

Em direção à Generalização: Contribuições de um Problema com Múltiplas Estratégias de Resolução

Towards the generalization: contributions of a problem with multiple solving strategies

Norma Suely Gomes Allevalo
Universidade Cruzeiro do Sul – UNICSUL – Brasil

Gilberto Vieira
Universidade Cruzeiro do Sul – UNICSUL – Brasil

RESUMO

A resolução de problemas, como estratégia de ensino de Matemática, vem se constituindo como uma importante abordagem didática. Neste artigo pretende-se mostrar como a atividade investigativa, decorrente da proposição de um problema envolvendo visualização espacial e análise de padrões, pode contribuir para que alunos do sexto ano do Ensino Fundamental construam generalizações. Trata-se de uma pesquisa de natureza qualitativa, com o foco nas resoluções formuladas e discutidas pelos alunos em sala de aula. A análise dos dados revelou que o problema proposto e a abordagem utilizada pelo professor permitiu que os alunos empregassem diferentes estratégias e procedimentos. A socialização das diversas resoluções por eles formuladas possibilitou o desenvolvimento do pensamento matemático, com destaque para o processo de generalização, característico do pensamento algébrico.

Palavras-chave: Educação Matemática, Resolução de Problemas, Problemas Abertos, Generalização.

ABSTRACT

Problem solving, such as mathematics teaching strategy, is becoming an important didactic approach. This article aims to present how the investigations resulting from the proposition of a problem involving spatial visualization and analysis of patterns can contribute to the formulation of generalizations by students of the sixth grade of elementary school. This is a qualitative research, with a focus on the strategies of problem solving formulated and discussed by students in the classroom. Data analysis pointed out that the proposed problem and the approach used by the teacher allowed the students to employ different strategies and procedures. The socialization of their different resolutions made possible the development of mathematical thinking, highlighting the process of generalization, characteristic of algebraic thinking.

Keywords: Mathematics Education, Problem Solving, Open Problems, Generalization.

Introdução

Atualmente a escola tem se deparado com o desafio de atender novas demandas de formação de crianças e jovens. Esse desafio exige a formação para uma sociedade em transformação, plural, tecnológica e complexa, além de envolver um trabalho com grupos de estudantes cada vez mais heterogêneos, de perfis social, econômico e cultural diversos.

Diante desse cenário, as pesquisas em Educação Matemática têm apresentado avanços significativos no estudo e implementação de estratégias de ensino que possibilitem aos

estudantes a construção de conhecimento matemático e o desenvolvimento de habilidades e competências matemáticas exigidas pela sociedade contemporânea. O trabalho de Groenwald, Silva e Mora (2004) exemplifica essa diversidade de estratégias apresentando, como perspectivas atuais de ensino de Matemática, a resolução de problemas, a modelagem matemática, os jogos e curiosidades matemáticas, as novas tecnologias, a história da Matemática, a etnomatemática e o ensino por projetos de trabalho, todas contrapondo-se às práticas de ensino tradicionais de Matemática.

No presente artigo, nos ocuparemos em discutir as potencialidades do trabalho com a resolução de problemas em sala de aula, especialmente a resolução de problemas abertos. Pretendemos, em particular, mostrar como a atividade investigativa, decorrente da proposição de um problema aberto envolvendo a visualização espacial e a análise de um padrão, contribuiu para que alunos do sexto ano do Ensino Fundamental compreendessem e expressassem a generalização implícita na proposta do problema.

A observação de padrões, que no âmbito da resolução de problemas pressupomos envolver sua descrição e generalização, tem sido considerada uma abordagem relevante na transição da aritmética para a álgebra (MASON, 1996, apud VALE; PIMENTEL, 2011) e, longe de ser um tópico de pouco uso no mundo real, o raciocínio envolvido neste tipo de atividade perpassa toda a Matemática e é essencial para torná-la útil na vida cotidiana (VAN DE WALLE, 2009).

O problema que apresentamos integra uma sequência de tarefas elaborada e realizada no âmbito da pesquisa de Vieira (2016) acerca da utilização de tarefas exploratório-investigativas no ensino de Matemática.

Na próxima seção explanamos sobre a concepção de resolução de problemas que orienta nosso trabalho, tipificamos o que são problemas abertos e discutimos algumas de suas potencialidades para o ensino e aprendizagem de Matemática. Trazemos, em seguida, o contexto de realização da pesquisa aqui retratada, bem como os procedimentos metodológicos utilizados. Apresentamos, então, o problema proposto aos estudantes, analisamos e discutimos algumas de suas resoluções. Por fim, tecemos algumas considerações a respeito do trabalho empreendido.

Problemas Abertos como Desencadeadores de Investigações Matemáticas

A temática da resolução de problemas no ensino de Matemática tem se configurado como objeto de estudos e pesquisas há mais de setenta anos, destacando-se como marco inicial a obra intitulada *How to solve it?* (POLYA, 1945). A partir dos trabalhos de Polya, pesquisadores e professores passaram a dar maior ênfase à resolução de problemas nas aulas de Matemática, embora um olhar mais atento às práticas e orientações que se sucederam revele diferentes concepções acerca da expressão *resolução de problemas*.

Compartilhamos da concepção de Allevato e Onuchic (2014) que considera a resolução de problemas como uma metodologia de ensino. Nela, o ponto de partida das atividades de sala de aula é um problema. Esse problema é proposto, aos alunos, antes mesmo de lhes ter sido apresentado o conteúdo ou os recursos matemáticos mais apropriados ou pretendidos para a sua resolução. Assim, partindo de conhecimentos que já possui, o aluno se coloca em um processo que envolve esforço cognitivo na busca pela solução e, nesse

percurso, tem a oportunidade de aprender o conteúdo matemático que o professor pretende que ele aprenda e outros conteúdos eventualmente não previstos pelo professor.

Desse modo, o professor deve ter um cuidado especial no processo de seleção e/ou elaboração do problema que pretende propor aos estudantes. Diferentes tipos de problema podem suscitar diferentes abordagens. De acordo com Way (2005), alguns tipos de problema exigem a retomada de fatos e procedimentos, outros estimulam a utilização de diferentes estratégias, outros dependem de raciocínio lógico, outros apresentam múltiplas soluções e outros, ainda, demandam tomada de decisões e criatividade. Em relação aos problemas abertos, a autora afirma que eles apresentam maior potencial em estimular pensamento matemático de ordem superior, por envolverem a procura por padrões e relações entre os seus elementos. Cabe, nesse instante, clarificarmos o que vem a ser um problema aberto.

Contrapondo-se aos chamados problemas fechados – em que tanto a situação inicial, como o processo de resolução, como o objetivo final (resposta) do problema é pré-determinado –, nos problemas abertos, o processo de resolução é aberto ou o final é aberto ou a formulação de novos problemas é aberta. São problemas que partem de enunciados menos estruturados, permitem a formulação de diversos tipos de questões e possibilitam a realização de explorações em diferentes direções. Assim, os problemas abertos podem ser propostos como desencadeadores de processos de investigação matemática pelos alunos (ALLEVATO; VIEIRA, 2016, p. 121).

Contrastando com os problemas fechados, que apresentam uma única resposta correta e procedimentos de resolução pré-determinados, os problemas abertos caracterizam-se por apresentarem variadas soluções e estratégias de resolução e por propiciarem aos estudantes realizarem investigações.

De acordo com Takahashi (2005), os problemas abertos podem ser tipificados quando: 1) apresentam múltiplos métodos de resolução, ou; 2) apresentam múltiplas soluções, situação em que também são denominados como problemas de final aberto ou *open-ended problems*, ou; 3) possibilitam e direcionam à proposição e formulação de novos problemas, situação também denominada como *problem posing*.

Para Bustamante, Ribeiro e Navarro (2015), os problemas abertos correspondem a situações em que o aluno necessita elaborar diversas formas de resolução, podendo empregar diferentes mecanismos, de modo que a diversidade de estratégias empregadas pelos alunos pode condicionar o desenvolvimento do conhecimento matemático em questão.

O caráter aberto desses problemas possibilita sua associação a um outro tipo de tarefa característica na educação matemática: as tarefas investigativas. Segundo Ponte et al. (1998), as tarefas investigativas correspondem a situações que partem de questões iniciais, de um modo geral, vagas, e que vão sendo trabalhadas e gradativamente tornadas mais precisas pelo aluno. Elas apresentam como uma de suas características mais fortes exatamente o caráter aberto, que coloca o aluno em um processo de elaboração e criação, possibilitando a emergência de diferentes estratégias de resolução.

De fato, existem situações propostas no âmbito do ensino de Matemática que podem ser classificadas tanto como problemas abertos quanto como tarefas investigativas, dependendo do referencial teórico previamente assumido. Way (2005) considera que os problemas abertos podem ser percebidos por apresentarem objetivos mais bem delimitados, estando diretamente relacionados a um conteúdo e/ou habilidade matemática específica que se

pretenda trabalhar com os alunos, embora possam apresentar mais do que uma solução e múltiplas formas de resolução; já nas tarefas investigativas os objetivos tendem a ser menos específicos e, muitas vezes, o encaminhamento da atividade, bem como os tópicos matemáticos a serem discutidos durante a sua realização estão condicionados a problemas que são formulados e reformulados no próprio decurso da investigação.²¹

Porém, embora as diferenças entre problemas abertos e tarefas investigativas não se mostrem de forma evidente, é fato que essas tarefas podem levar os alunos a processos de investigação matemática. É importante esclarecermos, para evitar interpretações equivocadas, o uso que fazemos da expressão *investigação matemática*. Ao utilizarmos esta expressão, não estamos nos referindo às tarefas investigativas (modalidade específica de tarefa que pode ser proposta em sala de aula, apresentada na forma textual escrita ou na forma oral enunciada pelo professor), mas ao processo que compreende a procura metódica e consciente e a descoberta através de exame e observação minuciosos.

Pesquisas atuais têm revelado que os problemas abertos podem desencadear processos de investigação matemática em sala de aula, e os contributos dessa atividade têm sido extremamente valorizados por professores. Nos estudos de Ambrus e Barcsi-Veres (2016), os professores envolvidos afirmaram que o trabalho com problemas abertos em sala de aula, ao promover o desenvolvimento de diversas estratégias de resolução, possibilitou que os estudantes se defrontassem com diferentes soluções e oportunizou que os estudantes, partindo de situações particulares, chegassem às generalizações que eram esperadas.

No que se refere às contribuições que o trabalho com a resolução de problemas abertos pode apresentar para o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes, Sawada (1997), em seus estudos, já discorria sobre cinco aspectos que considerava relevantes: 1) os estudantes assumem uma postura ativa perante o problema que é proposto e procuram expressar suas ideias com maior frequência; 2) os estudantes têm oportunidade de colocar em prática o conhecimento matemático de que dispõem para escolher a estratégia de resolução que lhes pareçam mais adequada; 3) os problemas abertos propiciam o envolvimento de todos os estudantes; 4) através da comparação e discussão de suas resoluções os estudantes são estimulados a validar seu raciocínio e, conseqüentemente, desenvolvem seu pensamento matemático; e 5) os estudantes têm a oportunidade de vivenciar o prazer da descoberta.

Tendo em conta esses cinco aspectos, a proposição de problemas abertos em sala de aula passa a ser uma prática que merece ser considerada. Seu potencial em conduzir os alunos a processos de investigação vem corroborar a ideia de que se aprende matemática, fazendo matemática (ABRANTES et al., 1999; PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009; VAN DE WALLE, 2009).

Um aspecto de suma importância, relacionado ao trabalho com problemas abertos, refere-se ao momento em que os alunos comparam e discutem suas resoluções. Way (2005) aponta que o benefício de múltiplas soluções e estratégias é que elas propiciam uma rica fonte de material para discussão matemática que torna a experiência de aprendizagem mais profícua.

A esse momento de discussão de ideias e socialização de resultados Allevato e Onuchic (2014) também dedicam especial atenção. As autoras orientam que o trabalho com

²¹ Maiores esclarecimentos a respeito de relações e diferenças entre problemas e tarefas investigativas em sala de aula são apresentados em Vieira e Allevato (2012).

resolução de problemas deve contemplar um momento em que os alunos são convidados a apresentar, ao professor e aos colegas, suas resoluções (certas, erradas ou feitas por diferentes processos). Nesse momento, ao deparar-se com diferentes soluções e métodos, eles podem comparar estratégias, refletir sobre o trabalho empreendido, reformular hipóteses, defender seu ponto de vista, justificar conclusões e, assim, se colocar em um movimento de construção de conhecimento.

[...] Diante desse “painel de soluções”, o professor estimula os alunos a compartilhar e justificar suas ideias, defender pontos de vista, comparar e discutir as diferentes soluções, isto é, avaliar suas próprias resoluções de modo a aprimorar a apresentação (escrita) da resolução. Em sessão plenária, ou seja, em um esforço conjunto, professor e alunos tentam chegar a um consenso sobre o resultado correto. Esse é um momento em que ocorre grande aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemáticas e relevante construção de conhecimento acerca do conteúdo (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 46).

Salientamos, portanto, que o momento de discussão dos resultados não pode ser desprezado. Esse momento configura-se como uma importante etapa do processo de investigação matemática pois exige do estudante uma postura ativa, colocando-o no centro do processo de construção de conhecimento e possibilitando o desenvolvimento e aprimoramento de importantes habilidades, como as de comunicação (leitura e escrita) matemática, por exemplo.

Considerando o potencial apresentado pelos problemas abertos em promover investigações matemáticas e as contribuições que podem trazer ao processo de desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes, deduzimos que sua proposição em sala de aula pode configurar-se como uma exitosa alternativa metodológica para o ensino de Matemática. Imbuídos desse ideal, realizamos uma pesquisa acerca das investigações realizadas pelos estudantes, na qual elaboramos e propusemos uma sequência de ensino composta por tarefas exploratório-investigativas e problemas abertos. Na próxima seção, apresentamos o contexto de realização dessa pesquisa e os procedimentos metodológicos adotados para, em seguida, discutir a resolução de uma tarefa que configurou-se como um problema aberto devido à diversidade de abordagens que suscitou.

O Contexto da Pesquisa

A pesquisa aqui retratada foi realizada junto a uma turma de 35 alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, com idades entre 11 e 12 anos, de uma escola pública da cidade de São José dos Campos, interior do estado de São Paulo. O trabalho de campo consistiu na realização de uma sequência de tarefas envolvendo resolução de problemas abertos e investigações matemáticas. Abordaremos, neste artigo, a resolução de um problema envolvendo visualização espacial e generalização.

Para a realização da tarefa os alunos foram agrupados em duplas, procurando se estabelecer um ambiente que favorecesse o trabalho colaborativo, a troca de ideias e a argumentação em um movimento propício à produção de conhecimentos matemáticos. A atividade foi realizada em uma aula dupla com duração de aproximadamente 100 minutos.

Após a realização da atividade proposta, os alunos foram convidados a registrar suas soluções na lousa e discuti-las com os demais colegas de classe.

Apesar dos desafios e limitações que o trabalho com todos os alunos da sala poderia condicionar, a opção pelo trabalho com a totalidade dos alunos se deu pelo desejo de analisar um contexto real de ensino, próximo da realidade encontrada por outros professores da Educação Básica em suas aulas. É importante destacar que, nesta pesquisa, o pesquisador também era o professor de Matemática da turma. Segundo Zeichner (1998), a pesquisa realizada por professores revela-se como um importante e distinto meio de conhecer o ensino. Para o autor, os professores estão em situação privilegiada por atuarem diretamente no processo de ensino vivenciado na escola. Se, por um lado, essa proximidade com o objeto de estudo pode influenciar as ações e análises subsequentes (e esse é um cuidado que o professor-pesquisador deve tomar), por outro, pode revelar uma visão diferenciada do processo, destacando aspectos e qualidades que poderiam passar despercebidas a um observador externo.

A coleta de dados foi realizada através de observações (VIANNA, 2003), da gravação dos diálogos entre os alunos nos momentos de resolução e discussão do problema, e da recolha de suas resoluções escritas. Os diálogos foram gravados em áudio e, posteriormente, transcritos. Também foram analisadas as resoluções escritas do problema, registradas pelos alunos na lousa no momento de socialização dos resultados.

Para a análise dos dados, resultantes de todo o processo de resolução de problemas vivenciado pelos alunos, optamos por uma abordagem de natureza qualitativa, recorrendo a procedimentos de análise textual discursiva (MORAES; GALIAZZI, 2006). A organização e a análise cuidadosa dos diálogos dos alunos e de suas produções escritas possibilitaram-nos construir uma interpretação a respeito das contribuições que um trabalho investigativo decorrente da proposição de um problema aberto pode propiciar para a aprendizagem matemática. Apresentamos, na próxima seção, o problema que foi proposto aos estudantes, bem como descrições e análises do trabalho que se sucedeu.

A Pintura dos Cubinhos

Conforme já explicitado, assumimos a concepção de que o problema é o ponto de partida, o elemento disparador da atividade matemática que será desencadeada em sala de aula. Assim, inicialmente, cabe ao professor selecionar, ou mesmo elaborar, um problema que seja interessante, no sentido de propiciar aos estudantes a oportunidade de resolvê-lo e de aprender Matemática a partir dele. Quanto ao grau de dificuldade apresentado pelo problema, é preciso cautela para não se propor um problema cuja resolução se revele evidente, sob o risco de a tarefa proposta configurar-se como um mero exercício; por outro lado, problemas de resolução demasiadamente complexa podem desestimular e inibir o trabalho dos alunos. O desejável é pensar em um problema que permita aos estudantes, a partir da mobilização dos conhecimentos que já possuem, da reflexão e do diálogo com os pares, construir uma resolução e acessar o conteúdo matemático em questão.

Partindo desse pressuposto, apresentamos, na Figura 1 e nos questionamentos que se seguem, a proposta do problema que é objeto de discussão nesse artigo. Trata-se de um

problema envolvendo visualização espacial e generalização, adaptado do trabalho de Cunha (2009):

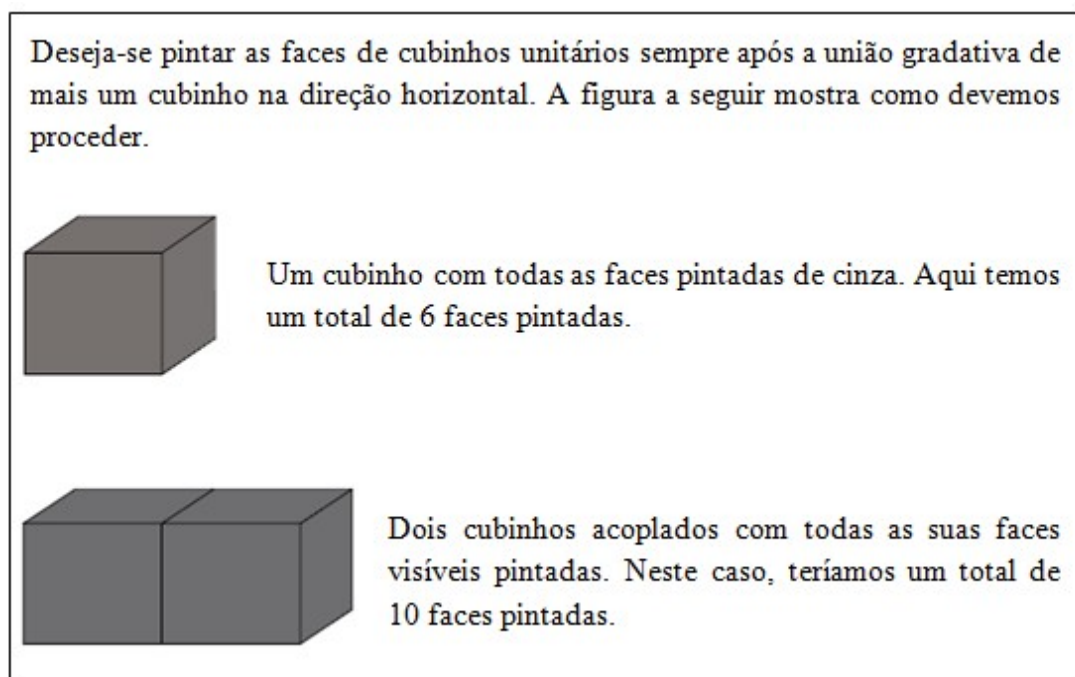


Figura 1

A essa introdução seguiram-se os questionamentos:

- a) *E se tivéssemos três cubinhos acoplados, quantas faces teríamos para pintar?*
 - b) *E se tivéssemos quatro cubinhos acoplados, quantas faces teríamos para pintar?*
 - c) *E se tivéssemos cinco cubinhos acoplados, quantas faces teríamos para pintar?*
 - d) *E se tivéssemos quinze cubinhos acoplados, quantas faces teríamos para pintar?*
- Explique o seu raciocínio.*

Embora esse problema apresente, para cada questionamento, apenas uma resposta correta, durante sua resolução os alunos empregaram estratégias e procedimentos diversos. Devido à multiplicidade de estratégias de resolução empregadas e, em consonância com o trabalho de Takahashi (2005), tipificamos esse problema como aberto.

A essa situação problema, os estudantes deveriam apresentar suas soluções, bem como os caminhos percorridos para encontrá-las, fosse por meio de um desenho, de um cálculo, ou mesmo com a explicação escrita do raciocínio utilizado.

Por se tratar de um problema aberto, as estratégias para a resolução não estavam determinadas. Percebemos que as duplas dialogavam bastante e procuravam chegar a um consenso quanto à maneira adequada de apresentar sua resolução, o que denotava o envolvimento dos alunos com a resolução dessa tarefa. Ao discutirem e procurarem explicar o seu raciocínio, os alunos assumiam uma postura ativa frente à atividade proposta, ou seja, eles procuravam elaborar suas próprias estratégias de resolução e não estavam preocupados em seguir um modelo pré-determinado. Essa postura contribuiu para a emergência de diferentes procedimentos de resolução.

Após a resolução do problema, os estudantes foram convidados a registrar suas soluções na lousa e a explicar aos colegas o raciocínio empregado na questão (d) relativa aos

quinze cubinhos acoplados. Nesse momento, tínhamos os objetivos de que eles comunicassem os resultados a seus pares apresentando suas justificativas e confrontassem as diferentes resoluções. Foi interessante perceber a variedade das resoluções apresentadas e a maneira como cada dupla buscou validar o seu raciocínio.

Um dos recursos utilizados pelos estudantes foi a representação da situação por meio de desenhos (representação pictórica), como podemos observar na Figura 2:

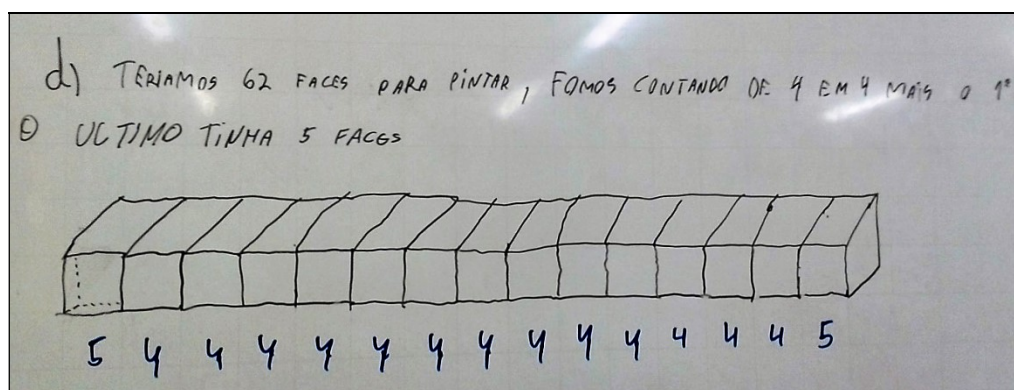


Figura 2

Os alunos, além de apresentarem a resposta correta para a atividade proposta, procuraram explicitar o caminho pelo qual chegaram à solução da atividade, conforme pode ser notado na justificativa do Aluno_A:

Aluno_A: Primeiro a gente somou 5 com 5 e depois a gente foi somando de 4 em 4, mais 4, mais 4, mais 4... e deu 62.

Ao afirmarem que contaram as faces que deveriam ser pintadas, diferenciando os cubinhos que estavam localizados nas extremidades (no primeiro e no último cubinhos havia cinco faces para serem pintadas; nos demais apenas quatro) e demonstrarem tal situação por meio de um desenho, os estudantes revelaram um raciocínio fortemente apoiado em um recurso visual. Além disso, ao afirmarem “a gente foi somando de 4 em 4, mais 4, mais 4, mais 4...” eles justificam a solução apoiados em um procedimento recursivo²², ou seja, a cada cubinho acoplado acrescentavam quatro faces a pintar. O esboço da situação por meio de um desenho ajudou os alunos a formularem sua resposta.

Outro recurso utilizado pelos estudantes na resolução dessa atividade foi a organização dos dados em formato de “sequência numérica” disposta em colunas, lembrando uma representação tabular, como pode ser visto na Figura 3:

²² Recursão é o processo pelo qual um dos passos do procedimento em questão envolve a repetição do passo anterior. Um procedimento que se utiliza da recursão é dito recursivo. Uma sequência é definida recursivamente se ela for dada por uma regra que permite calcular um termo qualquer por meio de um ou mais termos anteriores. (OLIVEIRA, 2014).

26 = 6	R: Teria que pintar 62 faces, mas fomos soma- do cada cubo e tirando 2 faces.
30 = 7	
34 = 8	
38 = 9	
42 = 10	
46 = 11	
50 = 12	
54 = 13	
58 = 14	
62 = 15	

Figura 3

Nesse caso, os estudantes não sentiram a necessidade de esboçar um desenho e utilizaram o recurso da “tabela” para expressar seu raciocínio, conforme explicitado pela justificativa do Aluno_B:

Aluno_B: Nós pegamos os cubos e imaginamos. Nós colocamos na segunda coluna o total de cubos (acoplados) e na primeira coluna a quantidade de faces que nós íamos pintar.

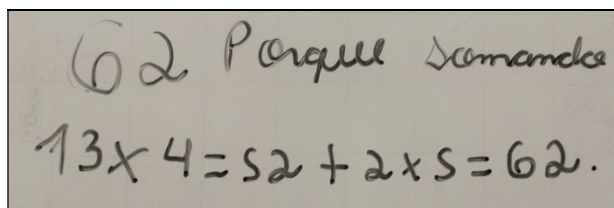
É importante destacar o uso que os estudantes fizeram do sinal de igualdade. Ao registrarem, por exemplo, que $26 = 6$, eles utilizaram o sinal de igualdade de forma inadequada, com a intenção de dizer que com 6 cubos acoplados haveria 26 faces pintadas. Ao serem questionados sobre o significado de sua representação eles justificaram sua resolução afirmando que na primeira coluna (números escritos à esquerda do sinal de igualdade) colocaram a quantidade de faces pintadas e, na segunda coluna (números escritos à direita do sinal de igualdade), a quantidade de cubinhos acoplados.

Nessa resolução, os alunos perceberam a regularidade implícita na tarefa. Porém, eles efetuaram a contagem de cada cubinho (um por um), o que se confirma ao afirmarem que foram somando as quantidades de faces de cada cubo. Assim como a resolução apresentada anteriormente, essa dupla também justifica sua resposta apoiada em um procedimento recursivo. De acordo com Barbosa, Vale e Palhares (2009), a utilização de um procedimento recursivo constitui-se como uma abordagem interessante para lidar com tarefas que envolvam generalizações próximas (que envolvem pequeno número de elementos), mas revela-se insuficiente para a compreensão da estrutura geral do padrão.

Outro aspecto interessante, revelado na justificativa apresentada pelo Aluno_B, é a maneira como expressam a percepção visual da situação dos cubinhos acoplados. Quando o Aluno_B afirma “*nós pegamos os cubos e imaginamos*” está fazendo referência à habilidade de visualizar mentalmente objetos e relações espaciais, uma vez que, durante a realização dessa tarefa, os alunos não dispunham de objetos físicos para manipulação. As habilidades de visualização e representação mental de objetos espaciais estão relacionadas ao que Clements e

Battista (1992) e Van de Walle (2009) chamam de senso espacial, um componente importante no processo de desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes.

Houve, ainda, alunos que, utilizando um raciocínio mais elaborado, não sentiram a necessidade de representar a situação por meio de desenhos ou quadros. O direcionamento oferecido pelo próprio enunciado do problema permitiu que alunos percebessem a regularidade implícita na tarefa e generalizassem a forma de calcular a quantidade de faces que deveriam ser pintadas no caso de uma maior quantidade de cubinhos acoplados, como pode ser observado na Figura 4:



$$62 \text{ Porque somando}$$

$$13 \times 4 = 52 + 2 \times 5 = 62.$$

Figura 4

A justificativa apresentada pelos estudantes para essa resolução pode ser observada a seguir:

AlunoC: Nós pegamos os treze cubinhos do meio e fizemos vezes 4, porque as partes que estavam grudadas a gente não contou. E depois, nós pegamos os dois cubinhos que ficaram nos cantos, nas duas pontas, que valiam 5 e fizemos duas vezes, e deu 62.

Não se pode deixar passar despercebido o emprego novamente inadequado do sinal de igualdade nessa representação. Entretanto, os alunos perceberam que, com exceção dos cubinhos colocados nas extremidades, os demais cubos apresentavam quatro faces pintadas ($13 \times 4 = 52$). A esse resultado somam-se as faces dos cubinhos colocados nas extremidades, que têm cinco faces pintadas cada um ($5 \times 2 = 10$), totalizando 62 faces pintadas ($52 + 10 = 62$). Assim, não obstante o equívoco na utilização do sinal de igualdade, merece destaque o raciocínio empregado pelos alunos nesta resolução.

O desenho (Figura 2) e a sequência numérica (Figura 3) foram estratégias bastante úteis no processo de resolução desse problema, mas foi discutido com os alunos, no momento de socialização dos resultados, que o poder de síntese da solução apresentada pelo AlunoC (Figura 4) permitia a exploração de uma gama de situações muito maior, sem a inconveniência de se ter que desenhar figuras muito grandes ou construir sequências demasiadamente longas.

Enquanto as justificativas apresentadas por AlunoA e AlunoB apoiam-se em procedimentos recursivos, a resolução apresentada pelo AlunoC notabiliza-se por apoiar-se em um procedimento geral e representar um avanço em direção à generalização da situação proposta. Por se tratar de uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental, não houve, nesse momento, a preocupação em abordar a representação das variáveis do problema por meio de letras, embora fosse possível.

Quanto à linguagem em que são formuladas as generalizações expressas nas falas dos alunos, Ponte (2009) afirma que, em uma primeira etapa, não há outra alternativa, senão

utilizar a linguagem natural e, pouco a pouco, começar a introduzir elementos simbólicos para promover o desenvolvimento do domínio da linguagem algébrica e do pensamento algébrico.

Ponte (2009) também destaca a importância da realização de tarefas envolvendo padrões e regularidades, especialmente as tarefas que conseguem conjugar elementos geométricos e aspectos numéricos, em que a representação visual desempenha um papel relevante. Para o autor, esse tipo de tarefa permite aos alunos empregarem diversas estratégias de raciocínio e, conforme se observa nos dados aqui apresentados, estimula o pensamento matemático e promove a aprendizagem matemática.

Considerações Finais

A capacidade de generalizar situações é um elemento fundamental da Matemática e o desenvolvimento dessa capacidade figura como um dos principais objetivos do ensino de Matemática (WARREN, 2009). Nesse sentido, é importante envolver os alunos, desde muito novos, em tarefas que os permitam compreender e expressar generalizações utilizando diferentes sistemas de notação.

Situações que envolvam a análise de padrões, regularidades e a busca por generalizações oportunizam a realização de investigações matemáticas, que se caracterizam por processos de formulação de conjecturas, testes e provas (demonstrações). Muitas das tarefas propostas com padrões e regularidades apresentam o potencial de desencadear processos de investigação. Nessas questões, os alunos deparam-se com situações matematicamente ricas, acerca das quais se podem colocar diversas perguntas, cabendo-lhes formular de forma mais precisa os aspectos a estudar. (PONTE, 2009, p. 171).

A proposição de um problema aberto (assim tipificado por apresentar múltiplos métodos de resolução) envolvendo visualização espacial e generalização possibilitou o surgimento de diferentes resoluções e encaminhamentos para os questionamentos propostos, respeitando os diferentes estilos de aprendizagem dos alunos e possibilitando diferentes abordagens para um mesmo conteúdo matemático.

Ao depararem-se com a diversidade de resoluções apresentadas pelos colegas ao problema, os alunos puderam compará-las e perceber algumas particularidades. Essa diversidade de estratégias de resolução é apontada por Bustamante, Ribeiro e Navarro (2015) como uma das características típicas do processo de investigação matemática propiciado por problemas abertos.

Confrontando suas resoluções, os alunos buscaram validar seu raciocínio, em uma tentativa de convencer o outro de que sua solução estava correta. Diante de diferentes olhares sobre o mesmo problema, os alunos perceberam que, em certos casos, sua forma de pensar era validada por resultados semelhantes encontrados por outras duplas. O exercício de ouvir o outro, ora no momento de investigação em dupla, ora na discussão com as outras duplas da classe colocou os alunos em um movimento de produção de conhecimentos. Hintz (2014) nos coloca que discussões matemáticas em sala de aula ajudam os alunos a desenvolver a compreensão de conceitos e procedimentos matemáticos. Problemas abertos que desencadeiam atividades de exploração e investigação possibilitam esse momento marcado por partilha de ideias, questionamentos, indagações, argumentações e refutações. A descoberta, pelos alunos, de uma variedade de estratégias e procedimentos plausíveis de

serem aplicados à resolução do problema revela que os momentos de apresentação e discussão a respeito do que foi observado e produzido nas investigações são especialmente favoráveis à formação do pensamento matemático. Essa constatação corrobora o momento de discussão de ideias e socialização dos resultados como imprescindível em uma abordagem que assuma a resolução de problemas como estratégia de ensino de Matemática.

No que tange às diferentes compreensões suscitadas a partir do problema da pintura dos cubinhos, a comparação entre as diferentes estratégias empregadas possibilitou aos estudantes transitarem por resoluções apoiadas em procedimentos recursivos e procedimentos gerais, avaliarem a conveniência de cada tipo de resolução e refletirem sobre qual tipo de abordagem se mostrou mais adequada ao problema, destacando fragilidades e potencialidades das representações utilizadas. Esse movimento vivenciado pelos estudantes denota o desenvolvimento de seu pensamento matemático, reforça a participação ativa dos estudantes em seu processo de construção de conhecimentos e revela uma transição inicial, do pensamento aritmético para pensamento algébrico.

Outro aspecto característico dos problemas abertos e das investigações matemáticas que se sucedem é a imprevisibilidade do que pode acontecer no desenvolvimento da atividade. No exemplo aqui retratado, apesar de o problema ter sido apresentado aos alunos com a intenção de se discutir aspectos da visualização espacial, percepção de regularidades e generalizações, o fato de algumas duplas apresentarem uma compreensão equivocada do sinal de igualdade é um forte indicativo, para o professor, de um conteúdo matemático que precisa ser retomado com a turma. No ensino de Matemática planejado a partir da proposição de problemas abertos, os alunos acabam revelando compreensões ou (in)compreensões e formulando novos problemas que podem desencadear a abordagem de outros conteúdos matemáticos, não necessariamente planejados para serem trabalhados naquele momento. O professor deve aceitar situações imprevistas, admitindo a possibilidade de novos encaminhamentos para a atividade.

Finalizamos esse artigo destacando que a resolução de problemas e, especialmente, a resolução de problemas abertos, configura-se como uma abordagem que merece maior destaque em sala de aula. As investigações decorrentes desse tipo de abordagem possibilitam o desenvolvimento do pensamento matemático e permitem que os estudantes compreendam não apenas a solução de um problema, mas também os diferentes caminhos que podem ser trilhados durante a sua resolução.

Referências

ABRANTES, P.; PONTE, J. P.; FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L. **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: APM, 1999.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática: por que através da resolução de problemas? In: ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. **Resolução de problemas: teoria e prática**. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 35-52.

ALLEVATO, N. S. G.; VIEIRA, G. Do ensino através da resolução de problemas abertos às investigações matemáticas: possibilidades para a aprendizagem. **Quadrante**, Lisboa, v. XXV, n. 1, p. 113-131, 2016.

AMBRUS, A.; BARCZI-VERES, K. Teaching mathematical problem solving in Hungary for students who have average ability in mathematics. In: FELMER, P.; PEHKONEN, E.; KILPATRICK, J. (Ed.). **Posing and solving mathematical problems: advances and new perspectives**. [S. I.]: Springer, 2016. p. (137-156).

BARBOSA, A.; VALE, I.; PALHARES, P. Exploring generalization with visual patterns: tasks developed with pre-algebra students. In: VALE, I.; BARBOSA, A. (Org.). **Patterns: multiple perspectives and contexts in mathematics education**. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo, 2009. p.137-149.

BUSTAMANTE, J. G.; RIBEIRO, C. M.; NAVARRO, M. M. El conocimiento especializado del profesor de matemática frente a problemas abiertos. In: Conferencia Interamericana de Educación Matemática, 14., 2015, Chiapas, México. **Anais eletrônicos...** Chiapas, México: CIAEM, 2015. Comunicação. Disponível em: <http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem>. Acesso em: 24 jul. 2015.

CLEMENTS, D. H.; BATTISTA, M. T. Geometry and spatial reasoning. In: GROUWS, D. A. **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: NCTM, 1992. p. 420-464.

CUNHA, D. S. I. **Investigações geométricas: desde a formação do professor até a sala de aula de matemática**. 2009. 98 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática)-Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

GROENWALD, C. L. O.; SILVA, C. K.; MORA, C. D. Perspectivas em educação matemática. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 6, n. 1, p. 37-55, jan./ jun. 2004.

HINTZ, A. B. Strengthening discussions. **Teaching Children Mathematics**, v. 20, n. 5, p. 318-324, jan. 2014.

MORAES, R.; GALIAZZI, M. C. **Análise textual discursiva**. 2. ed. Ijuí: Editora Unijuí, 2013.

OLIVEIRA, C. A. S. **Recorrência matemática aplicada à resolução de problemas no Ensino Médio**. 2014. 57 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2014.

POLYA, G. **How to solve it?** Princeton, NJ: Princeton University Press, 1945.

PONTE, J. P. Uma agenda para investigação sobre padrões e regularidades no ensino-aprendizagem da matemática e na formação de professores. In: VALE, I.; BARBOSA, A. (Org.). **Padrões: múltiplas perspectivas e contextos em educação matemática**. Viana do Castelo: FCT, 2009. p. 169-175.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; CUNHA, M. H.; SEGURADO, M. I. **Histórias de investigações matemáticas**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

SAWADA, T. Developing lesson plans. In: BECKER, J.; SHIMADA, S. (Ed.). **The open-ended approach: a new proposal for teaching mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1997. p. 1-9.

TAKAHASHI, A. **An overview**: what is the open-ended approach. In: SECONDARY SCHOOL TEACHERS PROGRAM, 2005, Park City. Disponível em: <mathforum.org/pcmi/hstp/sum2005/.../sstp.day1.ppt>. Acesso em: 18 jul. 2016.

VALE, I.; PIMENTEL, T. (Org.). **Padrões em matemática**: uma proposta didática no âmbito no novo programa para o ensino básico. Lisboa: Texto Editores, 2011.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VIANNA, H. M. **Pesquisa em educação**: a observação. Brasília: Plano Editora, 2003.

VIEIRA, G. **Tarefas exploratório-investigativas e a construção de conhecimentos sobre figuras geométricas espaciais**. 2016. 170 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2016.

VIEIRA, G.; ALLEVATO, N. S. G. Tecendo relações entre resolução de problemas e investigações matemáticas nos anos finais do Ensino Fundamental. In: SANTOS, C. A. B.; ALLEVATO, N. S. G.; AMARAL, L. H.; CURI, E. (Org.). **Ensino de ciências e matemática**: a produção discente na pós-graduação. São Paulo: Terracota, 2012. p. 29-47.

WARREN, E. Patterns and relationships in the elementary classroom. In: VALE, I.; BARBOSA, A. (Org.). **Patterns**: multiple perspectives and contexts in mathematics education. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo, 2009. p.29-47.

WAY, J. Problem solving: opening up problems. **NRICH enriching mathematics**, Cambridge, jan. 2005. Disponível em: <nrich.maths.org/2471>. Acesso em: 8 jul. 2016.

ZEICHNER, K. M. Para além da divisão entre professor-pesquisador e pesquisador acadêmico. In: GERALDI, C. M.; FIORENTINI, D.; PEREIRA, E. M. (Org.). **Cartografia do trabalho docente**: professor(a)-pesquisador(a). Campinas: Mercado das Letras, 1998. p. 207-236.

Norma Suely Gomes Allevato

Grupo de Pesquisas e Estudos Avançados em Educação Matemática (GPEAEM) – Universidade Cruzeiro do Sul – São Paulo - Brasil

E-mail: normallev@gmail.com

Gilberto Vieira

Grupo de Pesquisas e Estudos Avançados em Educação Matemática (GPEAEM) – Universidade Cruzeiro do Sul – São Paulo - Brasil

E-mail: gilbertoeducador@yahoo.com.br