontrolável e de seus hábitos blasfemos, ele foi posteriormente aceito por Cardano como aluno, e com o tempo, tornou-se seu amigo e colaborador. Embora, muitos matemáticos italianos da época, teriam dado tudo para estar no lugar dele, convivendo com Cardano, em sua casa, Ferrari não via a hora de estar fora dali e viver por conta própria. Aos dezoito anos de idade, Ferrari pôde enfim se desvincular de seu patrono e começar a ensinar sozinho, em Milão. Ele foi tão bem sucedido nesta empreitada e nos concursos de Matemática aos quais participou que, chamou a atenção Cardeal de Mantova[32]. Através da proteção do Cardeal, ele alcançou privilégios que lhe proporcionaram uma boa renda.

[31]. Pouco tempo após tornar-se professor de Matemática na Universidade de Bolonha, veio a falecer aos 38 anos, provavelmente envenenado por sua única irmã (SMITH, 1991).

[32] Atualmente, a Diocese de Mantova é uma circunscrição eclesiástica da Igreja Católica na Itália, pertencente à Província Eclesiástica de Milão e à *Conferenza Episcopale Italiana*, sendo sufragânea da Arquidiocese de Milão.

Segundo Cajori (2007, p198), “notável foi, o grande interesse que a solução das cúbicas provocou por toda a Itália e é natural que depois dessa grande conquista os matemáticos atacassem as equações do quarto grau”. Mais uma vez, dentro do costume dos desafios propostos, Zuanne de Tonini da Coi submeteu a Cardano uma questão que envolvia a equação

$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x.$$

Após inúmeras tentativas sem êxito, Cardano transferiu o desafio para o jovem Ferrari que, por sua vez, foi capaz de encontrar o método geral para a solução das equações do 4º grau. Tal método foi publicado, também, por Cardano em sua obra *Artis Magnae*, em continuidade à solução dada por Tartaglia às equações do 3º grau. (SMITH, 1991).
Como salienta Cajori (2007, p. 198, 199),

> a álgebra de Cardano deixa muito a desejar. No seu Ars Magna ele toma conhecimento de raízes negativas de uma equação, chamado-as de fictícias, enquanto as raízes positivas são ditas reais. Dá alguma atenção ao cálculo de raiz quadrada de números negativos, mas falha em não reconhecer as raízes imaginárias. Cardano observa também a dificuldade do caso de irredutibilidade das equações cúbicas, que, à semelhança da quadratura do círculo, tem atormentado muito a ingênua perseverança dos matemáticos. Mas Cardano não entendeu a natureza da questão, ficando para Rafael Bombelli de Bolonha (que publicou em 1572 uma álgebra de grande mérito), a tarefa de apontar para a realidade da expressão, aparentemente imaginária que as raízes assumem, como também acatar os seus valores quando racionais, e , assim, lançar a fundação de um conhecimento mais íntimo de quantidades imaginárias.

Com a publicação do *Artis Magnae* surge um novo problema: raízes quadradas de números negativos. A essa altura um outro importante algebrista italiano, chamado Rafael Bombelli ([ca. 1526]-1573) teve uma ideia que chamou de insana, pois toda a questão parecia apoiar-se em sofismas. Os dois radicandos das raízes cúbicas que resoltam da fórmula usual diferem apenas por um sinal. Cardano tinha observado que quando todos os termos de um lado do sinal de igualdade são de grau maior que os do outro lado, a equação tem uma e uma só raiz positiva. Ele teve a engenhosa ideia de que os próprios radicais poderiam ser relacionados de modo análogo àquele em que os radicandos são relacionados. Com seu hábil raciocínio mostrou o papel importante que os números imaginários conjugados iriam desempenhar no futuro; mas na época a observação não ajudou na operação efetiva de resolver equações cúbicas, pois ele precisava saber antecipadamente o valor de uma das raízes. Assim, a equação já está resolvida, e não se precisa da fórmula; sem tal conhecimento prévio, o método de Bombelli não funcionava. Qualquer tentativa para achar algebricamente as raízes cúbicas dos números imaginários na Fórmula de Cardano-Tartaglia leva à própria cúbica, em cuja resolução as raízes cúbicas aparecem, de modo que se volta ao ponto de partida. Porque esse impasse surge sempre que as três raízes sejam reais, esse caso é conhecido como “caso irredutível”. Aqui uma expressão para a incógnita é de fato fornecido pela fórmula, mas a forma em que aparece é inútil para quase todos os fins (BOYER, 1996).

Bombelli foi o que conhecemos hoje como engenheiro hidráulico, trabalhou na drenagem e na transformação de pântanos em terras cultiváveis. Na Matemática, dedicou cerca de quinze anos de sua vida para escrever, a sua obra *L'Algebra parte maggiore dell' arimetica divisa in tre libri* e assim melhorar o ensino, diminuir as dificuldades, e permitir aos seus compatriotas dominarem um pouco mais este assunto. Embora este trabalho tenha sido escrito por volta de 1560, só foi impresso em 1572, cerca de um ano antes de sua morte. Seu livro foi importante no desenvolvimento da álgebra. Ele designa as raízes quadradas de números negativos por più di meno (p.d.m.), no caso da raiz positiva que chamamos hoje de i, e meno di meno (m.d.m.), no caso da raiz negativa, que chamamos de $-i$, e fornece as regras de adição e multiplicação destes números. Além disso, a obra trazia uma importante inovação no que diz respeito à notação simbólica: usava ***R.q.*** para raiz quadrada, ***R.c.*** para raiz cúbica. Bombelli é o inventor de uma das notações mais importantes da Matemática, o parênteses, para tanto usava os símbolos $\llcorner \lrcorner$, também usava p para adição e m para subtração. Sua maior inovação foi o uso de um semicírculo para denotar um expoente (BOYER, 1996; CAJORI, 2007; EVES, 2004).

6. A Matemática da história

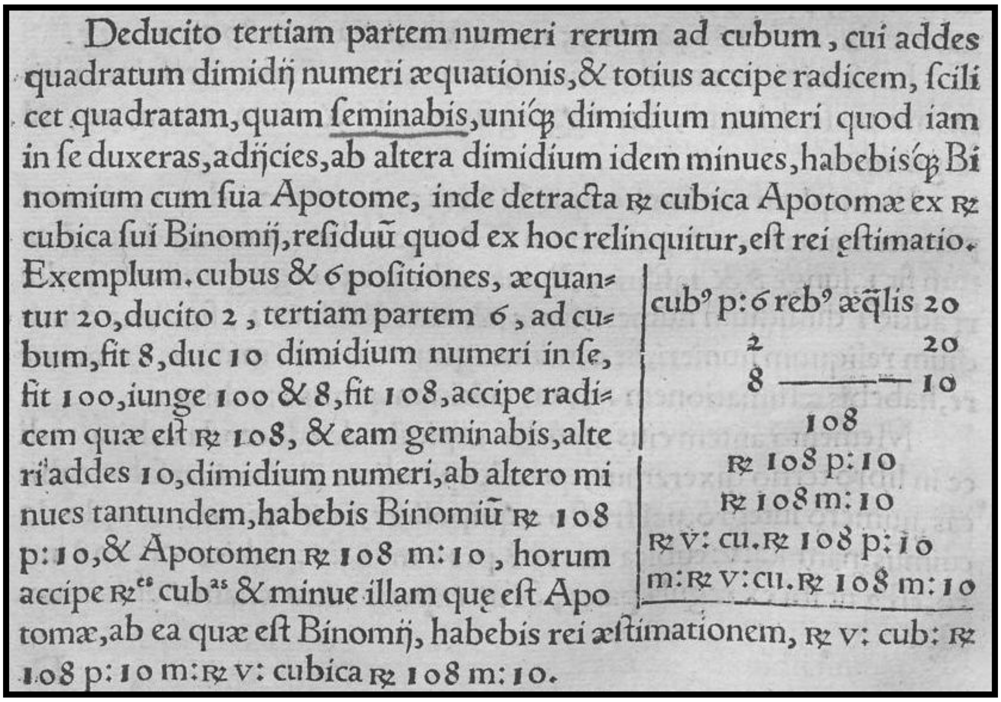
Para esse tópico em questão, devemos salientar que, no século XVI, desenvolveram-se na Europa, e em particular, na Itália, pesquisas dedicadas à Álgebra, empregando uma grande variedade de símbolos, que foram responsáveis por alguns daqueles que conhecemos hoje. Como já vimos anteriormente, os termos árabes foram traduzidos para o latim, bem como seus métodos aritméticos e algébricos. As traduções latinas dos tratados árabes usavam o termo "coisa" para designar a quantidade desconhecida, ou ainda, *radix*, que significava raiz em latim. Os símbolos para o quadrado e o cubo da quantidade desconhecida, por exemplo, provinham de abreviações dos termos em latim, assim como as operações de mais e menos eram designadas por variações das letras *p* (*plus*, que significava mais em latim) e *m* (*minus*, ou menos em latim). Tal procedimento era repetido para a representação da raiz, tal qual *p* e *m*, para mais e menos, a raiz era representada por variações de *R*, por causa do termo *radix*. Neste sentido ao longo dos séculos XIII e XIV diversas abreviações foram utilizadas e o seu uso não era unificado. (BOYER, 1996; CAJORI, 2007).

No capítulo XI (Figura 05), da obra Artis Magnae, é apresentada a resolução da cúbica do tipo *De cubo & rebus eqlibus numero generaliter* - cubo e coisas igual a número. No recorte apresentado na Figura 06, temos o enunciado da regra geral apresentada por Cardano, que pode ser adaptada, em linguagem matemática atual, por,

> Eleve ao cubo a terça parte do número de coisas ao qual será somado o quadrado da metade do termo numérico da equação e extraia a raiz quadrada deste total que será usado, em dois momentos. Em um deles, adicione a metade do termo numérico da equação e no outro subtraia o mesmo número. Teremos então, um binomium e o seu apotome respectivamente. Subtraia a raiz cúbica do apotome da raiz cúbica do binomium e o resultado final é o valor da coisa (CARVALHO; ROQUE, 2012, p. 208).

Se observarmos o caso particular, citado no enquadramento da Figura 06, onde Cardano trabalha a equação "cubo e seis coisas igual a 20", veremos a seguinte resolução, adaptada para a linguagem matemática atual, como:

> Eleve 2 ao cubo, que é a terça parte de 6, o que resulta em 8; multiplique 10, metade do termo numérico, por ele mesmo resultando 100 e some 100 e 8, obtendo 108. Extraia a raiz quadrada, que é $\sqrt{108}$, e a utilize em um primeiro momento somando 10, e em um segundo momento subtraindo a mesma quantidade, assim teremos o binomium $\sqrt{108}+10$ e o apotome $\sqrt{108}-10$. Extraia a raiz cúbica desses valores e subtraia o valor do apotome do valor do binomium, e teremos o valor da coisa: $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$. (CARVALHO; ROQUE, 2012, p. 208).



Deducito tertiam partem numeri rerum ad cubum, cui addes quadratum dimidij numeri æquationis, & totius accipe radicem, scilicet quadratam, quam seminabis, uniq; dimidium numeri quod iam in se duxeras, adijcies, ab altera dimidium idem minues, habebisq; Binomium cum sua Apotome, inde detracta Rx cubica Apotomæ ex Rx cubica sui Binomij, residuũ quod ex hoc relinquitur, est rei æstimatio.

Exemplum. cubus & 6 positiones, æquantur 20, ducito 2, tertiam partem 6, ad cubum, fit 8, duc 10 dimidium numeri in se, fit 100, iunge 100 & 8, fit 108, accipe radicem quæ est Rx 108, & eam geminabis, alteri addes 10, dimidium numeri, ab altero minues tantundem, habebis Binomiũ Rx 108 p: 10, & Apotomen Rx 108 m: 10, horum accipe Rx^{tas} cub^{as} & minue illam quę est Apotomæ, ab ea quæ est Binomij, habebis rei æstimationem, Rx v: cub: Rx 108 p: 10 m: Rx v: cubica Rx 108 m: 10.

cub^9 p: 6 reb^9 æq̃lis 20
2   20
8 —— 10
108
Rx 108 p: 10
Rx 108 m: 10
Rx v: cu. Rx 108 p: 10
m: Rx v: cu. Rx 108 m: 10

Figura 06 – Recorte do Artis Magnae
Fonte: Cardani, 1545, p. 59.

Observe atentamente a forma como Cardano expressa “o valor da coisa”, adaptado na citação anterior como $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$. A grafia utilizada por ele, para expressar a mesma ideia foi ***R. v. cu. R. 108. p. 10. m. R. v. cu. R. 108. m. 10.***, o que em nossa linguagem matemática não faria o menor sentido. Devido a essa razão, buscando uma maior compreensão do leitor, para os métodos de resolução apresentados, utilizaremos a notação moderna, e evitaremos anacronismos, sempre que possível.

Conforme salienta Boyer (1996), a resolução das equações de 3º e 4º foi provavelmente uma das maiores contribuições à Álgebra, desde que os babilônios, quase quatro milênios antes, aprenderam a completar o quadrado para o que entendemos hoje como equações quadráticas. Neste sentido é fácil compreender a relevância das informações reveladas nas páginas do *Artis Magnae*, de Cardano, tenham sido elas inseridas ou cedidas, de bom grado ou não. A resolução das cúbicas e quárticas, não foi em nenhum sentido motivada por considerações práticas, uma vez que, soluções aproximadas de algumas cúbicas já eram conhecidas. O matemático persa Ghiyath al-Kashi (1380-1429), por exemplo, um século antes de Cardano, podia resolver com qualquer grau de aproximação, qualquer cúbica resultante de um problema prático. Por sua vez, a Fórmula de Cardano-Tartaglia, embora seja de grande importância, não é tão útil para as aplicações quanto os métodos de aproximações sucessivas.

O maior impacto, e de certa forma, o mais importante resultado das descobertas publicadas na obra de Cardano, foi o admirável impulso dado aos estudos e pesquisas algébricas em diversas direções. Era natural, a partir disso que, se buscasse a inclusão de equações polinomiais de qualquer ordem. Outro resoltado imediato da resolução da equação cúbica foi a primeira observação significativa de uma nova espécie de número, os imaginários. Isto porque, os irracionais já eram aceitos no tempo de Cardano, embora não tivessem base firme, pois eram aproximáveis por números racionais. Por sua vez, os negativos, embora causadores de problemas, com a noção de sentido sobre a reta torararam-se plausíveis. Mesmo assim, se um algebrista desejasse negar a existência de números irracionais ou negativos, dizia, como os gregos que, as equações $x^2 = 2$ e $x + 2 = 0$ não eram resolúveis. Semelhantemente, os algebristas tinham podido evitar os imaginários, simplesmente dizendo que uma equação como $x^2 + 1 = 0$ não era resolúvel (BOYER, 1996; CAJORI, 2007).

Até então, não havia a necessidade de considerar raízes quadradas de números negativos, mas com a solução da cúbica a situação sofreu uma mudança drástica. Pois, sempre que as três raízes de uma equação cúbica são reais e diferentes de zero, a Fórmula de Cardano-Tartaglia leva inevitavelmente a raízes quadradas de números negativos. Embora, soubessem que o alvo era um numero real, ele não poderia ser atingido sem que se compreendesse alguma coisa sobre os números imaginários. Agora, era necessário considerar os imaginários mesmo que se concordasse em só aceitar as raízes reais. Neste contexto, apesar da relevância das descobertas de Rafael Bombelli seja indiscutível, não trabalharemos a sua matemática, de forma mais enfática, neste artigo. Sendo assim, nos limitaremos, neste tópico, a abordar a resolução da cúbica e da quártica contidas na obra de Cardano, adaptadas para a Matemática contemporânea, e a resolução do desafio proposto por Zuanne de Tonini da Coi à Cardano.

6.1. Resolvendo a equação do 3º grau

Na realidade, Niccolo Tartaglia encontrou a solução para um tipo em particular de equações cúbicas, aquelas desprovidas do termo bx^2, a equação

$$x^3 + cx = d,$$

uma vez que já conhecia o método de redução da equação cúbica completa,

$$x^3 + bx^2 + cx = d.$$

A partir daí, ele assumiu esta solução, não mais como uma solução particular, mas sim, como geral para uma equação cúbica qualquer.

6.2. Resolução da equação cúbica do tipo $x^3 + cx = d$

Para uma equação cúbica do tipo

$$x^3 + cx = d$$

utilizaremos o método anunciado por Tartaglia, e conhecido como Fórmula de Cardano-Tartaglia, para alcançarmos a solução

$$x = \sqrt[3]{\frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3}}$$

onde c e d são os coeficientes.

Para tanto, considere a identidade algébrica

$$(m-n)^3 + 3mn(m-n) = m^3 - n^3.$$

Agora, se tomarmos m e n de modo que

$$3mn = c e m^3 - n^3 = d,$$

teremos que

$$x = m - n.$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 3mn = c \\ m^3 - n^3 = d \end{cases}$$

formado pelas duas equações anteriores, e isolando m na primeira e substituindo na segunda equação, teremos

$$\left(\frac{c}{3n}\right)^3 - n^3 = d$$

$$\frac{c^3}{27n^3} - n^3 = d$$

$$\frac{c^3}{27n^3} - n^3 - d = 0$$

$$\frac{(-27n^3)c^3}{27n^3} - (-27n^3)n^3 - (-27n^3)d = 0$$

$$-c^3 + 27n^6 + 27n^3d = 0$$

$$27n^6 + 27n^3d - c^3 = 0$$

$$\frac{27n^6}{27} + \frac{27n^3d}{27} - \frac{c^3}{27} = 0$$

$$\frac{27n^6}{27} + \frac{27n^3d}{27} - \frac{c^3}{3^3} = 0$$

$$n^6 + dn^3 - \left(\frac{c}{3}\right)^3 = 0.$$

Assim, para resolvermos, esta nova equação, tomaremos $k = n^3$ de modo a obtermos

$$k^2 + dk - \left(\frac{c}{3}\right)^3 = 0$$

para em seguida, aplicarmos a fórmula de $Bhaskara$ e encontrarmos as raízes de k, como vemos a seguir:

$$k = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4\left(\frac{c}{3}\right)^3}}{2} \text{ou} k = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3}.$$

Agora, como tomamos $k = n^3$ é sabido que

$$n = \sqrt[3]{k} e n = \sqrt[3]{-\frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3}}.$$

Então, para determinarmos o valor de m, isolaremos n na equação do sistema, como apresentado a seguir:

$$m^3 - n^3 = d$$
$$n^3 = m^3 - d$$
$$n = \sqrt[3]{m^3 - d},$$

para depois substituirmos na primeira equação do sistema, como a seguir:

$$3mn = c$$
$$3m\sqrt[3]{m^3 - d} = c$$
$$(3m\sqrt[3]{m^3 - d})^3 = c^3$$
$$27m^3(m^3 - d) = c^3$$
$$\frac{27m^3(m^3 - d)}{27} = \frac{c^3}{27}$$
$$m^6 - dm^3 = \frac{c^3}{27}$$
$$m^6 - dm^3 - \left(\frac{c}{3}\right)^3 = 0.$$

Agora, se confrontarmos esta última equação com a equação de n, ou seja,

$$n^6 + dn^3 - \left(\frac{c}{3}\right)^3 = 0$$

verificamos que eles diferem em relação ao sinal de d. Logo, analogamente, a solução para m seria

$$m = \sqrt[3]{\frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3}}.$$

Considerando que $x = m - n$ então, a solução será

$$x = \sqrt[3]{-\frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3}}.$$

6.3. Resolvendo uma cúbica a partir de uma equação completa

Dada uma equação cúbica completa

$$x^3 + bx^2 + cx = d$$

e utilizando o método apresentado no tópico anterior, como deveríamos preceder? Inicialmente, precisamos anular o termo em x^2, para obtermos uma cúbica na forma

$$x^3 + cx = d.$$

Para realizarmos esse anulamento, teremos que fazer a seguinte mudança de variável

$$x = y - \frac{b}{3}.$$

Ao substituirmos $x = y - \frac{b}{3}$ em $x^3 + cx = d$, teremos

$$\left(y-\frac{b}{3}\right)^3+b\left(y-\frac{b}{3}\right)^2+c\left(y-\frac{b}{3}\right)=d$$

$$\left(y-\frac{b}{3}\right)\left(y^2-\frac{2by}{3}+\frac{b^2}{9}\right)+b\left(y^2-\frac{2by}{3}+\frac{b^2}{9}\right)+cy-\frac{bc}{3}=d$$

$$\left(y-\frac{b}{3}+b\right)\left(y^2-\frac{2by}{3}+\frac{b^2}{9}\right)+cy-\frac{bc}{3}=d$$

$$\left(y-\frac{b}{3}+\frac{3b}{3}\right)\left(y^2-\frac{2by}{3}+\frac{b^2}{9}\right)+cy-\frac{bc}{3}=d$$

$$\left(y+\frac{2b}{3}\right)\left(y^2-\frac{2by}{3}+\frac{b^2}{9}\right)+cy-\frac{bc}{3}=d$$

$$y^3-\frac{2by^2}{3}+\frac{b^2y}{9}+\frac{2by^2}{3}-\frac{4by^2}{9}+\frac{2b^3}{27}+cy-\frac{bc}{3}=d$$

$$y^3+(\frac{b^2}{9}-\frac{4b^2}{9}+c)y=d+\frac{bc}{3}-\frac{2b^3}{27}$$

$$y^3+(-\frac{3b^2}{9}+c)y=d+\frac{bc}{3}-2\left(\frac{b}{3}\right)^3$$

$$y^3+\left(c-\frac{b^2}{3}\right)y=d+\frac{bc}{3}-2\left(\frac{b}{3}\right)^3.$$

Fazendo

$$p=c-\frac{b^2}{3}\text{e}q=d+\frac{bc}{3}-2\left(\frac{b}{3}\right)^3$$

podemos reescrever a equação

$$y^3+\left(c-\frac{b^2}{3}\right)y=d+\frac{bc}{3}-2\left(\frac{b}{3}\right)^3$$

como

$$y^3+py=q.$$

Agora, nos encontramos com uma equação do tipo

$$y^3+py=q\text{ou } y^3+cy=d$$

que poderá ser resolvida pela Fórmula de Cardano-Tartaglia. É importante lembrar que após determinar o valor de y, deve-se desfazer a mudança de variável

$$x=y-\frac{b}{3}$$

e determinar o valor de x.

6.4. A resolução geral apresentada por Ludovico Ferrari para a equação do 4º grau

Dada a equação de 4º grau na forma completa

$$x^4+ax^3+bx^2+cx=d,$$

devemos primeira anular o termo ax^3 somando ou subtraindo das raízes $\frac{1}{4}$ do coeficiente do termo cúbico. Ao tomarmos

$$x=y-\frac{a}{4}$$

teremos

$$\left(y-\frac{a}{4}\right)^4+a\left(y-\frac{a}{4}\right)^3+b\left(y-\frac{a}{4}\right)^2+c\left(y-\frac{a}{4}\right)=d$$
$$\left(y-\frac{a}{4}\right)^2\left(y-\frac{a}{4}\right)^2+a\left(y-\frac{a}{4}\right)^2\left(y-\frac{a}{4}\right)+b\left(y-\frac{a}{4}\right)^2+cy-\frac{a}{4}=d$$
$$\left(y-\frac{a}{4}\right)^2\left[\left(y-\frac{a}{4}\right)^2+a\left(y-\frac{a}{4}\right)+b\right]+cy-\frac{ac}{4}=d$$
$$\left(y^2-\frac{ay}{2}+\frac{a^2}{16}\right)\left(y^2-\frac{ay}{2}+\frac{3a^2}{16}+b\right)+cy-\frac{ac}{4}=d$$
$$y^4+\left(b-\frac{3a^2}{8}\right)y^2+\left(c+\frac{a^3}{8}-\frac{ab}{2}\right)y=d+\frac{ac}{4}-\left(\frac{a}{4}\right)^2b+3\left(\frac{a}{4}\right)^4.$$

Tomando
$$p=b-\frac{3a^2}{8}\ ,\quad q=c+\frac{a^3}{8}-\frac{ab}{2}\ \text{e}r=\ d+\frac{ac}{4}-\left(\frac{a}{4}\right)^2b+3\left(\frac{a}{4}\right)^4$$
a equação
$$y^4+\left(b-\frac{3a^2}{8}\right)y^2+\left(c+\frac{a^3}{8}-\frac{ab}{2}\right)y=d+\frac{ac}{4}-\left(\frac{a}{4}\right)^2b+3\left(\frac{a}{4}\right)^4$$
se apresenta na forma
$$y^4+py^2+qy=r.$$

Somando py^2+p^2 aos dois membros da equação anterior, teremos
$$y^4+py^2+qy+py^2+p^2=r+py^2+p^2$$
$$y^4+2py^2+p^2=r-qy+py^2+p^2$$
$$(y^2+p)^2=r+py^2+p^2-qy$$

Em seguida, somaremos a ambos os membros da equação anterior, termos envolvendo uma nova variável (k), $2k(y^2+p)+k^2$, de maneira que o primeiro termo continue um quadrado perfeito. Ao somarmos o termo em questão, teremos
$$(y^2+p)^2+2k(y^2+p)+k^2=r+py^2+p^2-qy+2k(y^2+p)+k^2$$
$$(y^2+p+k)^2=r+p^2+py^2-qy+2k(y^2+p)+k^2$$
$$(y^2+p+k)^2=(p+2k)y^2-qy+(p^2+r+2pk+k^2)$$

Agora, o procedimento seguinte consiste em escolhe y de modo que o trinômio no segundo membro da equação seja um quadrado perfeito. E para que o segundo membro da equação anterior seja um quadrado perfeito, e com isso ter uma raiz real, o descriminante deve ser nulo, ou seja,
$$\Delta=b^2-4ac=0.$$

Sendo a equação
$$(p+2k)y^2-qy+(p^2+r+2pk+k^2)=0$$
$$q^2-4(p+2k)(p^2+r+2pk+k^2)=0$$
$$4p^3+4pr+8p^2k+4pk^2+8p^2k+8rk+16k^2p+8k^3=q^2$$
$$8k^3+20pk^2+16p^2k+8rk=q^2-4p^3-4pr$$
$$\frac{8k^3}{8}+\frac{20pk^2}{8}+\frac{16p^2k}{8}+\frac{8rk}{8}=\frac{q^2}{8}-\frac{4p^3}{8}-\frac{4pr}{8}$$
$$k^3+\frac{5}{2}pk^2+2p^2k+rk=q^2-4p^3-4pr$$
$$k^3+\frac{5}{2}pk^2+(2p^2+r)k=q^2-4p^3-4pr.$$

Por fim, resolveremos a equação anterior por métodos já apresentados, e determinaremos o valor de k. Em seguida, substituiremos o valor de k encontrado, na equação

$$(y^2 + p + k)^2 = (p + 2k)y^2 - qy + (p^2 + r + 2pk + k^2)$$

e determinaremos o valor de y. Depois, substituiremos o valor de y em

$$x = y - \frac{a}{4},$$

para assim, encontrarmos x.

6.5. O desafio de Zuanne de Tonini da Coi para Girolamo Cardano

A solução geral da equação do 4º foi dada por Ferrari que, reduziu a equação proposta por Zuanne de Tonini da Coi da forma

$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x\,,$$

para a forma

$$(x^2 + 6)^2 = 60x + 6x^2\,,$$

adicionado $6x^2$ aos dois lados. Para dar a forma de um quadrado perfeito para o membro da direita, Ferraria adicionou aos dois membros da equação a expressão

$$2(x^2 + 6)y + y^2\,,$$

onde y era uma nova incógnita

$$(x^2 + 6)^2 + 2(x^2 + 6)y + y^2 = 60x + 6x^2 + 2(x^2 + 6)y + y^2$$
$$(x^2 + 6)^2 + 2yx^2 + 12y + y^2 = 60x + 6x^2 + 2yx^2 + 12y + y^2$$
$$(x^2 + 6 + y)^2 = (2y + 6)x^2 + 60x + (y^2 + 12y)$$

O passo seguinte consiste em escolher y de modo que o trinômio no segundo membro fique um quadrado perfeito. Isso se faz igualando a zero o discriminante $(\Delta = 0)$ da equação

$$(2y + 6)x^2 + 60x + (y^2 + 12y) = 0$$

Sendo $\Delta = b^2 - 4ac$, temos

$$60^2 - 4(2y + 6)(y^2 + 12y) = 0$$
$$(2y + 6)(y^2 + 12y) = \frac{60^2}{4}$$
$$(2y + 6)(y^2 + 12y) = \frac{3600}{4}$$
$$2y^3 + 24y^2 + 6y^2 + 72y = 900$$
$$2y^3 + 30y^2 + 72y = 900$$
$$y^3 + 15y^2 + 36y = 450$$

Utilizando o método que ficou conhecido como Fórmula de Cardano-Tartaglia.

Esta equação era chamada a cúbica solvente da equação do 4º grau dada. Resolve-se essa equação cúbica pelos métodos já conhecidos na época. O valor de y aqui encontrado substitui-se em

$$(x^2 + 6 + y)^2 = (2y + 6)x^2 + 60x + (y^2 + 12y)$$

de modo a encontrar o valor de x. O que Ferrari fez foi encontrar um método semelhante a esse para resolver todas as equações do 4º grau.

Considerações finais

A efervescência dos movimentos políticos, econômicos e culturais, no entorno do Mar Mediterrâneo, deixaram suas marcas no que hoje entendemos como Matemática. No decorrer dos séculos, “blocos de conhecimentos matemáticos” estrangeiros vêm se disseminando em culturas distintas, a partir de personagens históricos, às vezes anônimos, às vezes pouco conhecidos, e às vezes tomados por marcos. Tal qual um vetor de transmissão, esse individuo, em particular, “contamina” as práticas preexistentes em seu meio, com aquelas as quais ele foi exposto. Como podemos verificar no decorrer do trabalho, fatos como estes são recorrentes, independentemente de questões geográficas ou temporais. Como o passar do tempo, as práticas estrangeiras, antes vistas com estranheza, acabam por serem aceitas, assimiladas e com o tempo possibilitam o desenvolvimento de novas práticas, desta vez, encaradas com maior naturalidade.

Ao retomarmos os acontecimentos históricos ocorridos durante a Renascença italiana, relativos ao desenvolvimento da Matemática, em particular da Álgebra, percebemos as diferentes tradições presentes neste processo, influenciando com maior ou menor intensidade a construção do corpo de conhecimento algébrico daquele período. Neste sentido, podemos dizer que existiu um elemento catalisador, pelo menos, neste nosso recorte: as rotas de comércio, e um elemento mediador neste processo de intercâmbio de conhecimentos, os comerciantes das repúblicas marítimas italianas.

Em relação às equações algébricas do terceiro e quarto grau, percebemos que nem as limitações do corpo de conhecimento matemático da época, não foram capazes de obstruir a engenhosidade dos matemáticos daquele período. Neste sentido, os equívocos e percalços, no processo de desenvolvimento de um conhecimento matemático são, praticamente, inevitáveis, independentemente do período com o qual estejamos lidando, e não diminui em absoluto a importância de suas realizações.

Os conhecimentos contidos na obra de Cardano, independentemente da forma como foram incluídos na mesma, trouxeram contribuições para o desenvolvimento da Álgebra, entre elas a busca de novos entes matemáticos, a inclusão de equações polinomiais de qualquer ordem, etc. Por sua vez, personagens como Tartaglia, Cardano e Ferrari dão o tom da narrativa histórica, e como uma novela renascentista, com doses maciças de humanidade, desmitifica o herói criador, afastando-o de uma imagem estereotipada. Assim, fica evidenciado como as matemáticas são criadas: por personagens reais, vivendo em um período histórico real, e sofrendo as influências do mesmo. Neste caso, compreender tanto as limitações, quanto as criações decorrentes destas é um exercício que devemos nos prestar se buscamos uma maior compreensão sobre o nosso campo de estudo.

Referências

AGARWAL, R. P.; SEN, S. K.**Creators of mathematical and computational sciences**. Springer, 2014.

ANDERSON, M.; KATZ, V.; WILSON, R.. **Sherlock Holmes in Babylon: and other tales of mathematical history**. MAA, 2004.

BAUMGART, J. K..**Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula**: Álgebra. São Paulo: Atual, 1992.

BELLHOUSE, David. Decoding Cardano's Liber de Ludo Aleae. **Historia Mathematica**, v. 32, n. 2, p. 180-202, 2005.

BOYER, C. B.. **História da Matemática**. São Paulo, SP: Editora Edgard Blücher Ltda, 1996.

CAJORI, F.. **História de matemática**. Rio de Janeiro, RJ: Editora Ciência Moderna, 2007.

CARDANI, H.; **Artis Magnae**, sive de Regulis Algebraicis.Nuremberg: Liber Unus, 1545.

CARVALHO, J. B. P. de; ROQUE, T. M.. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

EVES, H.. **Introdução à história de matemática**. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

GARBI, G. G..**O romance das equações algébricas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

LIBRI, G.. **Histoire des sciences mathématiques en Italie: depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du XVII^e^ siècle**. Tome 3. Paris: J. Renouard, 1840.

LIBRI, G.. **Histoire des sciences mathématiques en Italie: depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du XVII^e^ siècle**. Tome 4. Paris: J. Renouard, 1841.

MENDES, I. A. ; FOSSA, J. A. ; VALDÉS, J. E. N.. **A história como um agente de cognição na Educação Matemática**. 1. ed. Porto Alegre: Sulina, 2006.

PERUZZO, J..**Evolução dos Métodos de Resolução de Equações Algébricas**. Clube de Autores, 2009.

RADFORD, L.. **Cognição Matemática**: história, antropologia e epistemologia. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

SMITH, D. E.. **History of Mathematics**. Vol. 1. New York: Dover, 1991.

TARTAGLIA, N..**La prima parte del general trattato di numeri, et misure/di**. Veneza: Curtio Troiano de i Navo, 1556.

Jefferson Leandro Ramos de Oliveira
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN/RN/Brasil
E-mail: jeffframosbr@yahoo.com.br

Erika Monik A. de M. Ramos de Oliveira
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN/RN/Brasil
E-mail: jeffframosbr@yahoo.com.br