

Conhecimentos Históricos da Matemática por meio de Tecnologias Digitais: Alguns desafios e possibilidades com olhares de inovação

Historical Knowledge of Mathematics through Digital Technologies: Some challenges and possibilities with looks of innovation

Conocimientos históricos de las matemáticas a través de las tecnologías digitales: Algunos retos y posibilidades con miradas de innovación

Marcelo Almeida Bairral¹  

RESUMO

O desenvolvimento humano e a geração de tecnologias caminham conjuntamente. A matemática que se produz e se ensina ao longo da história é para manter viva a cultura e para impulsionar novas criações culturais, socio-ambientais, científicas e tecnológicas. Neste artigo, a partir de quatro pressupostos, elencam-se seis desafios na articulação entre conhecimentos históricos e tecnologias digitais que podem instigar políticas educacionais para a formação inicial e continuada de professores, em particular, de matemática.

Palavras-chave: Integração curricular; História; Tecnologia; Cognição; Epistemologia.

ABSTRACT

Human development and the production of technologies go hand in hand. Mathematics produced and taught throughout history are a way to keep our culture alive and to drive new cultural, socio-environmental, scientific, and technological creations. In this article, based on four assumptions, six challenges are presented in the articulation between historical knowledge and digital technologies that can instigate educational policies for the prospective mathematics teacher and teachers training programs, in particular, of mathematics.

Keywords: Curricular integration; History; Technology; Cognition; Epistemology.

RESUMEN

El desarrollo humano y la producción de tecnologías caminan de la mano. Las matemáticas producidas y enseñadas a lo largo de la historia son para mantener viva nuestra cultura e impulsar nuevas creaciones culturales, socioambientales, científicas y tecnológicas. En este artículo, a partir de cuatro ideas fundantes, se presentan seis desafíos en la articulación entre saberes históricos y tecnologías digitales que pueden suscitar políticas educativas para la formación inicial y continua de docentes, en particular, de matemáticas.

Palabras clave: Integración curricular; Historia; Tecnología; Cognición; Epistemología.

¹ Doutor em Educação Matemática pela Universidade de Barcelona (UB). Professor titular da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), Seropédica, Rio de Janeiro, Brasil. Endereço para correspondência: Km 07, Câmpus, IE/DTPE, BR-465, Seropédica, Rio de Janeiro, Brasil, CEP: 23890-000. E-mail: mbairral@ufrrj.br

*Viver é afinar o instrumento
De dentro prá fora
De fora prá dentro
A toda hora, todo momento*

CONVERSA INICIAL

Este artigo² surge a partir da minha apresentação³ no I Colóquio Inter-Latino sobre relações entre Tecnologias e História da Matemática para o Ensino – Thema I, que tem como propósito principal constituir um espaço de discussões e reflexões teológicas e didáticas sobre um campo de pesquisa emergente na América Latina e, além das fronteiras destas, sobre relações entre as tecnologias da informação e comunicação e a história no ensino da matemática.

Pensar nisso foi muito bom, e tentei fazer esse exercício reflexivo a partir das minhas variadas experiências de ensino na Educação Básica e na Licenciatura, e de investigação. As reflexões que faço podem instigar pesquisadores, formadores e professores que primam pelo seu desenvolvimento profissional. Não pesquisei no campo da história, mas procurarei articular minha *expertise* de investigação em tecnologias com a história da matemática, com foco no ensino e na aprendizagem. As ideias aqui discorridas também podem inspirar políticas de formação docente.

Inicialmente, para subsidiar os desafios que elencarei, partirei de quatro pressupostos. Há outros, mas considero que estes são suficientes para as incursões que farei aqui⁴:

- Na evolução da humanidade matemática e tecnologia caminham juntas na história e com a história. Mudanças na matemática afetam a tecnologia e vice-versa.
- A evolução humana e a comunicação e a interação entre humanos e humanos, humanos e máquinas têm interferido em conceitos matemáticos e dinâmicas de sala de aula. O papel desempenhado pela tecnologia deixou de ser um amplificador visual ou provedor de dados, para ser um constituinte essencial do significado das tarefas e, portanto, afetou as concepções dos objetos matemáticos que os sujeitos poderiam construir (LABORDE, 2001).
- Uma pessoa é um sistema com representação interna ativa (CARROLL, 1991), e o aprendiz deve ser visto como um sujeito em atividade, que executa, avalia e redimensiona.
- Entender esse sujeito em atividade impregnada de história, cultura e tecnologias é olhar para o seu aprendizado como movimento, como mudança de discurso, de discurso matemático (SFARD, 2008) no nosso caso, com suas particularidades (uso de palavras, de narrativas, de rotinas e de mediadores visuais) consideradas isoladamente ou, o que considero mais potente, de modo articulado e em constante simbiose cérebro-corpo-tecnologia-ambiente (BAIRRAL, 2021).

Em nossa evolução, matemática e tecnologia caminham juntas na história e com a história. Mudanças da matemática afetam a tecnologia e vice-versa. Em alguma viagem para um congresso dizemos a pessoas da cidade que estamos em um evento de educação

² Dedico este texto aos educadores, educadoras e educadoras que cotidianamente afinam e refinam o seu fazer docente, o seu planejamento – de dentro para fora, de fora para dentro – em prol da melhoria do aprendizado e do desenvolvimento das pessoas pela educação escolar.

³ Disponível em: <https://www.youtube.com/live/HnkvX98TSZw?feature=share&t=2699>

⁴ A leitura deste artigo pode ser enriquecida com Bairral (2023).

matemática, e elas expressam surpresa. O que tem de novo na matemática? A pessoa usa um celular e não percebe o que há de novo na matemática. Ela tem uma tecnologia que foi desenvolvida mediante conhecimentos matemáticos e não se dá conta dessa evolução. Há muitas razões para isso, mas deixo que você pense sobre elas a partir de sua vivência pessoal ou profissional.

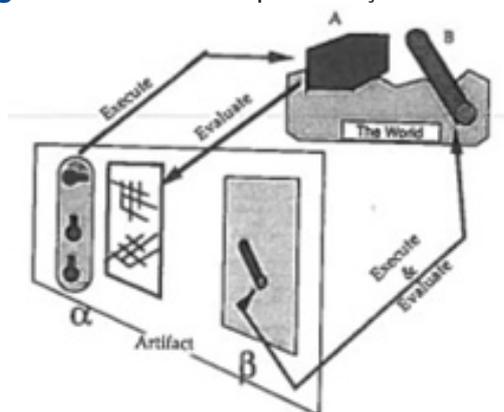
Trago outro pressuposto a partir de Collete Laborde (2001), o de que a evolução humana e a comunicação e a interação entre humanos e humanos, e humanos e máquinas têm interferido em conceitos matemáticos. O papel desempenhado pela tecnologia deixou de ser um amplificador visual ou provedor de dados para ser um constituinte essencial do significado das tarefas e, portanto, dos objetos e das relações estabelecidas a partir do proposto. Isso afeta as concepções dos objetos matemáticos – como é nosso caso – que os sujeitos poderiam construir. Uma planilha gerada no gráfico que você faz no GeoGebra não é somente um cálculo que você vai fazer usando outro aparato tecnológico.

A pesquisa com tecnologia digital também popularizou mais informações sobre a ideia de artefato, comum nos estudos histórico-culturais, socioculturais, da comunicação, dentre outros. A ideia de artefato surge para evidenciar que há um elemento mediador – ou vários – nas interações entre humanos, ou entre humanos e máquinas. Esse mediador não é necessariamente físico, mas simbólico, como uma imagem, um ícone em um *software*, um gesto ou um toque em tela.

A evidência do artefato também é importante para equilibrar a relação entre ferramenta, objeto e apropriação, geralmente desconsiderada no desenvolvimento tecnológico. A apropriação do artefato dependerá do sujeito que o usa e do contexto de utilização. De modo simples, um pintor de parede tem uma relação com o pincel diferente da de um pintor de telas.

A atenção para a importância desse artefato mediador tem sido evidenciada também nos estudos no âmbito da interação homem-máquina justamente para mostrar que não faz sentido um caminho linear de execução e um diferente, de avaliação de um sistema, como se o produto gerado fosse outro⁵. O que temos é um processo que inter-relaciona execução e avaliação. Nele o artefato e o sujeito se transformam simultaneamente (NORMAN, 1991).

Figura 1. Sistema de representação do artefato



Fonte: Norman (1991, p. 27)

⁵ Este parece aquele modelo comunicacional clássico de emissão da mensagem, canal e recepção, sem interferência.

Precisamos considerar que uma pessoa é um sistema com representação interna ativa (NORMAN, 1991), e ela deve ser vista como um sujeito em atividade constante de execução, avaliação e redimensionamento. Os artefatos estão no mundo e não são necessariamente externos aos sujeitos. Nosso desenvolvimento não acontece apenas pela utilização de instrumentos, mas por toda a bagagem cultural que eles carregam e que são reconfiguradas por nós (VYGOTISKI, 1991). Nossas atividades de ensino ou de pesquisa devem estar atentas a isso. O que difere quando você, professor, usa a lousa convencional (o quadro negro) ou quando você usa uma lousa digital? Ou, o que muda em você quando usa um telefone fixo com fio e um sem fio?

Símbolos matemáticos, ícones em um programa informático, são artefatos. A possibilidade de uso (ou não) de um ícone em uma tarefa matemática muda todo o seu desenrolar (ASSIS, 2020). Uma mesma tarefa pode ser realizada de modos diferentes pelos sujeitos, pois os processos de execução e de avaliação são subjetivos, contextuais e momentâneos. As descobertas são pessoais e sofrem contribuições do coletivo, ainda que seja pela observação de uma conversa entre outras pessoas. Portanto, faz sentido diferenciar tarefa e atividade. Esta última é quando o sujeito entra em ação a partir do proposto (a tarefa) e desenvolve sua forma de apropriação mediante interações diversas.

A relação entre sujeito e objeto matemático foi muito bem situada por Fischbein (1993). Para ele o objeto geométrico, em particular, depende de uma natureza conceitual e outra figural, e é o equilíbrio entre esses dois componentes que permite a noção exata do objeto. Para o autor, da natureza conceitual deriva a ideia geral que expressa a classe de objetos, enquanto a imagem mental da natureza figural é a representação de um objeto ou fenômeno.

Para compreender melhor essa relação, é importante destacar que os objetos matemáticos como ponto, segmento, retas paralelas etc. são modelos ideais de entidades mentais nas quais é possível considerar a perfeição desses objetos somente em um sentido conceitual. Eles são representações gerais, não existem no mundo real, são abstrações que pertencem ao domínio dos conceitos. Trabalhar os conceitos matemáticos integrados com tecnologias digitais pode evidenciar a relação sujeito-objeto, uma vez que o cenário figural e representacional se torna cada mais evidente e hipertextualmente conectado. Essa conexão deve partir de um sujeito em constante simbiose com o meio físico e em interações com seres humanos e não humanos.

PRESSUPOSTOS SUSTENTANDO ALGUNS DESAFIOS, NÃO EXCLUDENTES E NÃO HIERÁRQUICOS

Os desafios que enunciarei a seguir estão inter-relacionados e não devem ser sequenciados. As tecnologias digitais (TD) e a história devem inovar:

- Na superação do aspecto instrumental e da inserção curricular.
- Na busca por avanços e redimensionamentos (ou novos) conceitos.
- Na análise de mudança de natureza epistemológica.
- Na elaboração de práticas autorais com (ou a partir) da história.

- Na produção de materiais curriculares nos quais a TD e a história não sejam apêndices.
- Na potencialização do humano e no despertar contínuo da vontade de ensinar e de aprender matemática.

Inovar na superação do aspecto instrumental e da inserção curricular

Tecnologia e história não podem ser coadjuvantes, periféricas ou tangenciais aos conteúdos. Elas são protagonistas e devem estar integradas no currículo, e não inseridas (BITTAR, 2011). Inserção é pontual, integração é transversal. Seria muito bom que não precisássemos ter disciplinas específicas na licenciatura de história da matemática ou de tecnologias no Ensino.

A integração é de fato esse estar atravessada no currículo da Educação Básica e dos programas formativos e nas atividades de pesquisa, principalmente, de coleta e análise de dados. Um dos nossos desafios com os conhecimentos históricos da matemática é a sua tradução em formas variadas de apropriação, com tecnologias e abordagens didáticas diversas e ao longo do currículo.

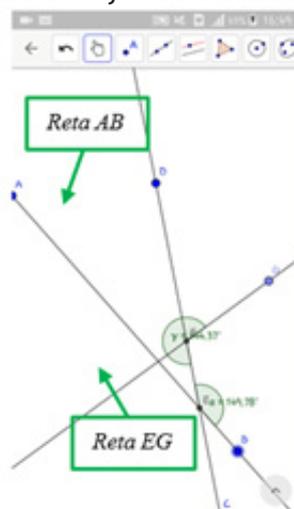
Que a tecnologia muitas vezes seja associada apenas a inovação tudo bem, mas a história, não. Convido você, leitor(a), a acessar periódicos diferentes de nossa área e buscar artigos nos quais as tecnologias estão presentes nos estudos. Elas são protagonistas ou coadjuvantes? São um recurso usado para fazer alguma simulação ou para mostrar uma mudança daqueles construtos que estão envolvidos na investigação? Busque também por investigações em história com uso de tecnologias.

Não podemos olhar esses estudos separados dos sujeitos que os produzem, da forma com a qual se relacionam com a tecnologia ou do modo como interagem com ela e com os humanos. Então, fica o convite para tentar superar a visão da tecnologia meramente como inovação ou como algo instrumental, isto é, procedimental, o que implica fazer a mesma coisa com uma nova roupagem, sem ir além de outras possibilidades e transformações.

Inovar na busca por avanços e redimensionamentos (ou novos) conceitos

A pesquisa científica é uma ação que nos permite olhar os avanços e os redimensionamentos conceituais com as tecnologias de que dispomos em nosso tempo. Por exemplo, a investigação de Henrique (2021) mostra a emergência da ideia de referência, favorecida pelas construções e pelos movimentos nos dispositivos e pelo tipo de dinâmica de aula e de tarefas implementadas. Ou seja, o conceito de referência surge quando o sujeito precisa identificar quais retas e ângulos vai analisar, pois a simultaneidade de movimentos exige fixar em certos objetos para comparar medidas etc., de modo a não se perder nem se confundir.

Figura 2. Exemplo de objetos referenciados para análise



Fonte: Bairral, Henrique e Assis (2022)

Didaticamente a tese mostra que, mediante a abordagem de retas paralelas cortadas por transversal(is), é possível desenvolver todo o conteúdo da geometria plana previsto para o Ensino Fundamental II (6.º ao 9.º ano). O *design* de tarefas com os dispositivos, a mediação semiótica com outros recursos (construções em telas, registros escritos, uso de metáforas etc.) e a dinâmica de aula estão relacionados e influenciam no processo cognitivo. Há processos de pensamento novos envolvidos e que enriquecem de modo dinâmico, com figuras em movimentos, a história das representações dos conceitos e do entendimento de propriedades e de relações geométricas.

Inovar na busca por mudanças de cunho epistemológico

Nessa luta por evidenciar ou instigar câmbios epistemológicos cabe destacar que tecnologias são desenvolvidas por sujeitos pensantes, que as redimensionam mediante apropriações que fazem ao longo da sua trajetória em suas diferentes práticas socioculturais. Antes de ir a um museu você acessa o *site*, vê sua localização, busca informação das exposições? E, quando está na exposição, você tem imagens estáticas e em movimento, pode interagir com certas artes etc. O que muda nesse processo?

Pensando agora em um recurso didático. É comum pessoas acharem que uma tecnologia mais recente substitui ou anula uma mais antiga. Nem sempre! Os materiais como os de desenho (régua, compasso, transferidor etc.) trouxeram importantes contribuições para as construções geométricas no currículo. Portanto, o seu uso esteve mais orientado em procedimentos para realizar determinada construção e em uma perspectiva limitadora de movimentos, pois se restringia à construção no papel, que é estática e gera um desenho.

Os quebra-cabeças como o Tangram iniciam um novo campo exploratório, o geométrico. Particularmente, aspectos conceituais importantes como (de)composição, estudo e análise de áreas sem fórmulas, identificação de (in)variantes, exploração de formas variadas e não usuais, uso de peças como unidades de medida e de estabelecimento de outras relações numéricas etc. Todas essas explorações dão uma centralidade à visualização geométrica e propiciam, dentre outras contribuições, a desvinculação do ensino de áreas do de perímetro. Portanto, quando trabalhamos com o Tangram com as peças isoladas – seja

em EVA, recorte em papel ou madeira –, não necessariamente analisamos, por exemplo, as transformações no plano que podem ocorrer quando você usar um Tangram em determinado aplicativo no celular. As formas de movimentar (gírar, virar, transladar etc.) as peças em um aplicativo digital podem ser instigantes para novos estudos.

As pesquisas de Assis (2016, 2020) mostraram como discentes do Ensino Médio – com baixo rendimento em matemática, sem experiências em um ambiente de geometria dinâmica com toques em tela e sem estudo prévio de transformações no plano – faziam transformações. Embora o autor não tenha feito uma articulação de natureza histórica⁶ desses conceitos, seus resultados instigam novas formas de raciocinar, particularmente, quando os alunos fazem composição (produto) de transformações. Eles não seguiam a ordem usualmente ensinada ou apresentada em livros didáticos: simetria axial, rotação e translação. Assis mostrou que essa sequência foi quebrada e que a natureza da tarefa proposta também precisa ser considerada nesse processo de aprendizagem (ASSIS; BAIRRAL, 2022; BAIRRAL; ASSIS, 2022).

Os ambientes de geometria dinâmica (AGD) são construídos a partir da lógica euclidiana. Todavia, como estudos com AGD estão incorporando conhecimentos históricos, de modo a romper com essa lógica e apresentar novas possibilidades ou redimensionamentos conceituais? O que seriam os entes primitivos (pontos, retas e planos) euclidianos em um AGD? Trabalhos como os de Sánchez e Prieto (2022) e de Prieto e Arredondo (2022) são interessantes, pois buscam construir e dinamizar certas proposições no GeoGebra.

Figura 3. Proposição e tarefa correlata no GeoGebra

PROP. II.

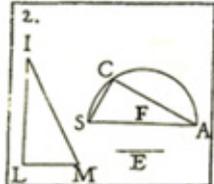
De dos rectas dadas, hacer un triangulo rectangulo. (fig. 2.)

Este Problema comprehende dos casos. *Caso 1.* Sean dadas las rectas IL, LM: y se pide se forme de ellas un triangulo rectangulo, cuyo angulo recto sea comprehendido de dichas lineas.

Operacion. Hagase IL perpendicular à la extremidad de LM, (1. lib. 1. de este Trat.) y juntando la recta IM, quedará formado el triangulo ILM de dichas lineas, y rectangulo en L.

Caso 2. Sean dadas las lineas SA, y E: pidese se forme de ellas un triangulo rectangulo, de fuerte, que la mayor SA sea la basa opuesta al angulo recto.

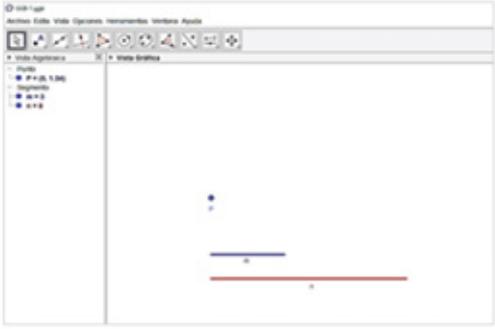
Operacion. Dividase SA por medio en F; y haciendo centro en F con la distancia FA, hagase un semicirculo. Tomese con el compás la linea E, y pássele desde S hasta C. Tirese las lineas CA, CS, y quedará formado el triangulo que se pide, el qual será rectangulo en C, por estar el angulo C en el semicirculo. (31. 3.)



Tarea GGB-4b

El archivo **GGB-4** muestra los segmentos m y n , y un punto P . Con estos elementos:

- Construir un triángulo rectángulo para el cual dos de sus lados midan m y n , y uno de sus vértices sea P .
- Comunicar la solución de la tarea, destacando: (i) el procedimiento de construcción del triángulo (justificando las acciones emprendidas) y (ii) la forma de validar el procedimiento de construcción: ¿Cómo se puede asegurar que el dibujo obtenido es el esperado?



Fonte: Prieto e Arredondo (2022, p. 27)

As contribuições informáticas são visíveis nos estudos, mas e as inerentes aos conhecimentos históricos? Seria possível superar a dicotomia e a mera transposição da tecnologia analógica (texto escrito) para a digital (AGD)? De que forma? Poderíamos pensar em novas ou refutadas proposições?

⁶ Neste caso sugiro Silva e Almouloud (2021).

Podemos inferir que a inovação assume um peso maior e parece continuar havendo inserções. Talvez, uma dificuldade também seja do enquadramento teórico usado, mas não cabe discutir aqui.

Como os sujeitos vão criando e inovando em suas práticas sociais ou educativas? O que muda no tipo de tarefa matemática a ser proposta? Às vezes, a mudança no enunciado já pode ser bastante providencial. A seguir ilustro duas tarefas que envolvem o mesmo conteúdo como resposta, porém a forma como cada uma está enunciada implica em processos de raciocínio, de descoberta e de solução diferentes (BAIRRAL; ASSIS; SILVA, 2015).

Quadro 1. Exemplo de tarefa com enunciado distinto

<p>Tarefa 1: <u>Construa</u> um quadrilátero qualquer. <u>Localize</u> o ponto médio de cada um de seus lados e una-os. O que você pode dizer sobre a natureza do quadrilátero formado por essa união? <u>Justifique</u> sua resposta.</p> <p>Tarefa 2: <u>Demonstre</u> que unindo os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer obtemos um paralelogramo.</p>
--

Fonte: Bairral, Assis e Silva (2015)

Seria possível pensar algo similar com as proposições euclidianas, de modo a superar a transposição papel versus digital e o uso de tarefas procedimentais⁷, e fazer emergir outras possibilidades? Admitir que novos conceitos surgem é reconhecer que evoluímos, pois criamos cotidianamente.

Estudos como os de Assis (2020) e Henrique (2021) chamam a atenção para superarmos a lógica sequencial e hierárquica dos conteúdos matemáticos no currículo. As tecnologias digitais têm acelerado essa mudança. Atividades em dispositivos móveis, por exemplo, podem construir dinâmicas mais fluidas e articuladas em uma organização curricular que potencialize – de modo articulado – os processos de conceituação, visualização e representação (HENRIQUE; BAIRRAL, 2022). Pesquisas em história da matemática também evidenciaram dificuldades no aprendizado de Cálculo Diferencial e problemas com a ordenação no ensino de Limite, Derivada e Integral, dentre outros (ARTIGUE, 1995; REZENDE, 2003).

Ainda, no ensino de Cálculo, podemos ver iniciativas promissoras articuladas à tecnologia, em estudos com realidade aumentada (RA) como os de Paulo, Pereira e Pavanelo (2020) e Paulo e Pereira (2022). Esse tipo de investigação só é possível ser feito com a evolução da tecnologia, e está em jogo um conjunto de novos processos de pensamento (representação, projeção, simulação etc.) e de conceitos, além de outras formas de representação (projeções virtuais) e de modos de estarmos nesse mundo. Portanto, é importante também pensar os conceitos pela história humana com tecnologia e nossa cognição sendo desenvolvida na relação simbiótica corpo-artefato-ambiente.

Inovar na elaboração de práticas autorais com (ou a partir) da história

O ser humano tem grande poder inventivo. Assim, precisamos criar práticas educacionais autorais – com a história e a tecnologia ou a partir delas –, advindas de algo totalmente novo ou da reconfiguração de algo existente. O trabalho de Izar (2016) é um ótimo exemplo de algo recriado pela docente. Ela elaborou roteiros de observação e de manipulação de pantógrafos virtuais do *site do Museu Universitário de História Natural e da Instrumen-*

⁷ Resumidamente, são aquelas que sugerem apenas procedimentos de construção e de resultado previamente esperado pelo professor, como se pode ver em Sánchez e Prieto, (2022, p. 943, Figura 6).

tação Científica da Universidade de Modena e Reggio Emilia. Esse é um campo fértil para a articulação entre história, tecnologia, descoberta e aprendizagem matemática. Como podemos usar o acervo desse Museu em outras abordagens?

A notação científica também pode ser um tema fecundo para a integração entre história e tecnologia. Ela é uma outra forma de representar uma quantidade, muito usual na Física, na Astronomia, na Engenharia, dentre outras áreas. Use um tempo seu para buscar na Internet três *sites* diferentes para gerar notação científica e elaborar um interessante planejamento para sua aula. Mas, antes, deixo-lhe uns questionamentos: Em que conteúdo os *sites* coincidem? Em que diferem? Que tipo de notação faz cada um? Como faz? Escreva algo em que cada um o ajuda (ou não) na compreensão da geração da notação científica. Se você tivesse que substituir um dos *sites* por um outro, qual seria? Por quê?

A história tem nos permitido produzir diferentes materiais para o ensino, por exemplo, os livros paradidáticos que, infelizmente, são pouco divulgados e utilizados nas escolas públicas, pelo menos, aquelas que visito. De que forma os livros didáticos (LD) atuais têm contribuído com práticas autorais?

Inovar na produção de materiais curriculares nos quais a TD e a história não sejam apêndices

O livro didático é um recurso no qual o professor sempre se apoia, seja usando-o efetivamente em aula, seja apenas orientando suas atividades. O livro é a interlocução da pesquisa educacional com a práxis educativa. As políticas de currículo ocorrem em várias frentes. O *Programa Nacional do Livro Didático* (PNLD) é uma delas. Portanto, os livros didáticos avaliados no último PNLD-2021 estão em sintonia com a *Base Comum Curricular* (BNCC). Analisando algumas coleções observei um grande retrocesso. A apresentação dos conteúdos também parece ser de versões mais antigas das coleções, e o que há de “novo”, como esperado, é a indicação das habilidades prescritas na BNCC.

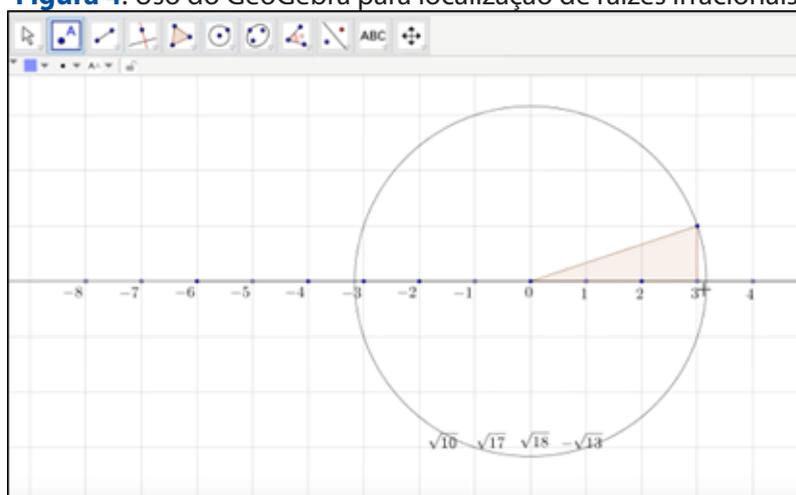
Os livros de história da matemática citados no manual do professor de uma coleção do Ensino Médio ainda são os clássicos, Boyer (1974) e Eves (2011), obras que conheci na minha Licenciatura. Eles estão nos manuais dos três volumes, para todos os conteúdos. Não há indicação para temas específicos, por exemplo, trigonometria ou geometria analítica. Será que não existem referências para essas temáticas? Será que não há outras fontes de referência (*e-books*, artigos, vídeos etc.) que o professor possa consultar? Certamente, muita produção no campo da história da matemática e da história da educação matemática no Brasil poderia ser incorporada. De fato, o que vi nas obras foi uma nova reorganização na apresentação, e as referências e o manual do professor como apêndices.

A integração de tecnologias no conteúdo ou nas atividades é inexistente. Além do mais, desejo que o manual do professor caminhe em duas frentes: dê sugestões e oriente o docente sobre complexidades envolvidas na integração de tecnologias. Um outro exemplo pode ser quando o professor quer introduzir um número irracional e usa objetos circulares, fita métrica e calculadora. É comum o docente pedir aos alunos para medirem o perímetro de cada circunferência, dividirem pelo diâmetro e anotarem em uma tabela. Após várias medições o educador pede aos discentes que verifiquem alguma regularidade numérica

e geralmente observam que os quocientes encontrados ficaram próximos de 3,14. Essa atividade, embora interessante, gera na calculadora números racionais. A calculadora arredondou, tornou-os decimais finitos e, portanto, racionais. Cabe ao professor ter consciência disso e enriquecer essa situação com outros instrumentos de cálculo (calculadora científica, planilhas de cálculo etc.) que possam mostrar aos estudantes números gerados não finitos.

Outra possibilidade de ilustrar números irracionais na forma de raiz quadrada é localizá-las na reta numérica, utilizando compasso⁸. E se utilizarmos um ambiente como o GeoGebra⁹, o que muda? O que enriquece conceitualmente? O que complica? Acesse os vídeos disponíveis nas notas de rodapé 8 e 9 e pense possibilidades para as suas aulas.

Figura 4. Uso do GeoGebra para localização de raízes irracionais



Fonte: YouTube (*link* na nota 13)

Todos os recursos tecnológicos (régua, transferidor, compasso, GeoGebra etc.) são importantes. Todavia, cada um tem suas potencialidades e limitações. Pense sobre elas.

Os desafios que elenquei, dentre outros, são importantes. No entanto, eles só farão sentido quando colocarmos o potencial criativo do ser humano acima de tudo.

Inovar na potencialização do humano e no despertar contínuo da vontade de ensinar e de aprender matemática

*Tudo é uma questão de manter
A mente quieta
A espinha ereta
E o coração tranquilo
A toda hora, todo momento
De dentro prá fora
De fora prá dentro*

O ser humano é potente por natureza. Evidentemente, sua potência não vem apenas do seu pensamento criativo e de suas formas variadas de linguagem, mas de sua interação com todos os demais seres vivos e os ambientes pelos quais transita e vive. Os humanos, pela capacidade de raciocinar e criar, buscam formas (sofisticadas ou não) de construir, de conviver, de sobreviver.

⁸ A partir de uma busca rápida, sugiro: <https://www.youtube.com/watch?v=wKvgXCf2KeE> e <https://www.youtube.com/watch?v=vLnW8vxFjtk>
Acesso em: 05 abr. 2023

⁹ Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=L5LmrREZOQ0>. Acesso em: 05 abr.2023

A letra da música que usei para homenagear também serve para instigar algo para o qual estudos em neurociência – como os de António Damásio – nos alertam: a necessidade de romper com a dicotomia interno/externo, que ainda existe em pesquisas cognitivas. Nossa cognição, que também é sensorial, deve ser vista como substrato da mente e de toda atividade psíquica e, desse modo, ela pode contribuir para a compreensão de como nossas descobertas e reflexões são culturalmente transformadas (RADFORD, 2014). Essa forma perceptiva de nossa cognição, complementa Luís Radford, tem capacidade de responder criativamente, atuar, sentir, imaginar, transformar e dar sentido ao mundo. Nosso processo criativo gera novos conceitos, estes passam a compor o escopo cultural dos sujeitos (DAMÁSIO, 2022) e, conseqüentemente, redimensionam também a matemática que ensinamos ou aprendemos.

Da mesma forma que as tecnologias são relacionadas a inovação, elas também são associadas a criação. Tecnologias estão por aí, de todos os tipos (analógicas e digitais, físicas e simbólicas). Elas nos atravessam, convivemos com elas. Para alguns elas facilitam, para outros, dificultam. Também sentimos angústias e medos com o desenvolvimento tecnológico. Essas percepções são subjetivas e não cabe aqui juízo de valor.

A criação de Oliveira (2022) é um interessante exemplo da potência do professor, principalmente, quando ele se envolve em grupos de pesquisa que visam à produção do conhecimento *na (com e a partir da)* prática docente. O dispositivo multirrepresentacional desenvolvido pelo pesquisador – a partir de câmeras de segurança – é para auxiliar na compreensão do desenho projetivo e das vistas ortográficas.

Figura 5. Dispositivo projetivo



Fonte: Oliveira (2022, p. 98)

É comum ouvirmos que os alunos sabem “tudo” de tecnologia. Pelo uso cada vez mais intenso que fazem, sobretudo de celulares, é possível que de fato saibam bastante coisa. Jogam, criam conteúdos, fazem vídeos etc. Todavia, será que o que eles fazem com o equipamento ajuda ou tem relação com o currículo escolar? O uso pedagógico na escola é diferenciado, e temos visto que eles precisam de outros ensinamentos. Portanto, as práticas

docentes devem atuar para manter a sedução de discentes e de docentes para aprender também conteúdos escolares com a tecnologia (BAIRRAL; HENRIQUE, 2021).

Para que você reflita sobre o que estou pensando sobre sedução, emoção, processo criativo e sobre a importância da ruptura da lógica da internalização/externalização, sugiro assistir aos vídeos da Teoria Divertida (*Fun Theory*).

Figura 6. Vídeo Piano stair



Fonte: The Fun Theory¹⁰

Enfim, os desafios anunciados me permitiram criar um acróstico na palavra inovar, pois, como docentes e pesquisadores, sempre estamos em busca de melhorias de nossas práticas também pela inovação. Também pode ser um simples exercício criativo para nossa memória visual.

I n t e g r a r
c o N c e i t u a r
O u s a r
V o n t a d e
c r i A r
p r o d u z i R

A partir desse esquema visual você tem ações que sintetizam um pouco do refletido aqui.

EM UMA VIA CONCLUSIVA

O desenvolvimento humano e a produção de tecnologias caminham juntos. Nós produzimos a tecnologia, vamos aperfeiçoando-a, e ela vai transformando nosso modo de pensar, de agir, de (con)viver. Toda a matemática que ensinamos é para manter viva nossa cultura e para alavancar novas criações culturais, socioambientais, científicas e tecnológicas que servirão para reorganizar nossa vida em sociedade.

Cotidianamente afinamos os instrumentos com os quais lidamos. Fazemos isso por necessidade própria ou por demanda profissional ou social. Temos um conjunto de pessoas que atuam nessa reconfiguração. Então, pense, a partir dos exemplos elencados, que

¹⁰ Sugiro assistir aos vídeos do <https://www.thefuntheory.com/> Acesso em: 06 abr. 2023.

personalidades você incluiria em seu planejamento de modo a enriquecer o diálogo entre conhecimentos da história da matemática e a tecnologia.

No processo criativo precisamos colocar a potência no ser humano e despertar continuamente a vontade para ensinar e para aprender matemática. Não teremos mais pessoas interessadas em profissões das exatas ou das engenharias, se o ensino continuar pautado na transmissão e os conteúdos, na prescrição e na linearidade. Aqui a integração de tecnologias pode ser promissora, e o papel do formador necessita ser reconfigurado. Deve deixar de ser o possuidor do conteúdo para assumir uma postura mais interativa em seu planejamento e desempenhar vários papéis (interpretar, orientar, redimensionar, participar, sugerir etc.).

A articulação história e tecnologia não é evidente ou simples de ser feita em todos os conceitos matemáticos. Alguns são mais fáceis (Função, Geometria, Trigonometria) que outros (Análise Combinatória, Função Composta, Multiplicação de Matrizes). Identificar essa facilidade (ou dificuldade) de articulação dependerá de outros conhecimentos e vivências do inventor. Nos casos mais difíceis a inovação didática pode assumir um peso maior.

Por outro lado, há conceitos históricos que são imprescindíveis ao conhecimento matemático para o ensino. É o caso da epistemologia dos números relativos¹¹. O (futuro) professor precisa conhecer essa história, de modo a pensar práticas que busquem minimizar dificuldades e, até mesmo, para não incorrer em erros de ensino, como o caso das regras de sinal sem entendimento da operação que está em jogo.

No caso da multiplicação de números inteiros negativos, apenas conhecer a história não é suficiente, e estratégias didáticas diversas devem entrar em cena. Os futuros professores com os quais atuo sabem derivar e integrar, mas, quando solicitados a explicar de três modos diferentes o produto de dois números negativos, não conseguem. Essa reflexão que faço aqui – e outras apresentadas ao longo do artigo – deve ser feita na Licenciatura em Matemática, pois ela é o lugar de desenvolvimento do conhecimento matemático para o ensino.

Articular pesquisa com inovação é importante por nos retroalimentar enquanto sujeitos. Perceber e estudar mudanças epistemológicas não é simples e demanda tempo. Fica o convite para que investigações brasileiras em história da matemática e em tecnologias digitais estejam mais atentas a essas transformações.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In: ARTIGUE, R. D. M.; MORENO, L.; GÓMEZ, P. (Eds.). **Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas**. Bogotá: Iberoamérica, 1995. p. 97-140.

ASSIS, A. **Alunos do Ensino Médio trabalhando no GeoGebra e no Geometric Constructor: mãos e rotAções em touchscreen**. Dissertação (Mestrado em Educação/PPGEduc) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2016.

¹¹ Sugiro a leitura do Boletim Gepem 57 (2010). Disponível em: <https://periodicos.ufrjr.br/index.php/gepem/article/view/301> Acesso em: 20 mar. 2023.

ASSIS, A. **Alunos do Ensino Médio realizando toques em telas e aplicando isometrias com GeoGebra**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2020.

ASSIS, A.; BAIRRAL, M. A. Touches on screen as new signs in blended ways to think mathematically. **Journal of Educational Research in Mathematics**, v. 32, n. 4, p. 423-441, 2022. <https://doi.org/10.29275/jerm.2022.32.4.423>

BAIRRAL, M. History, Technology and Dynamic Geometry: From Resources with Static Construction to DGE with Touchscreen. In S. Romero Sanchez, A. Serradó Bayés, P. Appelbaum, & G. Aldon (Eds.), **The Role of the History of Mathematics in the Teaching/Learning Process: A CIEAEM Sourcebook** (pp. 381-399). Cham: Springer International Publishing, 2023. https://doi.org/10.1007/978-3-031-29900-1_16

BAIRRAL, M. A. **Tecnologias móveis, neurocognição e aprendizagem matemática**. Campinas: Mercado de Letras, 2021.

BAIRRAL, M.; ASSIS, A. Isometries: epistemological insights among secondary students interacting in dynamic geometric environment with touchscreen. **International Journal for Research in Mathematics Education (RIPEM)**, v. 12, n. 22, p. 92-121, 2022. <https://doi.org/10.37001/ripem.v12i2.2834>

BAIRRAL, M.; ASSIS, A.; SILVA, B. **Mãos em ação em dispositivos touchscreen na educação matemática**. Seropédica: Edur, 2015, v. 7.

BAIRRAL, M. A.; HENRIQUE, M. P. (Eds.). **Smartphones com toques da Educação Matemática: mãos que pensam, inovam, ensinam, aprendem e pesquisam**. Curitiba: CRV, 2021.

BAIRRAL, M.; HENRIQUE, M. P.; ASSIS, A. Moving parallel and transversal lines with touches on smartphones: A look through screenrecording. **The Mathematics Enthusiast**, v. 19, n. 1, p. 114-135, 2022. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1546>

BITTAR, M. A abordagem instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica do professor de matemática. **Educar em Revista (Dossiê Psicologia da Educação Matemática [1/2011])**, p. 157-171, 2011.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher; Editora da USP, 1974.

DAMÁSIO, A. **Sentir e saber: as origens da consciência**. São Paulo: Companhia das Letras, 2022.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora Unicamp, 2011.

FISCHBEIN, I. The theory of figural concepts. **Educational Studies in Mathematics**, v. 24, p. 139-162, 1993.

HENRIQUE, M. P. **Metáforas e toques em tela: potencializando aprendizagens discentes no estudo de retas paralelas e transversais**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2021.

HENRIQUE, M. P.; BAIRRAL, M. A. Straight lines and angles that move, students' ideas that touch and add. **Acta Scientiae**, v. 24, n. 8, p. 315-339, 2022. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.7129>

IZAR, S. B. Museu virtual: pantógrafos e homotetia em aulas de Matemática. **Boletim GEPEN**, v. 69, p. 162-169, 2016. <https://doi.org/10.4322/gepem.2017.013>

LABORDE, C. Integration of technology in the design of Geometry tasks with cabri geometry. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, v. 6, n. 3, p. 283-217, 2001.

NORMAN, D. A. Cognitive Artifacts. In J. M. Carroll (Ed.), **Designing interaction: Psychology at the Human-Computer Interface**. Cambridge: Cambridge University Press, 1991, p. 17-38.

OLIVEIRA, G. W. B. de. **Olhar, ver, reparar, representar: o desenvolvimento da visualização**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2022.

PAULO, R. M.; PEREIRA, A. L. Aspectos metodológicos de una investigación sobre la enseñanza del cálculo con realidad aumentada. **Paradigma**, v. 43, n. 2, p. 82-104, , 2022. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2022.p82-104.id1219>

PAULO, R. M.; PEREIRA, A. L.; PAVANELO, E. The constitution of mathematical knowledge with augmented reality. **The Mathematics Enthusiast (TME)**, v. 18, n. 3, p. 640-668, 2020.

PRIETO, J. L.; ARREDONDO, E. H. Diseño de un entorno de aprendizaje del saber docente acerca de las construcciones euclidianas con GeoGebra. **Educación Matemática**, v. 34, n. 2, 2022. <https://doi.org/10.24844/EM3402.01>

RADFORD, L. Towards an embodied, cultural, and material conception of mathematics cognition. **ZDM – The International Journal on Mathematics Education**, v. 46, n. 3, p. 349-361, 2014. <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0591-1>

REZENDE, W. M. R. **O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

SÁNCHEZ, I. V.; PRIETO, J. L. Diseño de una actividad formativa para futuros profesores de matemáticas sobre construcciones euclidianas con GeoGebra. **Horizontes–Revista de Investigación en Ciencias de la Educación**, v. 6, n. 24, p. 933-946, 2022. <https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v6i24.387>

SERRA DO LUAR. Intérprete: Leila Pinheiro. Compositor: Walter Franco. In: Youtube. *Boing*. Disponível em: <https://www.kboing.com.br/leila-pinheiro/serra-do-luar>

SFARD, A. **Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses and mathematizing**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2008.

SILVA, C. V.; ALMOULOU, A. S. Um estudo histórico e epistemológico sobre o objeto matemático Simetria Ortogonal. **Intermaths**, v. 2, n. 1, p.71-87, 2021. <https://doi.org/10.22481/intermaths.v2i1.7429>

VYGOTSKI, L. **A formação social da mente**. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

Histórico

Recebido: 08 de abril de 2023.

Aceito: 17 de maio de 2023.

Publicado: 01 de agosto de 2023.

Como citar - ABNT

BAIRRAL, Marcelo Almeida. Conhecimentos Históricos da Matemática por meio de Tecnologias Digitais: Alguns desafios e possibilidades com olhares de inovação. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 44, e2023007, 2023. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n44.pe2023007.id480>

Como citar - APA

Bairral, M. A. (2023). Conhecimentos Históricos da Matemática por meio de Tecnologias Digitais: Alguns desafios e possibilidades com olhares de inovação. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC*, (44), e2023007. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n44.pe2023007.id480>

Número temático organizado por

Iran Abreu Mendes  

Luis Andrés Castillo  