

Um Método de Arquimedes para a Quadratura da Parábola

Maria Deusa Ferreira da Silva¹⁶

Introdução

Para que chegássemos ao que hoje conhecemos como Cálculo Diferencial e Integral, completamente estruturado no século XVII por Newton e Leibniz, um longo e árduo caminho foi percorrido e uma legião de matemáticos participou desse processo. As contribuições da geometria grega, sem dúvida, foi uma das mais significativas para o desenvolvimento do cálculo. Parte delas está gravada, sobretudo, nos trabalhos de Eudoxo de Cnido (408-355? a.C) e Arquimedes (287-212 a.C) envolvendo o método da exaustão¹⁷. Nos tempos de Arquimedes, século II a.C, a matemática grega já tinha alcançado um alto grau de desenvolvimento e muitos resultados já eram conhecidos, dentre eles o próprio método da exaustão.

A contribuição de Arquimedes foi então ampliar o trabalho de Eudoxo desenvolvendo um método de prova utilizando o Princípio da Balança. Nesse tratado, “Sobre Equilíbrio de Planos”, Arquimedes propõem que “ao sectionar um sólido, o qual se quer calcular o volume, em um grande número de discos e suspendê-los numa extremidade de uma balança imaginária de modo que a equilibrar outro sólido, cujo volume e centro de gravidade sejam conhecidos” (BALIEIRO, 2004, p.53).

Portanto, em alguns dos problemas sobre cálculos de volumes de sólidos usando o princípio da balança, Arquimedes utilizou o princípio da estática. Isso é o que o diferencia de seus antecessores, pois em seus vários tratados fica claro que Arquimedes foi capaz de abarcar vários domínios da matemática grega de sua época, bem como fazer incursões pela hidrostática, óptica, astronomia e mecânica. Essas diferenças entre os trabalhos de Arquimedes e seus antecessores estão bem expostas em Balieiro (2005). Segundo ele o trabalho de Arquimedes:

se caracteriza por um rompimento com a tradição grega geométrica encaminhada a determinar medidas (áreas e volumes) e analogias entre essas medidas (quadratura, cubaturas e retificações de curvas) estabelecida pelos geômetras do século III a.C. e, em particular, por Euclides de Alexandria; assim, a geometria arquimediana procurou considerar e demonstrar proposições sobre áreas e volumes limitadas por novas linhas ou superfícies curvas (quadratura da parábola e espirais, cubaturas da esfera, cilindro, conóides

¹⁶ - Doutoranda Programa de Pós-graduação em Educação – PPGEd/UFRN.

¹⁷ - O Método da Exaustão, também conhecido por *Princípio de Eudoxo-Arquimedes*, leva essa denominação por ter na sua base a teoria das proporções apresentada por Eudoxo de Cnido (408-355 a. C.) e por Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) ter sido o matemático que maior visibilidade lhe deu. O termo foi usado pela primeira vez em no século XVII por Gregorio de São Vicente. A teoria das proporções está bem detalhada no Livro V de *Os Elementos* de Euclides.

e esféróides), equilíbrio de planos e seus centros de gravidade, sobre corpos flutuantes.(BALIEIRO, 2004, p.54)

Para estabelecer seus resultados, Arquimedes se utilizava de procedimentos heurísticos, ou seja, recursos provenientes das investigações mecânicas. Suas descobertas geométricas, portanto, estão fundadas e relacionadas com postulados e proposições de estática e hidrostática, formuladas nos tratados *Sobre o equilíbrio dos planos* e *Sobre os corpos flutuantes*, que não só permitem elaborar um esboço prévio das soluções ou demonstrações de alguns problemas ou teoremas geométricos, como sugerem um delineamento plausível que possibilitará facultar essas soluções ou demonstrações por meio de um raciocínio, rigorosamente lógico, firmado em verdades desde logo aceitas sem demonstração, e em outras verdades demonstradas de antemão, em conformidade com os padrões clássicos da geometria grega, pelo método de exaustão. (Cf. BALIEIRO, 2004, p.54)

Da breve exposição, é possível dizer, portanto, que o trabalho de Arquimedes se constitui em uma importante referência histórica para compreendermos o desenvolvimento conceitual do cálculo integral. Além disso, nos fornece um rico instrumental para propormos atividades para a sala de aula tomando a história como um agente de cognição no ensino-aprendizagem da matemática, conforme propõe Mendes (2006).

A seguir apresentamos uma dessas atividades.

A Atividade: a Quadratura da Parábola

O problema consiste em calcular a área de um segmento parabólico ABC. O termo segmento é usado desde os gregos e tem o seguinte significado:

“Se dissermos que A e B são dois pontos no plano, então AB ou BA é o segmento que une os dois”, conforme figura 1.

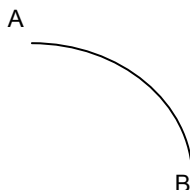


Figura 1 – segmento AB ou BA

Desse modo, a figura 2 representa um segmento parabólico que passa pelos pontos A, B e C, onde A e C são a base e B o vértice da parábola.



Figura 2. segmento parabólico ABC

Se ligarmos os pontos A e C por uma reta obtemos o segmento parabólico limitado pela reta em AC, figura 3:

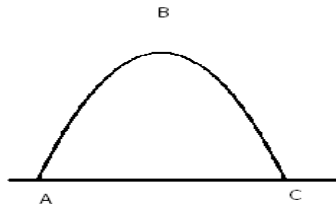


Figura 3. Segmento parabólico ABC limitado pela reta em AC

Com base nisso, um problema que intrigou os gregos foi encontrar a medida da área abaixo do segmento parabólico e limitado pela reta de A até C, conforme figura 4:

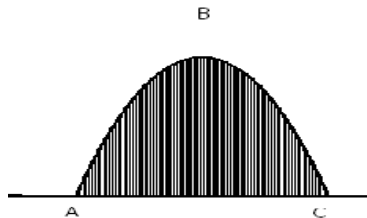


Figura 4. Área sob o segmento parabólico ABC e a reta em AC.

Arquimedes apresentou a solução do problema. Para iniciar Ele propôs a seguinte hipótese:

Hipótese de Arquimedes:

Uma seção de parábola excede em $\frac{1}{3}$ a área do triângulo inscrito de mesma base da seção de parábola e cujo vértice é o mesmo da parábola”. Isto é, a área do segmento parabólico é $\frac{4}{3}$ a área do triângulo inscrito na parábola, de mesma base e mesmo vértice.

Em notação algébrica moderna, temos:

$$A_{\text{segmento}} = \frac{4}{3} A_{\Delta ABC}$$

Prova:

Dado o segmento de parábola ABC, conforme figura 3:

1. Tracemos por A uma reta paralela ao vértice B e por C uma reta tangente a parábola nesse ponto. A reta tangente a C deve cortar a reta paralela a A no ponto Z. Unir, com retas, os pontos AC, AB e BC, formando o triângulo ΔABC , de acordo com figura 5:

2. Traçamos uma reta entre a reta que passa por A e o vértice e que seja paralela ao vértice. Esta reta corta a base da parábola no ponto X, a parábola no ponto O, em M a reta tangente ao ponto C, em N a reta CB e em K, a reta AZ, conforme figura 6.

A partir da figura 6, Arquimedes deduziu as seguintes relações envolvendo o produto de segmentos, ou seja, ele deduziu que:

OX.AC – AX.XM

e que

$$OX.KC = KN.XM$$

Além disso, essas relações lhe levaram
fazer a seguinte consideração:

Se prolongarmos a reta BKC até um ponto D, tal que a distancia KC seja igual a distancia KD e colocar sobre essa reta um segmento de longitude igual a OX no ponto D. obtemos a figura 7:

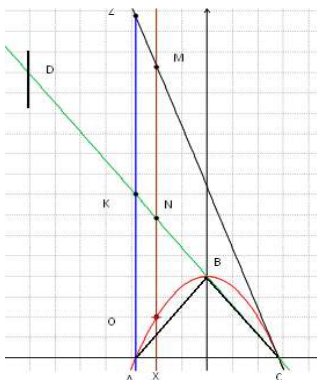


Figura -7 – Princípio da balança

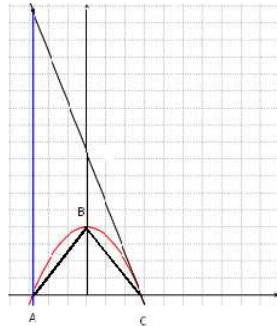


Figura 5 - triângulo ABC interior a parábola

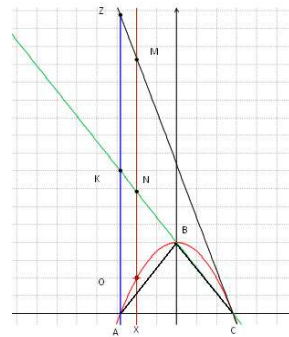


Figura 6

Segundo Arquimedes, utilizando as Leis da Balança¹⁸, este segmento equilibrará MX com respeito ao ponto K. Então:

a soma de todos os segmentos OX corresponderá à área da superfície do segmento parabólico ABC e a soma de todas as retas MX é a área total do triângulo ACZ.

Assim, a superfície de segmento OX, cujo centro de gravidade está em D, equilibra a superfície do triângulo ACZ, que tem seu centro de gravidade em G, ponto este situado sobre a reta KC, e a uma distância de K de $\frac{1}{3}$ de KC.

Portanto, a superfície de segmentos XO, isto é $(4 \cdot \Delta_{ABC})$ é $\frac{1}{3}$ da área do ΔACZ . Desse modo, podemos ver que a área do ΔACZ é quatro vezes a área do triângulo ΔABC , já que $ZK = AK$ e $AE = EC$ e também se verificam as proporções:

$$\frac{EC}{AC} = \frac{EB}{AK}$$

Dáí fica fácil deduzirmos que $EB = \frac{AK}{2} = \frac{AZ}{4}$. Feito isso, é possível afirmar que a altura do triângulo ΔACZ é quatro vezes o triângulo ΔACB e suas bases são iguais a AC. Portanto, a área do segmento parabólico ABC é $\frac{4}{3}$ da área do triângulo ΔABC .

Referencias Bibliográficas

BALIEIRO, I. F. *Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya* -Quatro Episódios na História da Heurística. 217 p.: il. Tese (Doutorado em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico- Científicos). Rio Claro: IGCE- CP. de Rio Claro-UNESP, 2004.

BARON, M. Curso de História da matemática: Origens e desenvolvimento do cálculo. Editora Universidade de Brasília, 1985. Brasília. Unidade 1.

HAHN, A. J. Basic Calculus: from Arquimedes to Newton to its Role em Science. New York: Springer, 1997.

HERRERA, R.T. *Arquimedes alrededor del círculo*. (Coleção: La Matemática em sus personajes, v.1). 2ed. Madri: Nivola, 2003.

MENDES, I. A A Investigação histórica como agente da cognição matemática na sala de aula. In: MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. *A história como um agente na educação matemática*. Porto Alegre: Sulina, 2006. p. 79-136.

¹⁸ Princípio da Balança – Consultar Balieiro (2004).