REMATEC
Revista de Matemática, Ensino e Cultura
Histórias de Práticas Matemáticas

PROBLEMAS MATEMÁTICOS DA ANTIGUIDADE COMO ESTRATÉGIA PARA O ENSINO DE EQUAÇÕES NO 9º ANO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

MATHEMATICAL PROBLEMS OF ANTIQUITY AS A STRATEGY FOR TEACHING EQUATIONS IN THE 9TH YEAR OF BASIC EDUCATION

Marcelo Miranda Serrão
Universidade Federal do Pará - UFPA

João Cláudio Brandemberg
Universidade Federal do Pará - UFPA

Resumo
O enfoque desta pesquisa foi investigar problemas matemáticos da antiguidade, visando localizar problemas clássicos e suas possíveis formalizações, de modo a podermos compreender seus elementos e compará-los. A investigação e o estudo de equações a partir da obra *Aritmética* de Diofanto do século III, nos permitiu selecionar problemas de cunho histórico em um processo de integração, visando oferecer aos professores da educação básica, apontamentos e sugestões para a exploração deste tipo de problemas como meio de superação de dificuldades de aprendizagem em sala de aula. Uma vez que a utilização da história da Matemática, promove uma integração da Matemática do passado com a Matemática dos dias atuais e oportuniza uma forma de tratamento dos conteúdos e conhecimentos matemáticos contextualizados.

Palavra-Chave: Problemas históricos. Aritmética de Diofanto. Ensino de equações.

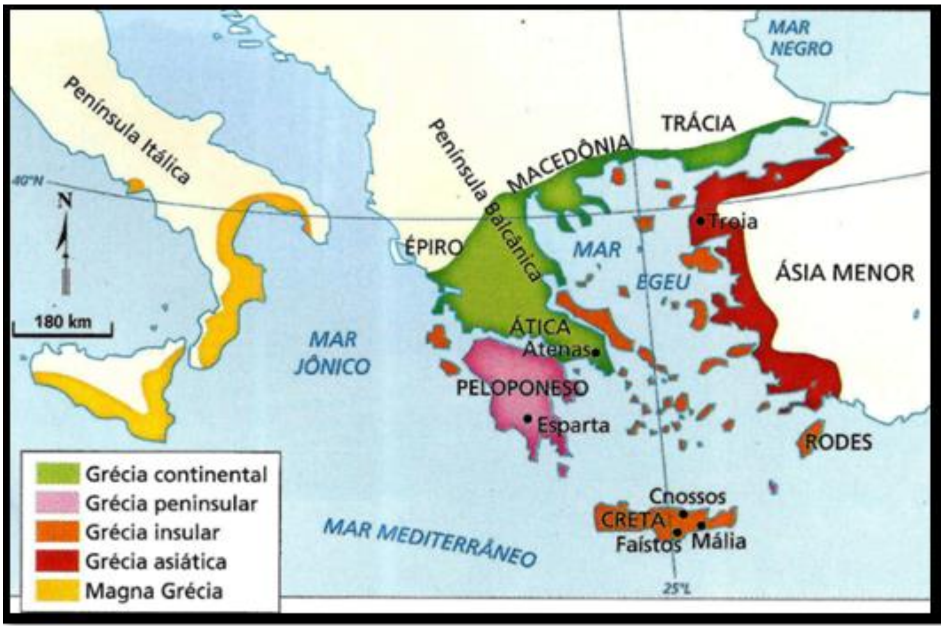
Abstract
The focus of this research was to investigate mathematical problems of antiquity, aiming to find classical problems and their possible formalization, so that we can understand its elements and compare them. Research and study of equations from the work of Diophantus's *Arithmetic* third century, allowed us to select problems of a historical nature in an integration process, aiming to provide basic education teachers, notes and suggestions to the exploration of such issues as a means to overcome learning difficulties in the classroom. Since the use of history of mathematics, mathematics promotes an integration of past with present-day mathematics and gives opportunity to a form of treatment of content and contextualized mathematical knowledge.

Keywords: Historical problems. Arithmetic of Diophantus. Teaching equations.

Introdução

No século VIII a.C., as comunidades da Jônia, na costa ocidental da Ásia Menor, estimuladas pela localização geográfica que lhes facilitava o contato com outros povos, desenvolveram o comércio, o artesanato e a navegação. Houve também, entre 800 e 750 a.C., o reaparecimento da escrita, derivada do alfabeto semítico utilizado pelos fenícios, provavelmente porque estes utilizavam a via marítima para o comércio e tinham contatos com os gregos.

Mapa 1: Grécia Antiga. Atlas Histórico.



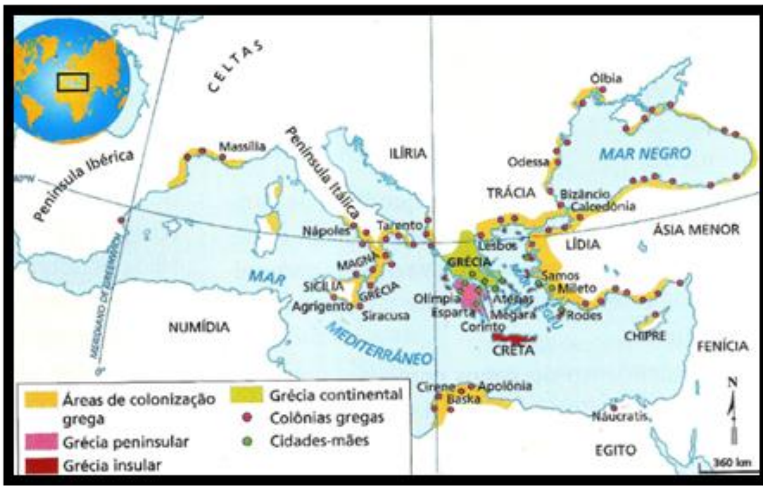
Fonte: Encyclopaedia Britannica, São Paulo, 1977. p. 165.

Foi na Jônia que pela primeira vez ocorreu à fusão de várias aldeias em uma só, dando origem a polis (cidade-estado), num processo denominado sinecismo, que posteriormente se estendeu por outros territórios da Grécia. O território das polis era reduzido e o solo não muito fértil. Em cada uma havia a Acrópole, colina fortificada e centro religioso; a Ágora, local central onde situava os edifícios públicos, o mercado e a praça, onde os cidadãos se reuniam para formar a Eclésia (assembleia política); o porto e o território rural. A população se aglomerava em volta da Acrópole ou se espalhava na área rural, constituindo, entretanto, campo e cidade, uma só unidade.

Figura 1: Acrópole de Atenas na Grécia

As Cidades de Esparta e Atenas representam o tipo clássico de cidades, respectivamente oligárquica e democrática. Em Esparta, o poder permaneceu sempre nas mãos dos cidadãos proprietários de terras os esparcistas. Em Atenas, as lutas políticas levaram a extensão da cidadania a todos os atenienses livres, tornando-os, pois, democratas, apesar da existência de grande número de escravos estrangeiros. A pobreza do solo que não produzia alimento suficiente para população em crescimento, a escravidão por dividas e a concentração cada vez maior das terras nas mãos da aristocracia foram fatores que levaram a um amplo movimento migratório dos gregos durante os séculos VIII a VI a.C., em direção aos mares Negro e Mediterrâneo.

Mapa 2: A Expansão Colonial Grega.



Fonte: HILGERMANN, Werner; KINDER, Herman. Atlas historique. Paris: Perris, 1992. p. 46.

Segundo Boyer (1996), hoje usamos a frase "matemática grega" como se indicasse um corpo de doutrina homogêneo e bem definido. Tal visão pode ser muito enganadora no entanto, pois significaria que a geometria sofisticada do tipo Arquimedes-Apolônio era a única espécie que os gregos conheciam. Devemos lembrar que a matemática no mundo grego cobriu um intervalo de tempo indo pelo menos de 600 a.C. a 600 d.C. e que viajou da Jônia à ponta da Itália e Atenas, a Alexandria e a outras partes do mundo civilizado.

Em função das transformações econômicas e expansão da riqueza, os gregos foram abandonando às tradições e mitos gentílicos e desenvolveram uma mentalidade individualista, racional e criativa, que já transparece claramente nas obras dos cientistas e filósofos jônios do século VI a.C., como Tales, Anaximandro, Anaxímenes da escola de Mileto. Criaram a lógica e a matemática, afirmando serem os sentidos e a razão os verdadeiros critérios para compreensão das leis que regem o universo.

Sócrates o maior filosofo, nascido em Atenas, foi professor de Platão, responsável pela organização e sistematização do estudo da Filosofia. Platão deixou 28 Diálogos, dos quais vamos encontrar trechos relacionados a Matemática. Em A República, um dos seus famosos diálogos, verifica-se várias passagens nas quais a matemática é mencionada, como, por exemplo, no Livro VII:

> É fácil concordar com isso – observou; - a geometria é, com efeito, o conhecimento do que existe sempre. Em consequência, meu nobre amigo, ela atrai a alma para a verdade e desenvolve nela este espírito filosófico que eleva para as coisas de cima os olhares que inclinamos erradamente para as coisas daqui de baixo (PLATÃO, 2005)

A educação na Grécia passou por muitas mudanças ao longo do tempo. Até o século VIII a.C., aproximadamente, predominou um ensino voltado para formar nobres guerreiros. Os meninos da aristocracia eram enviados aos palácios, onde eram treinados para a guerra e aprendiam valores como a lealdade, a honra e a coragem.

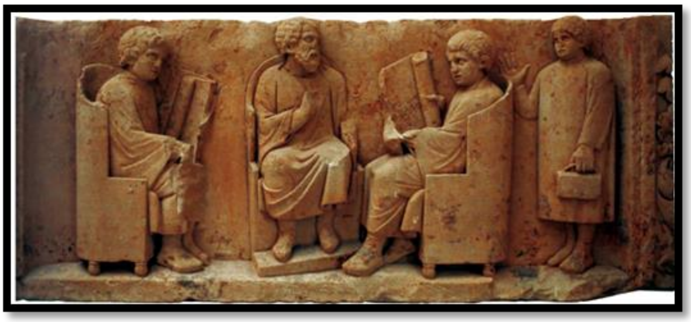
Com o tempo, a educação começou a priorizar o treinamento esportivo e iniciou-se o ensino das letras e dos cálculos. No século V a.C., havia dois modelos de educação bem diferentes: o de Atenas, centrado na formação integral, ou seja, no desenvolviemento do corpo e do espírito; e o de Esparta, centrado na formação guerreira.

Em Atenas, o ensino não era gratuito nem orbigatório. As famílias é que decidiam como educar os filhos. Por volta dos sete anos, os meninos das famílias mais ricas tinham aulas de gramática, para aprender a ler e a escrever; de música, quando aprendiam a tocar instrumentos como a libra a e flauta; e também aprendiam a recitar poemas. As aulas eram ministradas por um mestre, geralmente um escravo.

Aos quinze anos, os rapazes iam para os ginásios, onde praticavam atividades físicas e tinham aulas de leitura, escrita, cálculo, poesia e música. Também estudavam política e filosofia, para argumentarem com pefeição e se prepararem para atuar na vida pública. O objetivo era formar o cidadão integral.

As meninas geralmente, não aprediam a ler nem a escrever. Elas permaneciam em casa, e suas mães lhes ensinavam prendas domésticas. Os pais casavam suas filhas ainda muito jovens. O principal objetivo do casamento era gerar um filho, preferencialmente do sexo masculino.

Figura 2: Relevo romano do século II d.C. representando um professor grego e seus alunos. A obra foi encontrada em Neumangen-Dhron, Alemanha.



Fonte: Museu do Estado de Renânia, Trier, Alemanha.

Para Platão os seres matemáticos são entidades reais, objetivas, totalmente independentes do nosso conhecimento, têm propriedades bem determinadas, algumas conhecidas e muitas desconhecidas. Estes seres não são, naturalmente, objetos físicos ou materiais. Existem fora do espaço e tempo. São imutáveis e eternos - não foram criados, não mudarão, nem desaparecerão.

Aristóteles (384-322 a. C.) foi discípulo de Platão e também mestre de Alexandre, O Grande. Era filósofo e biólogo, mas estava sempre a par das questões matemáticas. Foi-lhe atribuído, um tratado sobre as Retas Indivisíveis, que consistiam em segmentos de reta, para os quais não há uma unidade de medida comum. Ele foi o fundador da Lógica e pode-se dizer que pelas suas alusões a conceitos e teoremas matemáticos, Aristóteles também é considerado um contribuinte para o desenvolvimento da matemática em sua época.

Com Alexandre Magno (336-323), filho de Filipe da Macedónia, a Grécia esforçou-se por espalhar ao longe e ao largo a cultura e a mentalidade humanista dos gregos. As conquistas de Alexandre implantavam, entre os povos conquistados, uma espécie de iluminismo cultural, onde a língua, os costumes e a arte dos gregos ganhavam foros de potência civilizadora.

Após a conquista do Egito, em 332 a.C., lançaram-se as bases duma nova cidade, aberta aos novos ventos da cultura e da arte gregas, livre das peias da teosofia pagã egípcia e independente do culto dos mortos, que tanto subjugava a vida do povo egípcio. Na verdade, morto Alexandre, o seu poder é repartido pelos seus dois generais maiores: Seleuco, de quem deriva a dinastia dos Selêucidas, ficará com a parte norte do império, com sede em Antioquia; o sul, com predominância do Egito, ficará para Ptolomeu I ou Lago, e dará lugar à dinastia dos Lágides. Todos eles se esmeraram em difundir e impor o helenismo, mas serão os Ptolomeus que, junto ao Mediterrâneo, na parte ocidental do Delta do Nilo e em frente da ilha de Faros, irão construir a nova cidade de Alexandria; ela seria como que a sede irradiadora da força do helenismo e da racionalidade humana, que ele impunha. O homem com sua inteligência seria o propulsor e a medida do progresso, da cultura, da religião e da arte. Desse modo e nesta linha de ideias, o grego comum, língua universalizada – KOINÉ – tornou-se o veículo de comunicação universal em todo o Médio Oriente, numa espécie de diálogo cultural entre povo grego e civilizações orientais.

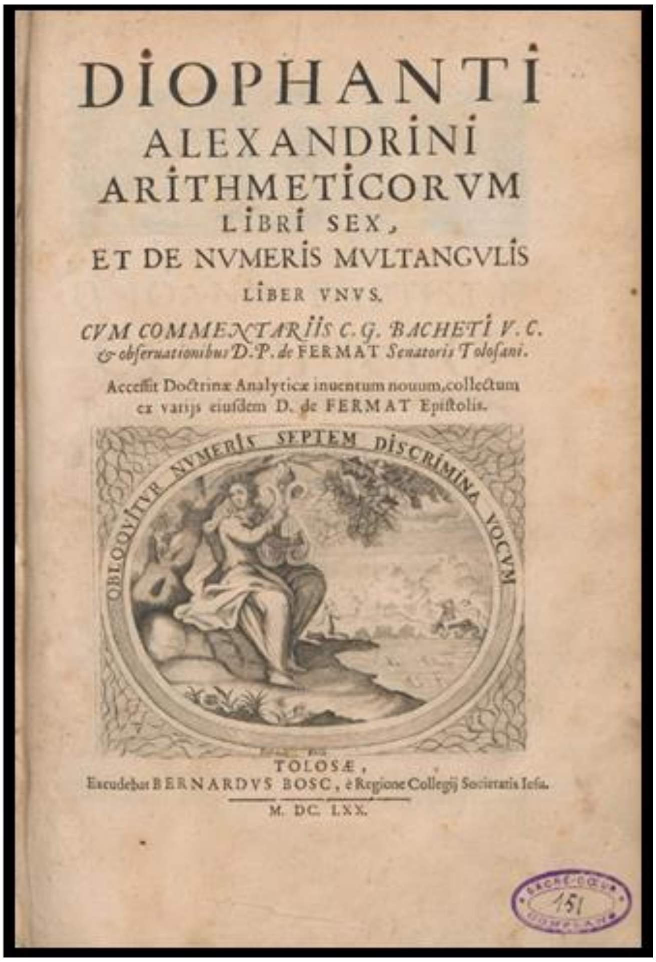
Com o objetivo de promover o helenismo e toda a sua cultura é que se construiu a célebre Biblioteca de Alexandria. Terá sido em meados do século III a.C. (cerca de 252 a.C.), quando governava o Egito Ptolomeu II, Filadelfo. Ali se reuniria todo o empório do saber: literatura, história, filosofia, religião, arte, matemática, astrologia, medicina. Calímaco (305-240 a.C.) foi o bibliotecário que elaborou o primeiro catálogo, que ocupava 120 rolos de papiro. Estima-se que chegasse a ter entre 400.000 a 1 milhão de papiros.

A cidade de Alexandria tornou-se um grande centro de investigação do conhecimento, o primeiro instituto que registrava o conhecimento das civilizações, a maior cidade que o mundo ocidental havia conhecido, sem dúvida um centro intelectual econômico do mundo Helenístico. Pessoas de todos os países saiam em direção a Alexandria para viver, comercializar e para aprender. Era uma cidade onde os gregos, egípcios, sírios, hebreus, núbios, fenícios, romanos, galos e iberos comercializavam mercadorias e ideias. Para lá, eram regimentados escritores, poetas, artistas e cientistas de todas as partes para enriquecer o seu Museu e sua Biblioteca. Nomes de importantes estudiosos deram suas contribuições: Galeno, Euclides, Apolônio, Aristarco, Hiparco, Tolomeo, Aquimedes, Nicomedes, Herón, Menelao, Pappus, já em seu declínio Teón e Hipátia. Em 604 d.C. a biblioteca de Alexandria foi destruída num incêndio.

Em 1621, Bachet de Méziriac (1581–1638) publica o texto em grego da Aritmética juntamente com uma tradução para o latim e algumas notas suas sobre os problemas e soluções de Diofanto. Uma cópia desta edição que é adquirida por Pierre de Fermat (1601–1665), homem de leis por profissão (foi conselheiro do tribunal superior de

Toulouse), matemático por paixão. Fermat irá anotar nas margens da sua cópia da Aritmética resultados sobre números naturais, inspirados sem dúvida no seu estudo e leitura desta obra, mas completamente novos e de uma beleza e profundidade impressionantes, e sem paralelo até então. Fermat limita-se a enunciar, nessas margens e em cartas a outros matemáticos, esses resultados, sendo apenas conhecido um esboço de uma prova sua em Teoria dos Números. Os melhores matemáticos do século XVII, em especial L. Euler (1707–1783), trabalharam arduamente na tentativa de provar os resultados de Fermat.

Figura 3: O *Aritmética* de Diofanto de Bachet de Méziriac com comentários de Pierre de Fermat publicada em 1670.


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

Fonte: Gallica Bibliotèque Numérique. Disponível em http://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/2790613 - Bibliothèque Nationale de France. Acesso em 03 de dezembro de 2013.

Algumas versões publicadas do Aritimética: em 1621, Claude Gaspard Bachet de Méziriac, publica uma versão bilíngue grego-latina; em 1893 uma edição crítica por Paul Tannery Diophanti Alexandrini Opera omnia cum graecis commentariis; em 1910, Heath publica a obra Diofanto de Alexandria: um estudo da história da álgebra grega.

Segundo Roque (2012) a contribuição mais conhecida de Diofanto é ter introduzido uma forma de representar o valor desconhecido em um problema, designando-o como arithmos, de onde vem o nome “aritmética”. O *Aritmética* contém uma coleção de problemas que integrava a tradição matemática da época, no livro I, ele introduz símbolos, aos quais o autor chama “designações abreviadas”, para representar os diversos tipos de quantidade que aparecem nos problemas[43].

Diofanto usou o símbolo análogo à letra grega ζ para representar à incógnita; para o quadrado da incógnita usou Δ^{Y}, à qual chamou dynamis (quadrado); para cubo da incógnita usou K^{Y} e chamou-lhe Kybos; para a potência de expoente quatro usou $\Delta^{Y}\Delta$ e chamou-lhe dynamis-dynamis; para as potências de expoente cinco e seis usou, respectivamente, ΔK^{Y} (dynamis-kybos) e $K^{Y}K$ (kybos-kybos). (HEATH, 1910, p. 129).

Símbolos Diofantinos	Descrição	Notação Moderna	Descrição
ζ	Arithmos	x	Incógnita
Δ^{Y}	Dynamis	x^2	Quadrado
K^{Y}	Kybos	x^3	Cubo
$\Delta^{Y}\Delta$	Dynamis-Dynamis	x^4	4ª Potência
ΔK^{Y}	Dynamis-Kybos	x^5	5ª Potência
$K^{Y}K$	Kybos-Kybos	x^6	6ª Potência

Quadro 1: Confeccionada a partir de Roque (2012)

Segundo Eves (2008, p. 209), Diofanto tinha abreviações para a incógnita, potência até a de expoente seis, subtração, igualdade e inversos. Nossa palavra “aritmética” provém da palavra grega aritnmetike que se compõe de arithmos (“número”) e techne (“ciência”). Heath assinalou bastante convincentemente que o símbolo usado por Diofanto para a

[43] O método de abreviação representava a palavra usada para designar essas quantidades por sua primeira ou última letra de acordo com o alfabeto grego.

incógnita provavelmente derivava por fusão das duas primeiras letras gregas da palavra *arithmos*, a saber α e ρ. Com o tempo esse símbolo veio a se parecer com o sigma final grego ζ. Embora haja dúvidas sobre isso, o significado das notações para as potências da incógnita "cubo". Facilmente se explicam os símbolos das potências seguintes parece bastante claro: assim, *dunamis* ($\Delta YNAMI\Sigma$) da incógnita, $\Delta^{Y}\Delta$ (quadrado-quadrado), ΔK^{Y} (quadrado-cubo) e $K^{Y}K$ (cubo-cubo). O símbolo de Diofanto para "menos" assemelha-se a um V invertido com a abissetriz traçada nele. A explicação que se tem dado é que esse símbolo se comporia de Λ e I, letras da palavra grega *leipis* ($\Lambda EI\Psi I\Sigma$) que significa "menos". Todos os termos negativos de uma expressão eram reunidos e antes deles se escrevia o sinal de menos. Indicava-se a adição por justaposição; e o coeficiente da incógnita ou de uma potência qualquer da incógnita era representado por um numeral grego alfabético, logo seguida ao símbolo a que se deveria ligar. E quando houvesse um termo constante, então usava-se $\overset{o}{M}$, uma abrevisção da palavra grega *monades* ($\mathrm{MONA\Delta E\Sigma}$), que significa unidades, seguido do coeficiente numérico apropriado. Assim, $x^3 + 13x^2 + 5x$ e $x^3 - 5x^2 + 8x - 1$ se escreveriam $K^{Y}\alpha\Delta^{Y}\iota\gamma\zeta\varepsilon$ e $K^{Y}\alpha\zeta\eta$ ⫛ $\Delta^{Y}\overset{o}{M}\alpha$, expressões que, literalmente, podem ser lidas assim: incógnita ao cubo 1, incógnita ao quadrado 13, incógnita 5 e (incógnita ao cubo 1, incógnita 8) menos (incógnita ao quadrado 5, unidades 1). Foi assim que a álgebra retórica se tornou álgebra sincopada.

Os símbolos de Diofanto marcam a passagem da Álgebra retórica, em que as expressões são escritas totalmente em palavras, para a Álgebra sincopada, na qual algumas expressões vêm escritas em palavras e outras são abreviadas (STRUIK, 1989).
Segundo Klein (1968, p. 146), os sinais usados por Diofanto eram meras abreviaturas. Por esta razão, o procedimento praticado por Diofanto, denominou-se de álgebra sincopada que é uma transição da álgebra retórica para a moderna álgebra simbólica.

Muitos dos problemas tratados na Aritmética conduzem a equações do 1º e 2º graus, a uma ou mais incógnitas, determinadas ou não; outros se referem a equações cúbicas, mas para estas Diofanto escolhe adequadamente os dados para que seja fácil obter a solução. Há também nela problemas algébricos que Diofanto resolve por recurso à geometria e problemas sobre triângulos retângulos de lados racionais. Para os problemas propostos, são aceitas somente soluções racionais positivas. São os problemas "sobre" resolução de equações os que mais nos interessam em nossa abordagem. Problemas como "dividir um número dado em dois outros, sabendo sua diferença" e suas estratégias de resolução. Que nos permitam a partir de suas comparações um ensino mais efetivo na resolução de equações do primeiro e segundo grau na educação básica.

Pressupostos teóricos metodológicos

A resolução de problemas é uma estratégia didático/metodológica importante para o ensino da matemática. Porém, em sala de aula, constata-se que um uso exagerado de regras, e resoluções por meio de procedimentos padronizados, desmotivam tanto alunos quanto professores. O emprego de problemas rotineiros não desenvolve a criatividade e autonomia em matemática.

Hoje, para aprender a resolver os “problemas matemáticos”, de um modo geral, são trabalhados em sala de aula exercícios repetitivos visando fixar os conteúdos que acabaram de ser estudados, em um abuso de procedimentos padronizados na resolução de problemas semelhantes. Essa atividade não desenvolve no aluno, a capacidade de se transportar do raciocínio utilizado para o estudo de outros assuntos ou mesmo de problemas relacionados.

A busca por novas alternativas de transposição didática para o ensino de Matemática sugere que tomemos a história da Matemática como uma aliada. A aliança consiste em trabalhar o desenvolvimento histórico de determinados conteúdos com vistas a localizar possibilidades pedagógicas que superem as dificuldades encontradas por professores e estudantes de Matemática (MENDES, 2001) (BRANDEMBERG, 2010).

A resolução de problemas, em um trabalho organizado a partir da elaboração de atividades de cunho histórico, acreditamos, ser uma importante contribuição para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, ao desenvolver no aluno as capacidades de um “pensamento matemático avançado” ou, ao menos, mais elaborado, que não se restringe a aplicação e resolução de exercícios rotineiros que simplesmente valorizam o aprendizado por reprodução ou imitação.

A importância da resolução de problemas matemáticos de cunho histórico deve possibilitar aos alunos mobilizarem conhecimentos e desenvolverem a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance dentro e fora da sala de aula. Assim, os alunos terão oportunidades de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança.

Segundo Dante (1991), “é possível por meio da resolução de problemas desenvolver no aluno iniciativa, espírito explorador, criatividade, independência e a habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis, para que ele possa propor boas soluções às questões que surgem em seu dia-a-dia, na escola ou fora dela”.

Os alunos ao resolverem problemas de cunho histórico podem descobrir fatos novos e encontrarem várias outras maneiras de resolverem o mesmo problema, despertando a curiosidade e o interesse pelos conhecimentos matemáticos e assim desenvolverem a capacidade de solucionar as situações que lhes são propostas além da possibilidade de conhecer e comparar as diversas estratégias de resolução e as ferramentas matemáticas disponíveis em cada época.

Alguns problemas selecionados da *Aritmética* de Diofanto para nossas atividades em sala de aula

Apresentaremos os problemas I-27 e I-28 do Livro I da *Aritmética* de Diofanto, são os primeiros que se reduzem a equações do 2º grau completas e na apresentação de sua resolução, Diofanto utiliza um artificio que permite transformá-las em equações do 2º grau incompletas, cuja resolução é imediata. O artifício consiste em designar uma certa quantidade desconhecida por *arithmo*. Em seguida, as várias incógnitas do problema são escritas em função dessa nova incógnita e, são feitas substituições entre as várias equações, de modo a reduzir tudo a uma só equação, com uma só incógnita (o *arthmo*) nunca com grau superior ao segundo.

Note-se que a escolha do *arithmo* não era arbitrária. Ao invés, era feita de forma que, no final, se obtivesse uma equação nas condições acima referidas. Após calcular o valor do aritmo era fácil determinar as várias soluções do problema.

> O procedimento de Diofanto é totalmente diferente, do ponto de vista conceitual, dos procedimentos pelos egípcios, e da geometria. Com efeito, aqui, uma incógnita (designada por aritmo, que quer dizer número) é posta em evidência nos cálculos. Esta incógnita não é como nos processos aritméticos, o ponto de chegada dos cálculos, ela não é mais, como acontece no caso da geometria, um ponto de referência estático no desenvolvimento do problema, mas sim uma quantidade que é operada como se fosse um número conhecido (RADFORD, 1993)

Nos parece que Diofanto sugere que se pode acompanhar o processo de descoberta do resultado. Isso é bem visível na resolução dos problemas. Aqui, selecionamos, inicialmente, apenas três problemas e suas respectivas atividades, buscando relacionar a história da matemática grega ao ensino de equações na educação básica.

Problema I-1 - **Dividir um número dado em dois números de diferença dada.**

a) **Resolução proposta por Diofanto (retórica)**: Seja 100 o número e a diferença 40; achar os números. Supondo $arithmo$ o número menor, o maior será $arithmo\ mais\ 40$; logo, os dois somados dão $2\,arithmos\ mais\ 40$, que vale 100. Então, 100 é igual a $2\,arithmos\ mais\ 40$. Em seguida vamos subtrair 40 a cada um dos membros ficando

$2\ arithmos\ igual\ a\ 60$. Logo o número será 30. Então, $arithmo\ igual\ a\ \mathbf{30}$ $e\ arithmo\ mais\ 40\ igual\ a\ \mathbf{70.}$

b) **Uma resolução usando as abreviações (mais geral)**: Supondo ζ o número menor, o maior será $\zeta + 40$; logo, os dois somados dão $2\zeta + 40$, que vale 100. Então, 100 é igual a $2\zeta + 40$. Em seguida vamos subtrair 40 a cada um dos membros ficando 2ζ igual a 60. Logo o número será 30. Então, $\zeta\ igual\ a\ \mathbf{30}\ e\ \zeta + 40\ igual\ a\ \mathbf{70.}$

c) **Resolução em notação moderna:** Supondo x o número menor, o maior será $x + 40$; logo, os dois somados dão $2x + 40$, que vale 100. Então, 100 é igual a $2x + 40$. Em seguida vamos subtrair 40 a cada um dos membros $2x + 40 - 40 = 100 - 40$ ficando $2x$ igual a 60. Logo o número será 30. $x = \mathbf{30}\ e\ x + 40 = \mathbf{70.}$

Atividade Proposta: Vamos supor novos valores para o número e para a diferença dada no problema, propondo nomear a incógnita, e assim, buscar identificar expressões generalizadoras através de situações corelatas. Essa atividade tem como objetivo desenvolver no aluno habilidades investigativas, identificando as estruturas matemáticas, a função da incógnita, e construir uma linguagem algébrica para descrevê-la simbolicamente, propiciando ao aluno a partir das ideias de Diofanto a criação de expressões que possuam **regularidades** na resolução de problemas.

Problema I-27 **- Encontrar dois números com soma e produto dados.**

a) **Resolução proposta por Diofanto (retórica)**: Considere que a soma é 20 e o produto, 96. Supondo que a diferença entre os dois números seja 2 arithmos, começamos por dividir a soma desses números (que é 20) em dois (obtendo 10). A partir desse resultado, consideramos um arithmos somado a e subtraído de 10, respectivamente, cada uma das metades. Como a metade da soma é 10, tomando a metade subtraída 1 arithmos mais a metade acrescentada de 1 arithmos obtendo 20, que é a soma desejada. Para que o produto seja 96, multiplicamos essas mesmas quantidades, obtendo 100 subtraído do quadrado do arithmos (um dynamis). Chegamos, assim, à conclusão de que o dynamis deve ser 4, logo, o valor do arithmos é 2. Os valores procurados serão, portanto, 10 mais 2 e 10 menos 2, ou seja, **8** e **12**.

b) **Uma resolução usando as abreviações (mais geral)**: Se esses números fossem iguais, cada um deles seria 10. Supomos que a diferença entre eles seja 2ζ, ou seja, os dois números procurados são obtidos retirando ζ de um destes 10 e adicionando ζ ao outro. Como a soma não muda após essas operações, temos 10 – ζ + 10 + ζ = 20. Mas sabemos também que o produto desses números é 96, logo, podemos escrever (10 – ζ) (10 + ζ) =

96. Observamos, então, que $10^2 - \Delta^y = 96$, e concluímos que o valor de ζ deve ser 2. Logo, os números procurados $10 - \zeta$ e $10 + \zeta$ são, respectivamente, **8** e **12**.

c) **Resolução em notação moderna:** Supondo x e $y = 10$, seja $2x$ a diferença entre eles, então existe z, tal que $x = 10 - z$ e $y = 10 + z$. Substituindo na equação $x.y = 96$ obtemos: $(10 - z).(10 + z) = 96$; logo, $100 + z^2 = 96$. Então, z é igual a 2. Logo, os números procurados $x = 10 - z$ e $y = 10 + z$ são, respectivamente, **8** e **12**.

Atividade Proposta: Quanto a esta atividade, pretendemos que os alunos passem a interpretar os diversos aspectos que envolvem a resolução de equações e que possam formular a partir dessas ideias generalizações que permitam resolver o **problema I-27** por diversas formas. Então, para o devido entendimento desse problema, como sugestão vamos partir no sentido inverso da resolução proposta por Diofanto. Iniciamos propondo dois números quaisquer para encontrar a soma e o produto, e assim identificar expressões em situações correlatas.

Problema I-28 **- Encontrar dois números cuja soma seja um número igual a 20 e o quadrado somado seja um número igual a 208.**

a) **Resolução proposta por Diofanto (retórica)**: Considere que a soma é 20 e os quadrados somados sejam, 208. Supondo que a diferença entre os dois números seja 2 arithmos, começamos por dividir a soma desses números (que é 20) em dois (obtendo 10). A partir desse resultado, consideramos um arithmos somado a 10 e subtraído de 10, respectivamente, cada uma das metades. Como a metade da soma é 10, tomando a metade subtraída 1 arithmos mais a metade acrescentada de 1 arithmos obtendo 20, que é a soma desejada. Para que a soma dos quadrados seja 208, somamos os quadrados dessas mesmas quantidades, obtemos $(10\ menos\ arithmos)^2\ mais\ (10\ mais\ arithmos)^2\ igual\ 208$ e ainda, $10^2\ menos\ 2.10.arithmos\ menos$ $(menos\ \text{Dynamis})\ mais\ 10^2\ mais$ $2.10.$ $arithmos\ mais\ Dynamis\ igual\ 208$, então $100\ menos\ 20arithmos\ mais\ \text{Dynamis}\ mais$ $100\ mais\ 20arithmos\ mais\ \text{Dynamis}\ igual\ 208$, temos, $200\ mais\ 2\text{Dynamis}\ igual\ 208$. Chegamos, assim, à conclusão de que o valor do arithmos é 2. Os valores procurados serão, portanto, 10 menos 2. e 10 mais 2 ou seja, **8** e **12**.

b) **Uma resolução usando as abreviações (mais geral)**: Queremos encontrar dois números com soma 20 e a soma dos quadrados seja igual a 208. Se esses números fossem iguais, cada um deles seria 10. Supomos que a diferença entre eles seja 2ζ, ou seja, os dois números procurados são obtidos retirando ζ de um destes 10 e adicionando ζ ao outro.

Como a soma não muda após essas operações, temos 10 – ζ + 10 + ζ = 20. Mas sabemos também que a soma dos quadrados desses números é 208, logo, podemos escrever $(10 - \zeta)^2 + (10 + \zeta)^2 = 208$. Observamos, então, que $100 - 20\zeta + \Delta^y + 100 + 20\zeta + \Delta^y = 208$, portanto $200 + 2\Delta^y = 208$ e concluímos que o valor de ζ deve ser 2. Logo, os números procurados $10 - \zeta$ e $10 + \zeta$ são, respectivamente, **8** e **12**.

c) **Resolução em notação moderna:** Supondo $x + y = 20$ e $x^2 + y^2 = 208$, seja x o menos desses números, então existe z, tal que $x = 10 - z$ e $y = 10 + z$. Substituindo na equação $x^2 + y^2 = 208$ obtemos: $(10 - z)^2 + (10 + z)^2 = 208$; logo, os dois somados dão $200 + 2z^2 = 208$. Então, z é igual a 2. Logo, os números procurados $x = 10 - z$ e $y = 10 + z$ são, respectivamente, **8** e **12**.

Atividade Proposta: Esta atividade tem por finalidade de revisar aspectos matemáticos relacionados ao quadrado da soma de dois termos e o quadrado da diferença, assunto trabalhado no 8º ano. Então, partindo no sentido inverso da resolução proposta por Diofanto. Iniciamos sugerindo dois números quaisquer para encontrar a soma e os quadrados somados, e a partir daí aplicar o método para qualquer par de números sugeridos.

Sobre a apresentação de problemas históricos em livros didáticos

A seguir apresentamos o problema *Decifrando o enigma da idade de Diofanto*, selecionado no livro didático do 7º ano do ensino fundamental, Sampaio (2010) ao abordar o tema equações e inequações do 1º grau, descreve o problema encontrado na lápide de Diofanto.

Figura 4: Decifrando o enigma da idade de Diofanto no livro didático.

Decifrando o enigma da idade de Diofanto

Vamos considerar como *x* a idade com que Diofanto faleceu e transcrever estas expressões para a linguagem matemática:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$$

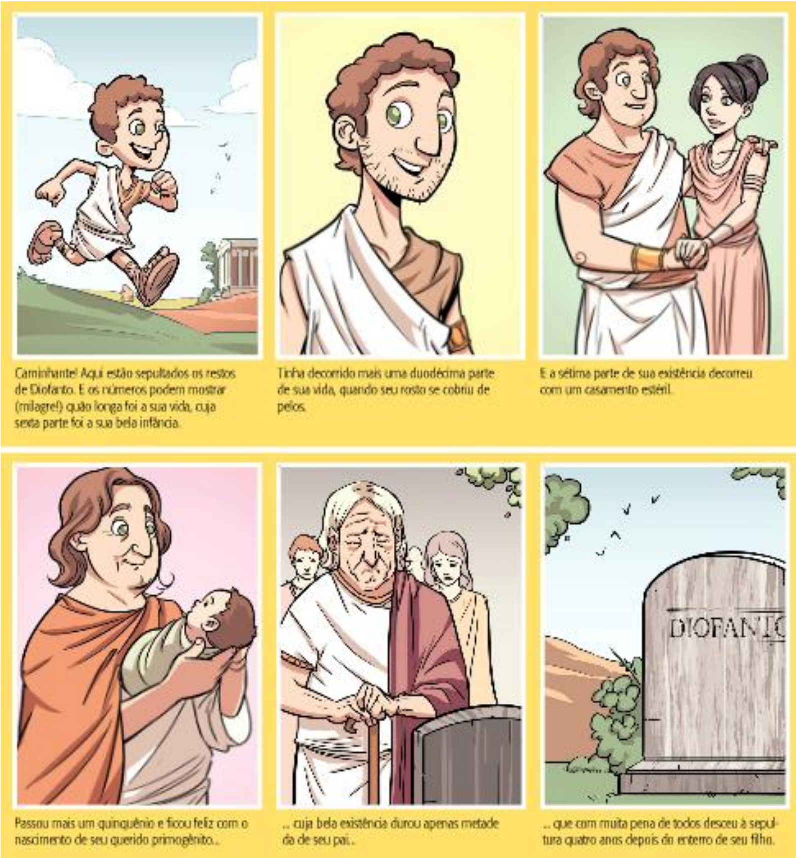
$$x = \frac{[14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336]}{84}$$

$$84x = 75x + 756$$

$$9x = 756$$

$$x = 84$$

Os estudos de Diofanto basearam-se no uso de símbolos para facilitar a escrita e os cálculos matemáticos. Os símbolos criados por ele fizeram com que as expressões, até então escritas totalmente com palavras, pudessem ser representadas por abreviações. A álgebra começa a ser entendida como o estudo da resolução de equações.



Fonte: Apresentada por Fausto Arnaud Sampaio, na Coleção Jornadas – *Matemática*. Editora Saraiva. 2010. p. 150 e p. 151.

A nossa intenção ao utilizar os dados e características históricas, visa uma maior interação e uma possível comparação das estratégias de resolução histórica e atual, sempre buscando dar mais significado aos conteúdos (conceitos) estudados (envolvidos).

O estudo nos permite analisar as estratégias usadas nos problemas, comparando-as e registando algumas diferenças. As estratégias usadas são diversificadas inserindo-se nas categorias de estratégias informais. Além disso, a sua análise evidencia o tipo de trabalho que se pode desenvolver na sala de aula a partir de condições que propiciem que os alunos progridam do uso de estratégias informais, pouco estruturadas para estratégias mais estruturadas e eficientes. Pelo contrário, a análise das estratégias informais denota uma prevalência do uso do algoritmo tradicional e evidencia uma continuidade em termos da progressão das estratégias nos três problemas.

A potencialidade do trabalho com a Resolução de Problemas Matemáticos da Antiguidade como estratégia para o ensino de matemática na educação básica, enquanto meio são ferramentas preponderantes e de exclusividade para se envolver com problematização e raciocínio lógico. Até este momento, podemos perceber que o conhecimento da história do desenvolvimento da matemática nos possibilita maior compreensão quando percebemos que a aritmética nos conduz a uma simbologia algébrica como linguagem que facilita a expressão do pensamento matemático. A partir de uma abordagem histórica, passando pelos possíveis estágios de evolução da matemática podemos contribuir para a construção do pensamento algébrico em direção à formalização da linguagem simbólica e, diante disso, amenizar dificuldades relativas à abstração. À medida que a linguagem algébrica se torna familiar ao aluno, ele pode compreender a função da generalização para a solução de situações problema. As informações e os problemas históricos permitem reflexões que auxiliam, tanto na formação do professor quanto na dos alunos e ainda podem contribuir para a reelaboração de conceitos matemáticos.

Considerações Finais

A história da matemática como metodologia de ensino leva para a sala de aula questões relativas às necessidades humanas que deram origem a conceitos matemáticos e às produções teóricas consequentes das abstrações e generalizações obtidas. O grande desafio para os professores de matemática que procuram fazer uso da história da matemática em sala de aula consiste na transformação das informações históricas obtidas por meio de pesquisas bibliográficas em atividades de ensino que propiciem aos alunos um encontro histórico com o conhecimento matemático e na elaboração de abordagens pedagógicas que favoreçam a reconstrução e assimilação dos conceitos envolvidos nestes conteúdos. O conhecimento da história da matemática é essencial para todo professor desta área, pois mesmo que as informações históricas não tenham aplicação direta em sala de aula, a compreensão do desenvolvimento histórico dos conceitos pode influenciar positivamente as práticas pedagógicas.

A história da matemática na formação do professor pode contribuir na percepção "da natureza da matemática, dos processos de abstração, de generalização e de demonstração, das dimensões estética e ético-política da atividade matemática". Contudo, a grande maioria dos professores que atuam nas escolas não teve em sua formação disciplinas referentes à história da matemática, cabendo a eles a busca destes conhecimentos por intermédio de cursos de formação continuada, pesquisas bibliográficas, etc., Não se conhece completamente uma ciência, a menos que saiba a sua história.

O recurso à história da matemática sozinho não soluciona todos os problemas da Educação Matemática, mas, observa-se que as atividades inspiradas na história motivam os alunos à aprendizagem, humanizam a matemática, conduzem a investigações e contribuem para a compreensão dos conteúdos matemáticos a partir da recriação ou da redescoberta de conceitos.

Uma abordagem histórica da construção de conceitos matemáticos pode propiciar uma visão da produção matemática, e revela que a matemática é um produto da cultura humana, mutável com o tempo. O conhecimento da história do desenvolvimento algébrico possibilita a percepção da simbologia algébrica como uma linguagem que facilita a expressão do pensamento matemático. Atividades que contemplem os estágios de evolução podem contribuir para a construção do pensamento algébrico em direção à formalização da linguagem simbólica e, diante disso, amenizar dificuldades relativas à abstração.

À medida que a linguagem algébrica se torna familiar ao aluno, ele pode compreender a função da generalização para a solução de situações problema. As investigações desenvolvidas demonstraram que o recurso à história da matemática na prática pedagógica vai além de um elemento motivador, pois as informações e os problemas históricos permitem reflexões que auxiliam, tanto na formação do professor quanto na dos alunos e ainda podem contribuir para a reelaboração de conceitos matemáticos, neste caso específico, os conceitos algébricos.

Referências

BRANDEMBERG, J. C. & MENDES, I. A. **Problemas históricos e ensino de Matemática** – III EPAEM, Belém, 2005.

BRANDEMBERG, J. C. **Uma análise histórico epistemológica do conceito de grupo**. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2ª Ed. São paulo: Edgard Blücher, 1996

DANTE, L. R**. Didática da resolução de problemas de matemática**. 2. ed. São Paulo: Ática, 1991.

EVES, H. **Introdução à História da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, São Paulo: Editora da UNICAMP, 2008.

HEATH, T. L. **Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra**. Forgotten, 2012. Publicação original 1910.

KLEIN, J. **Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra**. Trad, por Eva Brann. New York: Dover, 1968

MENDES, I. A. **O Uso da história no Ensino da Matemática: reflexões teóricas e experiências**. Belém, 2001.

MENDES, I. A. **Ensino da Matemática por atividades: Uma aliança entre o construtivismo e a história da matemática**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática - APM, 2001 (Colecção Teses).

PLATÃO. **República**. Tradução por J. Guinsburg. São Paulo: Difusão Européia do Livro, 2005.

RADFORD, L. - **'L'émergence et le développement conceptuel de F algèbre" in Actes de la première université d'été européenne**. Montpellier: IREM de Montpellier, 1993

STRUIK, D. J. **História Concisa das Matemáticas**. Gradiva. Lisboa: 1989.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SAMPAIO, F. A. **Coleção Jornadas –** ***Matemática***. Editora Saraiva. 2010.

Marcelo Miranda Serrão
Universidade Federal do Pará – Brasil
E-mail: mmserrao@hotmail.com
João Cláudio Brandemberg
Universidade Federal do Pará – Brasil
E-mail: brand@ufpa.br