Artigos

A teoria antropológica da didática e o estudo das inter-relações entre domínios numérico, algébrico e geométrico

Luiz Marcio Santos Farias[2]
Maria Auxiliadora Lisboa Moreno Pires[3]

Introdução e problemática

Os trabalhos desenvolvidos pelos professores e alunos no ***ensino secundário de Matemática***, inscrevem-se em diferentes domínios. Investigações em *Didática da Matemática* já sinalizaram a possibilidade e a importância, para o processo de ensino-aprendizagem, das "idas e vindas" feitas entre os diferentes domínios matemáticos. Este artigo se interessa pelo estudo das inter-relações entre os diferentes domínios matemáticos no ensino secundário. Mais precisamente as *inter-relações entre os domínios numérico-algébrico e geométrico* - **NAG** no *Ensino Secundário de Matemática* - **EMS.** Até o presente momento, pouco desenvolvido na didática da matemática, o estudo do **NAG** do ponto de vista da transposição didática, das práticas dos professores e da resolução de problemas constitui o tema das nossas pesquisas.

As referências teóricas constituem ferramentas necessárias no desenvolvimento de pesquisas, em particular, em Didática da Matemática, com o objetivo de fundamentar, compreender e interpretar os fenômenos do ensino e aprendizagem Farias e Al. (2007). Neste artigo centramos uma atenção particular nas referências teóricas da Didática Francesa que vem permitindo a realização de estudos de "como os professores utilizam o NAG", bem como das "concepções dos alunos em relação ao NAG". Esse é, portanto, um estudo vinculado aos trabalhos de pesquisa que visam estudar as interações possíveis entre os domínios matemáticos no nível das práticas de ensino e da resolução de problemas. Para isso, recorreremos as abordagens teóricas utilizadas nas duas pesquisas, como um instrumento importante para interpretar a instauração e utilização do NAG. Neste artigo, pretendemos apresentar como a Teoria Antropológica da Didática (CHEVALLARD 1992, 1999) tem sido utilizada no contexto das nossas pesquisas através da análise de duas tarefas (exercícios), cada um oriundo de um dos trabalhos de pesquisa citados anteriormente, a partir das quais surge a seguinte questão: *Como os professores e alunos instalam e utilizam o* ***NAG****?*

Esta questão geral conduziu-nos a centrar o nosso olhar sobre questões mais precisas:

(a) Quais são as características matemáticas da situação de ensino?

---

[2] Licenciado em Matemática. Doutor em Educação pela Université de Montpellier II. LIRDEF, IUFM de Montpellier. PEMAC-UESC.UEFS.UCSAL. E-mail: luiz.farias@montpellier.iufm.fr.

[3] Licenciada em Matemática e Mestre em Educação pela Universidade Federal da Bahia. Doutoranda em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte.Professora da UEFS e da UCSAL. E-mail: auxpires@terra.com.br

(b) O que fazem os alunos para resolver uma tarefa e o que faz o professor para ensinar e dirigir o estudo de tal tarefa numa classe?

Estes questionamentos sugerem evidenciarmos as características, os métodos e os fenômenos relacionados aos exercícios analisados, os quais apresentaremos no decorrer deste artigo.

Escolhemos analisar os dois exercícios que apresentaremos no decorrer desta comunicação, pois a partir dos mesmos, é possível evidenciar as características e alguns fenômenos relacionados ao **NAG**.

Quadro teórico e metodologia

Nossas pesquisas fazem parte da corrente de investigação, denominada Didática da Matemática francesa e integram uma problemática que interroga as práticas dos professores e alunos desta disciplina em relação ao **NAG**. Esta comunicação utiliza materiais específicos constituídos de uma parte, da transcrição de uma aula de Matemática que observamos em uma classe equivalente a Primeira série do Ensino Médio, durante nosso trabalho de tese, e de outra parte, um problema aberto, proposto a uma classe equivalente ao nono ano do Ensino Fundamental II, durante nosso trabalho de mestrado, com objetivo de estudar as concepções desses alunos na resolução de um problema relacionado ao **NAG**. A partir de todo material recuperado nestas duas classes, estudamos as características didáticas relacionadas ao **NAG** nestas duas situações.

A Teoria Antropológica da Didática - **TAD** desenvolvida por Chevallard (1992, 1999), articulada com a teoria dos Campos Conceituais, especificamente com os conceitos de teorema-em-ato e conceito-em-ato de Vergnaud (1981); as investigações sobre as mudanças de quadros de Douady (1986); as representações dos registos Duval (1993); e o ensino do domínio numérico de Bronner (1997), constitui o nosso quadro teórico e metodológico Entretanto, nos limitaremos à apresentação, em linhas gerais, da **TAD**, essa escolha justifica-se pela composição dos elementos presentes nas nossas análises e na tentativa de possibilitar uma abordagem geral de tal teoria.

1. A TAD e as organizações matemática e didática

Um estudo praxeológico matemático (Chevallard 1999) pode permitir modelizar a resposta de (***a***), pergunta feita anteriormente, enquanto que um estudo praxiológico didático (Chevallard 1999) pode permitir modelizar a resposta de (***b***). Chevallard considera que qualquer ação humana pode ser analisada num sistema que ele nomeou *praxeologia* ou *organização praxeológica* descritas em termos das quatros noções a seguir:

(Tipo de) tarefa ou Exercício→ T: É adotado o símbolo **T** para representar um ***tipo de exercício*** identificado numa praxeologia, contendo ao menos uma tarefa ou exercício **t**. Essa noção supõe um objeto relativamente preciso. Por exemplo, *calcular o produto de dois números naturais,* é um tipo de exercício, mas *calcular,* simplesmente, é um *gênero de exercício*.

(Tipo de) Técnicas → τ…: Uma ***técnica***, denotada por τ, é uma maneira de fazer ou realizar um tipo de exercícios ***T***. Com efeito, uma *praxeologia* relativa a ***T***, necessita de maneiras de realizar os exercícios $t \in T$, isto é, de uma *técnica,* do grego *tekhnê,* que significa saber-fazer. Assim, para um dado tipo de exercícios **T**, existe, em geral, uma única técnica, ou ao menos um conjunto de técnicas reconhecidas institucionalmente e que permitem também realizar $t \in T$.

Tecnologia→ θ·: A ***tecnologia****,* denotada por **θ**, é um discurso racional (o *logos*) tendo por objetivo *justificar* a *técnica* τ, garantindo que esta permita realizar os exercícios do tipo ***T***. Uma segunda função da *tecnologia* é a de *explicar*, tornar compreensível a *técnica*. Se a sua primeira função – *justificar a técnica* – consiste em assegurar que a técnica alcance o objetivo, a segunda função – *explicar* - consiste em expor o porque fazer de tal maneira.

Teoria→ Θ: A ***teoria****,* representada por Θ, tem a função de justificar e tornar compreensível uma *tecnologia* **θ**.

Essas quatro noções: *tipo de exercício* (**T**), *técnica* (τ), *tecnologia* (θ) e *teoria* (Θ), compõem uma *organização praxeológica* completa [T/τ/θ/Θ], decomponível em dois blocos [T/τ] e [θ/Θ], constituindo respectivamente, o *saber-fazer* [*praxe*] e o ambiente *tecnológico-teórico* [*logos*]. Dessa forma, podemos afirmar que *produzir, ensinar e aprender matemática* é ações humanas que podem descrever-se conforme o modelo *praxeológico.* Nesse sentido, a *organização praxeológica* relativa às atividades matemáticas é uma *organização matemática*.

Segundo Matheron (2000, p.52),

> Essa organização permite estudar uma mesma noção matemática designada por um mesmo nome, mas com organizações matemáticas de naturezas diferentes se desenvolvidas no seio de instituições diferentes. Esse ponto de vista ressalta o aspecto ecológico relativo a um objeto O, quer dizer, o aspecto do questionamento da existência real ou da inexistência desse objeto na instituição onde vive uma dada organização matemática. Essa dimensão ecológica nos permite questionar como é ensinado um objeto identificado num livro didático, que tipo de técnica será utilizada na resolução de determinado exercício e qual é a organização matemática, e por conseqüência, que tipo de programa considerar. (MATHERON, 2000, p. 52).

Analisar a vida de um objeto matemático numa *instituição*, compreender sua significação para essa instituição, é identificar a *organização matemática* que coloca esse objeto em jogo. Nesta perspectiva e procuramos estudar a *organização matemática* que é um dos objetos reveladores de praxeologia completa nas instituições de ensino. Chevallard (1999) considera que o sistema das tarefas dos professores revela duas grandes componentes solidárias: organizações matemáticas – **OM** das tarefas de concepção e de organização de dispositivos de estudo, bem como gestão dos seus ambientes, ou seja, uma organização praxéologica de natureza matemática constituída em torno de um ou vários tipos de tarefas matemáticas, mais ou menos bem identificadas, que evocam a criação de técnicas matemáticas mais ou menos adaptadas assim que justificadas por tecnologias matemáticas mais ou menos sólidas e explícitas; organizações didáticas – **OD** das tarefas de ajuda ao estudo e, em especial, de direção de estudo e de ensino, ou seja, a **OD** refere-se à reconstrução ou a transposição da organização matemática na classe, cujo cumprimento solicita aplicação de técnicas didáticas determinadas.

Análises de uma tarefa no contexto da prática de um professor

Nesta parte de nosso trabalho apresentaremos as análises de duas tarefas, a primeira realizada por um professor e seus alunos em uma classe. E a proposta aos alunos de outra classe.

Visto a amplitude dos estudos realizados ao longo desta pesquisa, no que diz respeito aos resultados apresentados neste artigo, ressaltamos que foram considerados apenas os dados coletados e observados a partir de uma aula.

Nesta aula o professor de Matemática (P2) faz o seu curso sobre os objetos: “a distância entre dois números” e “o valor absoluto de um número”. Em contrapartida, ao analisar o nosso protocolo (FARIAS, 2010) constatamos que durante esta aula, nem os objetos da aula, o estudo “*da distância entre dois números e o valor absoluto de um número”,* nem as intenções de P2 de introduzir estes dois objetos, são revelados aos estudantes no início da aula, eles vão aparecer progressivamente ao longo da mesma.

1. De uma tarefa no contexto da prática de um professor

De maneira geral, a ***organização matemática*** **(OM)** construída na classe apresenta três tipos de tarefas em torno dos quais a aula é desenvolvida:

O curso sobre “*a distância entre dois números e o valor absoluto de um núme*ro” começa quando o professor que denotaremos P2 propõe aos alunos um tipo de tarefa que representaremos por $\mathbf{T_{carré}}$. Nesta aula aparecem também dois outros tipos de tarefas que são notados $\mathbf{T_d}$ e $\mathbf{T_V}$, sobre as quais trabalham P2 e os seus alunos.

Quadro 1: A organização matemática (OM)

Tipo de tarefa	Técnica
Calcular $a^2 - b^2$ sendo dado “a” e “b”	$\tau_{carré1}$ – Com a ajuda da calculadora, calculam-se de uma só vez $a^2 - b^2$
	$\tau_{carré.\,2}$ - Sem utilizar a calculadora transforma-se $a^2 - b^2$ em um produto notável (a+b) (a-b). Procura-se **α** tal que: $\begin{cases} a = \boldsymbol{\alpha} + m \\ b = \boldsymbol{\alpha} - m \end{cases}$ A reta graduada (numérica) é utilizada para mostrar que **α = (a +b) /2** e m= a - **α** =**α**– b. O número $a^2 - b^2$ é escrito como $(\boldsymbol{\alpha}+m)^2 - (\boldsymbol{\alpha}-m)^2 = =2\boldsymbol{\alpha}2\mathbf{m}=4\boldsymbol{\alpha}\mathbf{m}=100\boldsymbol{\alpha}$ como valor exato procurado.
$\mathbf{T_d}$ – Calcular d(a; b).	τ_d – Escrever d(a; b) = $\lvert a-b \rvert$. Calcula-se o valor absoluto da subtração de 25 por 12 ou de 12 por 25, isto é $\lvert 25-12 \rvert = \lvert 12-25 \rvert$
$\mathbf{T_v}$ – Calcular V(a) com “a” numérico.	τ_{v1} – Escrever V(a) = d(a; b) = d(a; 0).

O Quadro 1 (OM) apresenta os tipos de tarefas e as técnicas que acompanham cada uma destas tarefas de maneira simplificada. Neste quadro não especificamos os elementos tecnológicos ou teóricos das praxeologias que aparecem na aula. Porém, os elementos que pertencem ao bloco tecnológico-teórico $[\theta; \Theta]$que permitem justificar as técnicas anteriores serão anunciados de forma resumida no decorrer deste artigo. A organização matemática da aula pode ser descrita através das tarefas $\mathbf{T_{carré}}$, $\mathbf{T_d}$ **e** $\mathbf{T_V}$ e de certo número de sub-tarefas que denominaremos de *espécimes*. A partir desta análise podemos apresentar a organização didática que se constitui na aula.

No que diz respeito à ***organização didática (OD)*** da aula, apresentaremos esta organização apenas a partir de $\mathbf{t_{carré2}}$. É a partir de $\mathbf{t_{carré2}}$ que P2 começa um trabalho de investigação de uma nova técnica para resolver a tarefa sobre a diferença entre dois quadrados através de um raciocínio que permite precisar o valor da diferença entre os dois quadrados em questão. Para isso P2 recorre ao **NAG**, através da introdução da reta graduada, para mostrar que os números $999.999.999\ 925^2$ e $999.999.999\ 875^2$ escritos respectivamente sobre a forma $(999\ 999.999.900+25)^2 = a^2$ e $(999\ 999.999.900-25)^2 = b^2$ podem ser inscritos na reta graduada, situados à mesma distância do número ***α*** =999 999.999.900. P2 utiliza a reta graduada para mostrar que a distância entre os números ***α*** e ***a*** entre os números ***b*** e ***α*** é a mesma, e é partir desta distância que P2 escreve os números ***a*** e ***b*** em função de ***α***. Mas, em nenhum momento da realização desta tarefa o professor menciona ter introduzido dois outros domínios no tratamento da tarefa.

Quadro 2: Resumo da analise praxeológica

<table>
<tr><td rowspan="9">$t_{carré2}$ – Calcular 999999 999 925^2 - 999 999 999 875^2</td><th colspan="5">Objetos do filtro do numérico</th></tr>
<tr><td>Tipo de número</td><td>Tipo de comparador</td><td>Tipo de operador</td><td>Tipo de cálculo</td><td>Domínio onde a tarefa foi proposta</td></tr>
<tr><td>R</td><td>Diferente;
Igual;
Maior que;
Menor que.</td><td>Subtração;
Distância
Valor absoluto</td><td>Misto</td><td>Numérico</td></tr>
<tr><th colspan="5">Praxéologia</th></tr>
<tr><td colspan="2">Técnica
τ</td><td colspan="3">Técnologico-teórico
[θ, Θ]</td></tr>
<tr><td colspan="2">$t_{carré2}$</td><td colspan="3">$[\theta, \Theta]_{carré2}$</td></tr>
<tr><th colspan="5">Elementos para análise dos fenômenos didáticos</th></tr>
<tr><td>Quadros</td><td>Registro</td><td>Procedimento /Regra</td><td colspan="2">Aplicação</td></tr>
<tr><td>Numérico, algébrico, geométrico</td><td>Verbal, literal, número, geométrico</td><td>Decomposição dos números a^2 e b^2 em função de «α» e «m», em seguida multiplicar «α» por 100.</td><td colspan="2">Calcular 123 456 725^2 – 123 456 675^2</td></tr>
</table>

Sobre as situações construídas pelo professor de matemática (P2) através de perguntas-respostas, nos parece importante apontar que nesta aula o professor adotou como critério a aquisição de dois saberes matemáticos ao mesmo tempo "*distância entre dois números e o valor absoluto*" este fato é verificado através das perguntas-respostas que conduzem todas as fases da aula. Vergnaud (1981) sublinha que não é razoável estudar separadamente a aquisição de conceitos (e procedimentos), pois, nas situações encontradas pelo aluno, os saberes são dificilmente dissociáveis.

Observamos que nesta aula os alunos são frequentemente conduzidos a fazer analogias, comparações, ou tratar problemas em domínios diferentes do qual o problema foi proposto no intuito de avançar no raciocínio, explicar ou até mesmo dar sentido aos conceitos trabalhados. Observamos também a utilização da mudança de registros através do cálculo literal para reduzir o trabalho do cálculo numérico. Verificamos também a utilização de representações gráficas através da reta graduada para trabalhar os conceitos de distância entre dois números e valor absoluto de um número. Estes são alguns exemplos de utilização do **NAG** encontrados nesta aula. Porém, através das análises efetuadas até aqui constatamos que dar sentido a conceitos utilizando exemplos, comparações, analogias, não é simples nem para ser utilizado por (P2) nem para a compreensão dos alunos. Pois, como sublinha Raymond Duval (1993), os objetos matemáticos como retas, números, representações algébricas, etc. não são objetos reais ou físicos, para manipulá-los os alunos devem passar pelas suas representações, mentais e semióticas. (P2) utiliza o **NAG** para promover mudanças de registros e de quadros, mas nem em todas as tarefas ele consegue manter tal encadeamento, o que ocasiona dificuldade em um determinado momento da aula, o que pode ser verificado através da análise do nosso protocolo.

Observamos assim, o **NAG** desempenhando um papel importante na mudança de registro. De acordo com Duval (1993), compreender um objeto matemático é a capacidade de reconhecê-lo em registros diferentes. A conversão de uma representação semiótica à outra pode ser assim a ocasião de se aprender. A dificuldade vem da coordenação dos registros cujas condições determinam o sucesso na conversão entre os registros semióticos diferentes. O **NAG** nesta aula é visto como um objeto coordenador que vai dar sentido a estas trocas.

Constatamos uma utilização do **NAG** por parte de P2 de maneira implícita. Nesta aula pode-se observar que a integração do **NAG** no processo de ensino-aprendizagem é contínua e fortemente ligada às normas previstas para a institucionalização dos objetos estudados e previstos pelas instruções oficiais.

Análise de uma tarefa propostas aos alunos

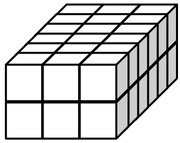
O conceito de volume possui diversas propriedades que podem gerar várias dificuldades de compreensão aos alunos que deverão utilizá-las durante exercícios de matemática. Estas dificuldades são frequentemente originadas, do fato de que, em matéria de ensino de Matemática, o conceito de volume é dividido entre dois pólos de concepções: pólo de natureza geométrica e pólo de natureza numérica. Instalados, por conseguinte, ao mesmo tempo num quadro geométrico e um quadro numérico.

O método utilizado no âmbito das nossas análises apóia-se na noção de "*praxeologia matemática*" e na Teoria de Campos Conceituais, na tentativa de explicitar o **NAG** presente na tarefa que foi realizada.

No quadro seguinte, mostramos a análise da tarefa partir da organização matemática (CHEVALLARD, 1999), dos quadros (DOUADY, 1986) e do teorema-em-ato e conceito-em-ato de (VERGNAUD, 1990) e dos estudos de (PIRES; MENDES, 2010).

A tarefa

Luc possui 36 pequenos cubos de 1 cm de aresta. Ele quer arranjá-los de maneira a formar paralelepípedos retângulos como aparece na figura ao lado.Indique todas as possibilidades de arranjo que originarão paralelepípedos retângulos diferentes.



<table>
<tr><th colspan="3">Praxeologia</th></tr>
<tr><th colspan="2">Tipo de tarefa</th><th>Técnica</th></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Produzir sólidos de um volume dado</td><td>Ensaio-erro</td></tr>
<tr><td>Decompor o número 36 em um produto de triplo</td></tr>
<tr><th colspan="3">Elementos para a análise dos fenômenos didáticos</th></tr>
<tr><th colspan="2">Quadro</th><th>Teorema-em-ato e Conceito-em-ato</th></tr>
<tr><td>t_2</td><td>Geométrico</td><td>- o corte recolhimento conserva o volume
- Se S e S’ são quase disjuntos, V (S U S ') =V (S)   V (S’)
- Contagem bidimensional e tridimensional
- O volume é invariante por isometria</td></tr>
<tr><td>t_2</td><td>Numérico</td><td>- Fórmula de cálculo do volume do paralelepípedo retângulo V=L x l x h
- Decomposição multiplicativa de um número ou dos divisores de um número.
- Paralelepípedo retângulo é completamente definido pelas suas dimensões o volume é invariante por isometria.</td></tr>
</table>

O problema mostra o **NAG** através do desenho do sólido, da decomposição do número 36 e da fórmula de cálculo do volume do paralelepípedo retângulo. Espera-se através deste problema, que os alunos estabelecem relações entre os quadros, associando as lados do paralelepípedo retângulo à sua fórmula, e assim eles determinem os sólidos, ou através da decomposição multiplicativa do número 36 em três números inteiros positivos.

De forma geral, verificamos que alguns alunos apresentaram dificuldades para resolver o problema de construção dos sólidos. Eles utilizaram a técnica t_1, ou seja, os alunos tentaram organizar os cubos sem considerar a decomposição multiplicativa do número 36. Alguns alunos posicionaram de um lado paralelepípedos retângulos com 5 cubos, e após terem observado que a contagem não originava os 36 cubos, desconsideraram o desenho. Podemos dizer que nesta tarefa, os alunos não estabelecem de maneira eficaz a utilização do **NAG**.

Em contrapartida, observamos que os alunos que utilizaram a técnica t_2, estabeleceram a relação entre a fórmula de volume e os sólidos, fizeram a decomposição multiplicativa do número 36 em três números, esses alunos apresentaram o paralelepípedo retângulo em função das suas três dimensões. Neste caso podemos dizer que houve uma eficaz utilização do **NAG** pelos alunos.

Conclusão

A partir das duas tarefas apresentadas podemos observar algumas características relacionadas ao **NAG**:

- ✓ Utilização implícita do **NAG** pelo professor;
- ✓ Os alunos não utilizam de maneira eficaz o **NAG**;

A análise da tarefa relativa à utilização do **NAG** na prática de um professor, mostra como o **NAG** é utilizado por este professor para fazer avançar a sua aula. Porém, nós nos questionamos sobre a aprendizagem dos alunos: “ o que podemos garantir sobre o sentido que os alunos dão a utilização do **NAG** por parte do professor, uma vez que não vemos os alunos participarem muito da aula? E, segundo Brousseau (1986), uma boa *devolução* permite limitar as interpretações dos alunos em relação as expectativas do professor. Através da análise desta tarefa, podemos constatar que, nesta aula, a construção e a aplicação de tal processo não foi considerado pelo professor. No que diz respeito a análise do problema aberto, ela demonstra que em geral os alunos sabem aplicar a fórmula e apresentam dificuldades para estabelecer relações entre a medida do volume de um sólido e as dimensões do mesmo. Entretanto, os alunos não apresentam dificuldades no processo de cálculo do volume de um sólido a partir das medidas das suas dimensões. Em contrapartida, no que diz respeito à identificação dos sólidos a partir de um volume dado verificamos dificuldades por parte dos alunos do colégio. Os obstáculos aparecem sobretudo quando é necessário utilizar o **NAG**. Os caminhos percorridos até a fase atual da nossa pesquisa têm nos revelado que o **NAG** é um objeto fortemente presente no processo ensino-aprendizagem de Matemática no secundário, o que nos impulsionado na continuidade do nosso trabalhos.

Referências

BRONNER, A. Étude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée, **Thèse de Doctorat,** Université Joseph Fourier de Grenoble, 1997.

BRONNER, A. & FARIAS, L.M.S.: Comment la profession prend-elle en compte les interrelations entre les domaines numérique-algébrique et géométrique? In II congres international sur la theorie anthropologique du didactique **’’Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d’action’’** Uzés, 2007

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **RDM** Vol.7/2, éditions La Pensée Sauvage, 1986.

CHEVALLARD,Y. Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. Séminaire de didactique des mathématiques et de l’informatique, Université Joseph Fourier, Grenoble 1, 26 juin, **Document interne** n° 108. 1989

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en Didactique des**

Mathématiques 12/1, La Pensée Sauvage, 1992.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques** 19/2, La Pensée Sauvage, 1993.

CHEVALLARD, Y. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. Cours donné à l'université d'été **Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques**, La Rochelle, 4-11 juillet 1998 - paru dans les actes de cette université d'été, IREM de Clermont-Ferrand, p. 91-120 -1999.

DOUADY R. **Jeux de cadres et dialectique outil-objet. Recherches en Didactique des Mathématiques***,* Vol. 7, n° 2, p. 5-31, 1986.

DUVAL R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales** de didactique et de sciences cognitiv**es**, n°5, p.37-65, IREM de Strasbourg, 1993.

FARIAS, L.M.S.: Étude des interrelations entre les domaines numérique, algébrique et géométrique dans l'enseignement des mathématiques au secondaire: Une analyse des pratiques enseignantes en classes de troisième et de seconde. **Thèse de Doctorat**, Université de Montpellier 2, France 2010.

HENRIQUES, A.; ATTIE, J.P; FARIAS, L.M.S. Referências teóricas da didática francesa: Análise didática visando o estudo de integrais múltiplas com auxílio do software Maple. **Educação Matemática Pesquisa,** v. 9, p. 51-81, 2007.

MATHERON Y. **Analyser les praxéologies quelques exemples d'organisations mathématiques.** Petit x, n° 54, p. 51 a 78, 2000.

PIRES, M.A.L.M.; MENDES, I.A. Didática da matemática: licenciatura em matemática. Salvador: UNEB/GEAD, 2010

VERGNAUD, G. **L'enfant la mathématique et la réalité**; ed. Peter Lang, Berne. 1981

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **RDM** vol. 10 n°2.3; pp. 133-170. 1990.

VERGNAUD G. Au fond de l'action, la conceptualisation. In J-M. Barbier (Ed). **Savoirs théoriques et savoirs d'action**. Paris, Presses Universitaires de France, 1996.

Manuais escolares

Manuel Fractale Maths 2^de – Edition 2004 – Bordas.

Programas

Programmes des mathématiques français de 2001 e do Brasil : Brasília : MEC/SEF, 1998. p.19/28.