A ÁLGEBRA DO PROFESSOR E DO ALUNO: UM OLHAR SOB A ÓTICA DA ANTROPOLOGIA DO DIDÁTICO

ALGEBRA TEACHER AND STUDENT: A VIEW FROM THE PERSPECTIVE OF ANTHROPOLOGICAL THEORY OF TEACHING

Marcus Bessa de Menezes
Universidade Federal de Campina Grande – UFCG – Brasil

Resumo
Nesse trabalho apresentamos resultados da pesquisa que teve como objetivo identificar as diferenças entre o saber que é apresentado pelo professor em sala de aula, o saber ensinado, e de um saber apresentado pelo aluno, o saber aprendido. Para tanto, fizemos o uso da Teoria Antropologica do Didático por meio da praxeologia, que nos permitiu montar "quadros" comparativos entre os saberes do professor e dos alunos. Foram feitas observações em sala de aula, análises de atividades realizadas no papel pelos alunos, além de entrevistas e com o professor e alunos. Os resultados indicaram a existência de um novo saber dentro do cenário didático que, apesar de ser influenciado pelo saber ensinado pelo professor, possui características próprias que o distingue dos outros saberes até então apresentados pela Transposição Didática.

Palavras-chave: Educação, Educação Matemática, Transposição Didática, Teoria Antropológica do Didático.

Abstract
We present results of research aimed at identifying the differences between knowledge that is presented by the teacher in the classroom, teaching knowledge, and of knowledge presented by the student, the knowledge learned. For this purpose, we use the Anthropological Theory of Teaching guided by praxeology, which allowed us to assemble "tables" comparing the knowledge of the teacher and the students. Observations were made in the classroom, analyzes of activities performed by students in the role, and besides interviews with the teacher and students. The results indicated the existence of a new knowledge within the educational setting that, despite being influenced by knowledge taught by the teacher, has its own characteristics that distinguishes it from other knowledge hitherto presented by the Didactic Transposition.

Keywords: Education, Mathematics Education, Didactic Transposition, Anthropological Theory of Teaching.

Intodução

Entendemos que desde há muito tempo vem-se falando e teorizando acerca do aluno como um sujeito ativo no processo de ensino-aprendizagem. Podemos justificar essa teorização apontando pela opção pelo construtivismo que os estudiosos da Didática da Matemática fazem. O próprio Brousseau (1986), a esse respeito, refere que o aluno é o sujeito cognitivo e que a teoria genética de Jean Piaget traz elementos fundamentais para a análise da construção do conhecimento por esse aluno. Ora, se o aluno constrói conhecimento e se a teoria de Piaget seria a base para a compreensão desse processo, então podemos entender que o que Piaget chama de reelaboração seria a reconstrução do conhecimento a partir das interações entre o sujeito do conhecimento (aluno) e o objeto de conhecimento (conteúdo).

Com isso, o processo de reelaboração do saber em jogo no cenário didático, surgiria por meio dessas múltiplas interações vividas pelo aluno, acreditando que esse novo saber não possua a mesma “cara”, o mesmo “valor”, a mesma “utilidade” sempre. Assim sendo, podemos perceber que esse saber sofre “transformações” durante seu “percurso escolar”.

Esse trabalho de “transformação” dos saberes é o que Yves Chevallard (1991) chama de Transposição Didática, que seriam as modificações que se faz nos saberes científicos até os saberes que chegam na sala de aula, os saberes ensinados. Para o pesquisador, o professor cria um *metatexto,* no momento de realizar o processo de transposição. Como sugere o prefixo *meta,* ele cria um texto para além do texto. Esse texto, embora fundamentando-se no texto de saber, está impregnado com suas próprias construções, pela sua relação ao saber, dentre outros elementos.

Câmara dos Santos (1997) e Bessa de Menezes (2004), nessa mesma direção, afirmam que a segunda fase da transposição didática, a interna, seria caracterizada pela criação de um novo texto didático, impregnado pela subjetividade de cada professor. Porém, ele não é o único elemento humano e sujeito às suas subjetividades dentro do sistema didático; temos, também, o aluno.

Apesar de, teoricamente, a partir da Transposição Didática, termos elementos que nos indiquem para as modificações do saber, não temos elementos que revelam como funcionam essas transformações. Para isso, recorreremos à Teoria Antropológica do Didático (TAD), a qual nos permite explicar o funcionamento das transformações realizadas nos saberes nas instituições de ensino. Nesse sentido, a TAD seria uma ampliação do campo de análise decorrente da Transposição Didática, no momento em que permite analisar as transformações que são feitas nos objetos de saber a ensinar no interior da sala de aula.

A Teoria Antropológica do Didático (TAD)

Segundo Chevallard (1999), a sua teorização proposta na Teoria Antropológica do Didático (TAD) deve ser encarada como um desenvolvimento e uma articulação das noções cuja elaboração visa permitir pensar de maneira unificada um grande número de fenômenos didáticos, que surgem no final de múltiplas análises. Afirma ainda, que para começar sua teorização são necessários três conceitos primitivos: os objetos O, as pessoas X e as instituições I.

O objeto O tomará uma posição privilegiada em relação aos outros temas, em virtude do mesmo ser o "material de base" da construção teórica. Tudo será objeto. Chevallard faz uma analogia com o universo matemático contemporâneo, o qual é fundado na teoria dos conjuntos, tudo é um conjunto. Assim também será na sua teoria, "todas as coisas serão objetos", as pessoas X e as instituições I também são objetos, assim como as outras entidades que serão introduzidas.

O objeto irá existir no momento em que for reconhecido como existente por uma pessoa X ou instituição I. Com isso, aparecerão a relação pessoal de X com O, que será denotada por R(X, O), e a relação institucional de I com O, R(I, O). Ou seja, o objeto irá existir caso seja reconhecido por, pelo menos, uma pessoa X ou instituição I.

Chegamos a um ponto em que necessitamos evidenciar o que são as instituições. Uma instituição pode ser quase o que quer que seja. Devido à natureza da palavra, poderíamos dar uma conotação própria a esse personagem, ou seja: "Associação ou organização de caráter social, educativo, religioso, de ensino, etc." (KURY, 2002), porém, não devemos nos surpreender ao vermos, em certos momentos, objetos tomarem o *status* de instituição. Uma escola é certamente uma instituição, que possui outras instituições a ela agregada, uma sala de aula, por exemplo.

O conceito de Instituição pode ser explicitado como sendo um dispositivo social, total ou parcial, que impõe aos seus sujeitos formas de fazer e de pensar, que são próprias a cada "tipo ou forma" de instituição. Para avançarmos ainda mais sobre o conceito de instituição I, devemos percebê-la não como uma estrutura homogênea, mas sim heterogênea, em que existem várias relações de pessoas X com objetos O que pertencem a I.

Mas de que forma se relacionam os objetos O e instituição I? A cada instituição I está associado um conjunto de objetos O que são conhecidos por I, ou seja, existe uma relação institucional R(I, O).

O objeto O se relaciona com a instituição I através de suas características próprias, por exemplo, a noção de porcentagem para uma instituição financeira (um banco) pode representar taxas e lucros, enquanto para a engenharia civil pode representar proporcionalidade entre partes de uma mistura (um traço de concreto). Assim sendo, o objeto O pode estabelecer diferentes formas de relações de acordo com a instituição $R_1(O)$, $R_2(O)$, $R_3(O)$, etc. Da mesma forma, seu desenvolvimento, dentro destas instituições, pode vir a ser modificado com o passar do tempo, ou seja, evoluir, envelhecer ou até mesmo desaparecer.

Essas relações são permeadas por outro fenômeno didático que surge nas relações dos sujeitos X com os objetos O da instituição I, fenômeno este que se estabelece devido às expectativas que existem dentro das relações, o contrato didático. Para tratar sobre o conceito de Pessoa devemos iniciar diferenciando alguns estágios deste conceito, a saber: o indivíduo, o sujeito e a pessoa.

Podemos dizer que o estágio mais primitivo seria o de *Indivíduo*, visto que, ele não se *sujeita*, nem *muda* com as relações cotidianas com objetos e instituições. O indivíduo se torna um *sujeito* quando se relaciona com uma Instituição I qualquer, ou melhor dizendo, quando se sujeita a uma Instituição I, sob suas demandas, hábitos, formas; enfim, se sujeitando a esta relação.

É por meio das várias relações que o indivíduo tem com instituições diferentes que se constitui a pessoa, ou seja, o conjunto de sujeitos do indivíduo é que forma a *pessoa* X, a qual irá mudando conforme estabelece suas relações com as instituições, as quais toma conhecimento com o passar do tempo.

Uma pessoa X entra para uma instituição I, e existe um objeto O para I, que é chamado de objeto institucional. Assim, X ao entrar em I, começa a viver uma relação com O sob a *influência da relação institucional*, ou seja, a relação R(X, O) irá se alterar ou se construir mediante a relação R(I, O), e, de forma mais ampliada, sob o constrangimento do contrato institucional C.

Devemos deixar claro que O poderia ou não existir para X antes de sua entrada para I (que analogamente podemos sugerir como conjunto vazio, sem existência), porém, independente desse fato, a relação R(X, O) irá alterar-se. Daí, então, Chevallard (1999) dirá que há aprendizagem de X em relação a O. Ou seja, havendo alteração em R(X, O) então haverá aprendizagem da pessoa X sobre o objeto O. De forma análoga, caso R(X, O) não se altere, podemos afirmar que *nada aprendeu*. Devemos observar que não há nada de didático até agora, pois a instituição I não se manifestou com intencionalidade de fazer com que R(X, O) se altere ou modifique.

Para que a instituição I manifeste uma intencionalidade de fazer uma modificação ou uma alteração na relação R(X, O), é necessário que se introduza uma nova noção primitiva, a do *sujeito adequado*. Com isso, uma pessoa X se tornará um sujeito da instituição I, relativamente ao objeto O, quando as relações R(X, O) e R(I, O) estão em conformidade. Ou seja, o sujeito está cumprindo as expectativas desejadas pela Instituição, está conforme "deseja" a Instituição. Caso isso não esteja ocorrendo, é considerado que o sujeito está inadequado em relação ao contrato institucional C.

Algumas relações entre sujeitos, objetos e instituição são permeadas por intencionalidades diversas, tanto por parte dos sujeitos como, também, das instituições perante os objetos em jogo nessa relação. Fazendo um paralelo com a sala de aula, podemos identificar vários fenômenos didáticos que ocorrem devido a essas intencionalidades, mediante as relações entre alunos e professores diante do saber a ser ensinado.

Organização Praxeológica ou Praxeologia

Podemos entender uma organização praxeológica, ou praxeologia, como a realização de certo tipo de tarefas (T) através de um modo de fazer, que Chevallard (1999) chama de técnica (t). Essa associação tarefa-técnica (T-t) irá definir um saber-fazer próprio para esse tipo de tarefa. Porém, ela (T-t), não se mantém em estado isolado, ou seja, não se sustentará por si só. A T-t necessita de um amparo tecnológico-teórico (ou saber), que é formado por uma tecnologia (θ), que irá dar uma racionalidade e uma sustentação inteligível à técnica (t) aplicada, e uma teoria (Θ) que irá justificar e esclarecer a tecnologia (θ).

Assim sendo, a organização praxeológica ou praxeologia (que a partir desse momento iremos tratar somente como praxeologia) será composta por quatro elementos, a saber: tipo de tarefa (T), técnica (t), tecnologia (θ) e teoria (Θ); articulados a partir de um bloco prático-técnico (gerando o saber-fazer) e um bloco tecnológico-teórico (amparado no saber).

Componentes da Praxeologia

A noção de tarefa, ou de tipos de tarefas, se encontra na raiz da noção de praxeologia. Podemos entender como tarefa (T), de acordo com a TAD, como todo e qualquer objeto que não encontramos sua existência diretamente na natureza, ou seja, será necessário realizar procedimentos próprios, no caso de nosso estudo: matemáticos, para encontrá-lo. Quando uma tarefa τ ressalta de um tipo de tarefa T, escreveremos então: $\tau \in T$.

Podemos, ainda, diferenciar o gênero de tarefa do tipo de tarefa ou tarefa propriamente dita. O gênero de tarefa seria caracterizado por um verbo, como, por exemplo, montar, levar, calcular, etc., sendo expresso de forma mais ampla e conteúdo não definido. Já o tipo de tarefa, ou tarefa, tem seu conteúdo estritamente especificado. Assim sendo, para exemplificarmos um tipo de tarefa, temos resolver uma equação de primeiro grau, encontrar a altura de um triângulo isósceles, etc.

Como dito anteriormente, para se realizar uma tarefa (T), ou tipo de tarefa, os alunos devem realizar um procedimento para encontrá-la. Assim sendo, percebemos que essa realização tem em sua gênese uma particularidade dinâmica e não estática. Isso, nos leva à noção de técnica (t).

Dada uma tarefa (T) qualquer, uma praxeologia relativa a T necessitará (a princípio) de um modo, ou de uma maneira, de se fazer. À tal maneira de se fazer T é que foi dado o nome de técnica (t), do grego *tekhnê*, saber-fazer. Na praxeologia relativa a uma tarefa ou subtipo de tarefa, teremos um bloco denominado [T/t], que será chamado de bloco prático-técnico, que se identificará genericamente com o que chamamos comumente de saber-fazer, ou seja, um certo tipo de tarefa T, e uma maneira t, de cumprir a tarefa em questão.

Análise da prática docente: um olhar pela praxeologia

Para analisarmos a prática docente, devemos observar as seguintes questões: *Como realizar a tarefa do tipo T*? Ou ainda, *Como realizar melhor esta tarefa*? Essas questões invocam uma produção de técnicas, e, portanto, de praxeologias.

Sendo os tipos de tarefa *T*, acima citados, objetos matemáticos *O* para serem tratados em uma instituição *I* (uma sala de aula qualquer), podemos considerar essa análise em duas classes distintas: a) observando o primeiro questionamento com um viés pela realidade matemática, poderemos construir uma realidade como uma praxeologia matemática ou organização matemática, a qual denominaremos como OM; b) ao observarmos o segundo questionamento, teremos um olhar sobre a didática, ou seja, de que forma encaminharemos a realidade matemática estabelecida na OM. Assim, essa realidade se denominará uma praxeologia didática ou uma organização didática OD.

Praxeologia matemática ou organização matemática (OM)

Chamaremos de praxeologia matemática ou organização matemática, toda realidade matemática que está envolvida na resolução de um tipo de tarefa matemática T. Para isso, serão exigidas técnicas t, amparadas por um conjunto teórico-tecnológico [θ; Θ].

A organização matemática tem sua origem nas análises, efetuadas pelos professores[15], dos documentos oficiais existentes (tais como programas e manuais escolares, além do livro didático), dos quais saem os *saberes matemáticos escolhidos a serem ensinados*.

A partir daí, o professor começa a determinar quais os tipos de tarefa que serão os “condutores” para o processo de “aquisição” desses saberes escolhidos, trazendo com eles os demais componentes praxeológicos (técnica, tecnologia e teoria). Podemos exemplificar como um tipo de tarefa a seguinte questão: “Como encontrar as raízes de uma equação de 2º grau?”.

---

[15] Lembramos que, nesse momento em particular, estamos fazendo um olhar pela prática docente.

Um outro ponto da prática docente será de como conduzir esta praxeologia matemática, agora estabelecida, para a sala de aula. Isto é, como transpor da realidade matemática para a realidade didática. Segundo Chevallard (1999), a construção da praxeologia se inicia em uma falta de técnica para a resolução de um determinado tipo de tarefa. Assim sendo, podemos pensar no exemplo dado anteriormente: “Como encontrar as raízes de uma equação de 2º grau?”, e fazer agora a seguinte questão: “Como ensinar a encontrar as raízes de uma equação de 2º grau?” Dar resposta a esta nova questão nos leva a elaborar um novo tipo de praxeologia, a praxeologia didática.

Praxeologia didática ou organização didática (OD)

A organização (ou praxeologia) didática surge na intenção de pôr em prática, ou de conduzir, uma organização matemática qualquer. Será ela, a OD, que irá dar conta da (re)construção ou transposição de uma determinada OM. Assim como toda praxeologia, a OD é composta de tipos de tarefas que serão resolvidas por técnicas, as quais serão explicadas pelas tecnologias e justificadas por teorias.

Ao pensarmos em uma OD, podemos nos perguntar: “Quais são os principais tipos de tarefas que podem ocorrer?” Segundo Chevallard (1999) não podemos esperar que a (re)construção, no curso de um processo de estudo, de uma OM dada se organize por ela mesma de uma maneira única. Porém, para o autor, qualquer que seja o caminho de estudo, certos tipos de situações estarão necessariamente presentes, mesmo de maneira muito variável, tanto quantitativamente como qualitativamente.

Metodologia

Para identificarmos as praxeologias do professor e do aluno, tivemos que realizar algumas ações. Primeiramente, fizemos uma descrição e análise do Livro Didático utilizado, *a primeira ação*. Com isso, buscamos estabelecer contato com o saber a ensinar, a partir da análise do livro didático utilizado, especificamente, do conteúdo de equação do segundo grau. Essa ação se justifica pelo fato de o livro didático ser considerado como uma espécie de “texto do saber”, conforme a conceituação de Chevallard (1991). Posteriormente, observamos o professor, a *segunda ação.* Seu objetivo foi de *identificar os tipos de tarefas* que foram propostos. Para identificarmos esses tipos de tarefas, filmamos as aulas do professor sobre o conteúdo escolhido, equações de segundo grau, além de identificarmos elementos ostensivos e não-ostensivos[16] que apareceram durante essa filmagem. A partir daí, partimos para

---

[16] Podemos definir como objetos ostensivos aqueles objetos que se percebem, se vêem, se tocam, se ouvem, etc. Ou seja, são objetos materiais ou dotados de certa materialidade, como as escrituras, os grafismos, os sons, os gestos, etc. Já os objetos não ostensivos são aqueles que existem institucionalmente, desde que lhe sejam atribuídos

a *terceira ação,* que foi fazer *uma análise da Organização Matemática*, na qual identificamos as técnicas, os elementos tecnológicos e teóricos que se apresentam para a realização da tarefa. Com isso, identificamos a Organização Matemática proposta pelo professor.

Após a identificação dos elementos componentes da Organização Matemática, realizamos a *quarta ação,* que consistiu em identificar quais são as técnicas, tecnologias e teorias mobilizadas pelo professor em sala de aula, também por meio das filmagens feitas anteriormente, para a realização do tipo de tarefa proposta, ou seja, a *Organização Didática*.

Com a intenção de facilitar o entendimento da Organização Didática realizada pelo professor, realizamos uma *quinta ação* que foi uma entrevista semi-estruturada com ele, na qual buscamos identificar suas escolhas na OD.

A escolha por esse tipo de entrevista se deu porque ela pode nos permitir que, por meio do conteúdo manifesto da fala, alcançar respostas mais ricas e complexas, o que acreditamos ser mais proveitoso para o nosso trabalho, uma vez que reconhecemos que apenas com as observações não iríamos conseguir as informações necessárias, relativas ao interesse pela álgebra, especificamente no conteúdo de equações de segundo grau, o que como já citamos anteriormente, é um elemento importante para a formação do saber ensinado.

Para a identificarmos os elementos da praxeologia do aluno, elaboramos uma lista de exercícios que continha os mesmos subtipos de tarefa que foram apresentados pelo professor em sala de aula. Nessa lista, buscamos as técnicas, tecnologias e teorias que foram mobilizadas pelos alunos participantes da pesquisa na realização desses subtipos de tarefas. Essa foi a nossa *sexta ação*.

Com esses dados coletados, acreditamos ter conseguido apresentar as praxeologias dos alunos (tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria). Sabíamos, desde o início, que não seria fácil encontrar elementos tecnológicos ou até mesmo teóricos nas atividades dos alunos, por isso os juntamos em um único bloco, que Chevallard (1999) trata como tecnológicos-teóricos.

Assim chegamos à nossa *sétima ação*, que foi, com as praxeologias elaboradas (do professor e dos alunos), fazermos a comparação de ambas, buscando identificar o que variou de uma para a outra. Quais os tipos de técnicas, tecnologias e teorias foram mobilizadas pelos alunos durante a resolução dos exercícios que não foram contempladas em sala de aula pelo professor e vice e versa.

A execução dessas sete ações, nos forneceu elementos para a análise das praxeologias do professor e dos alunos. Com a análise, levantamos as hipóteses que levaram o professor e os alunos a percorrem caminhos diferentes na resolução de equações de segundo grau.

---

uma determinada existência. Porém, esses objetos não podem ser percebidos nem se mostrarem por si mesmos. São: as ideias, os conceitos, as crenças, etc.

Análises Praxeológicas

Praxeologia do Professor

Toda praxeologia se inicia com a “necessidade” de se realizar uma determinada tarefa. Segundo Chevallard (1999), a praxeologia é a realização de certo tipo de tarefa a partir de um modo de fazer, que o autor chama de técnica.

A tarefa T em jogo será de *resolver equações de segundo grau.* Durante as aulas foram apresentadas, pelo professor, 08 (oito) subtipos de tarefas relativas a T, nas quais identificamos as seguintes estruturas:

T$_1$:$ax^2 + c = 0$

T$_2$: $ax^2 + bx = 0$

T$_3$: $(ax + c)^2 = 0$

T$_4$: $(x + a).(x + b) = 0$

T$_5$: $(x + a).(x + b) = c$

T$_6$: $(x + a).(x + b) = cx + d$

T$_7$: $\frac{(ax+b)}{c} + dx^2 = ex + f$

T$_8$: $ax^2 + bx + c = 0$

A tarefa T em nenhum momento se propõe a identificar ou conceituar equações do segundo grau, todo o trabalho do professor gira em torno da resolução destas equações. Isso é percebido, em sala de aula, no momento em que as aplicações se voltam a simplesmente a resolver tipos de equações. O trabalho do professor finda, em sala de aula, com a resolução de exercícios.

O professor apresenta alguns subtipos de tarefa, T$_1$, T$_2$, T$_3$... T$_8$, e os resolve utilizando-se de técnicas por ele (o professor) apresentadas. Podemos colocar, em linhas gerais, que o procedimento do professor foi de apresentar técnicas para os subtipos da tarefa T que foram expostas em sala de aula e fazer a aplicação dessas técnicas a partir de exercícios. O professor reafirma essa hipótese durante a entrevista, quando anuncia que:

Prof: (...) *Então, eles iam começar a fazer sem usar a fórmula de Bhaskara, usando apenas as propriedades, quando eles... Quando não tinham o valor de “b”, resolviam por radicais, e quando tinham o valor de “b” e não tinham o de “c”, faziam por fatoração. A gente passou bastante tempo fazendo isso para eles reconhecerem melhor. Aí a gente, depois, entrou no trinômio quadrado perfeito, para eles identificarem quando elas forem completas, aí resolveram completando quadrados. Aí, depois que eles trabalharam nestas fases, aí eu entrei na equação do segundo grau, com a fórmula de Báskara. (...) A partir disso foi identificar a fórmula de Báskara saber o que é o valor de “a”, de “b” e de “c”, e resolver, parte mecânica mesmo, só substituindo, aí depois, nós fomos para a parte de problemas*.

Subtipos de tarefas

Como foi dito anteriormente, o professor não tem a intenção de introduzir o conceito de equação de segundo grau. Por isso ele faz a opção de iniciar por meio de equações incompletas do segundo grau, para que os alunos possam fazer certa "associação" com as equações de primeiro grau, conceito ministrado anteriormente. Tal fato fica claro no discurso do professor, quando ele afirma:

Prof: (...) *Então eu comecei a resolver algumas equações de segundo grau incompletas. Incompletas pra eles verem, sem dizer que era uma equação de segundo grau. Quero dizer, alguns já perguntavam. Eu dizia que por causa do 2 (dois) e tal, mas não entrava muito em detalhes.*

Essa escolha, de partir de associações com a equação do primeiro grau, não fica explícita no discurso do professor em sala de aula. No entanto, podemos inferir que o professor seguia um caminho parecido com o proposto pelo livro didático utilizado.

Para nossa análise dos subtipos de tarefa, iremos utilizar um termo que não é encontrado na teoria de Chevallard, a subtécnica. As subtécnicas seriam técnicas que adquirem um *status* de auxiliar ou secundária na resolução de um tipo de tarefa que tenha uma técnica com status de principal ou primária. Ou seja, na resolução de um tipo de tarefa aparecem técnicas que têm um grau maior de hierarquia ou de importância do que outras técnicas que vêm auxiliar na realização dessa técnica principal. As subtécnicas poderão aparecer antes ou depois da técnica, ou seja, podem aparecer como preliminares para preparar a equação a ser resolvida, ou posteriormente, para dar continuidade na resolução do subtipo de tarefa.

Em função da limitação de páginas, iremos fazer um recorte nos subtipos de tarefa e nos ater aos seguintes: T_2; T_3; T_4; e T_8. Apesar de todos nos fornecerem dados importantes, os subtipos escolhidos nos possibilitam uma explanação mais sintética.

Técnicas mobilizadas

Para a realização dos subtipos de tarefas algumas técnicas foram utilizadas, iremos agora descrevê-las.

A técnica de *transpor termos ou coeficientes* consiste das: (i) propriedades aritméticas das operações inversas [Se $a + b = c$, então $a = c - b$; e se $a \times b = c$ ($b \neq 0$), então $a = c \div b$]; (ii) propriedades gerais da igualdade [Se $a = b$, então $a + c = b + c$ e $a - c = b - c$; e se $a = b$, então $a \times c = b \times c$ e $a \div c = b \div c$, com $c \neq 0$].

A técnica de *fatoração* consiste do estudo da propriedade distributiva pode ser resumido em três propriedades básicas. Para tanto, sejam *a, b, c, d* Є *R*. Assim, temos que:

Propriedade 1: $a.(b + c) = a.b + a.c$

Propriedade **2:** $(b + c).a = a.b + a.c$

Propriedade **3:** $(a + b).(c + d) = a.c + a.d + b.c + b.d$

A técnica do *produto nulo* consiste da seguinte propriedade. Para tanto, sejam a e $b \in R$:

Se a x b = 0, então a = 0 e/ou b = 0.

A técnica da *tentativa*, segundo Araújo (2009) consiste em testar as igualdades, para isso atribuirmos valores a x na equação.

Subtipo de Tarefa T_2: $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$

Neste subtipo de tarefa, o professor utiliza como técnica principal, ou primária, a fatoração, deixando a técnica do produto do produto nulo e de transposição dos termos como subtécnicas (auxiliares ou secundárias). Os elementos tecnológicos, novamente, não foram evidenciados pelo professor. Porém, pudemos identificar as propriedades distributiva da multiplicação, do produto nulo e das operações inversas em R (conjunto dos números reais) ou leis da transposição de termos, que serviram para dar uma sustentação inteligível à técnica e às subtécnicas utilizadas nesse subtipo de tarefa.

O exercício utilizado pelo professor para esse subtipo foi a equação $3x^2 - 24x = 0$. O professor começa perguntando aos alunos: "Vamos lá! Isolo o 'x' e tenho: 'x' vezes (3x – 24) igual a zero (fatoração – técnica principal). Quando tenho um produto de dois números que dá zero, então é porque um deles é zero ou os dois são zero. (produto nulo – subtécnica)". O professor se volta para o quadro e iguala os termos a zero desenvolvendo as expressões, encontrando as raízes zero e oito.

Subtipo de Tarefa T_3: $\boldsymbol{(ax + c)^2 = 0}$

O subtipo T_3 apresenta uma pequena variação dos subtipos anteriores. Para sua resolução o professor extraiu a raiz de zero, isolou a incógnita e inverteu as operações.

Para esse subtipo, o professor não considerou a possibilidade de resolver a partir da propriedade da potenciação ($a^2 = a.a$) e, em seguida, utilizar a subtécnica do produto nulo, utilizada anteriormente. Caso os alunos desenvolvessem o produto de $(ax + c).(ax + c) = 0$, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação, poderia causar um bloqueio, pois eles ainda não possuíam técnicas que dessem conta, visto que, os alunos, teoricamente, ainda não foram apresentados à fórmula de Bhaskara. Um outro elemento que não foi considerado pelo professor, foi ressaltar a existência de duas raízes, apesar de serem iguais.

E, por fim, o professor não demonstrou que a técnica aplicada também "funciona" quando a equação é igualada a outro número qualquer diferente de zero, tendo em vista que, em todos os exercícios apresentados, nesse subtipo de tarefa, a expressão aparece igualada a zero. Podemos analisar esse fato como um elemento indicador de transposição didática interna, já que no livro utilizado esse subtipo de tarefa, apresenta equações igualadas a números diferentes de zero. Acreditamos que a estratégia do professor era, de certa forma, apresentar as equações em condições teoricamente mais simples para a resolução, focando, principalmente, na aplicação da técnica principal.

Neste subtipo de tarefa, o professor utilizou o seguinte exercício do Livro: $(z + 5)^2 = 0$. O professor termina de resolver a equação dizendo que a raiz é cinco, para isso, utilizou como subtécnica a transposição dos termos, invertendo as operações. Como foi dito anteriormente, o professor não fez nenhuma alusão às raízes iguais.

Em nenhum dos subtipos de tarefa os elementos tecnológicos são evidenciados de forma clara. Em um momento, ou outro, se faz uma explicação da técnica ou subtécnica utilizada, mas sem explicitar a tecnologia e a teoria que, de certa forma, deram uma racionalidade a essas técnicas e subtécnicas. Porém, em nosso trabalho, buscamos identificar, em todos os subtipos de tarefa, os elementos tecnológicos que compõem o bloco teórico-tecnológico. Para esse subtipo de tarefa, as propriedades da radiciação e das operações inversas em R (conjunto dos números reais) ou leis da transposição de termos, como elementos que constituem esse bloco teórico-tecnológico.

Subtipo de Tarefa T_4: $\boldsymbol{(x + a).(x + b) = 0}$

O subtipo de tarefa T_4, diferentemente de T_3, gera duas raízes distintas. Nesse subtipo de tarefa, a técnica utilizada é a do produto nulo que ganha um *status*, nesse subtipo de tarefa, de técnica principal ou primária, deixando para a transposição de termos e desenvolvimento da expressão o papel de auxiliares ou secundárias. Os elementos tecnológicos observados foram as propriedades do produto nulo e das operações inversas em R (conjunto dos números reais) ou leis da transposição de termos.

A equação $(x - 17).(x + 11) = 0$ é utilizada como exemplo para esse subtipo de tarefa. Ao iniciar a resolução o professor relembra aos alunos que a técnica do produto nulo já foi aplicada, afirmando que: “Na aula passada, nós já fizemos algumas questões parecidas com essa, que era o seguinte: Eu tenho aqui dois números que quando eu multiplico dá zero, e aí?”, os alunos respondem: “Um deles é zero!”.

As questões parecidas, mencionadas pelo professor, são as do subtipo de tarefa T_2 ($ax^2 + bx = 0$), nas quais ele, como descrito anteriormente, utiliza-se da fatoração como técnica principal (colocando em evidência o termo comum “x”), para depois aplicar as subtécnicas do produto nulo (igualando os termos do produto a zero), da transposição dos termos e do desenvolvimento das expressões.

Continuando a resolução, o professor avança: “É isso aí! Um dos dois vai ser zero!”. O professor começa a escrever no quadro igualando os termos a zero, encontrando as duas raízes da equação: 17 e -11. Após a transposição dos termos e o desenvolvimento das expressões, o professor alerta para a existência das duas raízes dizendo: “Então, as raízes dessa equação serão 17 e -11”.

Subtipo de Tarefa T_8: $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$

O subtipo T_8 corresponde às atividades agrupadas com a seguinte forma: $ax^2 + bx + c = 0$. Esse subtipo já vai apresentar a equação de segundo grau completa e, com isso, o professor começará utilizando como técnica principal ou primária a resolução completando quadrados, até, enfim, introduzir outra técnica que irá substituí-la, a fórmula da Bhaskara. Essa técnica já era uma expectativa de alguns alunos, pois, como afirmou o professor durante a entrevista, alguns já a conheciam. Vale a pena salientar que nenhum dos alunos utilizou a técnica de completar quadrados durante a resolução da lista de exercícios.

A estratégia elaborada pelo professor para mostrar “todos os tipos de formas” de resolução (técnicas) das equações de segundo grau, foi de começar apresentando equações incompletas, passando por casos particulares de equações completas (completar quadrados) culminando no *grand finale* com uma fórmula *para todos os tipos de tarefas*: a fórmula de Bhaskara. Como pudemos observar durante seu discurso em sala de aula: “Gente! Pronto! É o seguinte, a gente antes estava resolvendo as equações de segundo grau de várias maneiras... Essa daqui foi criada (apontando para a fórmula de Bhaskara que estava escrita no quadro) para resolver todos os tipos de equação de segundo grau”.

Síntese da Praxeologia do Professor

Assim, podemos ter uma visão macro do que foi a Organização Matemática e a Organização Didática implementadas em sala de aula. A praxeologia do professor seria a união dessas duas organizações, a resposta para as questões de suas tarefas que eram: “*Resolver equações de segundo grau”* e *Como ensinar a resolver equações do segundo grau?* Nesse sentido, podemos dizer, em linhas gerais, que essa praxeologia se mostrou apoiada em uma concepção tecnicista, que valoriza a atividade de resolução de exercícios como meio de se adquirir o conhecimento.

Praxeologia do Aluno

Antes de começar a apresentar as diferentes técnicas que os alunos utilizaram para cada subtipo de tarefa, iremos exibir um quadro, no qual mostraremos, a partir da frequência relativa, quantos alunos acompanharam a praxeologia do professor (**Prax. Prof**.), quantos introduziram novas formas de resolução (**Prax. Aluno**) e quantos não fizeram o item (**Não Fez**)

QUADRO 1 – Frequência relativa das atividades propostas

Item	Prax. Prof. (%)	Prax. Aluno (%)	Não Fez (%)
a) T_2: $ax^2 + bx = 0$	0	75	25
b) T_3: $(ax + c)^2 = 0$	17	79	4
c) T_4: $(x + a).(x + b) = 0$	21	71	8
d) T_8: $ax^2 + bx + c = 0$	75	21	4

De acordo com a tabela apresentada, podemos observar que alguns alunos escolheram técnicas diferentes das apresentadas pelo professor, para a realização das atividades propostas na ficha de exercícios. Assim como fizemos na Praxeologia do Professor, iremos analisar os seguintes subtipos de tarefa: T_2; T_3; T_4; e T_8.

Praxeologia dos Alunos - T_2: $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$

Para esse subtipo de tarefa, conforme vimos na Organização Matemática do professor apresentada anteriormente, o mesmo utiliza a técnica de colocar o fator comum em evidência. O exercício proposto na lista, para esse subtipo de tarefa foi: $2x^2 - 8x = 0$.

Ao analisarmos os exercícios feitos pelos alunos na lista de exercícios, verificamos que 5 alunos adotaram a técnica da tentativa, com a qual nunca encontram as duas raízes da equação. Podemos inferir que isso se deve ao fato da relação que era feita com a equação de primeiro grau, a qual possui uma única raiz. Lembramos que o professor começa a introdução do conteúdo de equação do segundo grau a partir de conhecimentos prévios, entre eles as associações com equações de primeiro grau. Com isso, quando o aluno encontra um valor para “x”, ele acredita ter resolvido a equação, da mesma forma que faz quando resolve uma equação de primeiro grau.

Um grupo de 3 alunos utilizou como técnica principal a transposição de termos invertendo as operações. Fazendo uma descrição do que esses três alunos realizaram, podemos dizer que: passaram o termo “-8x” para o outro lado da igualdade invertendo o sinal e obtendo $2x^2=8x$, depois dividiram ambos os monômios por “2x”, encontrando o valor de “x” igual a 4. Novamente, os alunos encontraram somente uma única raiz para a equação. Vale a pena salientar que, com esse procedimento, os alunos não percebem a restrição de x ser diferente de zero, apesar de ser uma das raízes da equação. Isso não foi percebido pelo professor.

Outro grupo de 10 alunos preferiu aplicar a fórmula de Bhaskara. Um detalhe importante é que nesse tipo de tarefa *nenhum aluno* seguiu o que foi proposto na Organização Matemática adotada pelo professor, para esse subtipo de tarefa, que foi a fatoração da expressão, colocando o fator comum em evidência.

Novamente verificamos que os alunos se utilizam de técnicas principais diferentes da apresentada pelo professor para a resolução dos exercícios. Acreditamos que, tratando-se da técnica da tentativa, a sua utilização se dá devido a serem números de pequena magnitude, o que facilitaria o jogo com os seus múltiplos e divisores. Quanto à utilização da fórmula de Báskara, assim como pudemos observar em outros tipos de tarefas, parece ser devido ao seu prestígio diante aos alunos, conforme mencionamos anteriormente; havia certa expectativa em torno dessa fórmula, o que nos parece dar certo *status* de certeza e garantia na resolução ao aplicá-la.

Mais importante ainda é ressaltar que eles tratam da tarefa como sendo uma equação de primeiro grau, por causa da escolha didática feita pelo professor, e isso impede que os alunos se apropriem da principal característica de uma equação de segundo grau, que é a existência de duas raízes.

Praxeologia dos Alunos - T_3: $(ax^2 + c)^2 = 0$

Neste subtipo de tarefa, 17 alunos optaram por aplicar a fórmula de Bhaskara, enquanto 2 utilizaram a técnica de desmembrar a potência para poder obter o produto nulo. O exercício proposto na ficha de exercício foi o seguinte: $(2x+5)^2 = 0$.

Nesse tipo de tarefa, o professor efetuou uma operação de radiciação e, depois, transpôs os termos, invertendo as operações, conforme podemos ver na Organização Matemática do professor nesse subtipo de tarefa.

Podemos perceber, novamente, a utilização da fórmula de Bhaskara, praticamente em todos os protocolos esta técnica está presente, mesmo não sendo ela a eleita pelo professor para a resolução do exercício. Outro fato a se ressaltar é que, novamente, um grande número de alunos (aproximadamente 80%) optou por técnicas diferentes (Bhaskara e produto nulo) da apresentada pelo professor (extrair a raiz quadrada).

Com relação à diferença entre as escolhas das técnicas feitas pelo professor e pelos alunos, acreditamos que ocorra, principalmente, pelo *status* que a fórmula de Bhaskara possui quanto à resolução de equações de 2º grau. Esse status dá a Bhaskara uma garantia na resolução dessas equações, o que coloca o aluno em conformidade com a Instituição Matemática, na qual, historicamente, é valorizado o resultado encontrado. É importante ressaltar que, enquanto o professor extrai a raiz, os alunos usam o produto nulo, pois, para eles, isso parece ter mais sentido que extrair a raiz em uma situação em que um dos membros é uma expressão algébrica. Além disso, a técnica de extração da raiz apresentada pelo professor não considera que se trata de extrair DUAS raízes (nos dois membros da equação), e que as condições de existência da raiz real não são consideradas por ele. Isso leva os alunos a trabalharem no nível das relações aritméticas (na medida em que não vêem o sinal de igualdade como estabelecendo uma relação entre dois termos, mas como a necessidade de fazer uma operação.

Praxeologia dos Alunos - T_4: $(x + a).(x + b) = 0$

No subtipo de tarefa T_4, verificamos que 17 alunos optaram pela fórmula de Bhaskara para a resolução da tarefa. Essa técnica foi a única diferente apresentada por eles. Esses 17 alunos representam aproximadamente 70% dos alunos, um número expressivo. O professor, nesse subtipo de tarefa, utilizou como técnica principal o produto nulo, conforme observamos na organização matemática. O exercício proposto para esse subtipo de tarefa foi: $(x-8).(x+4)=0$. Veja que, nessa tarefa, a técnica de atribuir valores leva facilmente à obtenção das raízes. Entretanto, a OD elaborada pelo professor se baseia em um pensamento aritmético, cujo objetivo maior é realizar operações para resolver "algo". O sentido de "equação", cuja base é essencialmente algébrico, fica perdido; o aluno não elabora a ideia de raiz como o número que torna a sentença verdadeira.

Novamente se faz a opção pela técnica da fórmula de Bhaskara para resolver as equações. Esse fato, cada vez mais, nos dá indício de certa necessidade de conformidade, por parte dos alunos, com a Instituição Matemática, até porque, as técnicas propostas pelo professor, nos dão um ar de serem "mais simples" para aplicá-las, porém, não é esse o caminho percorrido pelos alunos, parece que *eles querem a segurança* que o prestígio de Bhaskara fornece.

Praxeologia dos Alunos - T_8: $ax^2 + bx + c = 0$

Os exercícios do subtipo de tarefa T_8 foram os que menos apresentaram novas técnicas por parte dos alunos. Acreditamos que a forma com que este subtipo de tarefa é apresentado leva o aluno a aplicar direto a fórmula de Bhaskara. Até porque em subtipos de tarefa nos quais os alunos poderiam utilizar uma técnica mais simples, do ponto de vista da resolução, fazem à opção de utilizar Bhaskara.

Cinco alunos, no item $x^2 - x - 6 = 0$, apresentaram a técnica por tentativa para sua resolução, entendemos que devido aos valores baixos dos coeficientes ("a", "b" e "c"), favoreceram a aplicação dessa técnica. Um aluno resolveu pela técnica de fatoração (soma e produto das raízes), e ao se indagado, pelo professor, sobre o modo que tinha resolvido a questão, ele respondeu que tinha aprendido a técnica com um parente.

Considerações finais, conclusões

Chevallard (1998) trata o aluno como um sujeito em cada instituição (família, escola, bairro, trabalho...) que ele participa em sua vida. Sujeito no sentido de se sujeitar, de estar adequado, de estar em conformidade, com essas instituições. A ação de se sujeitar com a instituição poderá ser de forma indiferente ou ativa. Na forma indiferente, o sujeito irá se adequar às normas e regras da instituição sem contestá-las. No entanto, quando se sujeita de forma ativa, ele se transformará e será transformado pela instituição.

O aluno, como sujeito de várias instituições, carrega em si elementos de cada uma dessas relações institucionais, as quais irão transformá-lo na pessoa que é. Com isso, a partir dessas relações, o aluno reconstrói o conhecimento para si, dando a ele características particulares, que ele traz das diversas instituições a que pertence. Dessa forma, dependendo do subtipo de tarefa, o aluno efetua escolhas estratégicas particulares que tenham mais sentido para ele do que as estratégias apresentadas pelo professor. Assim sendo, ao fazermos a montagem da praxeologia, identificamos diferenças nas técnicas e/ou subtécnicas utilizadas pelo professor, o que caracteriza uma praxeologia diferente. Ou seja, o aluno não segue necessariamente a praxeologia do professor, mas aquela que tem mais sentido para ele.

Acreditamos que as intencionalidades do aluno com o saber em jogo podem ser um outro fator que irá '"transformar" esse saber, dar a ele uma nova cara, a cara da *intencionalidade*. Vimos no subtipo de tarefa T_8, que um aluno utiliza a fatoração pela soma e produto das raízes, que ele passou a ter uma relação diferente com o saber em jogo na sala de aula, no momento em que as equações de 2º grau estavam contempladas nas Olimpíadas de Matemática que ele, o aluno, iria participar. Isso nos leva a crer que, dependendo do propósito de cada aluno – diante dos seus anseios, angustias, necessidades, expectativas, etc. – podemos ter um olhar distinto para o saber. O estudo de juros compostos, por exemplo, tem, a princípio, uma importância maior para um contador do que para um engenheiro, em contra-partida, a geometria é de maior serventia ao engenheiro do que ao contador.

Percebemos, também, a intencionalidade, quando os alunos buscam estratégias que os mantenham seguros quanto à resolução de um subtipo de tarefa. Durante as análises das praxeologias do professor e dos alunos, pudemos observar que os alunos, por diversas vezes, utilizaram a fórmula de Bhaskara para resolverem equações simples, do ponto de vista da resolução. Podemos pensar que eles (os alunos) não queriam errar, e simplesmente ter a certeza de que resolveriam a questão, e, com isso, se manterem em conformidade com as Instituições escolares. O próprio Livro Didático, utilizado pelos alunos, valoriza a técnica de Bhaskara, ao citá-la como "Essa célebre fórmula aplica-se a todas as equações...".

Apesar de parecer contraditório com o que foi dito anteriormente, podemos perceber que, em alguns casos, essa intencionalidade faz com que o aluno tenda a repetir as técnicas que são utilizadas pelo professor. Esse fato se dá pelo contrato didático estabelecido, no qual o aluno não tenha o problema de ter errado, garantindo a sua conformidade nessa instituição. Apesar de em um primeiro momento, essa repetição do bloco técnico-prático nos levar a crer que as praxeologia serão iguais, pois o aluno repetiu as técnicas apresentadas pelo professor, o bloco tecnológico-teórico poderá ter elementos bem distintos, já que as justificativas e explicações sobre essas técnicas empregadas poderão ser diferentes.

Quanto ao bloco tecnológico-teórico do aluno, temos uma forma de justificar e explicar as técnicas empregadas, que será o discurso da autoridade. O discurso do professor (ou do pai, do tio, do avô, de um livro,...) é quem dará a garantia necessária da *boa empregabilidade* das técnicas apresentas pelo aluno. Durante as gravações das aulas, pudemos observar (objetos ostensivos) alguns alunos que, quando questionados (pelos colegas) sobre o porquê do modo que haviam feito determinados subtipos de tarefa, respondiam: *"Eu fiz exatamente como o professor fez"*. Outra resposta dada por eles era: "*Eu fiz exatamente como está no livro*". Assim acreditavam que estavam fornecendo as justificativas e explicações necessárias para responder pelas suas escolhas e pelo modo que foi feito para alcançar a solução. Alcançar a solução é, sem dúvida, o maior objetivo dos alunos em Matemática, porém, para alguns, sem importar a forma ou o meio para chegar lá. Em muitos casos, diante de um contrato didático, estabelecido em sala de aula, em que o professor valoriza a resposta em detrimento da construção da solução da questão, encontrar o "x" da questão mantém os alunos em conformidade com as Instituições escolares.

Referências

ARAÚJO, Abraão Juvêncio. **O ensino da álgebra no Brasil e na França**: estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da teoria antropológica do didático. 290f. Tese (Doutorado em educação) Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009.

BESSA DE MENEZES, Marcus. **Investigando o processo de transposição didática interna**: o caso dos quadriláteros. 184f. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2004.

BROUSSEAU, Guy. Fondements et méthodes de la didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Penseé Sauvage, vol. 7/2, 1986, p. 33-115.

CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo. O professor e o tempo. In: **Revista Tópicos Educacionais**. Recife: Universitária/UFPE, vol. 15, n.1/2, 1997, p. 105 – 116.

CHEVALLARD, Yves. **La transposition didactique**. Grenoble: La Pensée Sauvege, 1991.

CHEVALLARD, Yves. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. In: **L'universite d'ete**. Clermont-Ferrand: IREM – Institut de Recherche sur l'Enseignement Mathématique, 1998, p. 91-118.

CHEVALLARD, Yves. L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologie Didactique. In: **Recherches en Didactiques des mathématiques**. Grenoble: La Penseé Sauvage, vol. 19/2, 1999, p. 221-266.

KURY, Adriano da Gama. **Minidicionário Gama *Kury* da Língua Portuguesa**. São Paulo: FTD, 2002

Marcus Bessa de Menezes
Universidade Federal de Campina Grande – UFCG – CDSA – Brasil

E-mail: marcusbessa@gmail.com