Resolver Problemas - Criando Soluções, Vendo

Solving problems - creating solutions, seeing

Isabel Vale
Tereza Pimentel
Instituto Politécnico de Viana do Castelo – ESE-IPVC– Portugal

RESUMO

Neste texto discutem-se alguns pressupostos do ensino da resolução de problemas, nomeadamente a especial importância de uma estratégia de resolução de problemas baseada na visualização, que designamos por *procurar ver*, que pode constituir um contributo complementar para a abordagem e desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas nos alunos. Faz-se a articulação com o desenvolvimento da criatividade matemática, ligada à experiência Aha, procurando explicitar em que medida e através de que tipo de tarefas é possível desenvolver caraterísticas da criatividade. Apresentam-se alguns exemplos de tarefas, que ilustram os pressupostos discutidos, exploradas no âmbito da formação inicial de professores do ensino básico. A análise das produções indicia que as representações visuais não são as mais utilizadas pelos futuros professores, mesmo quando essa é a abordagem mais simples.

Palavras-chave: Resolução de problemas, visualização, representações visuais, criatividade.

ABSTRACT

This paper discusses some assumptions in the teaching of problem solving, including the special importance of a problem-solving strategy based on visualization, named *seeing*, which can be a complementary contribution to the approach and development of problem solving abilities in students. We make the connection with the development of mathematical creativity, linked to Aha experience, seeking to clarify to what extent and by what type of tasks creativity features can be developed. We present some examples of tasks, that illustrate the assumptions discussed, explored within the initial education of basic school teachers. The analysis of the productions indicates that visual representations are not the most used by future teachers, even when this is the simplest approach.

Keywords: Problem solving, visualization, visual representations, creativity.

Introdução

O ensino da matemática é uma tarefa complexa, pois há vários aspetos que devem ser considerados em simultâneo, dos quais destacamos os seguintes: exige que os professores possuam um conhecimento e compreensão profunda dos temas e conteúdos matemáticos que esperam vir a ensinar; e exige também que os professores tenham um bom entendimento do modo de ensinar, de forma a serem eficazes no desenvolvimento da aprendizagem matemática de todos os alunos.

Um ensino eficaz da matemática deve envolver os alunos na resolução e discussão de tarefas que promovam o raciocínio e a resolução de problemas, capacidades que devem ser enfatizadas nas salas de aula de matemática de todos os níveis. Um modo de os professores cumprirem este objetivo passa pela seleção de tarefas que requeiram dos alunos a aplicação

do seu conhecimento matemático e o envolvimento em pensamento de nível superior. Estas tarefas devem incluir o uso de diferentes representações e ferramentas, e a sua manipulação de forma flexível, permitindo encontrar múltiplas maneiras de abordar um problema e de encontrar várias estratégias de resolução (NCTM, 2015). Já em 1980 o National Council of Teachers of Mathematics, na sua *Agenda for Action*, recomendou que a resolução de problemas fosse o foco da matemática escolar. Contudo, devido à complexidade do processo de resolução de problemas, muitas das questões relacionadas com uma maior eficiência no ensino da resolução de problemas continuam sem resposta. Que abordagens poderão contemplar-se no ensino da resolução de problemas? Será que o desempenho dos alunos em resolução de problemas pode ser afetado por um tipo específico de abordagem?

Acreditamos que a resolução de problemas continua atual como objetivo central da aprendizagem matemática no século XXI; será eventualmente necessário, no entanto, repensar a sua abordagem nas salas de aula. Uma estratégia promissora poderá passar pela valorização da visualização; e é certo que esta capacidade pode ser desenvolvida nos alunos desde que as práticas de ensino promovam esta abordagem. Embora as representações visuais tenham sido relegadas para as margens da matemática formal durante várias décadas, nos finais do século XX houve um renascimento do interesse pela visualização como ferramenta poderosa no raciocínio matemático.

A recente investigação na área da cognição, em particular nos processos de resolução de problemas, conclui que o uso de representações visuais, para certos tipos de tarefas, pode ter vantagens sobre o uso de outras representações, facilitando a resolução de problemas. Em linha com esta ideia, defendemos a estratégia *procurar ver* como estratégia complementar poderosa para resolver problemas, e ainda para impulsionar a criatividade, dando a todos os alunos a oportunidade de a experienciar numa aula de matemática.

O ensino da resolução de problemas

Alguns autores referem que a resolução de problemas é o processo de aplicar o conhecimento previamente adquirido a situações novas e que pode envolver exploração de questões, aplicação de estratégias e formulação, teste e prova de conjecturas. Trata-se de uma actividade muito absorvente, pois quem resolve um problema é desafiado a pensar para além do ponto de partida, a pensar de modo diferente, a ampliar o seu pensamento e, por estas vias, a raciocinar matematicamente. De modo geral há consenso em considerar que problemas são questões para as quais não é conhecido um procedimento ou caminho para chegar à solução e cuja resolução requer raciocínio crítico ou criativo. Caso contrário, isto é, se a situação pode ser resolvida utilizando processos conhecidos pela pessoa, rotineiros ou estandardizados, que conduzem directamente à solução, a questão classifica-se como um exercício. Deste modo, ser ou não ser problema não depende apenas da tarefa que é proposta, mas também do indivíduo a quem se propõe. Por exemplo, a questão *Calcula o produto* 8×6 pode ter várias interpretações conforme o nível de conhecimentos de quem a enfrenta: um facto específico se a resposta é automática e faz recurso à memória; um exercício se mobiliza treino ou mecanização; ou um problema se envolve a descoberta de um caminho.

É habitualmente reconhecido que a resolução de problemas depende de muitos fatores como um conjunto de conhecimentos organizado sobre o domínio do problema, técnicas de representação e processos metacognitivos. Algumas dificuldades situam-se ao nível da compreensão do enunciado, e outras podem advir da demasiada importância dada, desde os primeiros anos de escolaridade, aos cálculos e respostas rápidas mais do que à exploração, análise e interpretação.

Para facilitar a abordagem dos problemas têm surgido vários modelos de resolução, o mais importante dos quais é da autoria de Polya (1945). Apresentamos aqui um outro modelo proposto pelo educador matemático espanhol Miguel de Guzmán que, embora evidencie muitas semelhanças com o modelo de Polya, designadamente as suas 4 fases, propõe algumas abordagens de modo bastante detalhado e potencialmente enriquecedor para os estudantes a quem se dirige. Os passos do modelo de Guzmán (1990) são os seguintes: (a) Antes de fazer tenta entender; (b) À procura de estratégias; (c) Explora a tua estratégia; e (d) Extrai o sumo do jogo e da tua experiência. No item (a) aconselha o solucionador a certificar-se de que compreende a fundo as regras, os dados do problema e a maneira como as peças encaixam, mesmo que ache que é perda de tempo. Na segunda fase o autor aconselha ao acolhimento de muitas ideias para atacar o problema, mesmo que pareçam despropositadas. Para facilitar a emergência dessa grande quantidade de ideias dá as seguintes sugestões: procurar semelhanças com outros jogos e problemas; tentar simplificar o problema, resolvendo outros com menos elementos; experimentar e procurar regularidades, temas; fazer um esquema e, se for útil, pintá-lo; modificar o enunciado; escolher uma boa notação; explorar a simetria, se possível; pensar onde nos leva considerar "Suponhamos que não"; supor o problema resolvido para explorar as relações entre os elementos dados e os procurados; pensar em técnicas gerais usadas por grandes matemáticos: princípio de indução de Pascal, processo diagonal de Cantor, princípio do pombal de Dirichlet. No terceiro passo Guzmán sugere a exploração das melhores ideias sem as misturar a princípio. Aconselha a persistência até determinado ponto, em que se deve mudar de abordagem. A última fase engloba a reflexão sobre o processo, tentando perceber não só que as coisas de facto funcionam mas porque têm de funcionar assim. Nesse ponto o autor incentiva a verificar se não existe um caminho mais simples. Sugere também uma análise do processo utilizado de modo a poder vir a ser útil no futuro e ainda uma reflexão sobre o seu próprio processo de pensamento de modo a fazer um diagnóstico do seu estilo pessoal de conhecimento, analisando por exemplo se é mais visual ou analítico, se tem tendência para pensar em círculos, obsessivamente, se se fixa numa ideia única ou se tem flexibilidade para procurar outro caminho podendo desenvolver um fluxo de ideias variadas, novas, originais.

Este modelo é útil por explicitar com bastante pormenor algumas ações que poderão ser tomadas no sentido de avançar no ataque a um problema. Em particular, o esquema metacognitivo avançado na última fase poderá ajudar o solucionador a conhecer o seu estilo de pensamento e assim ser capaz de tomar decisões e refinar ações no futuro. O modelo é complementado com algumas notas que poderão ultrapassar alguns bloqueios culturais e afetivos e consequentemente permitir abordagens mais frutíferas. São exemplos disso as seguintes formulações: 1. *Procura a solução correta*. Muitas vezes, os problemas podem ter muitas soluções corretas, mas esta ideia faz com que a pessoa não queira progredir mais ao encontrar um modo de resolver, mesmo que não seja o mais adequado, elegante, original ou

geral; 2. *Temos de ser práticos*. O pragmatismo não deixa dar asas à imaginação; 3. *É mau uma pessoa enganar-se*. Esta ideia é impeditiva de avançar correndo embora alguns riscos, porque nos leva a fazer apenas aquilo em que estamos seguros, que são poucas coisas; 4. *Não sejas infantil*. Jogos são coisas de crianças. E no entanto, é ao jogar, cultivando o pensamento ambíguo, fazendo algumas loucuras, que surgem por vezes as ideias geniais.

A fase (b) do modelo de Guzmán, bem como a do modelo de Polya, envolve a procura de estratégias, discriminando os autores algumas mais usuais. Aqui chegados temos de referir que há autores que consideram que estratégias muito genéricas, independentes dos tópicos matemáticos, não serão provavelmente eficazes na abordagem de um problema de álgebra ou de geometria (e.g. Cai & Lester, 2010). Estes autores preconizam que a resolução de problemas é uma parte integrante da aprendizagem da matemática, não sendo considerada como um tópico separado no currículo, mas como um meio para o ensino de conceitos e competências matemáticas. No entanto, outros autores mostram, com base em resultados de investigação, a importância do conhecimento de estratégias diversificadas no desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas em todos os níveis de dificuldade ou complexidade, desde a matemática elementar até à avançada (Schoenfeld, 1992). Vale e Pimentel (2004) definem estratégias como ferramentas que, a maior parte das vezes, se identificam com processos de raciocínio e que podem ser bastante úteis em vários momentos do processo de resolução de problemas, defendendo que o conhecimento matemático e as estratégias de raciocínio devem ser aprendidas e usadas em simultâneo e não isoladamente (e.g. fazer um desenho, fazer uma lista organizada, descobrir um padrão, proceder por tentativa e erro, trabalhar do fim para o princípio). Consideramos que a aquisição de um reportório de estratégias viáveis - e já anteriormente conhecidas e aplicadas - constitui um corpo de conhecimento em ação que: (a) ajuda os alunos a abordar o problema e a descobrir um caminho; (b) pode ser uma alternativa ao uso direto de conceitos que o aluno não possui ou não estão acessíveis; e (c) facilita muitas vezes a interpretação das situações. Além disso, o envolvimento dos alunos com problemas procurando vários modos de resolução permite-lhes compreender que um problema pode ser abordado de muitos modos diferentes e com a utilização de várias estratégias, conduzindo a soluções criativas.

O modelo de Guzmán também se refere aos aspetos afetivos, que sabemos que podem condicionar positiva ou negativamente a capacidade de resolução de problemas. Conceções sobre a natureza e utilidade da matemática e sobre os problemas e suas resoluções, bem como uma crença fatalista sobre as próprias capacidades, podem ser debilitantes.

Da resolução de problemas à criatividade

A criatividade em matemática é um tema muitas vezes negligenciado e considerado impossível de prosseguir nas aulas de matemática; mas, em vez disso, defendemos que envolve um conjunto de capacidades que podem ser ensinadas e aprendidas pelos alunos.

Um dos contextos em que o pensamento criativo tem um papel crucial é o da resolução de problemas. Pode assumir-se que as tarefas que possibilitam múltiplas resoluções, o recurso a diferentes representações e envolvem diferentes propriedades de um conceito matemático, são aquelas que têm um maior potencial criativo (e.g. Leikin, 2009; Vale, Barbosa & Pimentel, 2014).

A flexibilidade, uma das caraterísticas da criatividade, exige uma mudança no "olhar" para as situações, opondo-se à fixação. As intuições que conduzem a soluções de problemas curtas e elegantes são denominadas experiência *Aha*. O momento Aha, também designado por efeito Eureka, é a compreensão súbita de um problema ou conceito previamente incompreensível, com passagem da escuridão total a uma situação clara e óbvia.

> De repente tudo se ilumina. No tempo que demora a acender uma luz a resposta surge e tudo passa a fazer sentido. Acaba de ser resolvido um problema, ou descoberta uma nova peça matemática, e isso aconteceu num flash de intuição, num momento de iluminação, numa experiência AHA! (LILJEDAHL, 2005, p. 219).

Ninguém sabe explicar exatamente o que acontece na mente da pessoa que tem uma intuição válida deste tipo. Sabe-se que estas acontecem inesperadamente, muitas vezes quando a pessoa não está a pensar no assunto mas a fazer outra coisa qualquer. Este processo é descrito (Gardner, 1990) como um salto criativo da mente, que "vê" a situação de uma forma muito mais simples, conseguindo assim resolver um problema que, usando métodos convencionais, se revela difícil. Esta capacidade desenvolve-se resolvendo problemas e habituando-se a olhar para eles de modo não convencional. A teoria Gestalt explica estes momentos de insight pela capacidade de pensamento produtivo: ser capaz de reestruturar a informação de modo a ver para além do que é dado, ultrapassando uma atitude cega de mera reprodução (Wertheimer, 1959). Para Wertheimer, a compreensão da estrutura de um problema não é um processo cognitivo mas percetual; *ver* a estrutura de um problema significa também ver a sua resolução, isto é, as operações que é preciso percorrer para o resolver.

Gardner (1990) apresenta um modelo que pode servir de guia para desenvolver o pensamento Aha: (a) O problema pode ser resolvido de um modo mais simples?; (b) O problema pode ser transformado num problema isomorfo mais fácil de resolver?; (c) Consegue inventar um algoritmo simples para resolver o problema?; (d) Pode aplicar um teorema de outro ramo da matemática?; (e) Pode verificar o resultado com bons exemplos ou contraexemplos?; (f) Há, no problema dado, aspetos irrelevantes para a sua solução que possam enganar o leitor?

Apresentamos de seguida dois exemplos clássicos de problemas deste género, embora não nos dediquemos à sua exploração com os alunos, pois são problemas de tipo puzzle que exigem um Aha que ultrapassa os objetivos e o âmbito do nosso estudo. Contudo, os exemplos 2 e 3 apresentados mais à frente e utilizados no nosso trabalho envolvem também claramente a experiência Aha.

Construir 6 quadrados com os 12 fósforos:

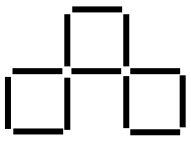

Figura 1
Problema de Aha 1

O pensamento Aha subjacente é que não se exige que a representação seja no plano. No espaço tridimensional os 12 fósforos podem constituir as 12 arestas dum cubo formando assim 6 quadrados.

> Nadando debaixo de uma ponte vinham dois patos à frente de outros dois, dois patos atrás de outros dois, e dois patos no meio.
> Quantos patos havia no mínimo no total?

Figura 2
Problema de Aha 2

A maior parte das pessoas organiza espontaneamente os patos lado a lado horizontalmente vendo três filas de dois num total de 6 patos. O pensamento Aha, neste caso, consiste em libertar-se da organização horizontal habitual e ver 4 patos em fila.

Vários aspetos do modelo de Guzmán de resolução de problemas fornecem muitas pontes com a criatividade, designadamente quando o autor aconselha o acolhimento de muitas ideias, mesmo que absurdas, e quando aconselha a mudar de rumo ao fim de tentar persistentemente sem frutos um caminho.

O que faz com que uma resolução seja criativa é, conforme sugere Presmeg (2014), o facto de ser necessário quebrar o esquema mental usual, por exemplo, que sugere o uso de fórmulas quando a palavra «área» é apresentada, de modo a procurar um método de resolução visual mais frutífero e simples.Também a descrição da experiência Aha tem muitos pontos de contacto com a criatividade: Gardner refere-se a um salto criativo da mente ao procurar uma abordagem do problema diferente da tradicional; Wertheimer fala em pensamento produtivo ao invés de reprodutivo. E com efeito, as três vertentes mais importantes da criatividade são: a *fluência*, capacidade de produzir um grande número de resoluções para a mesma tarefa; a *flexibilidade*, capacidade para produzir modos diferentes de resoluções organizadas em diversas categorias; e a *originalidade*, capacidade de pensar de forma não usual, produzindo ideias novas e únicas.

A importância da estratégia *procurar ver*

É um facto conhecido que muitos matemáticos, quando imersos em pensamentos, muitas vezes evitam não só usar palavras, mas também símbolos algébricos ou outros, preferindo concentrar-se em imagens. George Pólya (1945) também escreveu sobre o importância dos aspectos visuais do pensamento matemático e da resolução de problemas. Pólya propõe um conjunto de estratégias para sucesso na resolução de problemas. Uma das mais proeminentes nesta lista de sugestões é *fazer um desenho,* que Pólya via como um bom conselho geral.

Na visão de Schoenfeld (1992) as heurísticas de Polya não produziram os resultados esperados como auxiliares da resolução de problemas por serem demasiado genéricas, preconizando este autor a necessidade de desenvolver nos alunos um maior número de estratégias mais específicas, mais ligadas a determinadas categorias de problemas. Ora existe

um conjunto de problemas, normalmente de natureza ou contexto visual, que têm grande potencial para resoluções visuais. É para esses problemas que propomos, na linha de Schoenfeld, a utilização de uma estratégia complementar e específica, que denominamos *procurar ver*. Esta envolve uma actividade que pode associar-se ao leque mais tradicional de estratégias (e.g. fazer um desenho, reduzir a um problema mais simples, descobrir um padrão). A estratégia *procurar ver* não substitui nenhuma outra, é antes um modo de abordagem que nem sempre é incentivado e que pode ser muito produtivo. Com vista à sua apropriação pelos alunos, defendemos, não um ensino prescritivo de estratégias, mas a sua análise de modo natural em sala de aula, e sempre que se proporcione, quer pelo professor quer através da partilha de estratégias usadas pelos colegas. E neste domínio verifica-se que nem sempre se privilegia nas aulas de matemática o recurso a estratégias visuais (Stein & Lane, 1996; Vale & Pimentel, 2013).

Em que consiste esta atividade? Segundo Tünde (2005) a visualização é o tipo de atividade de raciocínio baseada no uso de elementos visuais ou espaciais, quer sejam mentais ou físicos, utilizados para resolver problemas ou provar propriedades, e compreende quatro elementos principais: imagens mentais; representações externas; processo de visualização; e habilidades de visualização. As imagens mentais são representações cognitivas de um conceito ou propriedade matemática através de elementos visuais ou espaciais. As representações externas são representações verbais ou gráficas de conceitos ou propriedades incluindo imagens, desenhos ou diagramas, etc., que ajudam a transformar imagens mentais em raciocínio visual. O processo de visualização é uma ação física ou mental em que as imagens mentais estão envolvidas. Finalmente as habilidades de visualização ajudam a executar os processos anteriores. Na mesma linha encontra-se Presmeg (2014) quando refere a utilidade de meios visuais de resolução de problemas, incluindo não só registos sob a forma de imagem, mas também representações espaciais mais abstractas, envolvendo gráficos e padrões.

Fujita e Jones (2002) defendem que é essencial ter *olho geométrico* – o poder de ver propriedades geométricas a separar-se de uma figura - ferramenta essencial para a construção da intuição geométrica. Este poder é desenvolvido com a realização de tarefas práticas tais como desenhar e fazer medições em figuras geométricas. Por outro lado, a intuição geométrica ou espacial é poderosa não só em temas geométricos mas noutros que o não são. O uso de imagens visuais pode ser uma ajuda importante para todos os tipos de problemas, incluindo problemas em que a componente visual não é evidente. Nestes casos, a visualização pode suscitar o desenvolvimento da intuição e a capacidade de estabelecer novas relações produzindo assim o corte em fixações mentais que possibilita o pensamento criativo.

Estudos em ciência cognitiva sobre os processos de resolução de problemas mostram que, embora uma representação visual possa conter a mesma quantidade de informação que uma outra representação, pode tornar-se por esse facto mais explícita. No entanto, é precisamente porque as representações visuais podem conter tanta informação que podem ser difíceis de interpretar, construir, ou usar, isto é, apresentam algumas dificuldades para os alunos envolvidos na resolução de problemas matemáticos. A dificuldade parece residir no facto de um diagrama poder ser muito complexo, o que pode não ser imediatamente compreensivel para alunos não iniciados no uso de representações visuais. Deste modo há

necessidade de os alunos serem confrontados com um ensino explicito que coloque estas capacidades visuais em evidência.

As dificuldades associadas ao uso de representação visuais podem desempenhar um papel na aparente relutância de muitos alunos em usá-las.

Lowrie e Clements (2001) referem que os psicólogos e educadores matemáticos interessados nas estratégias de resolução de problema de matemática classificaram os solucionadores como pertencentes a uma de três categorias: 1) visuais, que têm preferência por uma abordagem holística envolvendo extensa utilização de métodos visuais; 2) não visuais ou verbais, que têm uma preferência por abordagens mais verbais; e 3) aqueles que tendem a usar os dois métodos, visuais e não visuais (Krutetskii, 1976; Presmeg, 1986).

Alguns estudos (e.g. Clements & Del Campo, 1989) mostram que os estudantes ensinados de uma forma visual tendem a aprender a usar métodos visuais. Dependendo dos problemas e dos esquemas de pensamento dos solucionadores, o raciocínio visual pode ser mais eficiente (ou menos eficiente) do que o raciocínio que emprega modos mais verbais/não visuais de pensamento. Neste sentido, a atividade de "ver" é algo que se pode criar, desenvolver, aprender.

Os alunos muitas vezes tendem a usar caminhos algébricos de processamento de informação em detrimento dos visuais, mesmo quando os primeiros são mais complicados - uma tendência que muitas vezes leva a resultados desastrosos, porque esses alunos não têm conhecimentos matemáticos para dar uma análise completa dos problemas (e.g. Eisenberg & Dreyfus, 1991).

Presmeg (1986) conclui, através de estudos de sala de aula, que os estudantes do ensino médio que têm melhor desempenho em matemática são quase sempre não visuais, enquanto que os alunos que mostram uma preferência pela visualização são muitas das vezes os que apresentam mais dificuldades em matemática. Como explicação, a autora sugere que no currículo tradicional e ênfase da instrução é colocada em métodos não visuais, deixando os alunos com tendência visual em posição de desvantagem.

Assim, a investigação confirma que a visualização pode desempenhar um papel de apoio no problema a resolver e também, por outro lado, que apresenta desafios para muitos estudantes. Torna-se assim necessária uma melhor compreensão do papel da visualização na resolução de problemas bem sucedida, especialmente como e quando são usadas representações visuais em resolução de problemas e como é que as dificuldades inerentes são superadas para alcançar o sucesso. Arcavi (2003) identifica três dos papéis que a visualização pode desempenhar no processo de aprendizagem da matemática: (a) apoio e ilustração de resultados de natureza simbólica (e eventualmente constituir prova de pleno direito): (b) um modo possível de resolver o conflito entre soluções simbólicas (corretas) e intuições (incorretas); e (c) uma maneira de destacar bases concetuais que poderiam ser facilmente ignoradas através de resoluções formais.

Chegamos assim à confluência dos três domínios – resolução de problemas, visualização e criatividade: a ação de procurar ver, adotada como estratégia de resolução de problemas, passível de ser ensinada e desenvolvida, a suscitar o raciocínio visual associado à intuição, à experiência Aha, à capacidade de inventar e ao pensamento divergente, características essenciais do pensamento criativo.

Concretizando algumas ideias

Apresentamos de seguida três exemplos de tarefas de resolução de problemas que foram trabalhados com futuros professores em formação, numa disciplina do âmbito da Didática da Matemática; esta experiência foi efetuada antes de trabalhar com a visualização de um modo mais formal.

O primeiro exemplo surge num contexto não visual, ajustando-se assim à ideia acima defendida de que o uso de imagens visuais pode ser uma ajuda importante para todos os tipos de problemas, incluindo aqueles em que a componente visual não é evidente. Os dois exemplos seguintes são do domínio da geometria, tendo assim uma componente visual mais notória, embora, como veremos, quase nunca os alunos a explorem de uma forma eficaz e produtiva.

Exemplo 1

Este é um exemplo de um problema clássico que normalmente surge no trabalho com álgebra e tradicionalmente só pode ser trabalhado quando os alunos dominam as ferramentas algébricas – resolução de equação ou sistema de equações. No entanto, ele poderá ser abordado com sucesso por alunos mais novos que não dominam a álgebra se lhe for sugerida ou por iniciativa própria seguirem uma abordagem visual.

> Um agricultor tem na sua quinta vacas, cavalos e patos. O número de vacas é o dobro do número de cavalos. O número de patos é o quíntuplo do número de cavalos. No total os animais têm 44 patas. Descubra o número de vacas, cavalos e patos.

A abordagem tradicional consiste em estabelecer e resolver um sistema de três equações a três incógnitas, como se apresenta de seguida.

$$\begin{cases} V = 2C \\ P = 5C \\ 4V + 4C + 2P = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ 8C + 4C + 10C = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ 22C = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ C = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V = 4 \\ P = 10 \\ C = 2 \end{cases}$$

A resposta é então 4 vacas, 10 patos e 2 cavalos.

Contudo, o problema é facilmente resolvido por alunos de níveis iniciais que ainda não sabem resolver equações e sistemas uma vez que, recorrendo a um desenho e utilizando uma lista organizada em relação ao número de patas, facilmente se chega ao resultado. A álgebra é uma ferramenta poderosíssima na resolução de problemas, mas alunos dos primeiros anos de escolaridade podem recorrer a um processo visual como o que se apresenta a seguir, mais intuitivo mas igualmente válido.

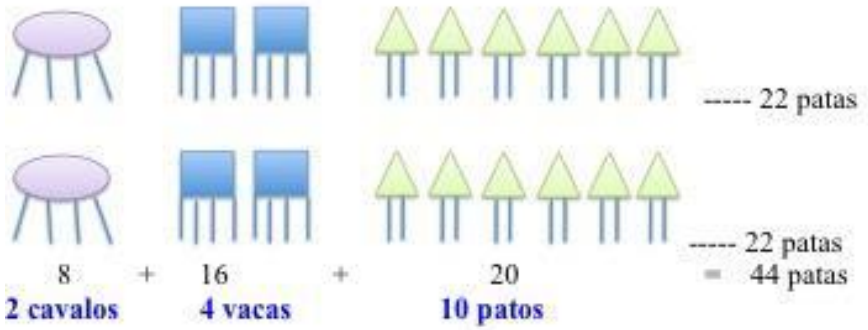

Figura 1. Resolução visual do problema dos animais

Com os alunos, futuros professores, com quem trabalhamos os resultados foram os expectáveis para este nível etário: a estratégia mais utilizada foi o recurso a um sistema de equações; contudo, 40% dos alunos utilizou tentativa e erro.

Exemplo 2

Um terreno quadrado tem construídas 4 torres de observação nos seus vértices. Os seus donos querem ampliar o terreno para um de área dupla, mas mantendo-lhe a forma quadrada. Como vão proceder?

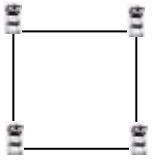

Figura 2. Problema da duplicação da área do quadrado

Este problema, que visa a obtenção de um quadrado de área dupla da dum quadrado inicial, pode ser abordado através de duas perspetivas diferentes: uma, mais algébrica, apoia-se na manipulação de fórmulas conhecidas; a outra recorre exclusivamente ao pensamento visual.

A resolução algébrica correta mais frequente utiliza fórmulas. Considerando ℓ o lado do quadrado inicial e y o do final:

$$A = \ell^2$$
$$A' = 2\,\ell^2$$
$$y = \sqrt{2}\,\ell$$

Alguns alunos seguem este caminho mas apenas para um caso particular, medindo o lado ou fazendo uma suposição do seu comprimento.

Há alunos que fazem apenas uma descrição dos passos a percorrer, como segue:

- Medir o lado do terreno
- Calcular a área do terreno
- Multiplicar por 2 a área para obter a área do novo terreno
- Fazer a raiz quadrada desse valor para determinar o lado do novo terreno

Vários alunos apresentam um desenho como o que se mostra na Figura 3:

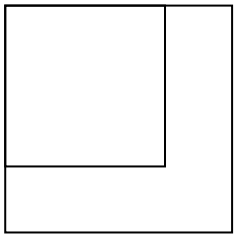

Figura 3. Desenho que acompanha a resolução

Os dados mostram que apenas uma pequena percentagem dos alunos apresentou uma resolução visual correta. Nalguns casos, aparece apenas o desenho, elucidativo, como se ilustra na Figura 4:

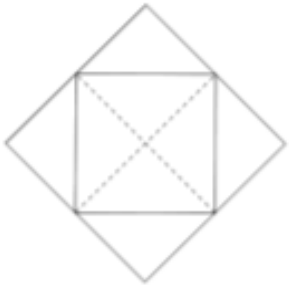

Figura 4. Resolução visual do problema da duplicação da área

Destes, alguns apresentaram os dois tipos de resolução. O trabalho evidencia que começaram pela resolução algébrica, e descobriram posteriormente a resolução visual. Na divisão do quadrado pelas duas diagonais fica explícita a sua decomposição em 4 triângulos; assim, para duplicar a área, o novo quadrado deverá ser composto por 8 desses triângulos.
Destaca-se um caso em que, não tendo sido apresentada a resolução visual anterior, há evidência de uma compreensão visual profunda. A aluna começa por obter, por um processo algébrico idêntico ao que se apresenta acima, o valor $\sqrt{2}$ x para o novo lado, a partir do lado inicial x, e, identificando este resultado, faz em seguida a associação com o Teorema de Pitágoras e consequente interpretação geométrica, como se ilustra na Figura 5 acrescentando a explicação: "A diagonal do quadrado inicial passa a ser o lado do quadrado final".

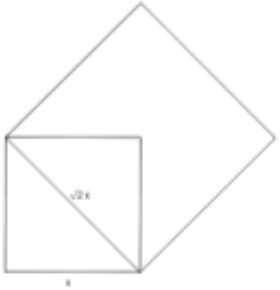

Figura 5. Resolução algébrica com complemento visual

O problema acabou por se revelar mais complexo do que pensávamos à partida. As resoluções foram separadas em várias categorias, como segue na Figura 6:

Não apresenta qualquer trabalho ou o trabalho apresentado não é relevante.	9%
Resolução incorreta (exemplo: duplica o lado; duplica a área e em seguida divide por 4 para obter o lado).	33%
Resolução correta para um caso particular (normalmente mede o lado; calcula a área; duplica o valor; e extrai a raiz quadrada).	16%
Resolução algébrica geral. Responde que o novo lado se obtém multiplicando o original pelo fator $\sqrt{2}$ (ou 1,4).	28%
Tentativa de resolução visual (p.e. traça as diagonais do quadrado original)	9%
Resolução visual correta	12% *

*A soma ultrapassa 100% porque alguns alunos apresentaram duas soluções.

Figura 6. Resultados do Exemplo 2

Do exposto podemos inferir que os alunos, de modo geral, preferem e optam por resoluções algébricas, muitas das vezes aplicadas cegamente, sem qualquer conexão ou indício de compreensão visual. Embora tenhamos de atender aos diferentes tipos de pensamento, mais analítico ou mais visual, no número de resoluções a balança pende demasiado para um lado, mostrando uma preponderância de abordagens analíticas na matemática escolar, em detrimento do pensamento visual, o que indicia uma valorização dos aspetos analíticos por parte dos professores e dos currículos.

Exemplo 3

Determine a área da figura sombreada, formada por um quarto de círculo e dois semicírculos. Explique como resolveu.

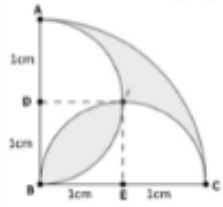

Figura 7. Problema da área sombreada

Uma resolução algébrica expectável é do tipo que se apresenta. Baseando-se nos dados da figura e decompondo-a em outras pode-se chegar à solução recorrendo a diferentes fórmulas da área de figuras, sejam círculos, quadrados ou triângulos.

A área da parte sombreada é dada pela soma das áreas X e de Y (Figura 8).

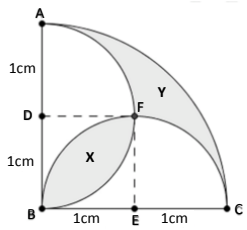

Figura 8. Resolução do problema da área sombreada (1)

A área de Y pode ser calculada retirando à área do quarto de círculo de raio 2cm as áreas dos dois quartos de círculo de raio 1cm e do quadrado de lado 1cm. Ou seja

$$A_Y = \frac{\pi.2^2}{4} - \left(\frac{\pi.1^2}{4} + \frac{\pi.1^2}{4} + 1^2\right) = \frac{\pi}{2} - 1$$

Para calcular a área de X podemos dividir X em dois segmentos Z e W iguais (Figura 9), em que a área de cada um se obtém retirando à área do quarto de círculo de raio 1 cm a área do triângulo retângulo isósceles de lado 1cm.

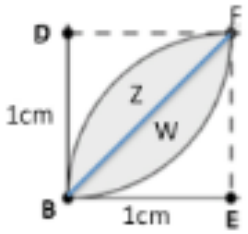

Figura 9. Resolução do problema da área sombreada (2)

Ou seja, $A_X = A_Z + A_W = 2A_Z = 2\left(\frac{\pi.1^2}{4} + \frac{1\times1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$

Logo, $A_Y + A_X = \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{\pi}{2} - 1 = \pi - 2$

A área pedida é pois $(\pi - 2)$ cm^2.

E foi esta a estratégia utilizada por 72% dos alunos, de acordo com os resultados apresentados na Figura 10.

Resolução do cálculo da área não sombreada (erro o cálculo da área de X na aplicação do T- Pitágoras)	12%
Resolução correta do cálculo de área de partes da figura (p.e. área do quarto de círculo de centro D/E e centro B).	50%
Resolução visual correta (resolução dinâmica)	38%

Figura 10. Resultados do Exemplo 3

Pode-se constatar que apenas 38% utilizou uma resolução que, obviamente baseada nos dados da figura, vai mais além. Estes alunos apresentaram uma resolução que designamos por dinâmica, pois envolve deslocação de partes da figura obtendo uma visualização diferente do todo, de modo a que a resolução se tornou mais simples e mais elegante (Figura 11)

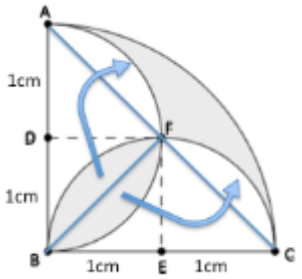

Figura 11. Resolução visual do problema da área sombreada

Deste modo, calcula-se de forma mais rápida e simples a parte sombreada retirando à área de um quarto de círculo de raio 2 cm a área do triângulo retângulo de catetos 2 cm.

$$A_{somb} = \frac{\pi.2^2}{4} - \frac{2\times2}{2} = \pi - 2$$

Ou seja, a área pedida é $(\pi - 2)$ cm^2.

Os resultados obtidos pelos alunos nestes três exemplos identificam-se com os processos mais utilizados pelos alunos e vão ao encontro do que é referido em diversos estudos (e.g. Eisenberg and Dreyfus, 1991; Presmeg, 2014), confirmando-se neste caso que a maioria dos alunos, quando tem hipótese de escolher o processo de resolução de uma tarefa, não opta pela via da visualização, preferindo os métodos algébricos, e encaixando-se assim na categoria dos *não visuais*.

Os exemplos 2 e 3 mostram que os problemas podem ser resolvidos por vias mais tradicionais – que são as que os alunos preferem; contudo, verifica-se a existência de algumas resoluções que envolvem a experiência Aha. Na verdade, tanto num como noutro caso a estratégia *procurar ver* permite uma abordagem flexível ao problema que conduz a uma solução muito mais concisa e elegante (LILJEDAHL, 2005).

Considerações finais

Embora alguns problemas possam ser resolvidos de forma eficiente usando tanto uma abordagem visual como uma não visual (e.g. Eisenberg & Dreyfus, 1989; Presmeg, 1986), teremos de ter em conta, em cada caso, o tipo de problema, a complexidade, a novidade, o conhecimento matemático envolvido, para compreender cabalmente a razão pela qual cada pessoa resolve um problema de uma forma particular.

Verificou-se que os alunos que usam estratégias visuais fazem-no normalmente depois de uma maior análise e reflexão sobre o problema, e até, nalguns casos, como segunda via de resolução que descobrem posteriormente, como experiência Aha, e consideram mais bonita ou elegante. Este motivo vem reforçar uma abordagem, já por nós utilizada, que consiste em solicitar aos alunos a apresentação de mais do que uma resolução.

Podemos inferir que as estratégias visuais, em certas ocasiões, são eficientes no sentido de que ajudam o solucionador na organização e compreensão mais profunda das questões que se colocam com a tarefa e da própria estrutura matemática subjacente ao problema. Em tais casos, o processamento visual torna-se uma componente importante do processo de resolução de problemas, particularmente quando o problema exige ou aconselha a identificação de componentes e a sua reformulação num todo diferente. O ser capaz de ver os dados de outro modo, reorganizando-os de maneira pessoal, manifesta pensamento flexível e original, caraterísticas da criatividade. Deste modo, podemos afirmar que as abordagens que recorrem a representações visuais suscitam o desenvolvimento do pensamento criativo (Presmeg, 2014).

O nosso trabalho tem incidido, numa primeira fase, sobretudo em alunos com um percurso escolar avançado, contribuindo para que não optem por processos visuais, uma vez que durante o seu percurso de aprendizagem este tipo de abordagem não era valorizado pelos professores. É nossa convicção que, com alunos mais novos sem esta marca de escolarização e com um ensino que recorra a tarefas em que sejam postas em evidência as potencialidades desta abordagem, os alunos poderão recorrer a estas estratégias de uma forma mais sistemática, colhendo frutos a nível do desenvolvimento do espírito crítico e da criatividade. Na verdade, os professores têm um papel determinante na influência das escolhas dos alunos em termos de abordagens de resolução de problemas.

Referências

ARCAVI, Abraham. The role of visual representations in the learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics, 52**, 215-241, 2003.

TÜNDE, Berta. Space perception abilities (and space geometrical problem solving) in a group of 3rd year university teacher students. **Promat 2005 Conference Proceedings**, 2005, pp. 1-16.

BRANCHINI, Erika; SAVARDI, Hugo; BIANCHI, Ivana. Productive Thinking: The Role of Perception and Perceiving Opposition. **Gestalt Theory, Vol. 37**, No.1, 7-24, 2015.

CAI, Jinfa & LESTER, Frank. Why is teaching with problem solving important to student learning **Research Brief, 14,** 1-6, 2010.

CLEMENTS, MA; DEL CAMPO, Gina. Linking verbal knowledge, visual images, and episodes for mathematical learning. **Focus on learning problems in mathematics, 11** (1-2), 25-33,1989.

EISENBERG, Ted; DREYFUS, Tommy. On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann and S. Cunningham (Eds.), **Visualization inTeaching and Learning Mathematics**. Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 1991, pp. 25-37.

FUJITA, Taro; JONES, Keith. The Bridge between Practical and Deductive Geometry: developing the "geometrical eye". In A. D. Cockburn and E. Nardi (Eds.), **Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, **Vol 2,** pp.384-391. UEA, UK, 2002.

GARDNER, Martin. **Ah, descobri!** Lisboa: Gradiva, 1990.

GARDNER, Martin. **Ah, apanhei-te!** Lisboa: Gradiva, 1993.

GUZMÁN, Miguel. **Aventuras matemáticas.** Lisboa: Gradiva, 1990.

KRUTETSKII, Vadim. **The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.** Chicago, University of Chicago Press, 1976.

LEIKIN, Rosa. Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman and B. Koichu (Eds.), **Creativity in mathematics and the education of gifted students** (pp. 129-145). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers, 2009.

LILJEDAHL, Peter. Mathematical discovery and affect: the effect of AHA! experiences on undergraduate mathematics students. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 36**, Nos. 2–3, 2005, 219–235.

LOWRIE, Tom; CLEMENTS, MA. Visual and nonvisual processes in Grade 6 students' mathematical problem solving. **Journal of Research in Childhood Education, 16(1),** 71-97, 2001.

NCTM. **Principles to actions: ensuring mathematical success for all.** Reston: NCTM, 2015.

POLYA, George. **How to solve it.** Princeton, NJ: Princeton University Press, 1945.

PRESMEG, Norma. Visualization in high school mathematics. **For the learning of mathematics, 6(3)**, 42-46, 1986.

PRESMEG, Norma. Creative advantages of visual solutions to some non-routine mathematical problems. In Carreira S., Amado, N., Jones, K., & Jacinto, H. (Eds.), **Proceedings of the Problem@Web International Conference: Technology, Creativity**

and Affect in mathematical problem solving (pp. 156-167). Faro, Portugal: Universidade do Algarve, 2014.

SCHOENFELD, Alan. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), **Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics** (pp. 334-370). New York, NY: Macmillan Publishing Co, 1992.

STEIN, Mary Key; LANE, Suzanne. Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. **Educational Research and Evaluation, 2(1)**, 50-80, 1996.

VALE, Isabel; PIMENTEL, Teresa. Resolução de Problemas. Em Pedro Palhares (Coord.), **Elementos de Matemática para professores do ensino básico** (pp.7-51). Lisboa: Lidel, 2004.

VALE, Isabel; PIMENTEL, Teresa. Raciocinar com padrões figurativos. In A. Domingos, I. Vale, M. Saraiva, M. Rodrigues, M.C. Costa & R. Ferreira (Eds.), **Investigação em Educação Matemática 2013: Raciocínio Matemático** (pp. 205-222). Penhas da Saúde: SPIEM, 2013.

VALE, Isabel; BARBOSA, Ana; PIMENTEL, Teresa. Teaching and learning mathematics for creativity through challenging tasks. In Carreira S., Amado, N., Jones, K., & Jacinto, H. (Eds.), **Proceedings of the Problem@Web International Conference: Technology, Creativity and Affect in mathematical problem solving** (pp. 335-336). Faro, Portugal: Universidade do Algarve, 2014.

WERTHEIMER, Max. **Productive thinking.** New York and Evanston: Harper & Row Publishers, 1959.

Isabel Vale & Teresa Pimentel
Educação e Formação de Professores – Escola Superior de Educação – IPVC–- Portugal

E-mail: isabel.vale@ese.ipvc.pt
terpimentel@gmail.com