

LA INVESTIGACIÓN EN HISTORIA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN ESPAÑA

RESEARCH IN THE HISTORY OF MATHEMATICAL EDUCATION IN SPAIN

Maria Teresa González Astudillo
Universidad de Salamanca – USAL – España

Resumen

A lo largo de este artículo se pretende dar una visión global de la investigación que se ha realizado en España dentro de la línea de Investigación en Historia de la Educación Matemática. Se presenta así el panorama de las investigaciones destacando las principales que han tenido una mayor repercusión y abarcando las diferentes temáticas que se han abordado. Quizás si hay que destacar una contribución de los investigadores españoles se podrá percibir claramente la metodología utilizada para el análisis de libros de texto tanto antiguos como actuales.

Palavras chave: Historia. Matemática. Educación. Educación Matemática.

Abstract

Throughout this article an overview of the research that has been carried out in Spain in the History in Mathematics Education is shown. The global picture is presented highlighting the main research and the publications that have had a greater impact trying to cover the different topics that have been addressed. Maybe if we must highlight the main contribution of Spanish researchers it may be perceived clearly the methodology used for the analysis of textbooks both past and present.

Keywords: History. Mathematics. Education. Mathematics Education.

Introducción

A pesar de que en España existen grupos reconocidos internacionalmente por sus investigaciones en historia de la educación, las investigaciones de este tipo realizadas en el campo de la educación matemática en este país son ciertamente escasas y muy focalizadas. Sin embargo, sí se puede establecer de forma clara que existe una fuerte tendencia centrada en las investigaciones sobre libros de texto, no sólo actuales, sino también libros de texto antiguos. Estas últimas

investigaciones se ven favorecidas, en nuestro entorno, por el acceso relativamente fácil a las fuentes originales que no están disponibles en países con una historia más reciente y cuyas fuentes han bebido de las de diversos países europeos.

Se puede considerar que este tipo de investigaciones surgen a finales de los años ochenta y van desarrollándose con relativa lentitud hasta nuestros días. Los libros de texto constituyen una fuente objetiva del saber que se considera pertinente en un determinado momento para una sociedad. Su análisis permite un mejor conocimiento de las necesidades de esa sociedad, así como las corrientes culturales y educativas imperantes. “El investigador puede buscar en ellos información sobre las relaciones del desarrollo de los contenidos de enseñanza con el desarrollo científico y social, sus antecedentes y su proyección en el futuro, puede indagar para determinar la importancia de las mentalidades nacionales específicas y de las filosofías y epistemologías en el progreso de un concepto” (Gómez, 2003).

Los libros de texto son una fuente de información sobre el desarrollo cultural y pedagógico de la educación en un país; la forma de selección de los contenidos que se consideran idóneos para la enseñanza en un determinado momento; los aspectos conceptuales, actividades, problemas y ejercicios que se enfatizan, su secuencialización así como la metodología usada en cada momento histórico que da cuenta de las corrientes didácticas imperantes y su reflejo en la enseñanza.

Otras investigaciones realizadas se han centrado en aspectos puntuales como la enseñanza de la matemática en un cierto periodo de tiempo influida por las corrientes internacionales (la matemática moderna), sobre las aportaciones a la enseñanza de algún matemático preeminente (José Mariano Vallejo, Pedro Puig Adam, Cuesta Dutari) o la formación de profesores tanto de educación primaria como secundaria (GONZÁLEZ, 2008c). A lo largo de las siguientes líneas iremos desgranando algunas de estas investigaciones seleccionando las más destacadas e indicando las aportaciones realizadas por cada una de ellas.

Investigaciones sobre libros de texto antiguos

En el marco de la investigación histórica en Educación Matemática, se ha puesto de manifiesto la importancia del análisis del libro de texto como reflejo de la actividad que se realiza en el aula, ya que como indica Choppin (1980) el libro de texto es “a la vez apoyo del saber en tanto que impone una distribución y una jerarquía de los conocimientos y contribuye a forjar los andamios intelectuales tanto de alumnos como de profesores; es instrumento de poder, dado que contribuye a la uniformización lingüística de una disciplina, a la nivelación cultural y a la propagación de las ideas dominantes” (p. 16). Por ello, diversas investigaciones han considerado interesante estudiar la contribución que los libros de texto han tenido en la historia de la educación matemática analizando la variedad y riqueza de sus contenidos, la incidencia en el aula, su función como transmisor de

contenidos socialmente aceptados,... (GONZÁLEZ y SIERRA, 2003). Además, “los libros de texto determinan en la práctica la enseñanza más que los decretos de los distintos gobiernos” (SCHUBRING, 1987, p. 41).

Los trabajos realizados en relación con los libros históricos de matemáticas en España son escasos, entre ellos hemos de destacar la relación de publicaciones de libros de matemáticas en Extremadura realizada por Cobos (1995) en la que hace un repaso de los matemáticos extremeños desde el siglo XVI hasta el XX, así como de todos los libros no sólo escritos en español sino muchos de ellos en francés. También es interesante destacar la contribución de Dutari (1985) en relación con la introducción del Análisis infinitesimal en España en el que se pueden encontrar numerosas referencias a libros de texto publicados en España desde 1698.

En cuanto al estudio del contenido de los libros de texto, hay que destacar la investigación relativa al tratamiento de los números negativos en los textos de matemáticas publicados en España en los siglos XVIII y XIX en la Universidad de Granada (MAZ, 2005), el de González (2002) sobre los conceptos de máximo y mínimo, el de Picado (2012) sobre el sistema métrico decimal o el de Sánchez, González y Sierra (2010) sobre la Geometría Analítica lo que nos da una idea de la dimensión que está adquiriendo la investigación relativa a los libros de texto de matemáticas y la importancia de este tema en el campo de la Didáctica de la Matemática.

Como se ha indicado una de las primeras investigaciones en este campo (MAZ, 2005) tenía como objetivo principal el de establecer el tratamiento dado al número en textos publicados en España durante los siglos XVIII y XIX mediante un análisis conceptual y de contenido. A través de quince libros destacados se hace un recorrido por la forma en la que se presenta el concepto de número abordando cinco aspectos como son: la noción de número, la idea de cantidad, otros tipos de números tratados, usos y ejemplos y observaciones generales.

El listado de los libros analizados puede dar cuenta de cuáles eran los principales autores en esta época así como cuáles fueron los libros que publicaron, así como servir de fuente para futuras investigaciones:

- Pedro de Ulloa (1706) *Elementos matemáticos*. Tomo I. Madrid: Antonio González de Reyes: Impresor.
- Tomás Cerdá (1758) *Liciones de matemáticas o Elementos generales de Aritmética y Álgebra para el uso de la clase*. Tomo primero. Barcelona. Francisco Suriá, Impresor de la Real Academia de Buenas Letras de dicha ciudad
- Benito Bails (1779) *Elementos de matemática*. Tomos I y II. Madrid: D. Joaquín Ibarra, Impresor de la cámara de S.M.

- Sylvestre Lacroix (1840) *Curso completo elemental de matemáticas puras, compuesto en francés*. Tomo II. Quinta edición. Traducido por José Rebollo Morales. Madrid: Imprenta Nacional.
- José Mariano Vallejo (1841) *Tratado elemental de matemáticas*. Tomo I. Cuarta edición. Madrid: Imprenta Garrasayaza.
- José Mariano Vallejo (1840) *Compendio de matemáticas puras y mistas*. Tomos I y II. Madrid: Imprenta Garrasayaza.
- Jacinto Feliu (1847) *Tratado elemental de matemáticas. Para uso del colegio general militar*. Tomo II Álgebra. Madrid: Imprenta de José M. Gómez Colón y compañía.
- José M^a Rey y Heredia (1865) *Teoría trascendental de las cantidades imaginarias*. Madrid: Imprenta Nacional.
- C. A. Bricot (1880) *Lecciones de álgebra elemental y superior*. Traducido por C. Sebastián y B. Portuondo. Madrid: Imprenta de la Vda. e hijo de D.E. Aguado.
- D. J. Corazar (1892) *Tratado de álgebra elemental. Trigésima primera edición*. Madrid: Imprenta y fundición de Manuel Tello.

En esta investigación se deduce que en estos libros aparecen diferentes acepciones del número que se pueden clasificar en: euclídea, relacional, algebraica, cardinal e inductiva con características diferentes entre cada una de ellas. Así, por ejemplo, la noción euclídea se ciñe a la establecida por Euclides en los elementos según el cual “Un número es una pluralidad compuesta de unidades”, definición que sólo puede usarse en contextos discretos. En cambio si se considera el número como una relación entre cantidades, ya puede intervenir el continuo. Otra opción es considerar el número como formando parte de un sistema con unas reglas establecidas lo que le confiere un carácter de índole algebraico. Finalmente se encuentra la noción de número asociada a los dos aspectos de éste, el cardinal y el ordinal, es decir, el número como la cantidad de una colección de objetos o bien el número como construcción inductiva en el que cada cantidad se obtiene de forma recurrente a partir de la anterior.

Una investigación con características similares es la realizada por Picado (2012) sobre la introducción del sistema métrico decimal en la educación en España. Aunque el sistema métrico decimal se crea en Francia en 1791, su implantación no fue inmediata. Aunque fuera usado por los científicos y a nivel administrativo, el pueblo llano y las escuelas no incorporaron las nuevas unidades de medida hasta finales del siglo XIX. Este nuevo sistema de pesos y medidas apareció publicado por primera vez en la Real Orden de 9 de diciembre de 1952, aunque no se implantará como obligatorio hasta el 1 de julio de 1880 (Real Decreto de 14 de febrero de 1979). La resistencia, sobre todo en los centros educativos y en el uso del pueblo llano, fue tal que debieron publicarse varios decretos en los

que se establecía este sistema de medida como contenido en las escuelas hasta que finalmente fue adoptado.

El periodo de estudio de esta investigación fue precisamente este momento de indefinición, debate y resistencia ante la implantación de este sistema, el periodo que va de 1849 hasta 1892. Las primeras fuentes en las que se daba cuenta del sistema métrico decimal son:

- *Memoria elemental sobre los nuevos pesos y medidas decimales, fundados en la naturaleza* de Gabriel Ciscar y Ciscar publicado en 1800
- *Explicación del sistema decimal ó métrico francés* de José Mariano Vallejo y Ortega publicado en 1840.

La primera de estas obras fue la publicación pionera sobre el sistema de unidades establecido en Francia, de hecho su autor participó en la Convención Internacional del Metro que se celebró en París. La segunda obra se constituyó en el texto básico que utilizarían todos los autores de libros de texto para el desarrollo correspondiente al apartado de medida.

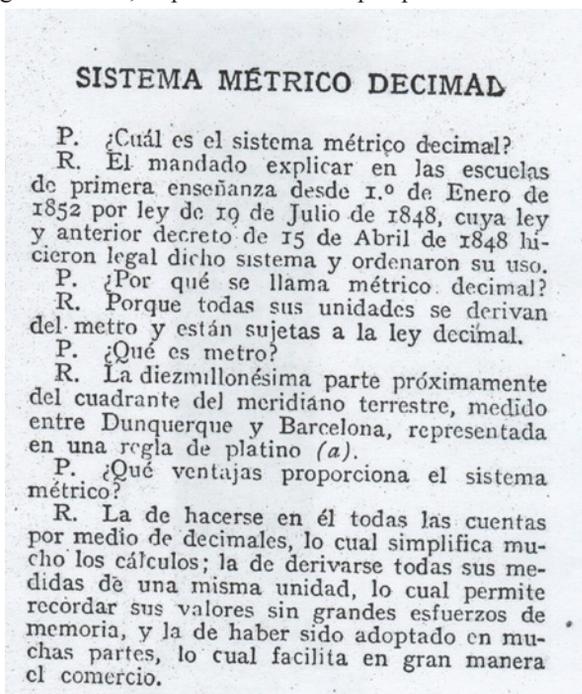
Las obras analizadas, en total trece, cubren los diversos niveles educativos: la educación primaria, la secundaria y la formación de maestros que se indican en el siguiente listado (PICADO, 2012, p. 109)

- Lorenzo Trauque (1854) *Aritmética decimal y demostrada para uso de las escuelas primarias, conteniendo todas las operaciones ordinarias del cálculo aplicadas al sistema métrico, un breve compendio del cálculo antiguo, cambios, progresiones, logaritmos, y reglas de unidad.*
- Varios autores (1860) *Aritmética para uso de los niños.*
- Juan Posegut Dasen (1875) *Compendio de Aritmética con el nuevo sistema de pesos, medidas y monedas.*
- María de los Dolores Montaner (1889) *Tratado de aritmética teórico-práctica con la explicación del sistema métrico decimal para uso de las escuelas de primera enseñanza elemental y superior.*
- José Mariano Vallejo (1855) *Compendio de matemáticas puras y mistas.*
- Felipe Picatoste (1861) *Principios y ejercicios de aritmética y geometría.*
- Vicente Rubio Díaz (1872) *Elementos de matemáticas. Aritmética y Álgebra.*
- Joaquín Fernández y Cardín (1880) *Elementos de matemáticas.*
- Joaquín Avendaño (1852) *Elementos de Aritmética.*
- Juan Cortazar (1856) *Tratado de Aritmética.*
- Ramón de Bajo e Ibañez (1877) *Nociones de Aritmética y Álgebra.*

- Luís Sevilla y González (1890) *Explicación de aritmética. Arreglada al programa de la escuela normal superior de maestras de la provincia de Murcia.*
- Antonio Martín y Rus (1892) *Programa de aritmética para uso de las alumnas de la Normal de Maestras de Málaga*

Para llevar a cabo el análisis de los textos se hizo un análisis conceptual, otro de contenido y un último didáctico. El primero contemplaba aspectos relativos a la definición de los conceptos y su descripción desde un punto de vista epistemológico. El segundo aborda la interpretación de los significados dados a los conceptos ligados a un contexto histórico, social y cultural. Por último, el análisis didáctico permite la relación con los fines educativos y los métodos de enseñanza inmersos en cada uno de los libros.

Los resultados arrojan datos de que la inclusión del SMD en los textos se realiza desde diferentes orientaciones que se han clasificado como de tipo: científico, político, terminológico o innovador, aunque en algunos casos se trata de una combinación de estos enfoques. El metro y las unidades principales del sistema, se presentan desde un enfoque científico, abordando la etimología de los términos y el carácter instrumental. Para la revisión de los múltiplos y submúltiplos de las unidades se utilizan dos perspectivas: una etimológica y otra numérico-decimal, aunque en algunos libros, se presentan las dos perspectivas de forma integrada.



En los libros de texto de primaria se presenta el sistema métrico decimal de forma previa a las fracciones usando el estilo típico de los catecismos con preguntas y respuestas. En cuanto a la secundaria y la formación de maestros, se hace justamente al contrario, después de las fracciones comunes y decimales y de forma más descriptiva.

Figura 1. Introducción del SMD en el libro *Aritmética completa para niños* (1886) de Antonio Gallego Chaves, p. 69

Siguiendo esta misma línea, en la investigación de González (2002) tratando de responder a la pregunta ¿qué tipos de sistemas simbólicos utilizaban los matemáticos de los siglos XVII, XVIII y XIX en relación con los puntos críticos y de qué forma? se analizaron algunas fuentes primarias correspondientes a textos clásicos utilizados en la enseñanza del Análisis Matemático como:

- L'Hôpital, G.F.A. (1696) *Analyse des infiniment petits*. París: L'Imprimerie Royale.
- MacLaurin, C. (1742) *Traité des fluxions*. París: Quai de Augustines.
- Euler, L. (1755) *Institutiones calculi differentialis*. San Petersburgo: Academia Imperialis Scientiarum.
- Bézout, E. (1764) *Cours de Mathematiques*. París: De l'Imprimerie de Ph- D. Pierres.
- Bails, B. (1797) *Principios de matemáticas*. Madrid: Imprenta de la viuda de Joaquín Ibarra
- Lagrange, J. L. (1797) *Theorie des fonctions analytiques*. París: L'Imprimerie de la Republique.
- Lacroix, S. (1837) *Traité elementaire de calcul différentiel et calcul intégral*. París: Gautier-Villars.

Se trató de dar una explicación genética, en el sentido de señalar los sucesivos estadios de desarrollo en la utilización de los diferentes sistemas simbólicos para la enseñanza del concepto de puntos críticos, tratando así de responder a la pregunta relativa a cómo se produjo la evolución. Asimismo, se trató de señalar las causas que influyeron en dicha evolución para dar respuesta a la pregunta de por qué se produjo. Es decir, se aporta una síntesis histórica de tipo genético, en el sentido de que se establecen las secuencias cronológica y causal acerca de la enseñanza de los puntos críticos.

El análisis se realizó intentando cubrir los siguientes aspectos que permitieran determinar las características de los libros de texto y al mismo tiempo diferenciarlos:

- **Socio-cultural** con el que se pretende dar una explicación que justifique los contenidos y su presentación en el libro en relación con la época, el lugar y los alumnos para los que fue escrito.
- **Epistemológico** con el que se pretende analizar el status matemático que poseen los contenidos del Análisis Matemático en cada uno de los libros, concretamente en relación con los puntos críticos.
- **Didáctico** se trata de ver el enfoque que reciben los puntos críticos en cuanto a la enseñanza-aprendizaje.

Estos tres tipos de análisis nos muestran la evolución de la enseñanza del Análisis Matemático en los ciento cincuenta años que van desde su inicio hasta su consolidación, distinguiéndose tres periodos.

Se puede distinguir un primer periodo al que pertenecen los libros de l'Hôpital y MacLaurin caracterizados, desde el punto de vista de su estructura, por mantener la concepción clásica heredada de la forma de hacer de los matemáticos griegos. A partir de unas definiciones iniciales en las que se establece el significado de los conceptos "primarios" que van a aparecer a lo largo del texto, se van a suceder las diferentes proposiciones que caracterizan las propiedades, estructura, reglas de cálculo en los que están involucrados dichos conceptos. Con cada una de dichas proposiciones se incluye un problema o ejercicio resuelto con la pretensión ejemplificarla. Se expone una concepción geométrico-dinámica del Cálculo Diferencial, de forma que tanto las proposiciones como las demostraciones se llevan a cabo en un lenguaje puramente geométrico y las observaciones se realizan sobre el cambio experimentado en el recorrido de las curvas. Dado que no existe todavía un lenguaje funcional propio, todo el discurso descansa sobre el estudio y análisis de curvas de forma que las representaciones más utilizadas son las gráficas en las que las curvas mantienen su significado geométrico

Un segundo periodo, corresponde a los libros de Euler y Lagrange que son más modernos en la organización de los contenidos, condicionada por la estructura algebraica de que se quiere dotar a los conceptos con el objetivo de que sea más coherente y consistente desde el punto de vista matemático. Así se configura una moderna concepción del libro de texto matemático, que comienza con los fundamentos de la materia y culmina tras una exposición sistemática con las líneas más recientes de investigación. Comienza a usarse la noción de función con lo que el concepto de diferencial utilizado hasta entonces pasó de ser considerado como la variación de una variable, a la razón de cambio de la función en relación con el incremento de la variable. El tipo de representación predominante es la representación simbólica: la ecuación algebraica o trascendente de la función que se quiere estudiar. Así se trata de establecer una teoría de tipo general deduciendo las fórmulas necesarias para poder diferenciar cualquier tipo de función según la expresión simbólica que tenga.

Por último, los libros de Bézout, Bails y Lacroix se caracterizan por un tratamiento de tipo didáctico típico de las primeras enciclopedias. El centro de interés está puesto en los métodos de cálculo. Muchos de los conceptos relacionados con el cálculo diferencial que se incluían en estos libros de texto han desaparecido de la enseñanza, tal es el caso de las evolutas y envolvente, los círculos osculadores, los puntos de retroceso,... Se utilizan los dos tipos de representación anteriores, intentando encontrar un equilibrio entre la mayor precisión de la representación algebraica con la visualización de las propiedades gráficas de la curva correspondiente. Se configura así, una generación de libros dedicados a la formación de profesionales que deben utilizar las matemáticas, caracterizados por su sentido didáctico.

En estos momentos se está llevando a cabo otra investigación de carácter similar a las anteriores con la diferencia de la temática a la que está dedicada, que en este caso es la de la Geometría Analítica. En este caso la revisión se está haciendo a partir de libros de texto antiguos correspondientes al siglo XIX dado que fue esta una época de auge y desarrollo en España de los conceptos de esta rama de las matemáticas. La disyuntiva entre la enseñanza de una geometría sintética o más bien la geometría analítica constituye la idea inicial de la que surge la necesidad de esta investigación. Durante la primera mitad del siglo XIX la Geometría Analítica formaba parte de los estudios intermedios que se realizaban entre la Escuela de primeras letras y las Facultades Mayores. Fue en el año 1857 cuando estos estudios pasan a pertenecer exclusivamente a las Facultades de Ciencias.

Algunos de los textos que están siendo analizados en esta investigación resultarán familiares a los lectores por cuanto son comunes también a las investigaciones anteriores. Esto es debido a que eran matemáticos de la época cuya principal aportación fueron los libros de texto y dado que además estos debían ser aprobados desde el ministerio correspondiente ciertos autores estaban ciertamente favorecidos.

- Vallejo, J.M (1817) *Tratado elemental de matemáticas*. Tomo II. Madrid. Imprenta de Doña Catalina Piñuela.
- Zorraquín, M (1819). *Geometría analítica-descriptiva*. Alcalá. Impresor de la Real Universidad.
- Lista, A. (1823) *Elementos de matemáticas puras y mistas (sic)*. Tomo III. Madrid. Imprenta de Don Leon Amarita.
- Odriozola, J. (1829) *Curso completo de matemáticas puras*. Tomo III. Madrid. Imprenta que fue de García.
- Lista, A. (1838) *Elementos de matemáticas puras y mixtas*. Tomo II. Madrid. Imprenta de Don Norberto Llorenc.
- Lacroix, S.F. (1846) *Tratado elemental de geometría rectilínea y esférica, y de la aplicación del álgebra a la geometría*. Tomo IV. Madrid. En la Imprenta Nacional.

- Santa María, A. Gómez de (1846) *Tratado completo de matemáticas*. Tomo IV. Madrid. Imprenta de corrales y compañía.
- Cortázar, J. (1862). *Geometría Analítica*. Madrid. Imprenta de D.F. Sánchez.
- Echegaray, J. (1867). *Introducción a la Geometría Superior*. Madrid. Imprenta y librería de D. Eusebio Aguado.
- Mundi, S. (1883) *Lecciones De Geometría Analítica*. Barcelona. Establecimiento tipográfico la academia, de Evaristo Ullastres.
- Berenguer, P.A. (1895) *Lecciones de Geometría Analítica*. Toledo. Imprenta y librería de la Viuda e Hijos de J. Peláez.
- Vegas, M (1906) *Geometría Analítica*. Madrid. Establecimiento tipográfico de G. Justo.

El análisis que se está haciendo contempla dos dimensiones: una sobre el contenido y otra histórico-crítica que permita interpretar la evolución en la presentación de los conceptos matemáticos. Por ejemplo, en la obra de Alberto Lista publicada en 1825 se puede ver cómo los problemas se construyen con regla y compás para obtener la solución geométrica a partir de la solución algebraica. Para ello se consideran que las letras y los números de las ecuaciones representan segmentos. Así, para construir un polinomio se establecen las siguientes indicaciones:

Sea $x=a+b-c+d-h$. Sobre una misma recta tómense las líneas positivas a , b , d , á continuación unas de otras. Quítesele á la línea que resulta la suma de las rectas c y h , y el residuo será el valor de x . (p. 122)

Uno de los grandes problemas que aparecen sin resolver en algunos de estos libros es el relativo a la consideración de las soluciones negativas por la interpretación geométrica que se hace de todas las soluciones. Así se establece que:

Cuando de la resolución de un problema geométrico resulta un valor negativo de la incógnita x , se muda el signo de esta en la ecuación, y se tendrá la condición á que satisface dicho valor negativo. Entonces se conocerán las líneas que se hacen indirectas en el problema, para que el valor negativo de x , hecho positivo, lo satisfaga. (p. 126)

Al estar tan atado el autor a la Geometría se producen ciertos inconvenientes, en muchas ocasiones se complican innecesariamente los problemas al plantear siempre ecuaciones homogéneas y a construir las soluciones, tanto positivas como negativas, siendo la interpretación y construcción de éstas últimas un asunto bastante complejo en algunos casos. Quizá fuera esta complicación innecesaria una de las razones de la desaparición de este modo de hacer Geometría Analítica, en favor de otros planteamientos más algebraicos.

Libros de texto actuales

Uno de los trabajos pioneros en este campo es el estudio de Sanz (1995) sobre los tipos y la función de las configuraciones gráficas de datos en los libros de texto de primaria

Otros autores, como Sierra *et al.* (1999), con el objetivo de analizar la evolución sufrida por los libros de texto de matemáticas de secundaria a lo largo del siglo XX, utilizan el análisis de contenido para analizar dichos libros considerando aspectos diversos como la secuenciación de contenidos, las definiciones según el tipo y papel que juegan en el texto, los ejemplos y ejercicios, las representaciones gráficas y simbólicas, y finalmente atienden a los aspectos materiales que determinan la presentación del concepto. Aunque esta investigación sólo se realizó en torno a los conceptos de límite y continuidad, el método utilizado puede emplearse para cualquier concepto matemático.

Para dar una idea de algunos aspectos de este estudio, hay que indicar que se llevó a cabo en tres etapas, cada una de las cuales profundizaba el trabajo realizado en la etapa anterior. En la primera etapa, se elaboraron fichas con los datos fundamentales del libro: Título, autor/es, editorial, año de edición, plan de estudios y un resumen del contenido de los capítulos pertinentes.

En la segunda etapa se agruparon los libros por periodos que, en líneas generales corresponden a los sucesivos planes de estudios:

1. Periodo comprendido entre 1940 y 1967: desde el final de la Guerra Civil (1939) hasta 1967.
2. Periodo comprendido entre 1967 y 1975: desde la introducción de la matemática moderna hasta la implantación del Bachillerato Unificado y Polivalente (BUP), en 1975, consecuencia de la nueva Ley General de Educación (LGE) de 1970.
3. Periodo comprendido entre 1975 y 1995: desde la implantación del BUP hasta el inicio de los nuevos Bachilleratos derivados de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE).
4. Periodo comprendido entre 1995 y 2000: desde la publicación en 1995 de los decretos curriculares derivados de la LOGSE hasta nuestros días.

En esta segunda etapa se hicieron tablas comparativas de los libros correspondientes a cada periodo que incluían elementos como:

- Modo de introducción del concepto.
- Tipo de definición.
- Secuenciación de contenidos
- Tipos de ejercicios y problemas.

En la tercera etapa se han considerado tres dimensiones del análisis:

- *Análisis conceptual*, que se refiere a cómo se define y organiza el concepto a lo largo del texto, representaciones gráficas y simbólicas utilizadas, problemas y ejercicios resueltos o propuestos, así como ciertos aspectos materiales de los libros de texto que determinan la presentación del concepto.
- *Análisis didáctico-cognitivo*, que se refiere tanto a la explicitación de los objetivos que los autores pretenden conseguir como al modo en el que se intenta que el alumno desarrolle ciertas capacidades cognitivas (DUVAL, 1995).
- *Análisis fenomenológico*, que se caracteriza por los fenómenos que se toman en consideración con respecto al concepto en cuestión, en nuestro caso el de continuidad. Aquí se considera el análisis fenomenológico didáctico, en el que intervienen los fenómenos que se proponen en las secuencias de enseñanza que aparecen en los libros analizados (PUIG, 1997).

Además de esta investigación, se realizaron en la universidad de Salamanca otras dos de índole similar. Una se centró en la presentación del concepto de derivada en los libros de educación secundaria publicados en Portugal a lo largo del siglo XX (AIRES, 2006). Dado que esta fue una de las primeras investigaciones realizadas sobre la historia de la educación matemática en este país, una de las grandes aportaciones fue la búsqueda, localización y organización de planes curriculares portugueses de educación secundaria a lo largo de todo el siglo así como de libros de texto de cada una de las épocas. El análisis de los libros se realizó utilizando el mismo modelo ya explicado anteriormente.

Del mismo estilo, y utilizando algunos de los resultados de la investigación anterior, se hizo otra sobre la inclusión en los libros de texto de educación secundaria de problemas de optimización (SANTIAGO, 2008).

Algunos personajes como protagonistas de la historia

Variando un poco la línea de investigación, en el año 2005 varios investigadores españoles, de diversas universidades realizaron un encuentro temático centrado en uno de los matemáticos españoles del siglo XIX con más repercusión en el ámbito didáctico como fue: José Mariano Vallejo. El interés en este matemático se produjo por la confluencia de los intereses particulares desde el punto de vista de la investigación de estos investigadores. Fruto de esta colaboración surgió un libro de Maz, A. Torralbo, M. y Rico, L. publicado en el año 2006 y titulado: *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado: una mirada desde la educación matemática*. En dicha obra participaron investigadores como Dolores Carrillo Gallego de la Universidad de Murcia, Bernado Gómez de la

Universidad de Valencia, Alexander Maz de la Universidad de Córdoba, Luis Rico Romero de la Universidad de Granada, M^a Teresa González Astudillo de la Universidad de Salamanca y Luis Puig de la Universidad de Valencia.

Los capítulos que aborda el libro son realmente variados, desde las ideas acerca de los números o el tratamiento dado a los números negativos, como la enseñanza de la regla de tres, la noción de número imaginario o su tratamiento del cálculo diferencial.

Ya hemos visto que en el siglo XVIII se publicaron numerosos libros escritos por matemáticos españoles. Este hecho se produjo porque o bien habían estudiado a los grandes matemáticos europeos o bien, durante cierto tiempo, estuvieron fuera de su país natal y, al retornar dejan constancia de lo que han aprendido, en libros de texto. Tal es el caso de José Mariano Vallejo (1779-1846) matemático granadino que publicó diversos libros de texto de matemáticas (MAZ, TORRALBO y RICO, 2006) como:

- Adiciones a la Geometría de D. Benito Bails (1806)
- Aritmética para Niños para uso de las escuelas del reyno puntos (1806)
- Memoria sobre la curvatura de las líneas en sus diferentes sobre el radio de curvatura y sobre la evolutas (1807)
- Tratado completo del arte militar (1812)
- Tratado elemental de matemáticas (1812-1813)
- Compendio de Mecánica Práctica para uso de los niños, artistas y artesanos (1815)
- Compendio de Matemáticas Puras y Mixtas (1819)
- Ideas primarias que deben darse a los niños en las escuelas acerca de los números (1833)
- Explicación del sistema decimal o métrico francés (1846)

De estos libros los más conocidos fueron la Aritmética para niños, el Tratado elemental de matemáticas, que estaba formado por tres volúmenes y del que hizo una versión más reducida en su Compendio de matemática puras y mixtas.

Una de las preocupaciones de José Mariano Vallejo estuvo centrada en la enseñanza de las matemáticas; creía que “un libro de texto escrito con un buen método –buena elección, organización y expresión de los contenidos- era un medio eficaz para ello” (Carrillo, 2006, p. 29). Esta preocupación le llevaba a corregir, modificar e incluir nuevos resultados en las sucesivas ediciones de cada uno de sus libros. Recibió formación de los métodos de Pestalozzi que luego plasmaría en sus libros, como el principio de intuición, aunque al mismo tiempo fue muy crítico con la puesta en práctica de este método puesto que consideraba que no siempre se respetaba dicho principio.

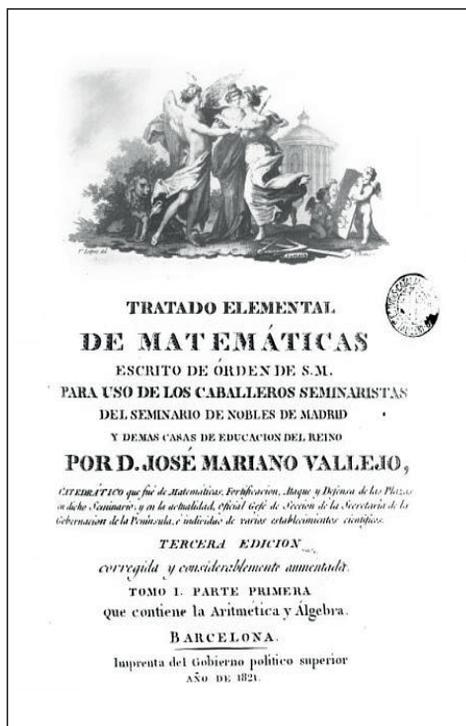


Figura 2: Portada del Tratado Elemental de Matemáticas de José Mariano Vallejo.

Otra investigación con nombre propio es la relativa a la contribución del profesor D. Pedro Puig Adam (1900-1960) a la internacionalización de la didáctica de la matemática española y a su participación en los orígenes del llamado Movimiento de la Matemática Moderna. Este excelente matemático y didacta también mantuvo excelentes relaciones con matemáticos de fuera de España. Tanto su preocupación por la enseñanza como el momento en el que se produjo su acceso a la profesión y el desarrollo de su labor profesional le llevó a convivir con algunos de los grandes matemáticos y didactas de la época.

En sus escritos se pueden encontrar algunas de las ideas bourbakistas (GUIMARAES, 2006) que luego marcaron el MMM. La unidad de la matemática que él quiso que se reflejara en la enseñanza a través del método cíclico, el método axiomático que como se ha indicado se puede ver desarrollado en su libro Geometría Métrica, o la estructura de la matemática que se desprende de alguno de sus artículos, como el relativo a los juegos (Puig, 1957) dan fe de que estas ideas estaban germinando en la enseñanza mucho antes de que se iniciara formalmente este movimiento (GONZÁLEZ, 2008a).

El movimiento de las matemáticas modernas en España

Diversas han sido las contribuciones para el conocimiento de la introducción del Movimiento de la Matemática Moderna en España (GONZÁLEZ, 2006, 2007, 2008b). Todo ello se ha realizado en el marco de una colaboración intensa con investigadores portugueses y brasileños realizada en los últimos años. Para dar cuenta de algunas de las características identificadoras de este movimiento en España daré algunas pinceladas de cómo fueron los inicios de este movimiento.

Dos años después del coloquio de Royaumont (1959), se organizó una Reunión de Catedráticos de Matemáticas de Enseñanza Media con el título “*Nuevas Orientaciones en la Enseñanza de las Matemáticas*”. En dicha reunión el Catedrático de Geometría de la Universidad de Madrid y líder de este movimiento en España, D. Pedro Abellanas Cebollero informó sobre la necesidad de modificar el currículo de matemáticas del Bachillerato y adaptarlo a la orientación de las matemáticas modernas:

Al no ser la Matemática Moderna una moda de un grupo de investigadores, sino la tarea genuina que tienen que realizar las generaciones actuales de matemáticos, de ello se desprende que toda la matemática que siga se apoyará sobre esta matemática moderna y no sobre los Elementos de Euclides, como aconteció hasta el siglo pasado, y ello implica la necesidad de formar a las nuevas generaciones en el espíritu de la matemática que va a ser vigente en los años venideros” (Revista de Enseñanza Media, nº 92-94, p. 1796)

A partir de ese momento, a través de la *Revista de Enseñanza Media*, se observa cómo el interés se desplaza precisamente hacia la Matemática Moderna en el Bachillerato: reuniones, cursillos, etc., giran alrededor de esta tendencia.

En cuanto a la difusión de la Matemática Moderna se realizó una labor previa de información y adiestramiento didáctico de algunos profesores a través de una serie de cursillos. Su implantación se inició en el Bachillerato Superior, se continuó con el Bachillerato Elemental y, finalmente, se extendió a la Enseñanza Primaria.

El Ministerio de Educación Nacional editó unos Cuadernos Didácticos dedicados a desarrollar temas de Matemáticas con la orientación del Programa de las Matemáticas Modernas. Estos apuntes se pueden considerar el fruto de la experimentación en quinto de Bachillerato y fueron redactados por los profesores Casulleras y Marcos de Lanuza como notas de clase, es decir, son los temas que se impartieron durante aquel curso por la Comisión presidida por Pedro Abellanas.

La actividad durante estos años fue un claro exponente de la preocupación e interés del profesorado de Matemáticas por actualizar su formación; se percibe la importancia de los cambios y se invierte tiempo y esfuerzo en dominar los nuevos contenidos. Pero la renovación curricular se reduce a un cambio radical en los contenidos y a un inicio de operativización en los objetivos; los aspectos

metodológicos se reducen muchas veces a anécdotas y la evaluación se sigue manteniendo con los mismos planteamientos (RICO y SIERRA, 1994).

Una vez introducida la Matemática Moderna en la Educación Secundaria, se extendió al nivel educativo inferior. Para facilitar la creación de las estructuras mentales se introduce la Matemática Moderna desde la primera etapa (6-10 años de edad). Esto se hizo con la idea de la construcción de los números como una propiedad de los conjuntos, para facilitar la comprensión de estos conceptos antes de introducir los mecanismos correspondientes a las operaciones y para evitar el aprendizaje memorístico. Se insistió en que el aprendizaje del simbolismo debía ser posterior a la comprensión de los conceptos.

En la segunda etapa (10-14 años) se insistió en los aspectos más formales y formativos de las matemáticas pretendiendo que el alumno lograra claridad, rigor y precisión en el pensamiento. Otros elementos a los que se les presta atención son la interrelación con otras áreas y la utilización de recursos lúdicos en todos los niveles de la educación primaria tanto para la aceptación de leyes y normas como para el desarrollo de la creatividad.

En cuanto a las orientaciones metodológicas se relacionan con las capacidades que el niño debe adquirir: observación y manipulación; reconocimiento y resolución de situaciones problemáticas; intuición espacial; traducción del pensamiento cuantitativo en frases matemáticas; mecanismos y automatismos; vocabulario; relación, análisis, síntesis, abstracción, razonamiento lógico; creatividad.

Muchos maestros estudiaron los nuevos contenidos que tenían que impartir casi simultáneamente a sus alumnos, con esfuerzo personal considerable, sin orientación adecuada y con gran celo profesional. La intervención de especialistas y profesores universitarios, sin preparación didáctica alguna, en la elaboración de los programas de matemáticas llevaron a unos programas irreales, como por ejemplo, la presentación de las estructuras matemáticas mediante definición axiomática a alumnos de 12 años, calcadas de las que a su vez habían copiado a Bourbaki. Se provocó artificialmente un separación entre “matemática moderna” y “matemática tradicional” que confundía a niños y profesores, produciéndose un abandono notable del cálculo y la casi desaparición de la geometría intuitiva escolar.

Consideraciones finales

Las investigaciones presentadas pueden dar una idea de las investigaciones realizadas en España.

El análisis de las fuentes primarias y de los textos históricos nos permitieron conocer de primera mano el mundo de algunos matemáticos que vivieron en una determinada época, nos da cuenta de las concepciones y la forma

de pensamiento imperante en un momento, nos indica el tipo de problemas y las formas de solución que se gestaron según los instrumentos de los que se disponía, se recuperan algunos planteamientos de la matemática diferentes a los actuales, como una visión puramente geométrica de los conceptos propios del Análisis e incluso pueden ser fuente de actividades, situaciones o problemas para plantear a los alumnos y diseñar secuencias de aprendizaje que proporcionen una formación matemática más global y comprensiva.

Por otro lado, el estudio de libros de texto y su evolución a lo largo de la historia, tanto en relación con un determinado concepto como en la estructuración de contenidos es interesante puesto que nos proporciona información sobre el perfil de los libros, sus características, sobre las ventajas e inconvenientes de una determinada metodología u orientación didáctica y sobre la evolución que han sufrido así como las causas por las que se produce.

Las colaboraciones con otros investigadores han sido fuente de nuevas líneas de investigación y resultados interesantes. Tal es el caso de las investigaciones realizadas sobre el matemático José Mariano Vallejo como la profundización en las características propias del Movimiento de la Matemática Moderna en España.

Referências

AIRES, Ana Paula. **O conceito de derivada no ensino secundário em Portugal ao longo do Século XX**: Uma abordagem histórica através dos planos curriculares e manuais escolares. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca. 2006.

CARRILLO, Dolores. Vallejo y las “ideas primarias acerca de los números”. En MAZ, Alexander, TORRALBO, Manuel y RICO, Luis (eds.) **José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado, una mirada desde la educación matemática**, p. 25-46. 2006

COBOS, José. **Fondo de libros de matemáticas existentes en Extremadura desde el siglo XVI hasta el XX (1930)**. Cáceres: Universidad de Extremadura. 1995.

CHOPPIN, Alain. L’histoire des manuels scolaires: une approche globale. **Historie de l’éducation**, 9 (4), p. 1-25. 1980.

CUESTA, Norberto. **Historia de la invención del Análisis Infinitesimal y de su introducción en España**. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca. 1985.

DUVAL, Raymond. **Sémiosis et pensée humaine**. Berna: Peter Lang. 1995.

GÓMEZ, Bernardo. La investigación Histórica en Didáctica de la Matemática En CASTRO, Encarnación, FLORES, Pablo, ORTEGA, Tomás, RICO, Luis y

VALLECILLOS, Angustias (Ed.). **Investigación en Educación Matemática. VII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)**, 79-85. Granada: Universidad de Granada. 2003

GONZÁLEZ, María Teresa. **Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del Análisis Matemático**: Perspectiva histórica acerca de los puntos críticos. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca. 2002.

GONZÁLEZ, María Teresa y SIERRA, Modesto. (2003) El método de investigación histórico en la enseñanza del Análisis Matemático. En CASTRO, Encarnación, FLORES, Pablo, ORTEGA, Tomás, RICO, Luis y VALLECILLOS, Angustias (eds.) **Investigación en Educación Matemática. VII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)**, p. 109-130 Granada. 2003

GONZÁLEZ, María Teresa. La matemática moderna en España. **Unión**: Revista Iberoamericana de educación matemática, 6, p. 63-71, 2006

GONZÁLEZ, María Teresa. Treinta años de matemática moderna en España: de 1961 a 1990. En **A matemática moderna nas escolas do Brasil e de Portugal**: primeiros estudos. Curitiba (Brasil). 2007.

GONZÁLEZ, María Teresa. Las ideas sobre la educación matemática de Pedro Puig Adam ¿precursoras de la matemática moderna? **Cuadrante**, 17(1), p. 93-108. 2008a.

GONZÁLEZ, María Teresa. La transición hacia la matemática moderna: La revista Vida Escolar. **Diálogo Educativo**, 8(25), p. 615-631. 2008b.

GONZÁLEZ, María Teresa. La formación de profesores en España. **Diálogo Educativo**, 8(23), pp. 39-54. 2008c.

MAZ, Alexander **Los números negativos en España n los siglos XVIII y XIX**. Tesis doctoral. Universidad de Granada. 2005.

GUIMARAES, Henrique. Por una Matemática nova nas escolas secundarias. Perspectivas e orientações curriculares da matemática. En J. Matos (2006) **III Seminário Temático A matemática nas escolas do Brasil e de Portugal**: estudios históricos comparativos. Documento inédito. 2006.

MAZ, Alexander, TORRALBO, Manuel y RICO, Luis. **José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado, una mirada desde la educación matemática**, p.25-46. 2006.

PICADO, Miguel Evelio. **El sistema métrico decimal en libros de texto de matemáticas en España durante la segunda mitad del siglo XIX (1849-1892)**. Tesis doctoral. Universidad de Granada. 2012.

PUIG ADAM, Pedro. Estructuras matemáticas en un juego solitario. **Gaceta matemática**, 11 (1), 14-19. 1957

PUIG, Luis. Análisis fenomenológico. En RICO, Luis (coord.) **La educación matemática en la enseñanza secundaria**. Barcelona: ICE. Universidad de Barcelona-Horsori, p. 61-9. 1997.

RICO, Luis y SIERRA, Modesto. Desarrollo de la Educación Matemática en España desde la guerra civil (1936) hasta la Ley General de Educación. En J. KILPATRICK, Jeremy, RICO, Luis y SIERRA, Modesto. **Sierra Educación Matemática e Investigación**. Síntesis: Madrid. 1994.

SÁNCHEZ, Isabel; GONZÁLEZ, María Teresa y SIERRA, Modesto. La geometría analítica en los elementos de matemáticas de Alberto Lista. **Seminario de los grupos de investigación: pensamiento numérico y algebraico e Historia de la Educación Matemática de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática**. (SEIEM) Universidad de Salamanca, 2010.

SANZ, Inés. **La construcción del lenguaje matemático a través de libros escolares de matemáticas**. Las configuraciones gráficas de datos. Tesis doctoral. Universidad del País Vasco. 1995.

SANTIAGO, Ana Elisa. **Evolução histórica dos problemas de otimização e o seu tratamento no Ensino Secundária português nos séculos XXy XXI**. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca. 2008.

SCHUBRING, Gert. On the methodology of analyzing Historical Textbooks: Lacroix as textbook author. **For the learning of mathematics**, 7 (3), 41-51. 1987.

SIERRA, Modesto, GONZÁLEZ, María Teresa y LÓPEZ, Carmen. Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria: 1940-1995. **Enseñanza de las Ciencias**, 17 (3), pp 463-476. 1999.

María Teresa González Astudillo

Departamento de Didáctica de la Matemática y didáctica de las ciencia experimentales – USAL – Salamanca – España

E-mail: maite@usal.es