Rematec
Revista Matemática, Ensino e Cultura

Eigenvalores e Eigenvectores:
Espacio de Trabajo Matemático personal del profesor

Nancy Saravia-Molina[1]
Pontificia Universidad Católica del Perú
Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas

Edwin Cristian Julian Trujillo[2]
Universidad San Ignacio de Loyola, USIL

Jorge Luis Vivas Pachas[3]
Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas
Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático

RESUMEN

El objetivo de esta investigación es analizar el trabajo matemático del profesor en el dominio del álgebra, en particular cuando se trata del objeto matemático eigenvalores y eigenvectores de una matriz $n \times n$, que se enseña en un curso de Álgebra Lineal de la Facultad de Ingeniería de la Universidad San Ignacio de Loyola en Lima-Perú. Para este estudio cualitativo, se analizaron las producciones de una profesora que imparte esta asignatura utilizando aspectos de la Teoría del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) como herramienta teórica. Los resultados muestran la activación de la génesis Semiótica, Instrumental y Discursiva, así como la activación del plano vertical [Sem-Ins] en las producciones de la profesora de matemáticas.

Palabras clave: trabajo matemático, profesor universitario, Eigenvalores y Eigenvectores.

Eigenvalues and Eigenvectors:
Mathematical Working Space of a professor

ABSTRACT

The aim of this research is to analyze the mathematical work of the professor in the domain of algebra, for the mathematical object eigenvalues and eigenvectors of an $n \times n$ matrix, which is teaching in a Linear Algebra course at the Faculty of Engineering of San Ignacio de Loyola University in Lima-Peru. For this qualitative study, the productions of a professor who teaches this subject are analyzed using aspects of the Theory of Mathematical Workspace (MWS) as a theoretical device. The results show the activation of the Semiotic, Instrumental and Discursive genesis, that is the activation of the vertical plane [Sem-Ins] in the productions of the mathematics professor.

Keywords: mathematical work, university professor, eigenvalues, eigenvectors.

[1] Doctora (PUCP). Profesora Asociada (PUCP). Profesora del Departamento Académico de Ciencias (PUCP). Miembro IREM-PUCP, Lima, Perú. Av. Universitaria 1801, San Miguel, Lima 32, Perú. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2819-8835. E-mail: nsaraviam@pucp.edu.pe

[2] Magister en Enseñanza de la Matemática (PUCP). Profesor de la Facultad de Ingeniería de la Universidad San Ignacio de Loyola (USIL). Av. La Fontana 750, La Molina, Lima 12, Perú. ORCID: https://o rcid.org /0000-0002-0642-589X. E-mail: edwin.julian@usil.pe

[3] Magister en Enseñanza de las Matemáticas por la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). Miembro del Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP) y de la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático (RIITMA), Lima, Perú. Av. Universitaria 1801, San Miguel, Lima 32, Perú. CEP: 00000-000. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7739-830X. E-mail: jorge.vivas@pucp.edu.pe.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 180-192, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p180-192.id456

Eigenvalores e Eigenvectores:
Espaço de Trabalho Matemático pessoal do professor

RESUMO

O objetivo desta pesquisa é analisar o trabalho matemático do professor no domínio da álgebra, em particular quando se trata do objeto matemático autovalores e autovetores de uma matriz $n \times n$, ensinado no curso de Álgebra Linear em uma Faculdade de Engenharia da Universidade San Ignacio de Loyola de Lima-Peru. Para este estudo qualitativo, analisaremos as produções de uma professora de matemática que ministra esta disciplina. Para este fim, aspectos da Teoria do Espaço de Trabalho Matemático (ETM) são utilizados como ferramenta teórica. Os resultados mostram a ativação da gênese Semiótica, Instrumental e Discursiva, assim como a ativação do plano vertical [Sem-Ins] nas produções da professora de matemática.

Palavras-chave: trabalho matemático, professor universitário, autovalores, autovetores.

INTRODUCCIÓN

Esta investigación, pretende caracterizar las acciones matemáticas del profesor universitario en el dominio del álgebra, en particular cuando enseña el objeto matemático compuesto por los vectores y valores propios de una matriz $n \times n$ que en adelante llamaremos eigenvalores y eigenvectores debido a la raíz alemana *eigen*, a estudiantes de la Facultad de Ingeniería de una universidad privada del Perú. En ese sentido, es importante estudiar la organización de los conocimientos, tareas y acciones que propone el profesor universitario al enseñar el objeto de nuestro estudio, ya que, en la malla curricular de diversas carreras de Ingeniería de universidades peruanas, se presenta la necesidad de su enseñanza, esto es respaldado en variados textos universitarios de matemáticas aplicadas para estas carreras, donde se muestra la conexión con problemas relacionados con diagonalizar un tensor de segundo orden de magnitudes vectoriales, sistemas de ecuaciones diferenciales, machine learning, Big Data, Inteligencia Artificial entre otras.

Consideramos necesario hacer una revisión de estudios sobre eigenvalores y eigenvectores con el propósito de estar al corriente con las investigaciones en el área de Didáctica de la Matemática, en relación con la enseñanza y el aprendizaje de los eigenvalores y eigenvectores. Por ello, a partir de una sucinta revisión de literatura, se presentan pesquisas como las de Henderson et al. (2010), Thomas y Stewart (2011), Gol (2014), Salgado y Trigueros (2014), Orozco (2020) y Yilmaz (2022). Estas investigaciones analizan desde diferentes perspectivas teóricas y a un nivel superior, cómo se moviliza la noción de eigenvalores y eigenvectores en estudiantes y profesores.

Las investigaciones de Henderson et al. (2010) presentan, por ejemplo, entrevistas a trece estudiantes de ingeniería sobre la resolución de problemas semiestructuradas de la ecuación $A(x\ y) = 2(x\ y)$ donde A es una matriz de orden 2×2, en el estudio detallan la interpretación de los estudiantes de expresiones y ecuaciones que son esenciales para el constructo teórico antes de cualquier definición formal sobre eigenvalores y eigenvectores. Los autores emplearon el marco teórico Sentido Simbólico. Con relación al análisis a posteriori, los investigadores identificaron tres categorías principales de razonamiento de los estudiantes, concluyendo que los estudiantes utilizaron una diversidad de interpretaciones simbólicas, numéricas y geométricas.

Por su parte, los investigadores Thomas y Stewart (2011) desarrollaron una pesquisa con tres grupos de estudiantes de la universidad de Auckland en Nueva Zelanda. Para el estudio de los eigenvalores y eigenvectores, diseñaron y aplicaron una secuencia de actividades, con base teórica de los mundos de las matemáticas en el sentido de Tall.

En dicha secuencia, los estudiantes responden ¿Cuáles son los eigenvalores y eigenvectores de la matriz A? con $A = (1\ 2\ 4\ 3\ )$, además, con la ecuación $A(1\ 2\ ) = 3(2\ 3\ )$, los especialistas exploraron la comprensión de los estudiantes del pensamiento simbólico y formal. Los autores concluyeron tras el estudio que existen problemas fundamentales en la comprensión de la definición de eigenvectores, lo cual conduce a problemas de cómo usarlos, además añaden que las manipulaciones en los dominios matricial y algebraico causan conflicto en la propia definición de eigenvalores y eigenvectores.

Otra investigación que se presenta en este artículo es la de Gol (2014). El autor realiza una exploración basada en una tarea de matrices de orden 2×2, a estudiantes universitarios apoyado en los tres modos de pensamiento, el cual consistió en determinar los eigenvalores y eigenvectores asociados a una matriz A mediado por la tecnología. Con el uso del software matemático los estudiantes movían los vectores en la pantalla hasta encontrar el paralelismo entre el vector x y Ax, es así como los estudiantes coordinaban la representación gráfica y algebraica. La propuesta tecnológica permitió promover el pensamiento sintético-geométrico, es decir se estudian las representaciones geométricas en sí mismas sin alguna fórmula, además acota el especialista que las representaciones geométricas dinámicas permitieron a los estudiantes universitarios comprender los conceptos de eigenvalores y eigenvectores.

También, el estudio de Salgado y Trigueros (2014) tuvo como propósito investigar la forma en que los estudiantes universitarios de una universidad privada construyen los conceptos de eigenvalores y eigenvectores a través de una experiencia didáctica, con base en la teoría APOE para dar soporte a la investigación. La propuesta se basó en un conjunto de actividades, el objetivo es mostrar al estudiante la relación entre las interpretaciones algebraica y geométrica de los eigenvalores y eigenvectores. A partir de la ecuación $Av = \lambda v$, el estudiante reflexiona sobre el paralelismo entre Av y v, teniendo a R^2 como enfoque geométrico. Los autores concluyeron que el adecuado diseño didáctico permitió a los estudiantes mostrarse conforme a la definición de eigenvalores y eigenvectores, además añaden que tras los resultados obtenidos es posible diseñar una estrategia didáctica en la que se favorezcan las construcciones.

La investigación de Orozco (2020), presenta una propuesta didáctica para introducir el concepto de eigenvalores y eigenvectores en un curso inicial de álgebra lineal, apoyada en los marcos teóricos de la didáctica de Cuevas–Pluvinage y la Orquestación Instrumental. Se diseñó una secuencia de instrucción para introducir el objeto de estudio mediado por tecnología y un conjunto de actividades. La metodología es la Investigación Basada en Diseño. El investigador menciona que los estudiantes muestran evidencias de aprendizaje con los entornos adecuados y el uso constante de la tecnología, ello debido a que al principio del estudio cuando se les solicitaba calcular los eigenvalores, los estudiantes no verificaban si realmente dichos eigenvalores eran las raíces del polinomio característico, como consecuencia de ello al calcular el eigenvector del eigenvalor correspondiente, no existía una verificación para los valores λ y v que cumplan la ecuación $Av = \lambda v$; al respecto añaden que es una herencia de las malas prácticas en la resolución de ecuaciones básicas.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 180-192, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p180-192.id456

También, el estudio de Yilmaz (2022), tuvo como propósito investigar las percepciones de estudiantes de pregrado que tomaron el curso de álgebra lineal sobre los conceptos de eigenvalores y eigenvectores. Para ello, diseñaron una evaluación escrita compuesta por ocho preguntas abiertas y de opción múltiple, tales como: Definir los conceptos eigenvalores y eigenvectores, calcular algebraicamente los valores propios de la matriz cuadrada bidimensional, ¿Sabe que, si los eigenvalores de una matriz cuadrada de dimensión 2 son complejos, los eigenvectores correspondientes a estos eigenvalores no se puede representar en el plano euclidiano? ¿Sabe que una matriz cuadrada tiene al menos un eigenvalor?

La investigación se realizó con la colaboración de estudiantes de la universidad de Burdur, Turquía. Se desarrolló una escala para medir los enfoques de los estudiantes a la teoría de eigenvalores y tras el análisis de confiabilidad Kuder-Richardson 20 para la confiabilidad de la escala se encontró que era de 0,72, es decir, se considera de consistencia aceptable. En la investigación se utilizó un procedimiento estadístico, la prueba de chi-cuadrado y se realizó un análisis descriptivo para ver la relación entre los resultados de aprendizaje y el rendimiento académico. El autor concluye que surgen problemas en la percepción de los conceptos de eigenvectores y eigenvalores y sus soluciones, por ejemplo, considerar el conjunto de números complejos en un nivel superficial puede hacer que se desconozcan raíces complejas en los cálculos correspondientes.

Por otro lado, como la presente investigación se centra en analizar el Espacio de Trabajo Matemático-ETM personal de profesores de matemática con relación a los eigenvalores y eigenvectores, se muestran también investigaciones relacionadas con la formación de profesores de matemática y especialmente, aquellas que utilizan el ETM como base teórica. Así, la investigación de Vásquez, Mena y Mena (2016) propone establecer una triangulación entre lo que se establece en los Estándares Orientadores de Chile, el currículo escolar nacional y los programas de las asignaturas de álgebra lineal de una institución formadora de profesores. Los investigadores concluyen que hay una desconexión entre aquellos tres elementos, que se traduce en la manera en la cual los profesores fomentan en sus alumnos la construcción de un Espacio de Trabajo Matemático personal, cuyo plano epistemológico necesita de elementos suficientes para una construcción coherente.

En esa misma línea, Gómez-Chacón, Botana, Escribano y Abánades (2016) proponen elementos para organizar un espacio de trabajo matemático para tareas de lugares geométricos mediados por la tecnología, explorar cómo futuros profesores de matemáticas perfeccionan su concepción de lugares geométricos por medio de la apropiación de las funcionalidades específicas de software de representaciones dinámicas, en relación con su propia práctica, como estudiantes y como futuros profesores de matemática. Además, la investigación de Henríquez-Rivas y Montoya-Delgadillo (2016) se centra en la vinculación de los enfoques sintético y analítico en formación de profesores de nivel secundario. En la investigación se presenta una situación didáctica que se focaliza en el análisis del ETM personal de un futuro profesor de matemáticas y en las transiciones entre los diferentes paradigmas de la geometría de esta teoría. Una de las conclusiones que se relaciona con el foco de interés evidencia que los ETM personales e idóneos de los profesores son regidos por los elementos que intervienen en la práctica docente relativos a los contenidos matemáticos y el álgebra lineal, y que el ETM personal de profesores influye en el ETM idóneo. Las investigaciones presentadas muestran la pertinencia del presente estudio.

En este trabajo reflexionamos sobre el Espacio de Trabajo Matemático (ETM) de una profesora universitaria, el ETM se ocupa de estudiar la actividad matemática que el profesor favorece en la clase cuando realiza un trabajo matemático (KUZNIAK y RICHARD, 2014). La caracterización del trabajo matemático idóneo del profesor se realiza mediante los paradigmas del Análisis (Montoya y Vivier, 2016), y en el método de estudio de caso como herramienta valiosa de investigación, la cual registra la conducta de las personas involucradas en el fenómeno estudiado.

En esta investigación, de corte cualitativo se analiza el trabajo matemático de una profesora, al abordar el objeto de estudio eigenvalores y eigenvectores. La profesora, la cual llamaremos Noelia, tiene una formación de pregrado y posgrado en Matemática Pura, labora en dos universidades, una estatal y otra privada con estudiantes de ciencias puras e ingeniería respectivamente. Se observó una sesión de 120 minutos de una clase Hibrida (educación a distancia con la presencial), correspondiente al curso de Álgebra Lineal para estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la Universidad San Ignacio de Loyola de Lima- Perú, donde Noelia labora.

EIGENVALORES Y EIGENVECTORES

El álgebra lineal es una rama de las matemáticas que estudia conceptos tales como vectores y matrices; es fundamental en casi todas las áreas de las matemáticas y su enseñanza resulta muchas veces complicada por parte de los profesores y poco comprendida por los estudiantes. Al respecto Dorier y Sierpinska (2001), manifiestan que las dificultades con las se encuentran los estudiantes al abordar la materia, es la naturaleza del mismo objeto, es decir, se requiere de un alto nivel de complejidad. Con respecto al objeto de estudio mencionamos algunos aspectos relevantes del concepto.

Eigenvalores y eigenvectores

Si A es una matriz de orden $n \times n$ y v es un vector en R^n, entonces Av también es un vector en R^n, pero por lo general no hay una relación geométrica simple entre v y Av. Sin embargo, en el caso especial donde v es un vector distinto de cero y Av es un múltiplo escalar de v, ocurre una relación geométrica simple.

En el caso particular, cuando A es una matriz de orden 2×2, y si v es un vector distinto de cero tal que Av es un múltiplo escalar de v, se tiene $Av = \lambda v$, entonces cada vector sobre la recta que pasa por el origen determinado por v se vuelve a mapear en la misma línea bajo la multiplicación por A.

Los vectores distintos de cero que se mapean en múltiplos escalares de sí mismos bajo un operador lineal surgen naturalmente en el estudio de vibraciones, genética, dinámica de poblaciones, mecánica cuántica y economía, así como en geometría.

Definición: Si A es una matriz de orden $n \times n$, entonces un vector no nulo v en R^n es llamado un eigenvector de A si Av es un múltiplo escalar de v. Es decir $Av = \lambda v$, para algún

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 180-192, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p180-192.id456

escalar λ. El escalar λ es llamado un eigenvalor de A, y v es el eigenvector de A correspondiente a λ.

Para encontrar los eigenvalores de una matriz A, escribimos $Av = \lambda v$ como $Av = \lambda I v$, lo cual es equivalente a $(\lambda I - A)v = 0$. Esta última ecuación tiene una solución no nula si y sólo si $\det(\lambda I - A) = 0$.

La ecuación característica de A, es dada por el determinante $\det(\lambda I - A) = 0$, los escalares que satisfacen esta ecuación son los eigenvalores de A. El determinante es un polinomio p en λ llamado el polinomio característico de A.

ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO-ETM

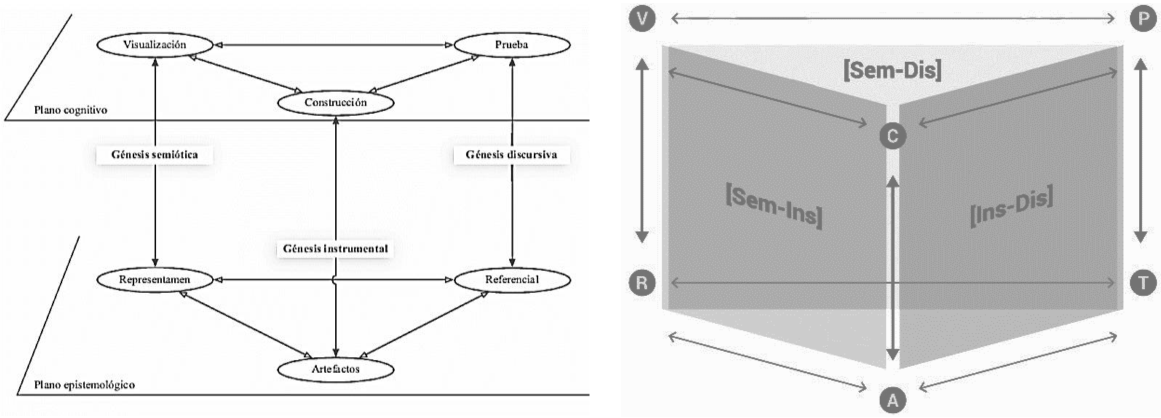
La teoría Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, Tanguay y Elia 2016, Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier 2017) busca vincular y preservar muy estrechamente los puntos de vista epistemológico y cognitivo. Además, cabe señalar que está íntimamente ligado al desarrollo del aprendizaje en el aula. El "trabajo matemático" quiere decir, el trabajo aparece como un conjunto de actividades humanas organizadas para alcanzar objetivos; la orientación y el propósito de este trabajo se apoya en las matemáticas. Por el contrario, las matemáticas, así consideradas, se transforman por el hecho mismo de ser consideradas como una obra humana específica. La teoría articula dos planos: el plano epistemológico se da la interacción de tres componentes puramente matemática (representamen, artefactos y referencial); y el plano cognitivo se centra en el sujeto que, a su vez, se contempla como sujeto cognitivo; se precisan tres componentes cognitivas (visualización, construcción y prueba).

También, indican que en el ETM se articulan los planos epistemológico y cognitivo, a través de las génesis originadas por el trabajo matemático. La génesis semiótica es el proceso asociado a los signos y representamen (o significantes), y que representa la relación dialéctica entre la sintáctica y las perspectivas semánticas sobre los objetos matemáticos, desarrollado y organizado mediante sistemas semióticos de representación. La génesis instrumental permite hacer a los artefactos operativos mediante los procesos de construcción que contribuyen a alcanzar el trabajo matemático y; la génesis discursiva utiliza las propiedades del sistema de referencia teórico para ponerlas al servicio del razonamiento matemático y para una validación no solamente icónica, gráfica o instrumental.

Además, Kuzniak y Richard (2014) identifican tres planos verticales en el ETM (ver figura 1) cada uno de los cuales está definido por la interacción de dos génesis: semiótica e instrumental [Sem-Ins]; instrumental y discursiva [Ins-Dis] y, semiótica y discursiva [Sem-Dis].

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 180-192, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p180-192.id456

Figura 1 – Modelo ETM



Fuente: Kuzniak y Richard (2014, p. 21) y Kuzniak, Tanguay y Elia (2016, p.726)

Con relación a los planos: [Sem-Ins] asociado a una génesis semiótica y a la génesis instrumental. Existen dos formas de trabajo, una orientada hacia la construcción de los resultados (figuras, gráficos) y la otra hacia la interpretación de los datos brindados por los artefactos; [Ins-Dis] asociado a una génesis discursiva de la prueba y a la génesis instrumental y, [Sem-Dis] asociado a las génesis semiótica y discursiva, en el cual se distinguen los razonamientos argumentativos.

Por otro lado, la caracterización del trabajo matemático comprende además la identificación del paradigma en el cual el estudiante o profesor se posiciona. En ese sentido, para esta investigación, consideramos los paradigmas del álgebra que fueron presentados en Mena-Lorca, Mena y Morales (2012):

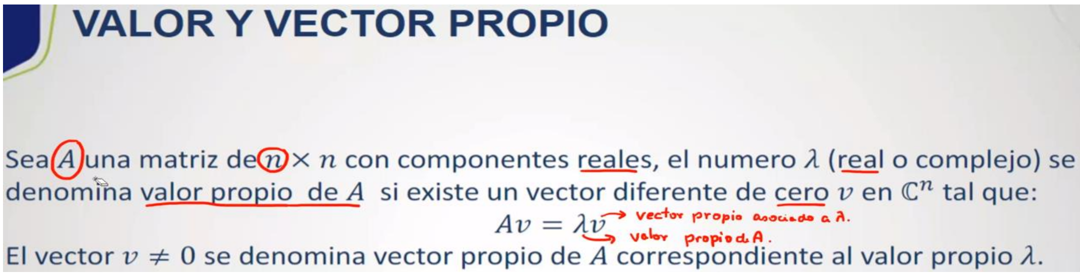
> **A1:** etapa de la aritmética elemental, en donde ya hay números y algún lenguaje numérico, incluso escrito. Además del trabajo con los números, los individuos pueden establecer relaciones entre variables, si bien no explícitas por medio de símbolos.
> **A2:** etapa del álgebra elemental, que ya presenta una posibilidad de trabajar con letras, variables, incógnitas, parámetros. Los individuos son capaces de escribir situaciones en lenguaje algebraico, operar algorítmicamente, generalizar, etc.
> **A3:** etapa de las estructuras algebraicas, estadio avanzado y contemporáneo, que corresponde además a ideas generales de conjuntos y de estructuras algebraicas.

ANÁLISIS DEL TRABAJO MATEMÁTICO

A continuación, se presenta el análisis de la producción matemática de la profesora a quien llamaremos Noelia. Esta producción matemática es tomada del material de clase que fue expuesto al momento de enseñar el objeto matemático constituido por los eigenvectores y eigenvalores.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 180-192, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p180-192.id456

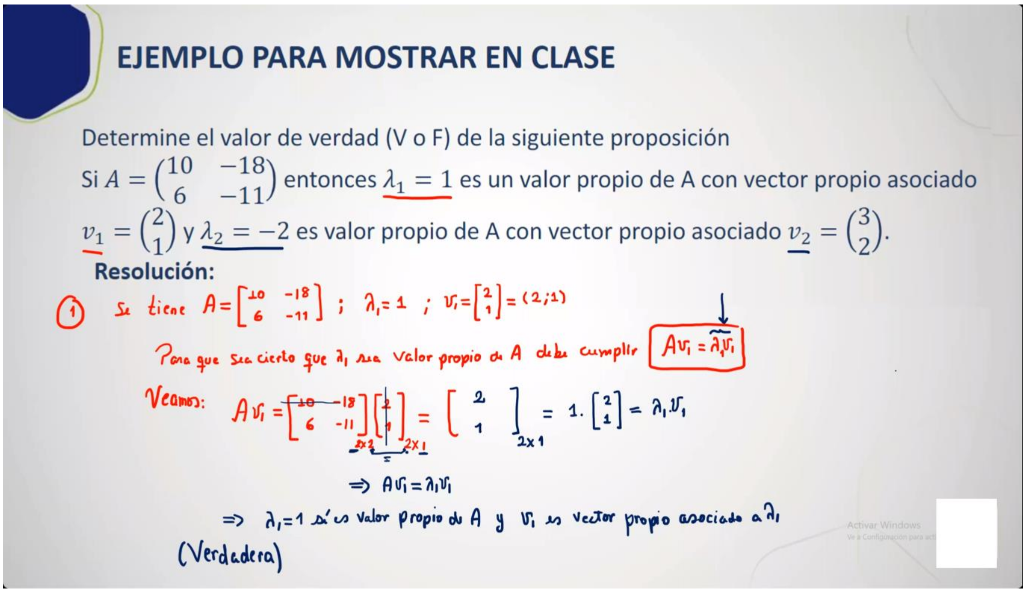
Figura 2 – Definición de valor y vector propio



Fuente: Material próprio, curso álgebra lineal USIL (2022-1, p. 1)

En la figura 2, la definición de valor propio y vector propio es presentado de tal manera que propicie que el estudiante pueda situarse en el paradigma A1 o A2 del álgebra.

Figura 3 – Ejemplo introductorio

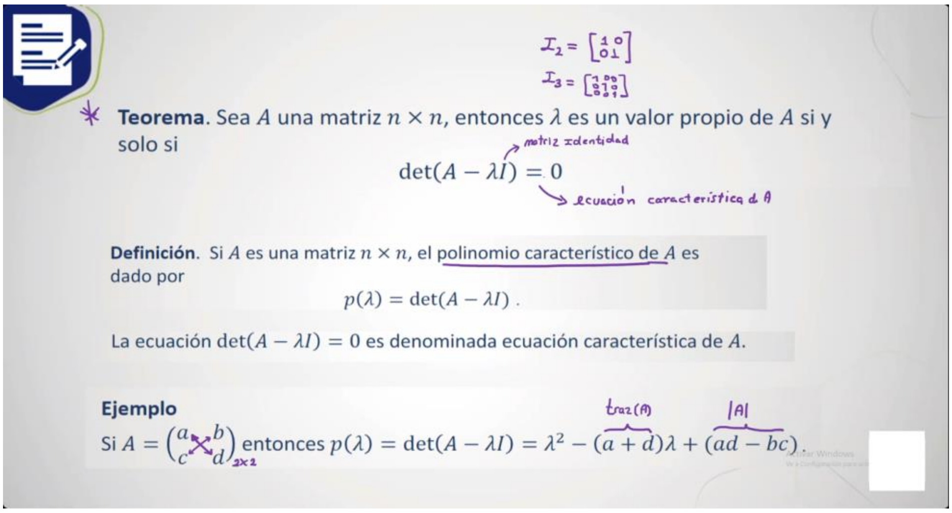


Fuente: Material próprio, curso álgebra lineal USIL (2022-1, p. 2)

Luego, el ejemplo introductorio, presentado en la figura 3, tiene como propósito verificar si los números reales λ_1 y λ_2 son valores propios de la matriz A con vectores propios asociados v_1 y v_2, respectivamente. En ese sentido, la condición que debe cumplir un valor propio de una matriz es tomada como *referencial teórico* para realizar una *prueba* de tipo pragmática que permita verificar si se cumple la igualdad $Av = \lambda v$. Este proceso evidencia la activación de la *génesis discursiva*.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 180-192, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p180-192.id456

Figura 4 – Teorema, definición y ejemplo

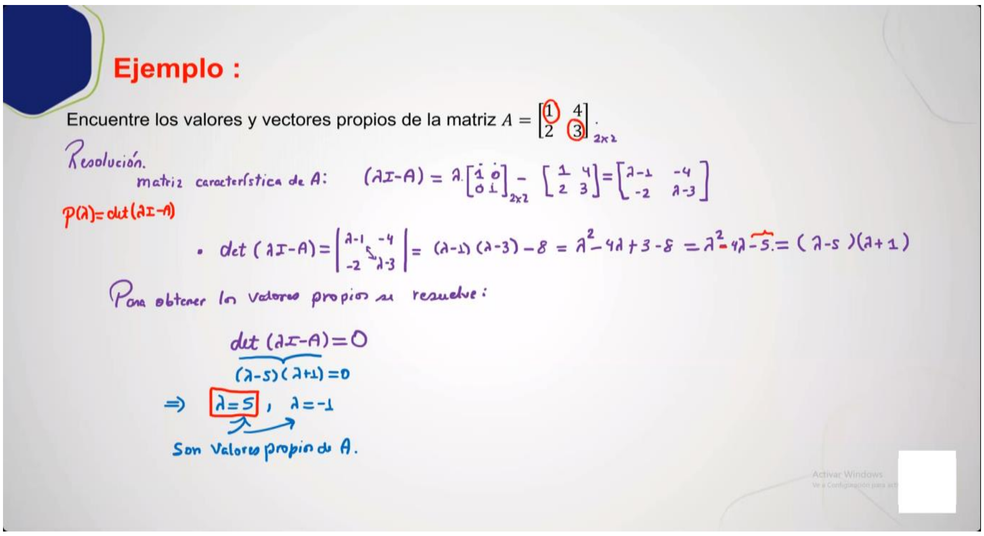


Fuente: Material próprio, curso álgebra lineal USIL (2022-1, p. 5)

Posteriormente, en la figura 4, el enunciado del teorema favorece la activación de la *génesis discursiva* o la *génesis instrumental*. Por ejemplo, la condición expresada en la ecuación característica puede ser empleada como un *referencial teórico* para realizar un proceso de *prueba* que permita justificar los valores propios de A. Asimismo, la ecuación característica puede ser empleada como un *artefacto simbólico* para realizar un proceso de *construcción* que permita obtener los valores propios de A.

Por otro lado, en el ejemplo se presenta el polinomio característico, de grado 2, de una matriz de orden 2. El coeficiente del término lineal es usado como *representamen* para realizar un proceso de *visualización* que permite identificarlo como la traza de A. Igualmente, el coeficiente del término independiente es empleado como *representamen* para realizar un proceso de *visualización* que permite identificar el determinante de A. En consecuencia, se evidencia la activación de la *génesis semiótica* y, en ese sentido, la activación del plano vertical [Sem-Ins].

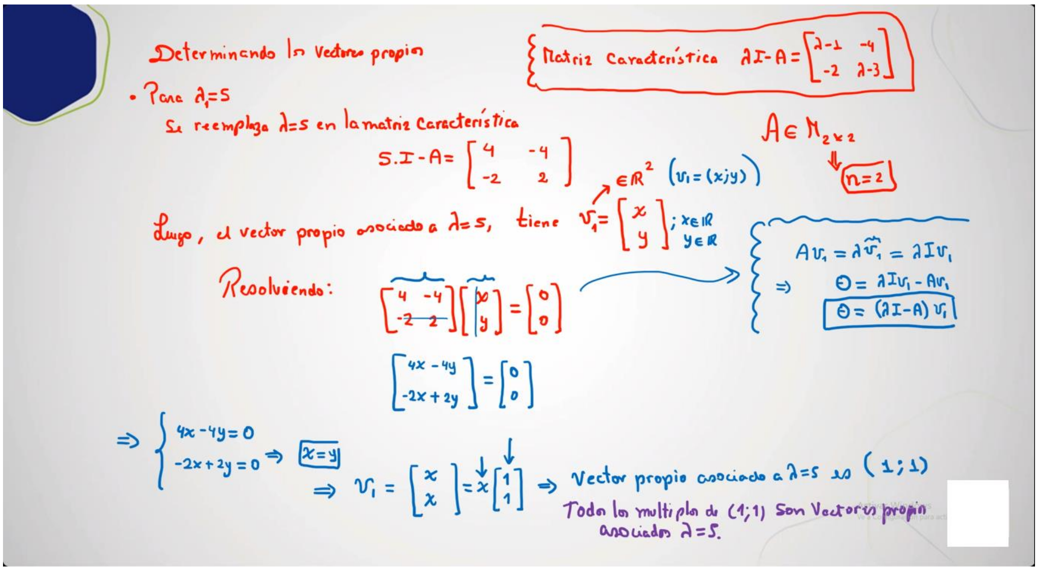
Figura 5 – Ejemplo de valor y vector propio



Fuente: Material próprio, curso álgebra lineal USIL (2022-1, p. 6)

Por su parte, el ejemplo presentado en la figura 5 tiene como objetivo determinar los valores y vectores propios de la matriz A. Las operaciones del álgebra de matrices son empleadas como *artefacto* para realizar un proceso de *construcción* que permite determinar la matriz característica. Con ello, se evidencia la activación de la *génesis instrumental*.

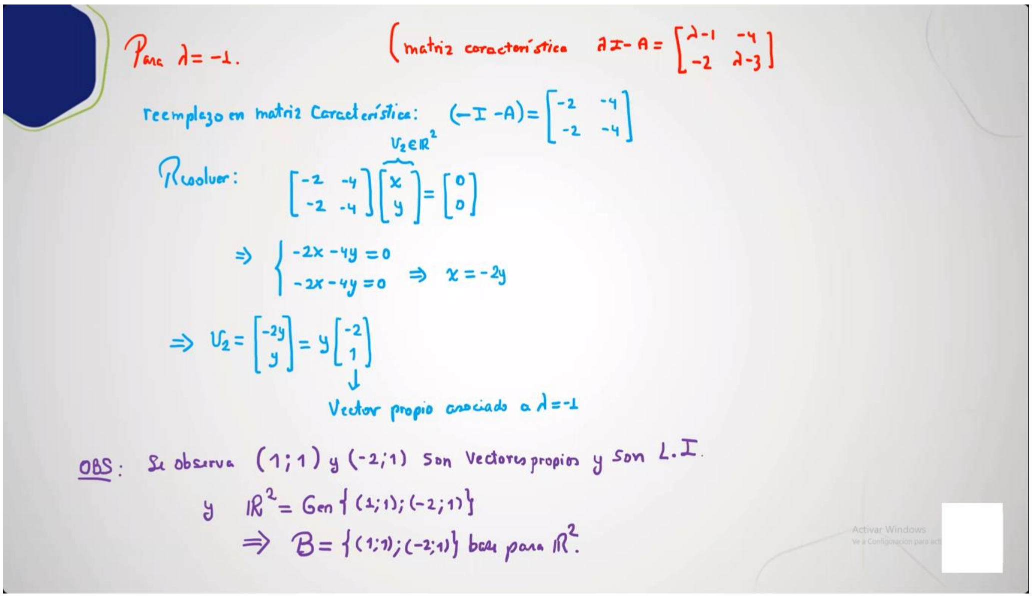
Figura 6 – Ejemplo de valor y vector propio



Fuente: Material próprio, curso álgebra lineal USIL (2022-1, p. 7)

En el ejemplo que aparecen en las figuras 6 y 7, para cada valor propio de A, la igualdad $Av = \lambda v$ es usada como artefacto simbólico para realizar un proceso de construcción que permita obtener los vectores propios.

Figura 7 – Ejemplo de valor y vector propio



Fuente: Material próprio, curso álgebra lineal USIL (2022-1, p. 8)

Este proceso evidencia la activación de la *génesis instrumental* en el trabajo matemático de la profesora.

ALGUNAS CONSIDERACIONES FINALES

A partir de la interpretación de las acciones matemáticas realizada por la profesora en la clase presentada, se reconoce la activación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva. Cabe destacar que tanto la génesis instrumental y discursiva se activan con mayor frecuencia. Asimismo, a partir de la activación de las génesis se identifica la activación del plano vertical [Sem-Ins]. Con relación al trabajo matemático en el dominio del álgebra, en clase presentada, se privilegian los paradigmas A1 y A2.

El análisis de las producciones matemáticas de la profesora que es interpretada en términos del ETM confirma la pertinencia de este marco como herramienta teórica para caracterizar dicha producción cuando se pretende enseñar un nuevo objeto matemático para los estudiantes. Pues su desarrollo facilita una organización que considera simultáneamente tanto aspectos epistemológicos como aspectos cognitivos del trabajo matemático.

Finalmente, se señala la posición y relevancia que el ETM ha ganado en la comunidad científica de la Didáctica de la Matemática. Esto se evidencia en los trabajos de investigación que se están desarrollando en América Latina y Europa al mostrar la posibilidad de considerar el ETM como una excelente herramienta teórica para analizar las producciones de las acciones matemáticas de profesores que enseñan en distintos niveles educativos dentro de diferentes dominios matemáticos.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Universidad San Ignacio de Loyola (USIL), al Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas y a la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático, por el apoyo brindado en la realización de la investigación.

REFERENCIAS

DORIER, J. Y L. SIERPINSKA A. Research into the teaching and learning of linear algebra. In Derek Holton (Ed.), **The teaching and Learning of Mathematics at University Level**: An ICMI Study (pp. 255-273). Netherlands: Kluwer, 2001.Recuperado https://www.researchgate.net/publication/226963684

GOL, S. T. How dragging changes students' awareness: Developing meanings for eigenvector and eigenvalue. **Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education**, 14 (3), 223-237, 2014. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/271755107

GÓMEZ-CHACÓN, I. M., BOTANA, F., ESCRIBANO, J., Y ABÁNADES, M. Á. Concepto de Lugar Geométrico. Génesis de Utilización Personal y Profesional con Distintas Herramientas. **Bolema Boletim de Educação Matemática**, v. 30, n. 54, p. 67–94, 2016. Acesso em: 10 de set. 2022. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a04

GÓMEZ-CHACÓN, I.; KUZNIAK, A.; VIVIER, L. El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. **Bolema**, Rio Claro, v. 30, n. 54, p. 1-22, 2016. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a01

HENDERSON, F., RASMUSSEN, C., SWEENEY, G., WAWRO, M, & ZANDIEH, M. Symbol sense in linear algebra: A start toward eigen theory. Proceedings of the 13th Annual **Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education**, Raleigh, NC, 2010. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/325630847

HENRÍQUEZ-RIVAS, C., Y MONTOYA-DELGADILLO, E. El Trabajo Matemático de Profesores en el Tránsito de la Geometría Sintética a la Analítica en el Liceo. **Boletim de Educação Matemática**, 30(54), 45-66, 2016. DOI:10.1590/1980-4415v30n54a03

KUZNIAK. L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. **Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives**, Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Paris (IREM),16, pp.9-24, 2011. Recuperado de https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01060043

KUZNIAK, A.; RICHARD, P.R. Spaces for Mathematical Work. Viewpoints and perspectives, **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa - RELIME**, v. 17 n. 4-I, p. 17-28, 2014. Acesso em : 10 jun. 2021. DOI: https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1741a

KUZNIAK, A., TANGUAY, D. & ELIA, I. Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction, **ZDM Mathematics Education**, v. 48, n. 6, p. 721-7737, 2016. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x

MENA-LORCA, A; MENA-LORCA, J.; MORALES, A. Hacia una noción de espacio de trabajo algebraico. **Tercer Simposio Espacio de Trabajo Matemático**, Universidad de Montreal, Canadá, noviembre, 2012. Recuperado de https://etm7.sciencesconf.org/data/Actes_ETM5.pdf

MONTOYA-DELGADILLO, E., & VIVIER, L. Mathematical Working Space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. **ZDM Mathematics Education**, v. 48, n. 6, p. 739-754, 2016. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-016-0777-9

SALGADO, H.; TRIGUEROS, M. Una experiencia de enseñanza de los valores, vectores y espacios propios basada en la teoría APOE. **Educación Matemática**, v. 26, n. 3, p. 75–107, 2014. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/13291/

SANTIAGO, O.; DEL CARMEN, J. **Una propuesta de orquestación instrumental para introducir los conceptos de valores y vectores propios en un primer curso de álgebra lineal para estudiantes de ingeniería**. [s.l.] Tesis (D.C.) --Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N. Departamento de Matemática Educativa, 2020. Recuperado de https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/3889

THOMAS, M. Y STEWART, S. Eigenvalues and eigenvectors: Embodied, symbolic and formal thinking. **Mathematics Education Research Journal**, 23, 275-296, 2011 DOI: https://doi.org/10.1007/s13394-011-0016-1

VÁSQUEZ, P., MENA, A., Y MENA, J. Construcción de un espacio de trabajo matemático idóneo en álgebra lineal: episteme versus currículo. **Investigación e Innovación en Matemática Educativa**, 1, 207-212,2016. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/15406/

YILMAZ, Ş. On Eigenvalue and Eigenvector Perceptions of Undergraduate Pre-service Mathematics Teachers. **Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi**, 16 (1), 172-188, 2022. DOI: 10.17522/balikesirnef.1076124

YIN, R.K. Case Study Research. **Design and Methods, Applied Social Methods Series**, Vol5, Sage Publications London, 1989.

***Submetido em*:** 22 de Setembro de 2022.

***Aprovado em*:** 01 de Novembro de 2022.

***Publicado em*:** 08 de Dezembro de 2022.

Como citar o artigo:
SARAVIA-MOLINA, Nancy; TRUJILLO, Edwin Cristian Julian; PACHAS, Jorge Luis Vivas Eigenvalores e Eigenvectores: Espacio de Trabajo Matemático personal del profesor. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, Belém/PA, v. 17, n. 42, p. 180-192, Set.-Dez. 2022.
https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p180-192.id456