

TENSÕES NO PROCESSO DE ANÁLISE DE MODELOS EM UM CURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

TENSIONS IN THE PROCESS OF MODEL ANALYSIS ON A CALCULATION COURSE DIFFERENTIAL AND INTEGRAL

Débora da Silva Soares¹⁴
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Daise Lago Pereira Souto¹⁵
Universidade do Estado de Mato Grosso

Resumo

O objetivo desse artigo é analisar as contradições internas emergentes do trabalho de estudantes com uma proposta pedagógica voltada para o ensino de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) baseada na Análise de Modelos e no uso de tecnologias digitais. A proposta foi desenvolvida com estudantes de graduação em Biologia, cursando a disciplina Matemática Aplicada, cuja ementa inclui o estudo de funções, noções de limites, derivadas e integrais, e suas aplicações. A ideia central da proposta pedagógica é desenvolver alguns dos conceitos de CDI de forma inter-relacionada com a análise de um modelo matemático para um fenômeno biológico. Tomando como pressupostos teóricos o construto teórico seres-humanos-com-mídias (BORBA; VILLARREAL, 2005) e a Teoria da Atividade (ENGESTRÖM, 2001), e com base na análise de extratos de entrevistas realizadas com os estudantes, observamos que a proposta pedagógica constituiu-se na própria fonte de uma contradição interna história e estrutural, assim como foi elemento chave para sua superação.

Palavras-chave: Análise de Modelos. Tecnologias Digitais. Teoria da Atividade. Seres-humanos-com-mídias.

Abstract

The aim of this paper is to analyze the internal contradictions that emerge from students' work with a teaching approach developed to the teaching and learning of Differential Calculus, based on Model Analysis and on the use of digital technologies. The teaching approach was developed with Biology major students taking the discipline Applied Mathematics, whose syllabus includes the study of functions, notions of limits, derivatives and integrals, and their applications. The central idea of the teaching approach is to develop some of Calculus concepts in a way interrelated with

¹⁴ Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, SP, Brasil. Docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Departamento de Matemática Pura e Aplicada, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, RS, Brasil. Membro Associado do GPIMEM. Endereço para correspondência: Av. Bento Gonçalves, 9500, Prédio 43-111, Agronomia, CEP: 91509-900, Porto Alegre, RS, Brasil. Email: debora.soares@ufrgs.br.

¹⁵ Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, SP, Brasil. Docente da Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT), MT, Brasil. Membro do GPIMEM. Endereço para correspondência: Rua. A S/N – Bairro São Raimundo, Departamento de Matemática, CEP: 78390-000, Barra do Bugres, MT, Brasil. Email: daise@unemat.br.

the analysis of a mathematical model for a biological phenomenon. Based on the theoretical construct humans-with-media (BORBA; VILLARREAL, 2005) and on the Activity Theory (ENGESTRÖM, 2001), and analyzing excerpts from interviews developed with the students, we observed that the teaching approach constituted itself in the source of a historical and structural internal contradiction, and it was a key element to overcome this contraction.

Keywords: Model Analysis. Digital Technologies. Activity Theory. Humans-with-media.

1 Introdução

O ensino de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) ainda hoje é um desafio, tanto para a graduação em Matemática como para cursos em que a matemática é uma disciplina de serviço (HOWSON et. al, 1988). A presença do Cálculo nesses cursos justifica-se pelo entendimento de que seus conceitos são relevantes enquanto base teórica e também podem servir de base para a elaboração de modelos matemáticos que representem fenômenos de outras áreas (FRANCHI, 1995). Nesse sentido, consideramos importante que os estudantes compreendam as possíveis relações que podem ser estabelecidas entre a Matemática e sua área de interesse, assim como reflitam criticamente sobre potencialidades e limitações que essa ciência oferece para a análise de fenômenos diversos. Além disso, há um aspecto relacionado à atitude dos estudantes para com a matemática e, em particular, para com o Cálculo que, em geral, apresenta traços de medo, angústia e incompreensão da possível relevância da disciplina para sua área de interesse.

Um possível caminho para atender essas demandas é o trabalho com a Modelagem Matemática. Em Borba, Meneghetti e Hermini (1997) e Malheiros (2004), por exemplo, é possível encontrar o estudo de projetos de modelagem desenvolvidos por estudantes de um curso de graduação em Biologia. Esses estudos discutem alguns aspectos atrelados à elaboração desses projetos, como a reflexão crítica sobre o tema em investigação e sobre a matemática utilizada para modelá-lo; os processos de interpretação; o uso de conteúdos aprendidos na disciplina de Cálculo para a elaboração dos modelos; a necessidade de buscar novos conteúdos matemáticos que os permitam alcançar seus objetivos; o uso de tecnologias digitais para realizar experimentações; o uso de conhecimento biológico para interpretar e avaliar os resultados obtidos a partir do modelo matemático. Outros trabalhos, como os de Ferruzzi (2003) e Almeida et al. (2007), apresentam exemplos de situações de modelagem propostas em disciplinas de Cálculo. Já Araújo (2002) apresenta as discussões de estudantes de Engenharia cursando a disciplina de Cálculo ao desenvolverem um projeto de modelagem, e destaca a potencialidade de trabalhos como esse serem espaços para o desenvolvimento de reflexões vinculadas à Educação Matemática Crítica. De modo geral, esses autores concordam que o desenvolvimento de projetos de modelagem pode contribuir para que os estudantes estabeleçam conexões entre a Matemática e outras áreas científica.

Com o intuito de oportunizar um ambiente de aprendizagem que ofereça reflexões dessa natureza, Soares (2012) elaborou uma abordagem pedagógica voltada para estudantes de um curso de graduação em Biologia (Unesp, Rio Claro, SP), cuja ideia central era propor a análise de um modelo matemático para um fenômeno biológico, de forma interligada com o desenvolvimento de alguns dos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, em particular, funções, derivadas e máximos e mínimos. Estamos considerando “modelo matemático” na perspectiva de Bassanezi (2009, p.20, ênfase do autor): “Chamaremos simplesmente de *Modelo Matemático* um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representem de alguma forma o objeto estudado”. A proposta foi constituída por um conjunto de situações que guiou o trabalho dos estudantes¹⁶, as quais tiveram como objetivos: compreender as informações fornecidas pelas equações do modelo; analisar as hipóteses do modelo e refletir sobre suas limitações; compreender a natureza funcional das soluções do modelo; analisar o comportamento de suas soluções e a influência dos parâmetros nesse comportamento; compreender o conceito de derivada, tanto como taxa de variação instantânea quanto como inclinação da reta tangente, e refletir sobre que informações esse conceito fornece sobre o fenômeno; estudar o conceito de máximo e mínimo e sua relação com o fenômeno e o modelo matemático.

O fenômeno biológico escolhido para o trabalho dos estudantes foi o de transmissão da malária, uma doença ainda presente em várias regiões do mundo, em particular na Região Norte do Brasil. A malária é causada por um parasita do gênero *Plasmodium*, o qual é transmitido ao ser humano por meio da picada da fêmea de mosquitos do gênero *Anopheles*. O modelo matemático estudado foi o de Ross-Macdonald (Fig.1), o qual é um sistema de duas equações diferenciais ordinárias (EDO) não lineares, que procura descrever de que forma as populações de mosquitos e pessoas infectados evoluem ao longo do tempo¹⁷. Dentre as várias hipóteses que embasam o modelo destacamos três: a desconsideração do período de incubação; a suposição de que, uma vez infectado, o mosquito assim permanece até sua morte; e a desconsideração da mortalidade em humanos causada pela doença.

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= \left(\frac{a}{N} \times p \right) \times Y \times (N - X) - g \times X \\ \frac{dY}{dt} &= \left(\frac{a}{N} \times c \right) \times X \times (M - Y) - v \times Y\end{aligned}$$

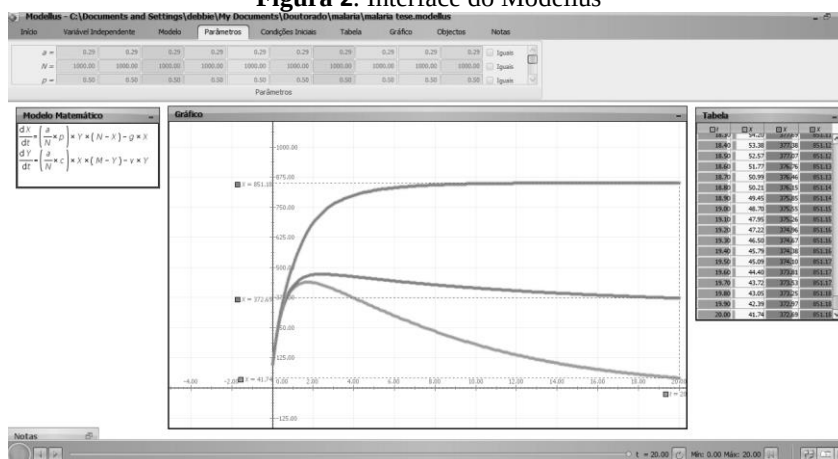
Figura 1 - Modelo de Ross-Macdonald para a transmissão da malária.

¹⁶ Mais detalhes sobre a proposta podem ser encontrados em Soares (2012) e em Soares e Borba (2011).

¹⁷ Para mais detalhes sobre o modelo matemático veja Soares (2012).

A opção por um modelo envolvendo EDO justifica-se por ser um conteúdo que integra os conceitos de função, derivada e integral. Além disso, considerou-se importante escolher um fenômeno com o qual os estudantes pudessem vir a trabalhar enquanto futuros biólogos, com o intuito de promover um debate que pudesse explicitar possíveis relações entre as duas áreas científicas. Ainda, um aspecto fundamental da proposta, é que os estudantes trabalhassem durante todo o semestre com o software Modellus¹⁸, que permite o estudo de modelos envolvendo funções, equações a diferenças finitas, e equações diferenciais ordinárias. Trabalhando com o software, os estudantes tiveram acesso a representações gráficas e tabulares das soluções do modelo e refletiram sobre as situações propostas. Dentre as possibilidades oferecidas pelo software estão: visualizar as soluções enquanto gráficos de funções, modificar os valores dos parâmetros do modelo e observar o reflexo dessa modificação no comportamento das soluções (Fig.2).

Figura 2. Interface do Modellus



Fonte: Elaboração própria.

Tendo em vista as considerações feitas, o objetivo desse artigo é identificar tensões (contradições internas) que emergem durante o trabalho com uma abordagem pedagógica que procura propiciar uma integração entre a Matemática e a Biologia, área de interesse dos estudantes. O conceito de “contradições internas” é oriundo da Teoria da Atividade (Engeström, 2001), que apresentaremos em mais detalhes na sequência do artigo. Antes, no entanto, discorreremos a respeito do nosso entendimento sobre Análise de Modelos.

¹⁸ Site: <www.modellus.fct.unl.pt/>. Acesso em: 05 Jun. 2014.



2. Análise de Modelos

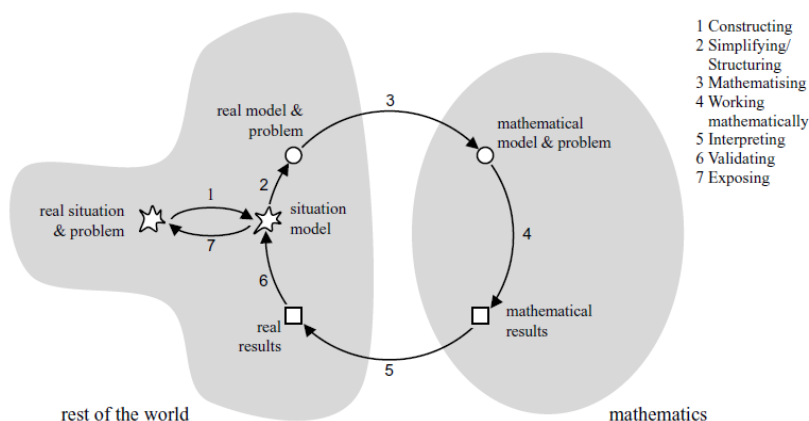
Conforme comentamos na introdução desse artigo, a ideia central da proposta pedagógica é propor o desenvolvimento de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral de forma inter-relacionada com a análise de um modelo matemático para um fenômeno biológico, no caso, a transmissão da malária. Em Soares (2012), Javaroni e Soares (2012), e Soares e Javaroni (2013), discutimos algumas ideias a respeito de relações que podem ser estabelecidas entre esse tipo de abordagem, que denominamos de Análise de Modelos, e a Modelagem Matemática enquanto abordagem pedagógica. A Modelagem¹⁹ já possui tradição na área de Educação Matemática e vários autores discutem suas potencialidades e limitações enquanto estratégia pedagógica no ensino e aprendizagem da Matemática (BASSANEZI, 2009; ALMEIDA et al., 2011; BIEMBENGUT; HEIN, 2007; MEYER et al., 2011).

A literatura em Modelagem na Educação Matemática é bastante variada e apresenta essa tendência sob diferentes vieses ou perspectivas, que se diferenciam em aspectos como a responsabilidade pela escolha do tema e a ênfase no modelo matemático, entre outros. Apesar dessa diversidade, uma característica permeia quase todas as perspectivas, a saber: a elaboração, por parte do estudante, de um modelo matemático para resolver/analisar/representar determinada situação problema oriunda de um tema relacionado ao cotidiano do estudante e/ou de sua comunidade, ou relacionado a outras áreas científicas. Desenvolvendo uma série de encaminhamentos, seguidamente estudados por pesquisadores e organizados em esquemas representativos (BLUM; LEIß, 2007; DOERR; PRATT, 2008), os estudantes desenvolvem o que se chama de um ciclo de modelagem.

A imagem a seguir (Fig. 3) apresenta o ciclo de modelagem sugerido por Blum e Leiß (2007). É possível verificar que o ciclo inicia com uma situação problema real; segue com a elaboração de um modelo para a situação problema, que considera hipóteses e simplificações da mesma; continua com a construção de um modelo matemático, sua resolução e interpretação das soluções em termos da situação problema; finaliza com a validação do modelo. Apesar do aparente caráter linear do esquema, em geral os autores afirmam que as etapas de um ciclo de modelagem não são lineares. De fato, não seria necessário iniciar um ciclo pela situação problema. Conforme afirmam Blomhøj e Kjeldsen (2011), um ciclo de modelagem poderia ser iniciado pelo modelo matemático. Em seu artigo, os autores trazem como exemplo um trabalho desenvolvido com estudantes da Universidade de Roskilde, em que iniciaram com um modelo matemático e o reconstruíram.

¹⁹ Com o intuito de evitarmos repetições, usaremos Modelagem como sinônimo de Modelagem Matemática.

Figura 3. Ciclo de Modelagem sugerido por Blum e Leiß(2007).



Fonte: Blum e Leiß (2007).

Argumentos e considerações como esses abrem possibilidades para diferentes maneiras de trabalho com modelos matemáticos em sala de aula e, além disso, permitem o estabelecimento de relações com a Modelagem. A Análise de Modelos é um exemplo disso. Do mesmo modo como no exemplo de Blomhøj e Kjeldsen (2011), na Análise de Modelos os estudantes partem de um modelo matemático já existente para determinado fenômeno. A partir daí eles buscam compreender suas hipóteses, suas equações e a descrição que faz do fenômeno estudado. Em seguida, eles procuram compreender as soluções desse modelo, seu comportamento e que informações esse comportamento traz sobre a evolução do fenômeno, e a influência dos parâmetros nesse comportamento. Aliado a isso, está o desenvolvimento de conceitos matemáticos subjacentes.

Tomando o ciclo de modelagem da Fig.3 como referência, é possível perceber que no trabalho com a Análise de Modelos não se desenvolve um ciclo completo de modelagem. Para isso, ter-se-ia que reconstruir o modelo, como proposto por Blomhøj e Kjeldsen (2011). Essa é, de fato, uma possibilidade, a qual permitiria uma integração direta entre Análise de Modelos e Modelagem. Conforme apontado em Soares (2012), a discussão das limitações do modelo matemático estudado seria um ponto de partida interessante para que os estudantes construíssem seu próprio modelo matemático, adaptando o modelo estudado conforme suas exigências. Nesse caso, ter-se-ia a construção de um “novo” modelo pelo estudante.

No trabalho desenvolvido com os estudantes de Biologia, fonte de dados para esse artigo, não se propôs a reconstrução do modelo matemático; os estudantes realizaram uma análise semelhante à que foi descrita acima. Nesse caso, o que podemos observar, ainda tomando a Fig.3 como referência, é que há uma ênfase no processo de análise do modelo matemático e de suas soluções, assim como sua interpretação em termos do fenômeno. Também há uma ênfase na análise e discussão das hipóteses do modelo, sua influência no comportamento das soluções, e reflexões críticas sobre possíveis limitações e contribuições

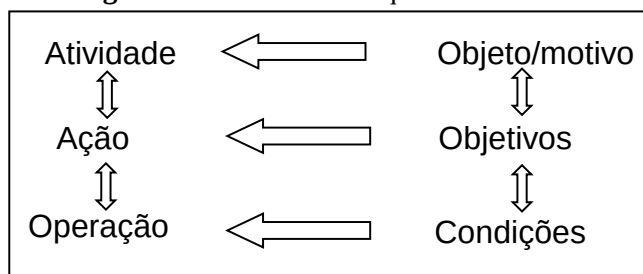
do modelo. A Análise de Modelos, portanto, pode ser relacionada com a Modelagem e traz uma maneira distinta de trabalho com modelos em sala de aula.

3. Aspectos Teóricos

Tendo esclarecido nosso entendimento sobre Análise de Modelos, passamos agora a considerar o conceito de “tensões”. Quando nos reportamos às contradições internas (ou tensões) estamos nos referindo aos princípios de uma das vertentes da Teoria da Atividade, especificamente aos estudos desenvolvidos por Engeström. Essa teoria tem origem nos trabalhos da escola histórico-cultural da psicologia soviética, e considera a atividade como a unidade básica do desenvolvimento humano (SOUTO; ARAÚJO, 2013). Seu desenvolvimento se deu a partir das contribuições de Vygotsky, Leontiev e Luria nas primeiras décadas do século XX, e seu embasamento filosófico está alicerçado nas ideias de Karl Marx e Friedrich Engels. A Teoria da Atividade pode ser entendida como uma teoria em constante mutação, uma vez que seus conceitos e ideias estão em constante debate, com o intuito de refiná-los e aprimorá-los (KAPTELININ, 2005).

Como mencionado anteriormente, nesse artigo, tomaremos como base as conceituações apresentadas por Engeström (1987, 1999, 2001). Esse autor se apoia em algumas teorizações de Leontiev (1978), como por exemplo, a ideia de uma estrutura hierárquica para explicar a atividade, a qual está representada na Figura 4.

Figura 4. Estrutura hierárquica da atividade



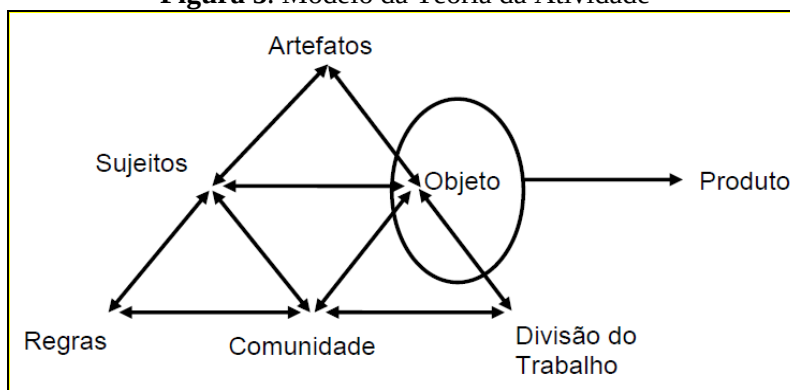
Fonte: Leontiev (1978).

A estrutura hierárquica da atividade representada na figura 3 expressa o esforço de Leontiev (1978) para organizar um modelo com três níveis interdependentes. A atividade é coletiva e está ligada a um motivo; já as ações podem ser executadas por um único indivíduo e estão diretamente relacionadas aos objetivos. Quaisquer que sejam as ações elas dependem de condições materiais e métodos para serem realizadas, as quais se referem aos procedimentos adotados para se alcançar o objetivo, ou seja, as operações. Ao mesmo tempo verifica-se que as ações estão subordinadas a metas (objetivos parciais).

Engeström também apresenta ideias originais para a Teoria da Atividade. Referimos-nos aos cinco princípios propostos por ele. O primeiro princípio indica que a unidade mínima de análise é constituída por um sistema composto por sujeitos, artefatos, objeto, regras, comunidade e divisão do trabalho. Todos esses elementos se relacionam de forma

mediada. O modelo (Fig.5) proposto por Engeström (2001) procura representar essas relações.

Figura 5. Modelo da Teoria da Atividade



Fonte: Engeström (2001).

Segundo esse modelo, sujeitos e objeto se relacionam mediados pelos artefatos, mas também mediados pela comunidade. Já a comunidade se relaciona com os sujeitos de forma mediada pelas suas regras, e relaciona-se com o objeto de forma mediada pela divisão do trabalho. O objeto da atividade, que é entendido como “a ‘matéria-prima’ ou ‘espaço-problema’ para o qual a atividade é direcionada” (ENGESTRÖM; SANNINO, 2010, p.6), sofre transformações ao longo do desenvolvimento da atividade, gerando como resultado um produto.

O segundo princípio indica que um sistema de atividade é multivocal, na medida em que as diferentes experiências, perspectivas e vivências dos sujeitos participantes influenciam no desenvolvimento dessa atividade. Já o terceiro princípio aponta para a necessidade de realização de uma análise histórica da atividade para compreensão de seus problemas e potenciais. O quarto princípio refere-se às contradições internas ou tensões, que são definidas como “tensões historicamente desenvolvidas que podem ser detectadas e com as quais se pode lidar em sistemas de atividade” (ENGESTRÖM, SANNINO, 2010, p.4). Essas tensões são importantes, na medida em que podem ser fonte de mudança e renovação da atividade, podendo gerar, inclusive, transformações expansivas (ou aprendizagem expansiva), as quais se configuram como o quinto princípio da teoria. As transformações expansivas podem ser entendidas como reconceitualizações de elementos do sistema de atividade, em particular, do objeto.

Engeström (1999) refere-se a quatro tipos de contradições que podem afetar um sistema de atividade. A contradição primária ocorre *no interior de cada elemento* do sistema de atividade. Podemos tomar como exemplo quando as regras de participação e envolvimento de cada elemento do sistema de atividade são substituídas pelo cumprimento

mecânico de tarefas. A contradição secundária ocorre *entre os elementos do sistema de atividade e algo novo*. Como as atividades são sistemas abertos, a introdução de um novo elemento, como por exemplo, um novo instrumento, pode provocar contradições no sistema, que, por sua vez, podem impulsionar o sistema para uma mudança. A contradição terciária se estabelece entre as possíveis ações que formam o objeto coletivo, principalmente *entre algo novo que é proposto e algo que é padrão dominante*, ou seja, quando existe a introdução de um novo objeto ou de novos motivos. Por exemplo, novos procedimentos podem ser formalmente implementados, mas existir uma resistência dos participantes. Finalmente, a contradição quaternária surge *entre o sistema de atividade e outros sistemas*²⁰ *interligados*. Esse tipo de contradição pode ser verificado pela forma como um sistema interpõe-se a outro, ou seja, pela interferência de fatores externos à atividade.

As contradições podem ser geradas quando os procedimentos que são parte integrante de nossa prática passam do nível de operação, já automatizados, para o nível de ação, quando passamos a repensá-los. Também podem ser causadas pelo uso que os sujeitos fazem (ou não) de instrumentos, pelas regras e pela introdução de algo novo, que pode ser tanto uma regra ou um instrumento ou ainda uma nova forma de divisão do trabalho.

Para analisarmos as contradições internas emergentes da produção dos estudantes ao trabalhar com a proposta pedagógica baseada na Análise de Modelos, também tomaremos como base um segundo aporte teórico: o construto teórico seres-humanos-com-mídias. Souto e Borba (2013) indicam que as origens dele estão na própria Teoria da Atividade, em particular no trabalho de Tikhomirov (1981) que versa sobre a reorganização do pensamento. No entanto, esse construto também se fundamenta em autores da Etnomatemática e da filosofia da técnica. Os fundamentos desses aportes, somados às ideias originais de Borba (1999) são articulados na tentativa de compreender o papel de mídias no processo de produção de conhecimento, o qual é tido como central. Considerando essas raízes, Souto e Araújo (2013) realizaram um exercício de analisar o próprio construto como um sistema de atividade. As autoras afirmam que o construto seres-humanos-com-mídias pode ser entendido como uma tríade - humanos-mídias-objeto - mas que a exemplo do que ocorreu com a própria teoria da atividade (Fig.5), também pode ser visto de forma expandida com a inclusão de regras, comunidade e organização do trabalho. Desse modo, entendemos que as ideias dessas duas abordagens teóricas se harmonizam e podem enriquecer a análise que nos propusemos a desenvolver, ainda mais porque a proposta pedagógica foi fundamentalmente desenvolvida com base em

²⁰ Sistemas de atividade não se constituem de forma isolada, pois cada um dos participantes de um dado sistema faz parte, de forma simultânea ou não, de mais de um sistema, seja em sala de aula, em grupos de estudos, etc. Todos esses sistemas se relacionam por meio de conexões entre seus elementos formando uma rede complexa (SOUTO, 2013).

simulações de um modelo matemático fornecidas por uma mídia: o software Modellus. Além disso, a visão epistemológica associada a esse construto dá sustentação teórica para nossa visão de conhecimento.

Segundo Borba e Villarreal (2005), a unidade de produção de conhecimento é um coletivo de humanos e mídias. As mídias reorganizam nosso pensamento, isto é, de acordo com as possibilidades e restrições que elas oferecem, organizamos nosso raciocínio (SOARES, 2012). Nesse sentido, ao modificar a mídia com a qual se trabalha, modifica-se qualitativamente a produção de conhecimento, uma vez que as possibilidades e restrições oferecidas serão outras. O *feedback* dado por um *software* matemático, por exemplo, ou então as possibilidades de experimentação ou visualização, são aspectos relacionados ao processo de reorganização do pensamento, uma vez que permitem ao estudante desenvolver encaminhamentos que dificilmente seriam realizados sem essa mídia. O processo de reorganização, de certa forma interpenetra outro processo, que é o da moldagem recíproca. Segundo Borba e Villarreal (2005), não apenas a mídia molda o pensamento do ser humano, mas também o ser humano molda a mídia. Um exemplo disso é o uso de um software de formas diferentes daquelas para as quais tinha sido desenvolvido. Desse modo, se as mídias reorganizam e moldam nosso pensamento, assim como são moldadas por nós, elas não podem ter um papel periférico no processo de produção de conhecimento. Segundo Souto e Araújo (2013), a moldagem recíproca se assemelha à tese Vygotskyana de mediação, base da Teoria da Atividade. A diferença reside na ênfase do construto sobre aspectos relativos às interações dos seres humanos com as mídias como a informática, por exemplo. Em outras palavras, podemos concluir que esses dois aportes convergem para uma mesma ideia de reorganização que abarca questões culturais, sociais, materiais e psicológicas, dentre as quais se inclui a reorganização do pensamento.

Apresentados os aspectos teóricos que fundamentarão nossas análises, passamos a discorrer sobre as questões de cunho metodológico.

4. Aspectos metodológicos

Conforme mencionamos na introdução, nosso objetivo é identificar que contradições internas emergiram no trabalho dos estudantes com a abordagem pedagógica proposta. Para alcançarmos esse objetivo, nos debruçamos sobre alguns dos dados construídos no trabalho de Soares (2012) o qual utilizou uma abordagem qualitativa de pesquisa (LINCOLN; GUBA, 1985) e traços do *design research* (DOERR; WOOD, 2006). O paradigma qualitativo de pesquisa caracteriza-se pelo detalhamento e aprofundamento de compreensões, assim como pelo fato de o pesquisador ser o principal instrumento de pesquisa (BOGDAN; BIKLEN, 1994). Já o *design research* caracteriza-se por voltar-se



para o desenvolvimento e aperfeiçoamento de um produto (no caso, a proposta pedagógica) e pela necessidade de vários ciclos de análise (DOERR; WOOD, 2006).

Com relação ao contexto, a pesquisa foi desenvolvida em três fases. Os dados analisados nesse artigo foram construídos a partir do trabalho com estudantes do curso noturno de Biologia da Unesp, Rio Claro, SP, que cursaram a disciplina Matemática Aplicada no primeiro semestre de 2011. Essa disciplina tem uma carga horária de quatro horas semanais e pode ser entendida como uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, uma vez que sua ementa inclui o estudo de funções e noções de limites, derivadas e integrais. As aulas foram estruturadas em dois momentos. No primeiro momento de aula foram apresentados e discutidos os conteúdos previstos na ementa da disciplina por meio de abordagens variadas (diálogo com os alunos, momentos de exposição, resolução e correção de exercícios, análise de situações com o uso de softwares matemáticos, como o *Geogebra*²¹ e o *Winplot*, em conjunto com os alunos). No segundo momento de aula os estudantes trabalharam com a análise do modelo para a transmissão da malária.

Uma variedade de fontes de dados foi utilizada para permitir a realização da triangulação de dados, apontada por vários autores (LINCOLN; GUBA, 1985; ARAÚJO; BORBA, 2004; GOLDEMBERG, 2004) como uma alternativa para a validação da pesquisa. Dentre as várias fontes utilizadas, três caracterizaram-se como mais relevantes para a pesquisa: caderno de campo; filmagem da sala; gravação da tela do computador e do diálogo dos estudantes com o software Camtasia Studio; e entrevista com os estudantes ao final do semestre. Neste artigo, as entrevistas foram analisadas novamente por nós, sob a ótica da Teoria da Atividade, na busca pela identificação de contradições internas no trabalho dos estudantes. Esse é um primeiro passo no caminho de alcançar o objetivo proposto. No futuro, a análise dos outros dados poderá ser realizada para o aprofundamento de nossas compreensões.

5. Apresentação e Análise dos Dados

Conforme comentamos na introdução desse artigo, um dos motivos para a realização de um trabalho baseado na Análise de Modelos aqui apresentado foi oportunizar um ambiente onde os estudantes pudessem trabalhar conceitos matemáticos de forma inter-relacionada com sua área de interesse. Por outro lado, esse motivo fundamenta-se sob o entendimento de que os processos de ensino e aprendizagem da Matemática em geral, e mais particularmente do Cálculo Diferencial e Integral, ainda desenvolvem-se de forma isolada. Segundo Engeström (2002), já em 1987, Lauren Resnick abordou a questão da descontinuidade entre a aprendizagem escolar e a aprendizagem fora da escola, afirmando que estava cada vez mais claro o isolamento entre uma e outra. Engeström (2002) utiliza o

²¹ Site: <<http://www.geogebra.org>>. Acesso em: 05 jun. 2014.



termo “encapsulação da aprendizagem escolar” para se referir a esse fenômeno, enfatizando o modo como a aprendizagem ocorre de forma compartimentalizada e isolada nas escolas.

O debate sobre a importância de romper essa encapsulação é especialmente presente na Educação Matemática. Autores como D’Ambrosio (2005), por exemplo, destacam as limitações de um conhecimento disciplinar para o entendimento da realidade complexa em que vivemos e que, atualmente, apresenta a sofisticação e renovação constante de instrumentos e da tecnologia. Esse entendimento também perpassa o discurso da Modelagem Matemática, a qual é sugerida como uma abordagem pedagógica com potencial para fomentar a participação ativa dos estudantes, a reflexão crítica (BARBOSA, 2001; JACOBINI, 2004; ARAÚJO, 2002; BORBA; MENEGHETTI; HERMINI, 1997) e o desenvolvimento de competências de modelagem como, por exemplo, interpretar resultados matemáticos em termos do contexto extra-matemático (MAAß, 2006). Nesses trabalhos busca-se, de modo geral, uma educação matemática mais interdisciplinar e menos isolada, pois se entende que uma educação compartimentalizada, empobrece o processo de aprendizagem e de desenvolvimento crítico do estudante.

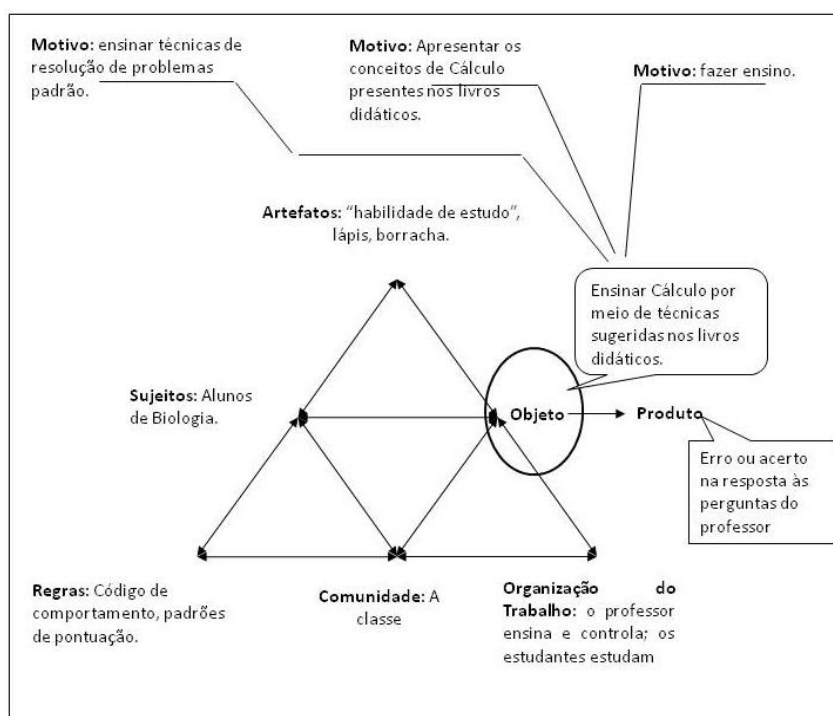
Ao refletir sobre a educação encapsulada, Engeström (2002) afirma que o objeto da atividade pode se reduzir, por exemplo, ao texto do livro didático, empobrecendo os recursos e instrumentos da atividade. Ele sugere uma representação para o sistema de atividade que constitui a aprendizagem escolar tradicional²² do fenômeno das fases da Lua. Adaptamos essa sugestão para interpretarmos como seria um sistema de atividade de aulas baseadas em uma abordagem tradicional encapsulada na disciplina Matemática Aplicada (Fig.6).

Nesse caso, os sujeitos do sistema de atividade seriam os alunos do curso de Biologia. Conforme aponta Engeström (2002), nesse sistema dois elementos se destacam. O primeiro deles é o objeto, que é o próprio texto escolar. Esse texto, em princípio, deveria ser um instrumento para a compreensão do mundo e, conseqüentemente, estar sujeito a críticas e reflexões, mas na abordagem tradicional encapsulada ele se torna o objeto para o qual a atividade de ensino é direcionada. O segundo elemento é consequência do primeiro: os artefatos acabam por ficar empobrecidos, como comentamos anteriormente, restringindo-se ao lápis e papel e às condições dos próprios estudantes em desenvolver o estudo. Completando o sistema temos como comunidade os demais estudantes da sala de aula, que compartilham o mesmo objeto; as regras, que são regidas pelos padrões de comportamento e de avaliação; e a organização do trabalho, que ocorre de forma que o

²² Por abordagem tradicional entendemos aquela que se utiliza apenas de aula expositiva, com uso de lousa, lápis e papel, e o livro texto.

professor tem o controle e o comando de todo o processo, enquanto ao estudante cabe estudar. O produto do sistema é a resposta certa ou não às perguntas feitas pelo professor.

Figura 6. Um diagrama para um sistema de atividade típico em aulas encapsuladas de Cálculo

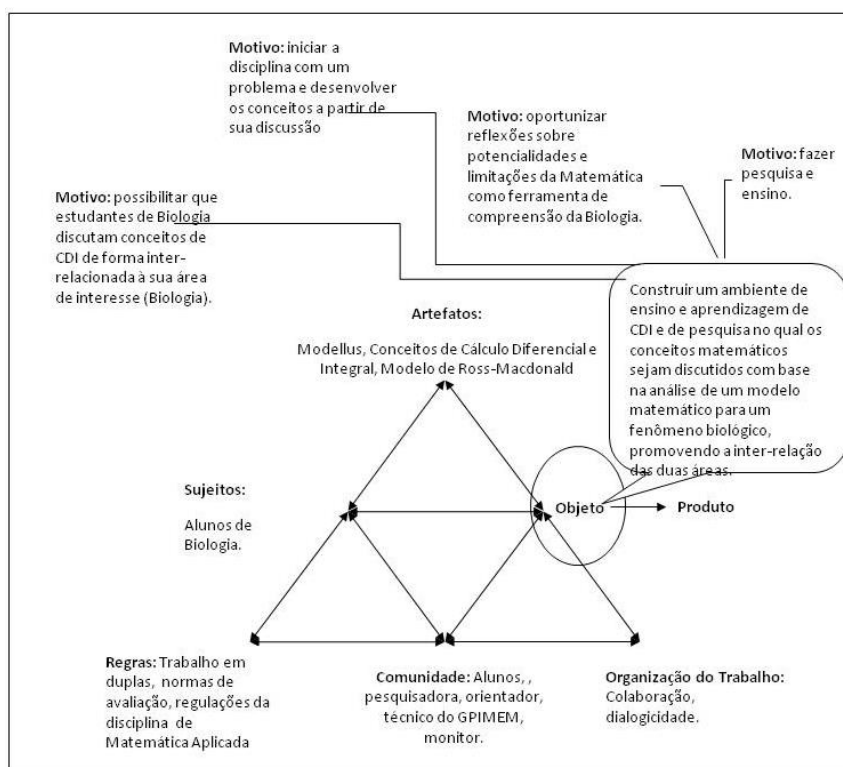


Fonte: Elaboração própria, adaptado de Engeström (2002, p.183).

O diagrama proposto por Engeström (2002) não apresenta motivos para o sistema de atividade, porém decidimos acrescentar ao diagrama possíveis motivos para o sistema. Essa decisão está embasada no trabalho de Souto (2013) que, apoiada em estudiosos da Teoria da Atividade, considera que o objeto é determinado pelos motivos da atividade, os quais seriam, por sua vez, identificados com base nos objetivos que podem ser, implícita ou explicitamente, negociados. Com base nesse entendimento e também no entendimento sobre abordagem tradicional encapsulada, consideramos que possíveis motivos para esse sistema de atividade sejam: fazer ensino, apresentar os conceitos de Cálculo presentes no livro didático, ensinar técnicas de resolução de problemas padrão. Esses são exemplos de motivos possíveis e que são coerentes com o objeto da atividade sugerido por Engeström (2002). Não temos, de fato, o intuito de sermos exaustivos nessa questão, mas achamos importante complementar o diagrama original pois, na sequência, faremos uso desse recurso para pensarmos qual seria o objeto de um sistema para a proposta pedagógica baseada na Análise de Modelos. Uma observação importante, ainda, é a seguinte: no sistema para uma abordagem tradicional, os conceitos de Cálculo não são artefatos, uma

vez que eles não são, em geral, foco de reflexões e críticas por parte dos estudantes. Nesse sentido, eles aparecem no objeto, mas “presos” às considerações do livro didático²³.

Figura 7. Um diagrama do sistema idealizado para a proposta pedagógica baseada na Análise de Modelos.



Fonte: Elaboração própria.

A Fig.7 apresenta um diagrama do sistema para a proposta pedagógica baseada na análise de modelos descrita na introdução desse artigo. Ele foi elaborado tomando como referência as ideias dos autores²⁴ dessa proposta quer dizer, com base em seu planejamento, expectativas e objetivos; nesse sentido nos referimos a esse sistema como o sistema idealizado.

Conforme comentamos anteriormente, para a composição do objeto desse sistema nos baseamos nos motivos (SOUTO, 2013). Identificamos quatro motivos relacionados à elaboração da proposta pedagógica. São eles: possibilitar aos estudantes de Biologia a discussão dos conceitos matemáticos de forma inter-relacionada à sua área de interesse;

²³ Não queremos dizer que todo o trabalho desenvolvido com abordagem tradicional seja reduzido a essas características apresentadas no sistema da Fig.6. De fato, o mais importante em nossa análise é o caráter encapsulado da aprendizagem.

²⁴ Os autores da proposta pedagógica são Débora da Silva Soares, primeira autora desse artigo, e Marcelo de Carvalho Borba. Conforme comentamos na introdução desse artigo, essa proposta foi elaborada com o intuito de oportunizar aos estudantes da disciplina Matemática Aplicada um estudo sobre Matemática que fosse inter-relacionado à Biologia. A proposta pedagógica foi pano de fundo para o desenvolvimento da pesquisa Soares (2012).

oportunizar um ambiente de reflexões sobre potencialidades e limitações da Matemática como ferramenta de compreensão de fenômenos biológicos; desenvolver a disciplina Matemática Aplicada com base em um problema; desenvolver a pesquisa e o ensino. Pautadas nesses motivos, elaboramos uma aproximação do que entendemos que poderia ser o objeto dessa atividade: construir um ambiente de ensino e aprendizagem de CDI e de pesquisa no qual os conceitos matemáticos sejam discutidos com base na análise de um modelo matemático para um fenômeno biológico, promovendo a inter-relação das duas áreas. Reiteramos que esse sistema foi elaborado com base no que foi idealizado e planejado para a proposta pedagógica. Isso significa, portanto, que não necessariamente todos os alunos da disciplina participaram do desenvolvimento desse sistema.

Apesar disso, consideramos plausível o exercício de contrastar esses dois diagramas (Fig.6 e Fig.7) para estruturarmos algumas reflexões. Uma primeira observação é que no sistema da Fig.7 é possível perceber um enriquecimento dos artefatos que medeiam as relações entre sujeitos e objetos. Além do lápis, papel e da “habilidade de estudo”, também temos o software Modellus, o modelo matemático para a transmissão da malária, os próprios conceitos de Cálculo estudados e o texto escolar, que deixa de ser o objeto da atividade e passa a ser um artefato. Além disso, há uma expansão da comunidade, que passa a integrar, além dos colegas de classe, a pesquisadora/professora, o orientador da pesquisa, o técnico do GPIMEM, o monitor da disciplina e o professor. Mudanças também são percebidas nas regras e na divisão do trabalho, uma vez que é introduzido o trabalho em dupla, que exige colaboração e diálogo. Assim, o centro deixa de ser o professor, já que os estudantes trabalham a maior parte do tempo em interação com a dupla. Nesse sentido, os trabalhos em dupla passam a ser uma regra e, além desta, as normas de avaliação da disciplina também regulam o sistema. Um possível produto desse sistema seria a compreensão dos conceitos matemáticos, em particular conceitos de Cálculo, como ferramentas para análise de fenômenos biológicos, refletindo acerca de suas limitações e potencialidades.

Uma segunda observação é que esse enriquecimento nos artefatos está atrelado à introdução de *novos* artefatos no sistema. Em particular, destacamos o software Modellus e o modelo matemático para a transmissão da malária. As regras e a divisão do trabalho também são elementos *novos*, comparados com aqueles que usualmente perpassam o sistema de atividade baseado na abordagem tradicional encapsulada. De acordo com Engeström (1999) a introdução desses *novos* elementos poderia ser fonte de contradições secundárias no sistema. Perguntamos-nos, então: foram esses novos elementos fonte de contradições no sistema de atividade desenvolvido pelos estudantes de Biologia enquanto trabalhavam com a proposta baseada na Análise de Modelos? Complementar à isso, também observamos que, na Fig.7, *novos* motivos foram introduzidos ao sistema o que, segundo Engeström (1999) caracteriza uma potencial contradição terciária. Novamente nos questionamos: esses novos motivos constituíram-se em fonte de contradição no sistema de atividade? Na tentativa de responder a essas perguntas ou, pelo menos, nos aproximarmos de uma resposta, analisamos as entrevistas cedidas pelos estudantes as quais passamos a estudar no que segue.

Das questões feitas aos estudantes na entrevista, investimos especial atenção aos comentários feitos pelos estudantes da disciplina ao responder a seguinte questão: “O que vocês podem destacar, ou o que mais lhes chamou a atenção, sobre o trabalho que foi realizado durante o semestre envolvendo o estudo do modelo da malária?”. O objetivo dessa pergunta foi compreender o modo como eles interagiram com a proposta pedagógica, assim como possíveis impactos positivos e negativos, limitações e potencialidades da mesma. No que segue, apresentamos algumas das respostas dos estudantes já com nossas reflexões.

Keteryne: Foi o que eu escrevi na prova do Borba²⁵ até, que eu achei que ... a sua parte, a parte dos vídeos que ele levou em aula, complementou, né, então a gente pôde ver assim... no dia-a-dia vamos supor como que se aplica aquela... porque é a gente fa... alguns professores até falam pra gente, ah, que os alunos falam, pra que que a gente vai estudar isso? pra que que a gente quer isso? Tem que decorar esse monte de fórmula e a gente pensa, a gente nunca vai usar isso, pra que isso? Eu acho que tanto os vídeos que o Borba trouxe quanto a sua parte deu pra gente ver mais ou menos... as coisas... [Sibeli: A aplicação...] é... onde cada coisa se encaixa. (Trecho da entrevista Keteryne e Sibeli, 25/05/2011).

Kauã: Ah, o que... acho que o que ficou destacado pra mim nesse trabalho, o que ele destacou foi... justamente tipo, uma utilidade da... Matemática pra... Biologia [Débora: Ahã]. Acho que foi isso o principal... [Priscilla: É.] Porque eu acho que se a gente só tivesse tido... a aula, isso ficaria muito vago. Porque é o que acontece com várias outras matérias também [Priscilla: É...] [Débora: Entendi]. Que é, por exemplo... tipo... Física, sabe? [Priscilla: É...] Que a gente até sabe que tem relação, sabe, mas a gente não vê na prática, então...

Débora: Entendi.

Kauã: Mas eu acho que esse foi bem pra gente ligar... ver o... como a Matemática pode ser usada no estudo da Biologia mesmo, tipo, não só pode como deve... (Trecho da entrevista, Kauã e Priscilla, 01/07/2011).

Esses dois primeiros trechos de entrevistas realizados com as duplas Keteryne e Sibeli, e Kauã e Priscilla, sinalizam um aspecto que será destacado também por outros estudantes (conforme se pode ver na sequência) que é a possibilidade de estudar a Matemática de uma forma que pudessem perceber/conhecer possíveis aplicações dessa ciência para sua área de interesse, a Biologia, o que se confirmou uma demanda dos estudantes. Com relação a esse aspecto, ambos os alunos fazem comentários ainda mais gerais, referenciando outras disciplinas que, em princípio, poderiam ter aplicações ou

²⁵ Borba se refere ao Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba, professor da disciplina Matemática Aplicada. Além disso, a aluna se refere a uma questão de uma das provas em que foi pedido para que os alunos, voluntariamente, escrevessem sobre o que aprenderam a respeito de malária na disciplina.



relações com a Biologia, mas que, em geral, não se tornam claras e parecem vagas. Outros dois trechos de entrevista estão a seguir e nos fornecem mais material para reflexões.

Dayane: E eu gostei por causa que tinha esse vínculo, né, com a Biologia, que é... o que eu gosto mesmo, com a parte de Cálculo. Então a parte de... a parte... ficava fácil a interpretação assim. Mesmo nos gráficos, aquelas... aqueles modelos imensos, cheio dos números, cheio das fórmulas, mas... por causa do contexto geral que a gente tinha [Natalia: Dava pra entender...] dava pra entender. Tipo, é você sabe o que que é... o que que é um vetor...

Natalia: Faz sentido, na verdade, [Dayane: Isso...] porque o Cálculo em si não faz sentido, né? [Dayane: É.] [risos] Mas se você coloca alguma coisa da Biologia, daí faz sentido.

Dayane: Tipo, a gente tem noção do que é um vetor, de como é uma infecção, como que funciona uma doença, como que... isso passa de pessoa pra pessoa, a gente sabe toda essa par... esse contexto, então... juntar a análise matemática com isso ficou mais fácil de ser interpretado pra mim pelo menos.

Natalia: É, tipo, eu também nunca imaginei assim, não sei, né, se não pensei nisso, mas eu nunca imaginei que tinha um modelo matemático pra você ver quantidade de picadas essas, enfim tudo, sabe? Eu não sabia que existia uma coisa que estudasse [Dayane: É pra analisar...] da matemática mesmo, mas que estudasse a malária nesse sentido. É interessante por causa disso, porque envolve os dois que é uma coisa que a gente se interessa, né, que é a parte biológica e fica mais fácil porque, né, os dois juntos ali é bem mais fácil de entender. (Trecho da entrevista, Dayane e Natalia, 01/07/2011).

Renato: Ah, eu acho que foi uma experiência muito legal ter... associado, fazer a disciplina de Matemática associando com um problema da Biologia, mesmo assim. Realmente foi Matemática aplicada à Biologia. [Natália concorda com movimentos de cabeça]. E a gente acabou entendendo a Matemática com... a partir de uma aplicação que tinha né, no caso, a taxa de variação... Eu achei bem interessante.

Natália: Desde o começo eu já achava muito legal assim, a gente via uma coisa no Borba, tá a gente falava "não, tudo bem, existe e tal", mas aonde eu vou usar isso, nunca né? Aí a gente... a gente chegava no GPIMEM aqui e você mostrava tal. E eu falava, "Nossa! Pior que usa". Eu achei legal isso, associar um problema que a gente pode tá... de repente tem um projeto, sei lá, do governo envolvendo isso, a gente pode tá ali como biólogo, né, e ter que usar a Matemática.

[...]

Natália: Pra gente que tem uma cabeça bem biológica, facilitou colocar uma coisa biológica no meio da Matemática. Acho que se não tivesse a parte da malária talvez a gente ficasse mais... mais pensando "nossa, que inútil". [risos]

Débora: Sim.

Natália: Ah, porque a gente pensa! Sinceramente, a gente pensa! [risos] A gente olha aquilo, "ah, eu não vou usar...". (Trecho da entrevista, Renato e Natália, 25/05/2011).

Nesses outros dois excertos, novamente é possível identificar o aspecto de estudar Matemática de forma a conhecer possíveis aplicações na Biologia. Entretanto, outros dois



elementos emergem. O primeiro deles é certa “surpresa” registrada nas falas dos alunos com relação à existência de aplicações da Matemática à Biologia que são, num certo sentido, relevantes para a área. Exemplos desse registro são as falas: “Eu não sabia que existia uma coisa que estudasse da matemática mesmo, mas que estudasse a malária nesse sentido” (Natalia) e “Eu achei legal isso, associar um problema que a gente pode tá... de repente tem um projeto, sei lá, do governo envolvendo isso, a gente pode tá ali como biólogo, né, e ter que usar a Matemática” (Natália).

A manifestação dessa surpresa por parte dos estudantes nos incita algumas reflexões. Inicialmente observamos que não se trata de os estudantes estarem surpresos por existirem aplicações da Matemática. De fato, eles afirmam que foram informados em outros momentos de suas vidas escolares sobre essas aplicações. A surpresa nos parece mais focada no fato de que essa aplicação pode ser não trivial e abordar problemas importantes para a Biologia. O trecho a seguir, extraído de outro momento da entrevista com Natália e Renato, parece confirmar nossa interpretação. Em resposta a um comentário de Renato sobre a importância de exercícios de modelagem do livro-texto para o seu conhecimento de aplicações da matemática, Natália observa: “Então é tudo meio por cima assim que eles falam, ah do microorganismo, ah não sei o que... é sempre uma coisa assim que você pensa "ah podia ser qualquer outra coisa, né?", "Podia ser qualquer outro exemplo", mas esse da malária eu achei muito legal” (Trecho da entrevista, Renato e Natália, 25/05/2011). Em sua fala, Natália se refere a situações-problema cujo contexto é pensado para “encaixar” no conteúdo matemático, quer dizer, situações-problema em que, mudando-se o contexto, a forma de resolução permanece a mesma. Parece-nos que, para Natália, situações fictícias e frágeis em termos de contexto não satisfizeram sua demanda por conhecer aplicações da Matemática.

De fato, situações-problema frágeis em contexto podem ser entendidas como exercícios com referência à semi-realidade, isto é, exercícios que se baseiam em situações que envolvem elementos “reais”, porém não se preocupam com sua veracidade ou factibilidade; são situações fictícias em que os dados fornecidos pelo problema são considerados suficientes e exatos e quaisquer outras informações são irrelevantes (SKOVSMOSE, 2000). O foco principal, em geral, é exercitar as técnicas referentes a determinado conteúdo matemático. Quer dizer, não se está interessado em uma reflexão mais profunda sobre o conteúdo matemático e sua relação com o contexto do problema, mas apenas no raciocínio matemático “puro”. Conforme indica Engeström (2002) essa é uma característica da encapsulação da aprendizagem escolar: mesmo que dois fenômenos sejam tratados paralelamente, as relações entre ambos não são explicitadas, e espera-se que o alunos, mais tarde, estabeleçam essas relações por si mesmo, algo que não é possível de garantir.

Engeström (2002) também argumenta que os professores tradicionalmente utilizam o “mundo relativamente fechado dos livros didáticos” e que isso pode contribuir para que a “escolarização” se torne, em um processo histórico, cada vez mais isolada, se tornando um campo fértil para o surgimento de contradições. Isso porque os alunos não chegam à sala de aula como “vasos vazios”. Ao contrário, eles estão em constante contato com os mais diversos tipos de informações que estão disponíveis nas mais diversas fontes, principalmente na internet. Desse modo, quando os alunos têm dificuldade em relacionar as “regras simbólicas” ensinadas na escola com as informações que obtêm fora dela as contradições internas podem emergir.

Desse modo, interpretamos que a surpresa, por parte dos estudantes de Biologia, de que existe uma aplicação da Matemática para um problema de relevância em sua área de interesse de certa forma atesta um desconhecimento dessas possibilidades durante todo o percurso escolar. Quer dizer, historicamente, a Matemática aprendida por estes estudantes parece ter-se delineado como uma ciência isolada, encapsulada. A introdução do estudo sobre o modelo para a transmissão da malária com o software Modellus parece ter incitado-os a novas reflexões sobre possíveis utilidades da disciplina para sua formação e para a compreensão dos fenômenos biológicos.

Algumas crenças sobre a Matemática foram colocadas em “xeque” e passaram a ser foco de questionamentos. Com base nesse movimento, nos perguntamos: seria possível caracterizar esses acontecimentos como elementos de uma contradição terciária? Nos apoiamos nas ideias de Souto (2013) para crer que sim, especialmente se considerarmos a introdução desse tema, com essas características, como algo novo, distinto do padrão dominante no âmbito do ensino de Matemática que vinha sendo vivenciado por estes alunos até então. Além disso, a dificuldade em relacionar a Matemática com outras áreas científicas não parece ser algo que ocorre apenas com estes estudantes. Catapani (2001), por exemplo, explicita a demanda de estudantes de Geologia por relacionar os conteúdos de Cálculo à sua área de interesse. Nesse sentido, nos parece que essa contradição é local, mas também é estrutural e historicamente constituída pela forma como os professores têm ensinado Cálculo (ou a Matemática, mais geralmente).

Considerar que a Matemática vivenciada pelos estudantes de Biologia ao longo de sua carreira escolar tenha sido encapsulada é, de fato, uma possibilidade bastante plausível, na medida em que essa é uma das questões para as quais a Educação Matemática se volta. Pesquisas foram e são conduzidas com o intuito de explorar formas de amenizar esse isolamento, utilizando abordagens que envolvem, entre outros aspectos, a interdisciplinaridade (BORBA et al., 1997; BALDINO, 1995; DEPREZ, 2011). Além disso, autores como Souto (2013) atestam que o processo de aprendizagem da Matemática,



em geral, segue uma organização didática compartimentalizada e hierarquizada. Isso pode levar o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática a uma mera aplicação e “decoreba” de fórmulas e regras que muitas vezes não fazem sentido para os alunos. Engeström (2002), assim como nós, não considera apropriado esse modo de “apresentar” os conteúdos aos alunos. Ele sugere que se estimule em sala de aula o exercício de análises críticas, para que o trabalho escolar não seja realizado em “cápsulas”. Nessa direção é que a proposta pedagógica foi elaborada.

Retomando os excertos das entrevistas, um segundo aspecto que emerge é aquele relacionado com a compreensão dos conceitos de matemática e a relação com a Biologia. Frases como “Faz sentido, na verdade, [Dayane: Isso...] porque o Cálculo em si não faz sentido, né? [Dayane: É.] [risos] Mas se você coloca alguma coisa da Biologia, daí faz sentido” (Natalia); e “Pra gente que tem uma cabeça bem biológica, facilitou colocar uma coisa biológica no meio da Matemática” (Natália), parecem confirmar a importância para esses estudantes de estabelecer relações entre conceitos (novos) de uma área científica, em particular a Matemática, com sua área de interesse para a compreensão desses conceitos. Em outras palavras, parece que os conceitos Matemáticos em si mesmos seriam mais difíceis de serem compreendidos caso não se tivesse estabelecido uma relação com a Biologia.

Podemos relacionar essas mesmas frases à Estrutura Hierárquica da Atividade (Fig.4). Quando Dayane diz que o Cálculo sozinho não faz sentido, acreditamos que ela estava se referindo às suas experiências anteriores com a Matemática, que, a nosso ver, podem ser associadas ao nível de operação, ou seja, algo que já estava automatizado. No entanto, a fala de Natalia sobre a Matemática e a Biologia sugere um movimento de ascensão para o nível de ação, que ocorre quando os indivíduos passam a repensar, a questionar e a analisar criticamente uma dada situação. Esses excertos sugerem que a Matemática e a Biologia foram pensadas juntas pelos estudantes, de modo a estabelecer relações entre as duas áreas. Nesse sentido, a proposta pedagógica baseada na análise de modelos e no uso do software Modellus pode ter incentivado a superação da contradição interna identificada nos parágrafos anteriores.

Outros excertos de entrevista que nos sugerem a superação da contradição interna são os seguintes, que explicitam uma possível consequência da inter-relação entre a Matemática e a Biologia.

Kauã: Ah, eu achei que foi bem... foi uma boa relação, não achei algo forçado, tipo... [...] pra mim foi bom, eu até tinha me... eu, eu tinha medo de Matemática. E até perdi isso... Descobri que eu nem sou ruim em Matemática [risos]. (Trecho da entrevista, Kauã e Priscilla, 01/07/2011).



Natália: A... aquelas tabelinhas também... e um gráfico de barra que tem lá também assim... Parece que, não sei, a gente começa a olhar com mais... mais amor... [risos]

Renato: Um olhar mais matemático.

Natália: É, mais, não olhando "nossa, uma tabela!". A gente até que fala, "ah tá, uma tabela, tudo bem". (Trecho da entrevista, Renato e Natália, 25/05/2011).

Os registros desses estudantes sugerem que o estudo da Matemática entremeada com a análise de um modelo para a transmissão da malária proporcionou certa mudança de atitude em relação à disciplina. Aquele sentimento de medo e insegurança parece ter se dissipado para alguns alunos, dando lugar a uma reação mais tranquila e pró-ativa quando do confronto com registros matemáticos, os quais aparecem constantemente em artigos biológicos. Essa mudança de atitude, junto aos os elementos e aspectos mencionados acima, sugere que houve, por parte dos estudantes, uma reflexão a respeito da Matemática, a qual permitiu uma modificação em seu entendimento a respeito dessa ciência.

Com o intuito de enriquecermos ainda mais nossas observações apresentamos na sequência um trecho do diálogo entre dois estudantes, o qual ilustra o seu trabalho para compreender a influência de um dos parâmetros no comportamento das soluções e a relação desse comportamento com o fenômeno biológico. O parâmetro analisado era o que informava a probabilidade de infecção de um mosquito pelo parasita malário, e a solução era a quantidade de pessoas infectadas na região. A Fig.8 a seguir apresenta os gráficos analisados pelos estudantes.

Priscilla: Qual era mesmo o... o zero um [0.1], zero nove [0.9]... ?

Kauã: Esse é o zero um... não, esse é o zero zero um [0.01], esse é o zero um [0.1] e esse é o zero nove [0.9]. Porque... O que significa... Porque como esse aqui... a taxa de infecção dele é muito pequena, ãh...

Priscilla: Ah, assim...

Kauã: Tipo, como eles [os mosquitos] vão morrendo e vão nascendo saudáveis, e poucos vão se infectando... entendeu? Tipo, como é que a gente pode explicar isso?

Priscilla: ah, é o que ela tá falando, tipo... altamente suscetível.

Kauã: É, mas aqui é a quantidade da população que está sendo infectada. Então peraí, a gente tá no número de pessoas... infectadas. X é a população de pessoas infectadas... [...]

Priscilla: A população não é humana?

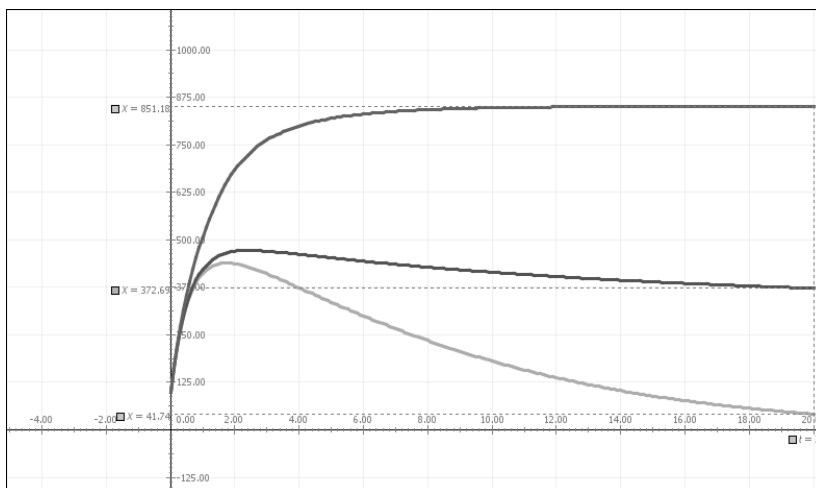
Kauã: É, então, é porque assim, tipo... Essa é a população de pessoas, população de pessoas infectadas aqui no caso, mas com esse mosquito tende a diminuir por quê? Porque esse mosquito vai se infectando muito pouco... e vai ficando... tipo, pelo... eles vão morrendo quando são infectados e nascem saudáveis, e como é muito pequena a taxa de... a taxa de mortalidade, a taxa de infecção deles, a população [de humanos] infectada vai diminuindo também.

(Trecho do diálogo entre Kauã e Priscilla, Tarefa 4).

Conforme podemos observar pelo excerto, inicialmente os estudantes procuram identificar qual gráfico corresponde a qual valor do parâmetro e, em seguida, procuram

compreender porque os diferentes valores para esse parâmetro causam os diferentes comportamentos para os gráficos. Em particular, eles discutem o caso em que a probabilidade de um mosquito se infectar com o parasita malário é 0,01, o que gera o gráfico cinza-claro na Fig.8. O raciocínio apresentado por Kauã é elaborado a partir da combinação de diversas informações, dentre elas o significado do parâmetro e as hipóteses do modelo, que estão relacionadas à dinâmica de ocorrência do fenômeno biológico. Matemática e Biologia se relacionam na medida em que os estudantes interpretam as informações gráficas (representação no plano cartesiano, crescimento/decrescimento) em termos do fenômeno biológico e utilizam-se de uma para justificar a outra.

Figura 8. Gráficos de $X(t)$ para três casos distintos do parâmetro probabilidade de infecção do mosquito.



Fonte: Soares (2012, p.182).

Esse trecho de diálogo ilustra a importância do software para o desenvolvimento da proposta pedagógica. Conforme comentamos na introdução desse artigo, durante todo o desenvolvimento da abordagem pedagógica os estudantes trabalharam com o software Modellus. Esse trabalho foi fundamental para tornar a proposta factível, uma vez que o objetivo não era ensinar os métodos de resolução de sistemas de EDO para os alunos e, para compreenderem o modelo matemático e as informações fornecidas sobre o fenômeno, era necessário que analisassem as soluções do modelo. Nesse sentido, o Modellus permitiu que os alunos tivessem acesso a aproximações dessas soluções sem precisar resolver o sistema.

De acordo com Soares (2012), o Modellus reorganizou os processos de análise do modelo matemático, uma vez que permitiu aos estudantes focarem sua atenção na mudança de comportamento das soluções do modelo de acordo com alterações em seus parâmetros.

A ideia de reorganização está fundamentalmente ligada ao processo de moldagem recíproca, base do construto seres-humanos-com-mídias. De acordo como Souto e Araújo (2013), a moldagem é semelhante à ideia de mediação proposta por Vygotsky, que é base da teoria da atividade. A diferença entre elas encontra-se, principalmente, no papel que o construto seres-humanos-com-mídias atribui às mídias. Para Borba (1999), na informática há uma reciprocidade nos processos de produção de conhecimento, os quais também são mediados por imagens dos monitores, sons e outros recursos que esses equipamentos oferecem. “O computador [software] pode dar *feedbacks* a passos intermediários da atividade humana, que seriam impossíveis de serem dados por observadores externos” (BORBA, 1999, p.287).

Sem o trabalho com o software, para cada valor escolhido para determinado parâmetro, seria necessário esboçar as soluções do sistema, o que envolve a sua linearização, identificação de pontos-fixos, a análise de sua estabilidade e o esboço das trajetórias no plano de fase. Apenas depois da realização desses procedimentos, para cada valor do parâmetro, seria possível fazer a análise do comportamento das soluções. Trabalhando com o software, o pensamento pode se focar apenas na análise do comportamento, uma vez que o software desenvolve os procedimentos de solução numérica do sistema e fornece aproximações para as soluções do modelo. Foi com base nas representações gráficas e tabulares das soluções do modelo fornecidas pelo software que os estudantes puderam analisar as informações sobre o fenômeno e refletir a respeito dos conceitos matemáticos subjacentes, podendo, desse modo, estabelecer relações entre a Matemática e a Biologia.

Assim, interpretamos que as soluções encontradas pelos alunos seriam difíceis de serem construídas com outra tecnologia que não tivesse os mesmos recursos desse aplicativo como, por exemplo, a oralidade ou a escrita. Esse ponto de vista é sustentado por nós tomando como base uma das ideias que fundamentam o construto seres-humanos-com-mídias: diferentes mídias contribuem para a produção de diferentes tipos de conhecimento (BORBA; VILLARREAL, 2005). Implícito nesse processo está, de forma parcial, a moldagem recíproca (BORBA, 1999), uma vez que as informações fornecidas pelo software deram condições para os alunos pensarem de formas distintas, já que seus argumentos eram baseados nas informações visuais geradas pelo aplicativo. Argumentos desse tipo, em geral, não são comuns em abordagens tradicionais e encapsuladas de ensino.

Nesse momento, reiteramos o fato de que o software Modellus é algo novo no sistema de atividade dos estudantes. Conforme comentamos anteriormente, de acordo com Engeström (1999), ele poderia ser, portanto, fonte de contradições no sistema. De fato, a produção Matemática com esse software introduziu estratégias que não eram, até então, usuais para os alunos, o que pode ter contribuído para a explicitação da contradição interna

já mencionada. Ainda, pelo que observamos até o momento, consideramos que os processos de reorganização e de moldagem recíproca gerados pelo software, ao permitirem aos estudantes estabelecerem relações entre a Matemática e a Biologia, também contribuíram para a superação dessa mesma contradição.

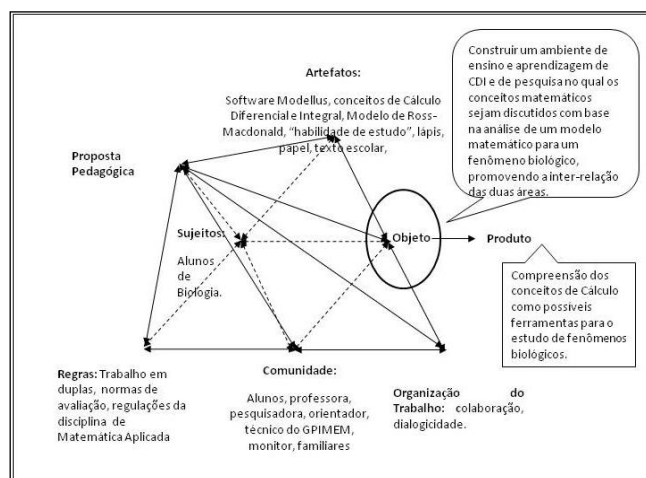
Temos, portanto, até o momento o seguinte panorama: a partir da análise das figuras 6 e 7, observamos que dois novos artefatos foram introduzidos ao sistema de atividade – o estudo do modelo matemático de Ross-Macdonald e o software Modellus. Ambos os elementos contribuíram, cada um a seu modo, para explicitar uma contradição interna ao sistema, qual seja, a não compreensão de relações entre a Matemática e a Biologia e, mais geralmente, outras áreas científicas. Conforme comentamos anteriormente, essa contradição não é apenas local, mas refere-se a um padrão dominante mais geral de ensino de Cálculo. Nesse sentido, entendemos essa contradição como uma contradição terciária. Além disso, também observamos que, segundo nosso entendimento, houve uma superação dessa contradição na medida em que os estudantes conseguiram estabelecer relações entre as duas áreas científicas, conforme observamos por meio das entrevistas.

O que consideramos importante destacar no que segue é que tanto o software Modellus como o estudo do modelo de Ross-Macdonald são elementos de um cenário mais amplo, que é a proposta pedagógica. É importante observar que as situações-problema apresentadas aos estudantes os encorajaram continuamente a refletir sobre as possíveis relações entre elementos matemáticos e biológicos. Ainda, esse processo foi permeado por discussões entre os pares, ou seja, o trabalho se organizou de forma coletiva, dialógica e colaborativa, conforme representado na Fig.7. Entendemos que essa forma de organização do trabalho favorece questionamentos, reflexões e pensamento crítico, uma vez que os estudantes, além de convencerem a si próprios sobre seus argumentos e interpretações, precisam convencer o colega e passar pelo seu crivo. Desse modo, entendemos que a proposta pedagógica como um todo desestabilizou o sistema de atividade dos alunos, fazendo com que eles rompessem o padrão de produção matemática que era dominante para eles. Ao mesmo tempo, ela também foi importante na superação dessa contradição interna que ela própria criou, na medida em que motivou os alunos a vencerem os traços de medo, angústia e incompreensões e, com isso os mobilizou para a busca de soluções, explicações, análises para o modelo proposto.

Nesse sentido, é possível observar que a proposta pedagógica possui um papel de destaque na constituição do sistema de atividade escolar. Nossas análises se alinham com o pensamento de Souto (2013), que propõe novas direções teóricas para as ideias de Engeström, dentre as quais está a inserção do papel de propostas pedagógicas na representação triangular do sistema de atividade. Em seu estudo, Souto (2013) observou que a proposta pedagógica apresentava-se de forma diluída entre os elementos do sistema,

isto é, a proposta aparecia nos artefatos, nas regras, na divisão do trabalho e no próprio objeto da atividade. Na análise que desenvolvemos aqui também podemos observar esse fenômeno, na medida em que é a proposta pedagógica que sugere o uso do software Modellus, o trabalho em dupla, a análise de um modelo matemático, e a inter-relação entre Matemática e Biologia. Sendo assim, ela se relaciona com diversos elementos do sistema, gerando potencial para a criação de contradições internas em diferentes níveis. No caso do sistema que analisamos, observamos que um de seus papéis foi o de fomentar a contradição interna analisada anteriormente, que é histórica e estrutural. Na tentativa de representar a proposta pedagógica e sua relação com o sistema de atividade, propomos o seguinte diagrama tridimensional (Fig.9), em que a proposta se torna um vértice de um tetraedro que possui como uma de suas faces o sistema de atividade. A ideia de uma representação tridimensional é enfatizar a interligação potencial entre a proposta pedagógica e todos os elementos de um sistema de atividade.

Figura 9. Diagrama para o ensino de Cálculo baseado na Análise de Modelos incluindo a proposta pedagógica.



Fonte: Elaboração própria.

Nesse diagrama, não reproduzimos os motivos do sistema de atividade, mas retomando a Fig.7 podemos observar que os motivos desse sistema estão estreitamente relacionados com a criação da proposta pedagógica. Sendo o objeto da atividade passível de ser identificado/aproximado pelos diferentes motivos, concluímos que ele também se encontra estreitamente relacionado à proposta pedagógica. Novamente, conforme observamos anteriormente, a introdução de novos motivos também pode ser fonte de contradições internas. Essa observação corrobora com a discussão que fizemos até o momento e nos incita a buscar compreender, em um futuro próximo, as implicações de

uma proposta pedagógica como essa, não apenas para o ensino de Cálculo, mas também para o pensamento matemático interdisciplinar.

6. Considerações Finais

Propusemos-nos, nesse artigo, o exercício de analisar as contradições internas (tensões) emergentes do trabalho de estudantes de um curso de Biologia com uma proposta pedagógica para o ensino de Cálculo baseada na Análise de Modelos e no uso de software. Os referenciais que fundamentaram esse trabalho foram conceitos da teoria da atividade e o construto teórico seres-humanos-com-mídias. Inicialmente nos apoiamos em Engeström para representar, de um ponto de vista teórico, como seria um sistema de atividade desenvolvido em aulas encapsuladas de cálculo diferencial e integral. Na sequência o contrastamos com o sistema que interpretamos como idealizado para a proposta pedagógica baseada na análise de modelos. Nesse exercício de análise, encontramos alguns nós (laços embaraçados) que indicavam um campo fértil para o surgimento de contradições internas. Para verificarmos a plausibilidade desses indicativos nos debruçamos no exame dos dados empíricos produzidos durante as entrevistas realizadas com os estudantes participantes da pesquisa de Soares (2012). Como resultados, identificamos uma contradição interna e propusemos um segundo diagrama para representar um sistema de atividade desenvolvido com base em uma proposta pedagógica apoiada na análise de modelos.

A contradição interna que identificamos é estrutural historicamente construída, pois está alicerçada na própria vivência escolar dos alunos da Matemática. Nos referimos ao processo histórico de encapsulação do ensino e da aprendizagem da Matemática que se mostrou presente nas falas dos estudantes, que usualmente desenvolviam sistemas de atividade semelhantes ao da Fig.6. A introdução de um fenômeno biológico nas aulas de Matemática e do trabalho com o software Modellus, fomentada pela proposta pedagógica, trouxe modificações a esses sistemas de atividade, as quais evoluíram para a contradição interna, pois romperam com o padrão de produção matemática que até então era usual para os participantes do sistema. Essa contradição foi principalmente verificada em comentários como da surpresa em saber que a Matemática poderia ser utilizada no estudo de fenômenos biológicos relevantes. Além disso, outros aspectos como os conceitos matemáticos fazerem sentido após a introdução de um contexto biológico e a mudança de atitude de alguns alunos com relação à Matemática com base no trabalho realizado, também sinalizam em direção à essa contradição interna, assim como à sua superação. Esse último entendimento é baseado no movimento da estrutura hierárquica da atividade, particularmente quando identificamos a ascensão do nível de operação para o de ação, ou seja, quando os alunos

deixam de focar na reprodução de técnicas e passam a repensar, questionar e analisar de forma crítica o problema proposto.

Assim, cremos que a proposta pedagógica foi responsável pelo surgimento da contradição interna. Outros aspectos como o trabalho em dupla, o uso do Modellus, a colaboração e a análise de um modelo matemático reafirmam nossas considerações. Em particular, o papel desempenhado pelo software, como um novo elemento do sistema de atividade, indicou que ele condicionou (sem determinar) o pensamento dos estudantes propiciando o estabelecimento de relações entre a Matemática e a Biologia e, com isso, ao mesmo tempo em que ele se tornou parte da fonte que potencializou a tensão, também contribuiu para a superação da mesma.

Reafirmamos, desse modo, as sinalizações feitas por Souto (2013) com relação ao papel da proposta pedagógica em um sistema de atividade seres-humanos-com-mídias, especialmente quando verificamos que a proposta pode se interligar com cada um dos elementos de um sistema de atividade, criando potenciais focos de contradições internas. Além disso, observamos que ela também foi responsável pela superação da contradição emergente no sistema, na medida em que pressupunha o uso do software que, como apontamos anteriormente, oportunizou aos alunos possibilidades de analisar e compreender o modelo matemático para a transmissão da malária. Em síntese, a reorganização promovida pelo software Modellus, aparentemente foi peça fundamental dentro da proposta pedagógica para a superação da tensão. Assim, acreditamos que os processos de reorganização do pensamento, bem como os de moldagem recíproca (BORBA, 1999), devem ser analisados como elementos centrais de sistemas de atividade que envolvem em sua unidade atores humanos e não-humanos.

Consideramos oportuno acrescentar que o trabalho aqui desenvolvido se diferencia em alguns aspectos das reflexões iniciadas em Soares (2012), que discutiu o papel do software na produção matemática elaborada durante o desenvolvimento da proposta pedagógica, tendo como um de seus principais referenciais teóricos o construto seres-humanos-com-mídias. Neste artigo, buscamos um olhar mais amplo direcionado para as tensões que surgiram durante o desenvolvimento da proposta pedagógica, o que implicitamente significa compreender suas limitações e/ou potencialidades. As tensões são discutidas não apenas do ponto de vista do desenvolvimento local da proposta, mas também do ponto de vista histórico e estrutural do modo como a matemática tem sido abordada no contexto escolar. As reflexões que ora elaboramos nesse artigo, tomam como base, além do construto, os fundamentos da Teoria da Atividade. Essa expansão teórica nos oportunizou a produção do que consideramos um avanço, embora tímido, do ponto de vista teórico. Referimos-nos à proposição do diagrama representado na Fig.9. Nele, incluímos a proposta pedagógica, buscando uma tridimensionalidade para o sistema de atividade, o



qual poderá ser adotado em outras pesquisas para representar sistemas de atividades escolares. Creemos que futuramente reflexões mais refinadas sobre este diagrama poderão alavancar novos horizontes para o diálogo que vem sendo realizado entre a teoria da atividade e o construto seres-humanos-com-mídias.

Agradecimentos

Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

Referências

- ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. (Orgs.) *Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática*. Londrina: Eduel, 2011.
- ALMEIDA, L. M. W.; FATORI, L. H.; SOUZA, L. G. S. Ensino de Cálculo: uma abordagem usando Modelagem Matemática. *Unisal*, v.10, n.16, p. 1-18, 2007. Disponível em: <<http://www.revista.unisal.br/sj/index.php/123/article/viewFile/17/31>> Acesso em: 22 Out. 2014.
- ARAÚJO, J. L. Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática: as discussões dos alunos. 2002. 173f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.
- ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. Construindo Pesquisas Coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.) *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.
- BALDINO, R. R. Como Integrar Disciplinas sob o Ponto de Vista Epistemológico. In: Encontro Setorial dos Cursos de Graduação da Unesp, 1, 1995, Águas de Lindóia. *Anais...* Águas de Lindóia, 1995. p.30-47.
- BARBOSA, J. C. *Modelagem Matemática: concepções e experiências de futuros professores*. 2001. 253f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.
- BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2009.
- BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem Matemática no Ensino*. São Paulo: Contexto, 2007.
- BLOMHØJ, M.; KJELDSSEN, T. H. Students' Reflections in Mathematical Modelling Projects. In G. Kaiser, W. Blum, R. B. Ferri (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling – ICTMA 14*. New York: Springer, 2011. p.385-396.



BLUM, W.; LEIß, D. How do students and teachers deal with modelling problems? In C. Haines et al. (Eds.), *Mathematical modelling: Education, engineering and economic*. Chichester: Horwood, 2007. p.222-231.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto, Portugal: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C. Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização do Pensamento. In: BICUDO, M. A. V.; *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas*. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

BORBA, M. C.; MENEGHETTI, R. C. G.; HERMINI, H. A. Modelagem, Calculadora Gráfica e Interdisciplinaridade na Sala de Aula de um Curso de Ciências Biológicas. *Revista de Educação Matemática*, ano 5, n. 3, p.63-70, 1997.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. New York: Springer, 2005.

CATAPANI, E. C. Cálculo em Serviço: um estudo exploratório. *BOLEMA*, ano 14, n.16, p.48-62, 2001.

D'AMBROSIO, U. Um enfoque transdisciplinar à educação e à história da matemática. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.) *Educação Matemática: pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez, 2005. p.13-29.

DEPREZ, J. Modelling the Evolution of the Belgian Population Using Matrices, Eigenvalues and Eigenvectors. In: KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, R. B. (Eds.) *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling - ICTMA 14*. New York: Springer, 2011. p.467-478.

DOERR, H.; PRATT, D. The Learning of Mathematics and Mathematical Modeling. In: HEID, M. K.; BLUME, G. W. (Eds.) *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics, Vol.1. Research Syntheses*. New York: Information Age Publishing, 2008. p.18-23.

DOERR, H.; WOOD, T. Pesquisa-Projeto (*design research*): aprendendo a ensinar Matemática. In: BORBA, M. C. (Org.) *Tendências Internacionais em Formação de Professores de Matemática*. (Coleção Tendências em Educação Matemática). Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p.113-130.

ENGESTRÖM, Y. *Learning by expanding: an activity-theoretical approach to developmental research*. 1987 (Helsinki, Orienta-Konsultit). Versão online, disponível em: <<http://lchc.ucsd.edu/MCA/Paper/Engestrom/expanding/toc.htm>> Último acesso 04/03/2011.

ENGESTRÖM, Y. *Learning by expanding: ten years after*. 1999. Versão online, disponível em: <<http://lchc.ucsd.edu/MCA/Paper/Engestrom/expanding/toc.htm>> Último acesso 04 Maio 2009.



- ENGESTRÖM, Y. Expansive learning at work: toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, v.14, n.1, 2001. p. 133 - 156.
- ENGESTRÖM, Y. *Non Scolae Sed Vitae Discimus: como supercar a encapsulação da aprendizagem escolar*. In: DANIELS, H. (Org.) *Uma Introdução a Vygotsky*. São Paulo: Edições Loyola, 2002. p.175-197.
- ENGESTRÖM, Y.; SANNINO, A. Studies of expansive learning: foundations, findings and future challenges. *Educational Research Review*, v.5, p.1-24, 2010. doi:10.1016/j.edurev.2009.12.002. Acesso em: 05 Out. 2012.
- FERRUZZI, E. C. *A Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos Cursos Superiores de Tecnologia*. 2003. 161f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção e Sistemas) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Santa Catarina, 2003.
- FRANCHI, R. H. De O. L. Cursos de Cálculo: uma proposta alternativa. *Temas & Debates*, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, ano VIII, n. 6, 39-43, 1995.
- GOLDENBERG, M. *A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais*. Rio de Janeiro: Record, 2004. 8ª ed.
- HOWSON, A. G.; KAHANE, J.-P.; LAUGINIE, P.; de TURCKEIM, E. On the Teaching of Mathematics as a Service Subject. In: HOWSON, A. G.; KAHANE, J.-P.; LAUGINIE, P.; de TURCKEIM, E. (Eds.) *Mathematics as a Service Subject*, ICMI study series, Cambridge: Cambridge University Press, 1-19, 1988.
- JACOBINI, O. R. *A Modelagem Matemática como Instrumento de Ação Política na Sala de Aula*. 2004. 225f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas – Unesp, Rio Claro, SP. 2004.
- JAVARONI, S. L.; SOARES, D. S. Modelagem Matemática e Análise de Modelos Matemáticos na Educação Matemática. *Acta Scientiae*, v.14, n.2, p.260-275, 2012.
- KAPTELININ, V. The Object of Activity: making sense of the sense-maker. *Mind, Culture, and Activity*, v.12, n.1, p.4-18, 2005.
- LEONTIEV, A. N. *Activity, consciousness, and personality*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1978.
- LINCOLN, Y. S.; GUBA, E. G. *Naturalistic Inquiry*. Newbury Park: Sage Publications, 1985.
- MALHEIROS, A. P. S. *A Produção Matemática dos Alunos em um Ambiente de Modelagem*. 2004. 180f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.
- MAAß, K. What are modelling competences? *ZDM*, v.38, n.2, p.113-142, 2006.
- MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. *Modelagem em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

SOARES, D. S. *Uma Abordagem Pedagógica baseada na Análise de Modelos para Alunos de Biologia: qual o papel do software?* 2012. 341f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

SOARES, D. S.; BORBA, M. C. Fenômeno Biológico, Sistema Dinâmicos e Noções de Cálculo I: uma proposta. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. *Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática*. Londrina: Eduel, 2011. p.227-247.

SOARES, D. S.; JAVARONI, S. L. Análise de Modelos: possibilidades de trabalho com modelos matemáticos em sala de aula. In: BORBA, M. C.; CHIARI, A. (Orgs.) *Tecnologias Digitais e Educação Matemática*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013. p.195-219.

SOUTO, D. L. P. *Transformações Expansivas em um Curso de Educação Matemática a Distância Online*. 2013. 279f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013.

SOUTO, D. L. P.; ARAÚJO, J. L. Possibilidades expansivas do sistema Seres-humanos-com-mídias: um encontro com a Teoria da Atividade. In: BORBA, M. C.; CHIARI, A. (Eds.) *Tecnologias Digitais e Educação Matemática*, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013. p.71-90.

SOUTO, D.L. P, BORBA, M.C. Transformações expansivas em Sistemas de Atividade: o caso da produção matemática com a Internet. *Revista Perspectivas em Educação Matemática*, Campo Grande: A universidade, v.6, 2013.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. *Bolema*, v.13, n.14, p.66-91, 2000.

TIKHOMIROV, O. K. The psychological consequences of computerization. In: WERTSCSH, J. V. (Ed.) *The Concept of Activity in Soviet Psychology*. New York: M. E. Sharpe Inc., 1981. p.256-278.

Débora da Silva Soares
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
E-mail: debora.soares@ufrgs.br

Daise Lago Pereira Souto
Universidade do estado de Mato Grosso
E-mail: daise@unemat.br

