Rematec
Revista Matemática, Ensino e Cultura

e-ISSN: 2675-1909 | ISSN: 1980-3141
N. 43, e2023029
10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n43.pe2023029.id497

Gênese Instrumental das Barras de Cuisenaire na Formação Inicial de Professores de Matemática

Instrumental Genesis of Cuisenaire Rod in the initial education of mathematics teachers

Génesis instrumental de las barras de Cuisenaire en la formación inicial de profesores de matemáticas

Francisco Eteval da Silva Feitosa[1]

Veronica Gitirana Gomes Ferreira[2]

Roberta dos Santos Rodrigues[3]

RESUMO

Este trabalho apresenta parte dos resultados de uma pesquisa de Pós-outorado em Educação Matemática e tem como objetivo analisar o fenômeno da Gênese Instrumental na interação com o artefato barras de Cuisenaire no processo de significação da operação matemática divisão de frações. Os participantes são licenciandos em Matemática de uma universidade pública do Amazonas. O referencial teórico subjacente é a Abordagem Instrumental de Pierre Rabardel. Com uma abordagem qualitativa, esta pesquisa descritiva possui delineamento de uma pesquisa-ação, os dados foram coletados a partir da observação, questionários e gravação em vídeo. A transformação do artefato barras de Cuisenaire em instrumento pode ser constatada por meio da mobilização dos esquemas de utilização do tipo esquemas de ação coletiva instrumentada, caracterizando assim o fenômeno da Gênese Instrumental.
Palavras-chave: Educação Matemática; Gênese Instrumental; Barras de Cuisenaire; Fração.

ABSTRACT

This paper presents part of the results of a Postdoctoral research in Mathematics Education and aims to analyze the phenomenon of Instrumental Genesis in the interaction with the Cuisenaire rods artifact in the process of signification of mathematical operation fraction division. The participants are Mathematics undergraduates from a public university in Amazonas. The underlying theoretical framework is Pierre Rabardel's Instrumental Approach. Using a qualitative approach, this descriptive research follows an action research design, and the data were collected through observation, questionnaires, and video recordings. The transformation of the Cuisenaire rods artifact into an instrument can be observed through the mobilization of usage schemes, such as collective instrumented action schemes, thus characterizing the phenomenon of Instrumental Genesis.
Keywords: Mathematics Education; Instrumental Genesis; Cuisenaire Rods; Fraction.

RESUMEN

Este trabajo presenta parte de los resultados de una investigación de Posdoctorado en Educación Matemática y tiene como objetivo analizar el fenómeno de la Génesis Instrumental en la interacción con el artefacto barras de Cuisenaire en el proceso de significación de operación matemática división de fracciones. Los participantes son estudiantes de pregrado en Matemáticas de una universidad pública en Amazonas. El marco teórico subyacente es el Enfoque Instrumental de Pierre Rabardel. Con un enfoque cualitativo, esta investigación descriptiva tiene el diseño de una investigación-acción-formación, los datos fueron recopilados a partir de observación, cuestionarios y grabaciones en vídeo. La transformación del artefacto barras de Cuisenaire en instrumento puede ser constatada a través de la movilización de los esquemas de utilización del tipo esquemas de acción colectiva instrumentada, caracterizando así el fenómeno de la Génesis Instrumental.
Palabras clave: Educación Matemática; Génesis Instrumental; Barras de Cuisenaire; Fracción.

1 Doutor em Matemática pela Universidade Federal do Amazonas (UFAM). Professor Adjunto da Universidade Federal do Amazonas (UFAM), Manaus, Amazonas, Brasil. Endereço para correspondência: Av. das Oliveiras, 9, Novo Israel, Manaus, Amazonas, Brasil, CEP: 69039-205. E-mail: sfeitosa@ufam.edu.br.

2 Doutora em Educação Matemática. Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Pernambuco, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Prof. Moraes Rego, 1235 - Cidade Universitária, Recife, Pernambuco, CEP: 50670-901. E-mail: veronicagitirana@gmail.com.

3 Graduada em Matemática pela Universidade Federal do Amazonas (UFAM). Endereço para correspondência: Av. Genebra, 4, Planalto, Quadra 25, Cj. Campos Eliseos, Manaus, Amazonas, Brasil, CEP: 69045-380. E-mail: roberta10rodrigues@gmail.com.

INTRODUÇÃO

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC baseia-se na ideia de que o aprendizado em Matemática é essencialmente conectado à compreensão, ou seja, à aquisição de significados dos conceitos matemáticos, enquanto também considera a importância dos recursos didáticos nesse processo. De acordo com a BNCC:

> [...] recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização. (BRASIL, 2017, p. 232).

Particularmente em relação ao objeto matemático fração, a BNCC espera que os estudantes desenvolvam habilidades como compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, razão e operador identificando frações equivalentes e resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração (BRASIL, 2017).

Entretanto, a dificuldade apresentada pelos estudantes no entendimento do conceito de fração tem sido apontada e discutida em diversos estudos (BAILEY *et al*., 2012; TORBEYNS *et al*., 2015; POWELL, 2018a; 2018b; 2019a; 2019b). Compreender frações é crucial para o aprendizado de matemática: não só exige um conhecimento mais profundo de números do que é comumente adquirido com números inteiros, como também é preditivo para a conquista matemática de estudantes anos mais tarde (BAILEY *et al*., 2012; BOOTH; NEWTON, 2012; SIEGLER *et al*., 2013).

Para Wearne e Kouba (2000), os estudantes têm uma compreensão muito fraca dos conceitos de fração, resultado de um ensino pautado no uso de algoritmos que permitem ao estudante chegar em respostas que nada significam para eles, comprometendo, dessa forma, seu aprendizado. Para Boaler (2020, p.132) "é muito importante em todo o aprendizado da matemática que os alunos trabalhem com significado, entendendo o que estão fazendo e os contextos aos quais são expostos ao aprender". Isso, segundo Boaler (2020), fará com que os estudantes vejam a matemática como uma disciplina que faz sentido.

Por conseguinte, nos dedicamos a responder à seguinte pergunta norteadora: de que modo acontece a Gênese Instrumental das barras de Cuisenaire no processo de dar sentido à operação matemática operações com frações?

A possibilidade do ensino de frações por meio da perspectiva da medição, utilizando o material concreto barras Cuisenaire, é discutida por Powell (2018a; 2018b; 2019b) que defende a introdução ao ensino de frações interpretando-as como medida, compreendida como uma relação de comparação multiplicativa entre quantidades. A utilização das barras Cuisenaire para a instrução de frações vai ao encontro da argumentação de Caraça (1989), pois possibilita ao estudante escolher a unidade, além de comparar com a unidade e expressar o resultado dessa comparação por meio de um número.

Entretanto, a integração de diferentes recursos na prática pedagógica do professor sempre foi um desafio para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Desse modo, esta pesquisa teve como objetivo analisar, com base nas ações de um grupo de licenciandos em Matemática, a Gênese Instrumental das barras de Cuisenaire no processo de significação do objeto matemático divisão de frações.

Este trabalho está assim estruturado: inicialmente apresentamos os pressupostos essenciais da abordagem instrumental de Rabardel (1995), que suporta teoricamente nossas análises. Em seguida trazemos a metodologia do estudo, que apoiou-se no modelo da Orquestração Instrumental de Trouche (2005) e uma análise a priori das situações propostas. Na seção seguinte apresentamos nossas discussões e análises a posteri, e, por fim, fazemos algumas considerações.

REFERÊNCIAL TEÓRICO: ABORDAGEM INSTRUMENTAL DE RABARDEL

A teoria da ergonomia cognitiva, que trata dos processos mentais que afetam as interações entre os seres humanos e outros elementos de um sistema (por exemplo a interação homem-computador), é o pilar da Abordagem Instrumental de Rabardel (1995), que possui duas dialéticas fundamentais: artefato-instrumento e instrumentalização-instrumentação.

Para Rabardel (1995), um artefato é o objeto material (lápis, computador, Barras de Cuisenaire, etc) ou simbólico em si (uma figura, um gráfico etc), ou parte de um artefato mais complexo, disponível para um determinado usuário (indivíduo ou grupo de indivíduos que desenvolvem a ação). Por outro lado, um instrumento é o que o usuário constrói, a partir deste artefato, no decorrer da sua ação.

A este processo de desenvolvimento de um artefato em um instrumento, chamamos de gênese instrumental (RABARDEL, 1995), que se estabelece, para um dado indivíduo, pela apropriação e transformação do artefato para resolver um determinado problema mediante a uma variedade de contextos de uso. Por meio desta se constituem os esquemas de utilização do artefato.

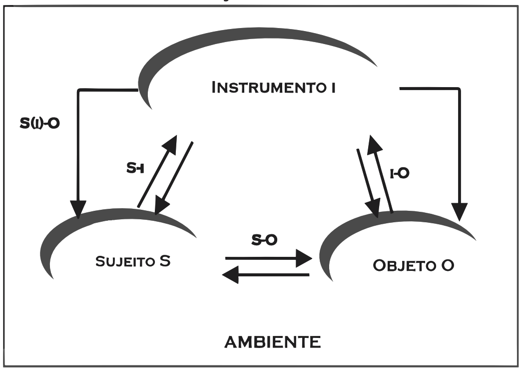
Rabardel (1995) utiliza o termo "esquema", que, de acordo com Vergnaud (1996), "[...] é uma organização invariante de comportamentos para classes de situações", e é formada necessariamente por quatro componentes: um objetivo; regras de ação de tomada de informação e de controle; invariantes operatórios (conceitos em ação e teoremas em ação); possibilidades de inferência em situação. São nos esquemas que devemos procurar os elementos cognitivos que possibilitam que a ação do usuário seja operatória.

O objetivo é a parte intencional do esquema. Os invariantes operatórios conduzem o reconhecimento pelo sujeito dos elementos pertinentes da situação e apreensão da informação sobre a situação a tratar. Enquanto um conceito em ação é um conceito considerado pertinente na ação em situação, um teorema em ação é uma proposição tida como verdadeira na ação em situação. As regras de ação permitem gerar a sequência de ações dos sujeito constituindo a parte geradora do esquema, aquela que é mais imediatamente responsável do transcurso temporal da conduta e da atividade. As inferências permitem calcular as regras e as antecipações a partir das informações e do sistema de invariantes operatórios de que dispõe o sujeito (VERGNAUD, 1990).

A Abordagem Instrumental dedica-se à análise dos aspectos intrínsecos ao artefato e ao instrumento, assim como ao processo que leva à transformação gradual do artefato em instrumento (Gênese Instrumental). Conforme Verillon e Rabardel (1995 apud SALAZAR, 2009), esse processo tem como objetivo integrar as características dos artefatos (suas potencialidades e limitações) com as atividades do sujeito - seus conhecimentos e métodos de trabalho.

O foco de interesse de Rabardel (1995) é a transformação do uso do artefato em um instrumento, propondo, então, o modelo SAI (Situações de Atividades Instrumentais), apresentando as relações entre o sujeito e o objeto mediado pelo instrumento. O modelo SAI (Figura 1) pode ser uma ferramenta para examinar, detalhadamente, o uso de instrumentos em uma tarefa. O instrumento como mediador possui a orientação de Objeto-sujeito (é o meio que permite o conhecimento do objeto) e de Sujeito–objeto (é o meio da ação transformadora dirigida sobre o objeto).

Figura 1. Modelo de Situações de Atividades Instrumentais



Fonte: Rabardel (1995, p. 65)

Para Rabardel (1995) os esquemas mediam o sujeito e sua atividade e nomeia os esquemas relacionados ao uso do artefato como esquemas de utilização (E.U.), que estão relacionado a dois aspectos da atividade. O primeiro concatena atividades ligadas às tarefas secundárias, que referem-se à gestão das características e propriedades particulares do artefato, como por exemplo, funcionamento e manipulação. Nesse caso, os esquemas são definidos como esquemas de uso (E.Us.). O segundo aspecto tem a ver com as atividades primárias, que são aquelas direcionadas ao objeto da atividade, na qual o artefato é um meio de concretização e de realização. Nesse casso os esquemas são definidos como esquemas de ação instrumental (E.A.I.).

Segundo Rabardel (1995), a partir desses esquemas surgem os Esquemas de Atividade Coletiva Instrumental (E.A.C.I.), pois os indivíduos envolvidos em uma atividade coletiva utilizam esquemas de uso que envolvem a coordenação de ações individuais e a integração de seus resultados para alcançar objetivos em comum. Isso significa que o grupo trabalha com um mesmo instrumento ou com uma classe de instrumentos similar, o que faz com que os esquemas de uso tenham tanto uma dimensão individual quanto social.

Conforme Rabardel (1995), o processo de gênese instrumental é determinado por meio de dois processos: instrumentalização (orientada para o artefato) e instrumentação (orientada para o sujeito), que constituem partes indissociáveis da mesma. O primeiro consiste na emergência e evolução dos diferentes componentes do artefato, ou seja, consiste em um progressivo reconhecimento das suas potencialidades e limitações por parte do sujeito. Pode ainda ser caracterizado como um processo pelo qual o sujeito modifica, adapta ou produz novas propriedades, personalizando o artefato de acordo com suas demandas (ZUCHI, 2008). O segundo compreende na emergência e desenvolvimento de esquemas de utilização. Zuchi (2008) caracteriza a instrumentação como um processo pelo qual as especificidades e as potencialidades de um artefato vão condicionar as ações de um sujeito para resolver um dado problema.

Ao tratar dessas dimensões, Salazar (2009), ao citar Trouche (2004), destaca: "[...] a instrumentação e a instrumentalização não são processos independentes, mas sua separação permite, de maneira didática, observar o processo de Gênese Instrumental."

Bellemain e Trouche (2018) apontam algumas fragilidades no desenvolvimento da abordagem instrumental do didático. Uma delas é a sua responsabilidade no apoio às gêneses instrumentais dos estudantes. Segundo esses autores, é o desenvolvimento de outro conceito, o de orquestração instrumental, que vai tentar responder a esta questão crítica. Dessa forma, no presente estudo apoiamo-nos nos elementos essenciais de uma Orquestração Instrumental como procedimentos metodológicos, que descrevemos na próxima seção.

METODOLOGIA

Esta pesquisa tem uma abordagem qualitativa. Segundo Creswell (2010, p. 26):

> A pesquisa qualitativa é um meio para explorar e para entender o significado que os indivíduos ou os grupos atribuem a um problema social ou humano. O processo de pesquisa envolve as questões e os procedimentos que emergem, os dados tipicamente coletados no ambiente do participante, a análise dos dados indutivamente construída a partir das particularidades para os temas gerais e as interpretações feitas pelos pesquisador acerca do significados dos dados.

Quanto aos objetivos, trata-se de uma pesquisa descritiva, que, segundo Gil (2008, p. 28), "tem como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou o estabelecimento de relações entre variáveis". Quanto aos procedimentos, podemos classificar este estudo como uma pesquisa-ação, que, segundo a definição de Thiollent (1985, p. 14), é:

> um tipo de pesquisa social com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos do modo cooperativo ou participativo.

Para os procedimentos metodológicos do estudo, utilizamos a estrutura própria da concepção de uma Orquestração Instrumental - OI (TROUCHE, 2005, p. 126):

> Uma orquestração instrumental é o arranjo sistemático e intencional dos elementos (artefatos e seres humanos) de um ambiente, realizado por um agente (professor) no intuito de efetivar uma situação dada e, em geral, guiar os aprendizes nas gêneses instrumentais e na evolução e equilíbrio dos seus sistemas de instrumentos. É sistemático porque como método, desenvolve-se numa ordem definida e com um foco determinado, podendo ser entendido com um arranjo integrado a um sistema; é intencional porque uma orquestração não descreve um arranjo existente (sempre existe um), mas aponta para a necessidade de um pensamento a priori desse arranjo.

Os elementos essenciais de uma OI são: a configuração didática, o modo de execução e o desempenho didático (DRIJVERS *et al*., 2010). A configuração didática diz respeito à organização da sala de aula e às escolhas didáticas do professor em relação à tarefa matemática, aos recursos a serem fornecidos, aos papéis das pessoas envolvidas e outros aspectos. Por outro lado, o modo de execução é a forma como o professor decide explorar a configuração didática em benefício de suas intenções didáticas. Isso inclui decisões sobre a forma como uma tarefa é apresentada e trabalhada, sobre os possíveis papéis dos artefatos a serem desempenhados e sobre os esquemas e técnicas a serem desenvolvidos e estabelecidos pelos alunos.

O desempenho didático envolve as decisões *ad hoc* tomadas durante a aula sobre como realmente realizar o ensino na configuração didática e no modo de execução escolhidos: que questão levantar agora, como fazer justiça à (ou deixar de lado) qualquer entrada particular do aluno, como lidar com um aspecto inesperado da tarefa matemática ou da ferramenta tecnológica? Além disso, pode-se analisar se a execução da orquestração instrumental criada foi ou não propícia aos seus objetivos de ensino.

O modo de execução da OI desenvolvida neste estudo, vai ao encontro da ideia de Ximenes, Pedro e Corrêa (2022) no sentido que, ao se realizar pesquisas sobre formação de professores, é importante considerá-los como sujeitos-autores do seu próprio processo formativo, visando a diminuir a hierarquização entre pesquisador e sujeitos da pesquisa.

As situações propostas são tarefas matemáticas de mentalidade de crescimento (BOALER, 2018) pois são tarefas abertas, haja visto que possuem diversos métodos, rotas e representações, incluem a oportunidade de investigação, possuem componentes visuais possibilitados pelo artefato e os participantes são estimulados a argumentar e convencer os demais colegas sobre sua solução.

Ao todo foram aplicadas sete situações, entretanto, neste trabalho trazemos a análise de apenas quatro. No Quadro 1, são apresentados os elementos essenciais da orquestração desenvolvida.

Quadro 1. Orquestração Instrumental

Configuração Didática	
Situações	1. Escolha uma barra e atribua a ela a medida de uma fração unitária: 1/2, 1/3, 1/4 ou 1/5. (a) Se você desejar separar essa barra em partes iguais usando outras barras de Cuisenaire, de quantas maneiras diferentes poderia fazer isso? (b) Em quantas partes ela poderia ser separada? (c) Qual é a medida de cada uma dessas barras menores? Como você determinou? 2. Selecione como unidade de medida a barra roxa. Determine a medida de uma barra menor e de uma maior em unidades de barras roxas. Em seguida, considere o comprimento da barra marrom como a unidade de medida e proceda como anteriormente. Use pelo menos, uma representação figural usando as Barras de Cuisenaire, uma representação verbal e uma representação simbólica. 3. Quantas barras de ½ de uma certa unidade são necessárias para obtermos 3 dessas unidades? E se forem barras de ¼? E 2/3? 4. Quantas barras de ¼ de certa unidade são necessárias para obtermos ½ dessa unidade?

Objetivos	1. Usar as barras de Cuisenaire para explorar os padrões que surgem ao dividir uma fração em peças de mesmo tamanho. 2. Estudar a noção de fração na perspectiva de medição, na qual uma fração é uma comparação multiplicativa entre duas quantidades do mesmo tipo, medidas pela mesma unidade. 3. Desenvolver provas visuais para a divisão de números inteiros por frações; Criar conjecturas para explicar os padrões que observam. 4. Desenvolver provas visuais para a divisão de fração por fração; Criar conjecturas para explicar os padrões que observam.
Artefato	Barras de Cuisenaire
Recursos	Projetor, *notebook*, celular, microfone
Tempo	Duas aulas de 1h30min cada
Formato	Presencial
Papeis	Os participantes trabalharão em grupo e os pesquisadores terão a função de conduzir as atividades e coordenar as discussões.
Modo de Execução	
As situações serão realizadas em uma sala de aula, onde os participantes serão divididos em grupos de 3 ou 4 membros. Inicialmente os pesquisadores projetam as situações e explicam para os participantes que eles devem trabalhar de forma colaborativa. Um conjunto de barras de Cuisenaire será entregue para cada grupo. A cada situação resolvida, um membro do grupo explica para os pesquisadores como o grupo chegou à solução. Os participantes serão orientados a revezar o papel de quem explicará as soluções obtidas para cada situação. O celular e o microfone serão usados para gravar os participantes explicando como resolveram cada situação.	

Fonte: Elaboração pelos autores

Cabe observar que usaremos o verbo "separar" ao invés de "dividir". Isso porque, em matemática, "dividir em" tem um significado específico e a ordem faz diferença. E ao trabalhar com frações os estudantes estarão trabalhando com números que podem ser divididos em qualquer ordem, cada um com uma resposta diferente.

Chamamos a atenção ainda para o fato de, dada uma determinada unidade de medida e um número inteiro b, a expressão simbólica $1/b$ é uma fração unitária e representa o comprimento de uma quantidade. Quando essa quantidade é iterada b vezes, o resultado é um comprimento igual à unidade de medida. De forma geral, para uma dada unidade de medida e números inteiros a e b, a expressão a/b representa uma medida que é igual ao comprimento $1/b$ iterado a vezes. Ressalta-se que o termo "comprimento" pode ser substituído por qualquer outro atributo mensurável de uma quantidade como área, volume, massa ou tempo.

Na perspectiva de medição, um número fracionário representa não uma parte de um objeto partido em seções iguais, mas de uma outra relação matemática: a de proporção ou comparação multiplicativa entre duas quantidades da mesma espécie que têm uma unidade de comensurabilidade.

A seguir, apresentamos uma análise a priori de como as situações poderiam ser resolvidas pelos participantes, com suporte do artefato barras de Cuisenaire. Inicialmente, elaboramos o Quadro 2 no qual fazemos uma correspondência de cores-letras das barras de Cuisenaire que será usada no decorrer do texto.

Quadro 2. Correspondência de cores-letras das barras de Cuisenaire, da menor para a maior

Branca	Vermelha	Verde clara	Roxa	Amarela	Verde escura	Preta	Marrom	Azul	Laranja
BR	VM	VC	RX	AM	VE	PR	MR	AZ	LR

Fonte: Elaboração pelos autores

Situação 1

Regras de ação: escolher uma barra e atribuir-lhe a medida de uma fração unitária: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$. Para saber a medida das barras que separam a barra escolhida em partes iguais, colocar em sequência outras peças da barra escolhida até obter um inteiro. Em seguida, verificar quantas das barras menores são necessárias para formar esse inteiro e daí obter a medida de cada uma dessas barras menores.

Os conceitos-em-ação envolvidos nessa situação são: fração unitária e divisão de fração por número inteiro. E o teorema-em-ação: $\frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b \times c}$.

Situação 2

Regras de ação: Selecionar a barra roxa como unidade de medida e escolher uma barra menor (maior) do que a barra roxa. Encontrar uma barra que separe em partes iguais tanto a barra roxa quanto a barra menor (maior). Considerando *b* como sendo a quantidade de partes em que a barra roxa é separada e *a* a quantidade de partes em que a barra menor (maior) é separada, concluir que a medida da barra menor (maior) é dada por $\frac{a}{b}$. O caso em que a unidade é a barra marrom pode ser resolvido de modo análogo.

Esta situação visa a estudar a noção de fração na perspectiva de medição, na qual uma fração é uma comparação multiplicativa entre duas quantidades do mesmo tipo, medidas pela mesma unidade. Como conceitos-em-ação temos: unidade de medida, fração unitária e comprimentos comensuráveis. E teorema-em-ação: (i) Sejam A e B duas quantidades tais que $A = m \times u$ e $B = n \times u$, onde m e n são números inteiros e u representa uma unidade de medida. Então, a medida de A em termo de B é dada por $\frac{m}{n}$ e a medida de B em termo de A é dada por ; (ii) $a + \frac{b}{c} = \frac{(a \times c) + b}{c}$.

Situação 3

Regras de ação: Tomar inicialmente uma barra para ser a unidade e que possa ser separada em b (2, 3 ou 4) partes iguais por uma barra menor. Colocar três barras da unidade em sequência e observar quantas barras menores são necessárias para obter três dessa unidade.

Dessa forma, desenvolvemos uma prova visual para as divisões $a \div \frac{1}{b}$ e $a \div \frac{c}{b}$. Como conceitos-em-ação temos: unidade de medida, fração unitária, comprimentos comensuráveis e divisão de um número inteiro por uma fração. E teorema-em-ação: $a \div \frac{b}{c} = \frac{a \times c}{b}$.

Situação 4

Regras de ação: Escolher uma barra que possa ser separada em duas e em quatro partes iguais. Perceber que para obtermos $\frac{1}{2}$ dessa unidade são necessárias 2 barras de $\frac{1}{4}$.

Desenvolvemos assim uma prova visual para a divisão $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$. Como conceitos-em-ação temos: unidade de medida, fração unitária, comprimentos comensuráveis e divisão de fração por fração. E teorema-em-ação: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$.

Na próxima seção, passaremos às análises a posteriori, que obedeceram a seguinte estrutura: 1^0) relato das ações produzidas pelos sujeitos, por meio dos diálogos e soluções que eventualmente tenham sido produzidas; 2^0) análise das ações e confrontação dos dados obtidos com as análises prévias.

No que tange ao atendimento das questões éticas da pesquisa, os participantes foram esclarecidos quanto aos objetivos do estudo e foram convidados a participar por meio do termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE). De acordo com a Resolução CNS 466/12, item V, toda pesquisa com seres humanos envolve riscos em tipos e gradações variadas. Ressalte-se ainda o item II.22 da mesma resolução que define como "Risco da pesquisa - possibilidade de danos à dimensão física, psíquica, moral, intelectual, social, cultural ou espiritual do ser humano, em qualquer pesquisa e dela decorrente". Visando evitar danos à dimensão física dos sujeitos devido à pandemia, todas as etapas do estudo foram realizadas por meio remoto. Visando evitar danos à dimensão psíquica e/ou moral, todos os registros audiovisuais e documentais foram restritos à pesquisa, ficando vedada sua exposição para o público externo. Na divulgação dos dados do estudo, a identidade dos sujeitos foi preservada.

RESUTADOS E DISCUSSÕES

Os participantes do estudo foram acadêmicos do curso de licenciatura em Matemática de uma universidade pública do Amazonas (Figura 2). Inicialmente prevista para acontecer em um único dia, a orquestração foi desenvolvida em dois dias, com 1h30min de atividade cada. A razão para esta mudança foi o fato de os participantes levarem mais tempo do que o previsto para completar cada situação usando as barras de Cuisenaire. No primeiro dia participaram 19 acadêmicos e no segundo dia, 13.

Figura 2. Configuração didático da OI

Fonte: Elaborado pelos autores

Nossa análise será dada a partir dos Esquemas de Atividade Coletiva Instrumental (E.A.C.I.), pois os participantes foram envolvidos em uma atividade coletiva e trabalharam com um mesmo artefato, a saber, as barras de Cuisenaire, o que fez com que os esquemas de uso tivessem tanto uma dimensão individual quanto social.

As situações foram colocadas uma de cada vez e dado o tempo de 8 a 10min para os grupos encontrarem uma maneira de resolvê-las. Os grupos foram orientados a, quando concluírem a tarefa, fazer um sinal para os pesquisadores, que iam até o grupo para registrar, em imagens e vídeo, a explicação do grupo para a solução encontrada. Em seguida, um membro de cada grupo era convidado a compartilhar com a turma as soluções encontradas por seu grupo.

Na Situação 1, cada grupo deveria escolher uma barra e atribuir o valor de uma fração unitária: 1/2, 1/3, 1/4 "ou" 1/5. O Quadro 3 apresenta as barras escolhidas por cada grupo, o valor atribuído a cada uma e as barras que as dividem em partes iguais.

Quadro 3. Barras e valores escolhidos pelos grupos na Situação 1

Grupo	Barra	Valor	Barra menor
1	RX	1/2	VM
2	LR	1/3	VM
3	MR	1/4	RX
4	VE	1/5	VC

Fonte: Elaboração pelos autores

O primeiro grupo explicou da seguinte maneira o seu E.A.C.I.:

> **Membro do Grupo 1**: *A gente escolheu a barra roxa e atribuímos o valor de um meio e dividiu a barra roxa em duas partes com a barra vermelha. Que no caso a vermelha seria representando um quarto".* (Figura 3)

Figura 3. Representação figural do grupo 1 para a situação 1

Fonte: Dados da pesquisa

Quando questionados como eles concluíram que o valor da barra vermelha era um quarto, o grupo respondeu:

> **Membro do Grupo 1**: *A gente tinha uma inteira [barra marrom] que representava duas vezes a roxa, que seria a metade. A gente consegue dividir essa inteira com quatro vermelhas, aí a gente atribui o valor de um quarto para a vermelha.*

O grupo foi questionado da relação da barra branca com as barras roxa, marrom e vermelha, e responderam:

> **Membro do Grupo 1**: *Ela [a barra branca] ia representar um oitavo da inteira, um*

meio da vermelha e um quarto da roxa.

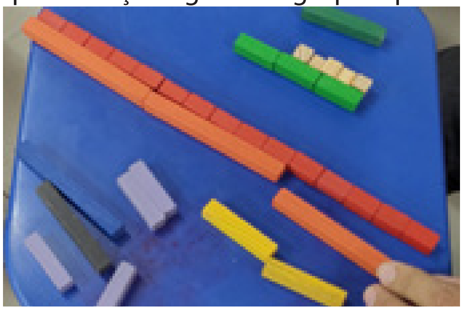
A regra de ação do grupo corresponde à regra de ação prevista na análise à priori acrescida de mais uma etapa: escolher uma barra que tenha a mesma medida desse inteiro.

O segundo grupo deu a seguinte explicação para seu E.A.C.I.:

> **Membro do Grupo 2**: *Pegamos a barra laranja e o valor dela nós colocamos o de um terço. Para formar um inteiro nós precisamos de três barras laranjas, aí forma um inteiro. Então pegamos a barra vermelha e vimos em quantas partes ela dá nesse inteiro e calculamos que são 15. Então a fração da peça pequena [barra vermelha] ficou um quinze avos*. (Figura 4)

Quando perguntados que operação estava representada na situação proposta, o grupo percebeu que era $\frac{1}{3} \div 5$.

Figura 4. Representação figural do grupo 2 para a situação 1

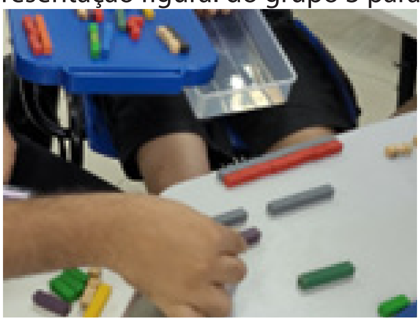


Fonte: Dados da pesquisa

O E.A.C.I. do terceiro grupo foi:

> **Membro do Grupo 3**: *Primeiramente a gente pegou a barra marrom e disse que valia um meio. Para poder formar um inteiro a gente vai pegar duas barras marrons. Para poder dar um inteiro pegamos quatro pecinhas [barras] roxas. E ficou um quarto*. (Figura 5)

Figura 5. Representação figural do grupo 3 para a situação 1.



Fonte: Dados da pesquisa

Finalmente, o quarto grupo explicou da seguinte forma seu E.A.C.I.:

> **Membro do Grupo 4**: *A gente escolhe a verde escuro e escolheu o valor de um terço. Se ele é um terço a gente completou aqui ele todinho para ele formar um inteiro. Aí depois a gente contou as pecinhas [barras] verde claro para dar um verde escuro são dois verdes claro. A gente contou as pecinhas […] então se precisa de duas pecinhas [barras verde claro] então são dois sextos.* (Figura 6)

Figura 6. Representação figural do grupo 4 para a situação 1.

Fonte: Dados da pesquisa

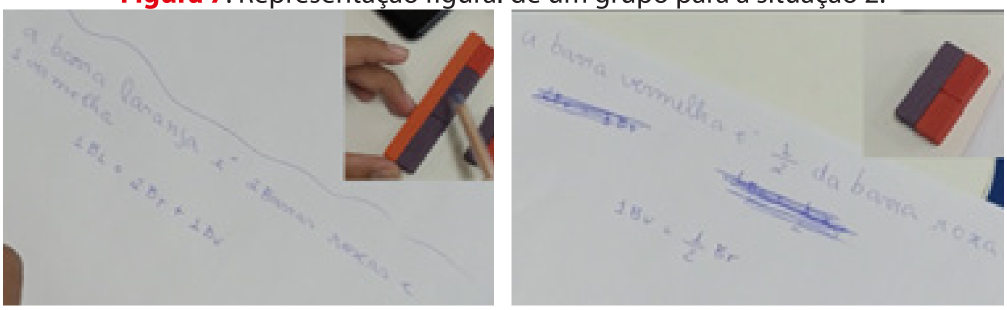
O grupo também observou que nove barras vermelhas resultavam no inteiro formado por três peças verde escuro, e portanto as três peças vermelhas representavam três nonos da unidade. Nesse momento os pesquisadores chamaram a atenção para o fato deles terem obtido uma representação visual para a noção de frações equivalentes.

A regra de ação de todos os grupos corresponde à prevista na análise à priori, ou seja: escolher uma barra $\Rightarrow$ atribuir a ela o valor de uma fração unitária: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$ $\Rightarrow$ colocar em sequência outras peças da barra escolhida até obter um inteiro $\Rightarrow$ verificar quantas das barras menores formam esse inteiro $\Rightarrow$ obter o valor de cada uma dessas barras menores.

Na situação 2 os grupos deveriam inicialmente escolher a barra roxa como unidade de medida e, a partir daí, determinar a medida de uma barra menor e de uma maior em unidades de barra roxa. Em seguida, deveriam considerar o comprimento da barra marrom como a unidade de medida e proceder como anteriormente. A seguir trazemos o E.A.C.I. de alunos de três grupos para esta situação, a representação figural usando as Barras de Cuisenaire, a representação verbal e uma representação simbólica.

> **Aluno (A)**: *A gente definiu como unidade a barra roxa. Aí a gente definiu que a unidade menor seria a barra vermelha e a gente viu que a barra vermelha é um meio da barra roxa. Aí depois como a barra maior a gente escolheu a barra laranja e a gente viu que a barra laranja é igual a duas barras roxas mais uma barra vermelha.* (Figura 7)

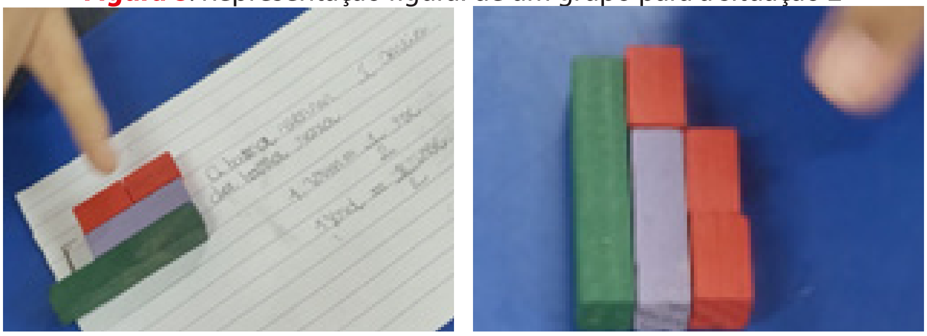
Figura 7. Representação figural de um grupo para a situação 2.



Fonte: Dados da pesquisa

> **Aluno (B)**: *Temos aqui a roxa e a pequena que nós escolhemos para medir foi a vermelha e a maior que nós escolhemos foi a verde escuro. A vermelha equivale a metade da roxa. E agora a verde [verde escura] ela dá uma roxa mas não dá duas roxas completas. Porém, se a gente colocar o vermelho [barra vermelha] que vale a metade da roxa, nós temos aqui uma roxa mais metade dessa roxa para completar essa verde escuro.* (Figura 8)

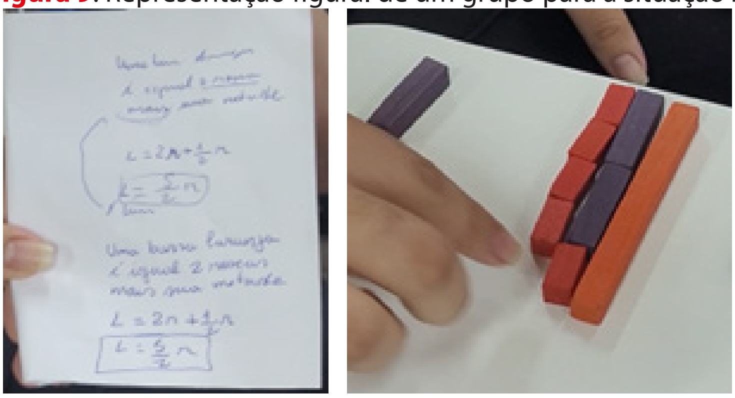
Figura 8. Representação figural de um grupo para a situação 2



Fonte: Dados da pesquisa

Aluno (C): *A gente pegou a barra roxa como sendo a medida unitária. Nós pegamos e colocamos aqui uma barra laranja para poder achar o valor dela. E dizemos assim, a barra laranja é duas vezes a roxa mais a sua metade [da barra roxa]. E agora pra saber quanto é que vale isso aqui [barra laranja], vale cinco sobre dois porque a barra roxa vale dois [duas barras vermelhas].* (Figura 9)

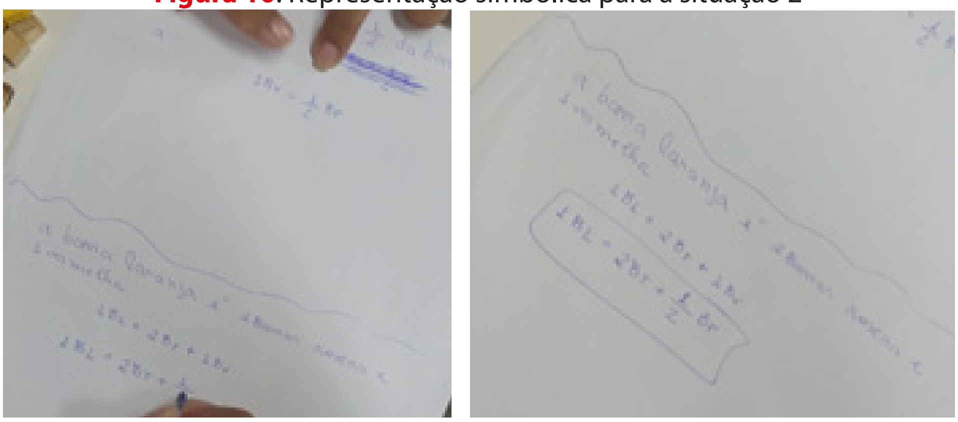
Figura 9. Representação figural de um grupo para a situação 2



Fonte: Dados da pesquisa

No caso do grupo que apresentou o primeiro E.A.C.I. (Aluno (A)), ressaltamos ao grupo que a resposta deveria estar toda em termos de barras roxas e questionamos qual a relação entre a barra vermelha e a barra roxa. Na Figura 10 vemos um membro do grupo chamando a atenção para o fato de que a medida de uma barra vermelha é igual à metade de uma barra roxa, o que permitiu ao grupo chegar na representação simbólica correta.

Figura 10. Representação simbólica para a situação 2



Fonte: Dados da pesquisa

A situação 2 é particularmente interessante por dois motivos. O primeiro por trazer fortemente a fração no sentido de medida: a utilização das barras Cuisenaire para a instrução de frações possibilitou aos participantes escolher a unidade, fazer comparações com essa unidade e expressar o resultado dessa comparação por meio de um número.

E o segundo, por proporcionar aos participantes a oportunidade de manusear diferentes representações (língua natural, simbólica, figural) e transformações (tratamentos e conversões) associadas à situação proposta. É sabido que Vergnaud (1993) ressalta a importância das representações no estudo da formação e do desenvolvimento de um conceito durante a aprendizagem, colocando-as como um dos elementos essenciais de um conceito.

Para a realização das situações 3 e 4, os grupos foram rearranjados, obtendo-se três grupos, dois com 4 membros e um grupo com 5 membros. Essa reorganização dos grupos caracteriza-se como uma decisão *ad hoc* e foi necessária devido ao fato de no segundo dia da aplicação das atividades alguns participantes terem faltado.

A situação 3 visa a desenvolver provas visuais, com apoio das barras de Cuisenaire, para a divisão de números inteiros por frações e levar os participantes a criarem conjecturas para explicar os padrões que observam. Para determinar quantas barras de ½ de uma certa unidade são necessárias para obtermos 3 dessas unidades, os grupos explicaram assim seus E.A.C.I.:

> **Primeiro Grupo**: *Primeiro a gente viu que a gente pode dividir o roxo em dois, no caso a gente dividiu em duas barrinhas vermelhas, aí 6 barrinhas vermelhas, a gente consegue 3 roxas que era o que foi proposto no problema.*
> **Segundo Grupo**: *Nós pegamos dois tipos de barra, a verde escuro e a verde claro. Daí nós temos três barras verde escuro que cada uma corresponde a duas verde claro. Então precisou de 6 barras verde claro para preencher equivaler a 3 barras verde escuro.*
> **Terceiro Grupo**: *No primeiro caso, a gente escolheu algo que representaria o nosso um meio, no caso escolhemos a barra branca. E aí se ela é um meio de algo, a gente somou com ela novamente e aí teríamos a nossa unidade, que vimos que seria a barra vermelha [...] então a gente pega mais duas unidades da vermelha e completa com as barrinhas brancas para ver quantas são. E aí a gente viu que precisaríamos de 6 barras de um meio para representar 3 unidades.*

Para o caso de barras de $\frac{1}{4}$ os grupos resolveram da seguinte forma seu E.A.C.I.:

> **Primeiro Grupo**: *Aqui a gente viu que uma barra vermelha vale um quarto da barra marrom e com 12 barrinhas vermelhas, a gente consegue formar 3 barras marrons, que são as nossas unidades.*
> **Segundo Grupo**: Nós pegamos a barra lilás e dá *pra separar ela em quatro barras brancas. E no final totalizou quatro barras brancas [em cada lilás] e 12 barras brancas no total.*
> **Terceiro Grupo**: *Passando para o segundo caso, a gente utilizou a vermelha para representar o um quarto de unidade. Então a gente soma ela com mais três, que aí a gente vai ter a unidade que a gente viu que seria a barra marrom. E aí a gente vai fazer a mesma coisa que no caso anterior: a gente pega mais duas barras marrons para ser nossas três unidades e complementa com as barrinhas vermelhas que equivalem a um quarto, e a gente viu que iríamos precisar de 12 barras de um quarto para ter 3 unidades.*

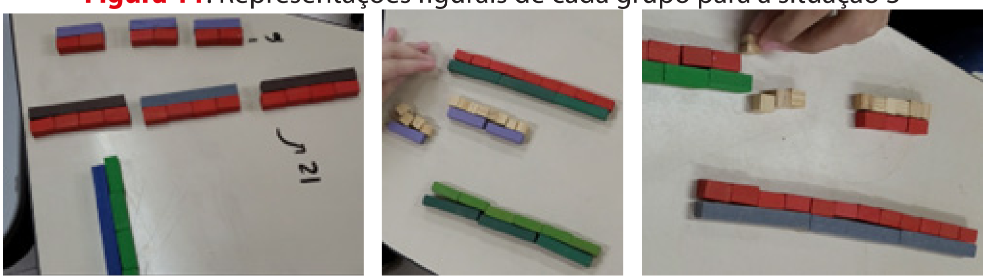
Percebe-se nesses dois primeiros casos, duas regras de ação distintas usadas pelos grupos: (1) Escolher uma barra para representar a unidade $\Rightarrow$ Buscar um barra menor que separe esta unidade em duas (ou quatro) partes iguais ⇒ Verificar quantas dessa barra menor são necessárias para obter três unidades; (2) Escolher uma barra para representar um meio (ou um quarto) de certa unidade ⇒ Juntar duas (quatro) dessas barras para obter uma unidade ⇒ Verificar quantas dessa barra são necessárias para obter três unidades.

E finalmente, para o caso de barras de $\frac{2}{3}$ os grupos resolveram da seguinte forma:

> **Primeiro Grupo**: *Nesse último a gente descobriu que 3 barrinhas verde claro cabem em uma barra azul. Aí a gente pegou e dividiu pra descobrir o dois terços. Então a gente dividiu por dois terços, que deu 4 e um meio em relação ao dois terços, então a gente descobriu que 3 dividido por dois terços é 4 partes e um meio.*
> **Segundo Grupo**: *Pegamos três barras verde escuro e cada barra dessas pode ser dividida em três barras vermelhas, sendo que duas barras vermelhas representam o dois terços. Então vimos que sobrava uma certa quantidade que deveríamos achar, sobrava uma barra vermelha, que equivale a um meio do dois terços. Então a gente viu que o dois terços cabe quatro vezes mais um meio dele nas três unidades.*
> **Terceiro Grupo**: *Para o caso que é dois terços, a gente fez de uma maneira diferente. A gente escolheu primeiro a unidade, que no caso seria a barra verde claro, e aí como a gente poderia representar dois terços dela. A primeira observação que a gente fez é que ela podia ser dividida em três partes [por três barras brancas], e a gente viu que se a gente retirar isso daqui [uma barra branca], isso daqui [duas barras brancas restantes] seria equivalente a dois terços da barra verde. Só que isso [dois terços] pode ser representado por uma outra barra vermelha. Então a gente substitui e tem que a barra vermelha equivale a dois terços da barra verde claro. Então a gente completa as três unidades de verde claro e agora a gente vai somando para ver quantas unidades de dois terços a gente precisa. Deu quatro, mas a partir do momento que a gente somasse a quinta barra vermelha, isso ia passar, então a gente viu qual era a outra barra pra completar isso e ficar certinho, e a gente viu que a barra branca ficaria perfeita essa soma. Só que o que que é a barra branca? A barra branca equivale a um meio da barra vermelha. Então pra gente ter essa soma, a gente vai precisar de quatro barrinhas de dois terços mais um meio desse dois terços.*

Nos esquemas desenvolvidos pelos grupos para este caso, uma diferença, além das barras escolhidas, foi a substituição das duas barras menores que representam dois terços da barra escolhida como unidade, por uma única barra. Essa regra de ação foi realizada pelo terceiro grupo. Na Figura 11 mostramos as representações figurais que cada grupo criou para a situação proposta.

Figura 11. Representações figurais de cada grupo para a situação 3



Fonte: Dados da pesquisa

A situação 4 visa a desenvolver provas visuais por meio das barras de Cuisenaire para a divisão de fração por fração. É pedido que os participantes descubram quantas barras de $\frac{1}{4}$ de certa unidade são necessárias para obtermos $\frac{1}{2}$ dessa unidade. A seguir apresentamos o E.A.C.I. dos grupos para esse caso:

> **Primeiro Grupo**: *Eu tenho essa barra [marrom] que representa o meu inteiro. Um quarto dessa barra é esse pedacinho aqui [uma barra vermelha]. Ele quer saber quantas barras de um quarto eu vou precisar pra fazer metade dessa barra aqui [barra marrom], que é um meio. Então se eu for olhar aqui, a metade dessa barra [barra marrom] seriam duas vezes um quarto, um quarto mais um quarto, que vai dar um meio da barra grande [barra marrom], que é a barra roxa.*
> **Segundo Grupo**: *A gente dividiu a marrom em quatro partes, ou seja, uma pecinha vermelha equivale a um quarto da marrom. Depois a gente descobriu que duas pecinhas vermelhas são a metade da marrom, se cada uma vale um quarto, um quarto mais um quarto equivale a um meio. Então […] eu preciso de duas peças de um quarto.*
> **Terceiro Grupo**: *A gente começou escolhendo a nossa unidade, escolhemos a barra marrom para representar. Aí primeiro a gente dividiu ela para ter a representação em um quarto, ou seja, dividimos ela em quatro partes iguais. A gente viu que cada barrinha vermelha representaria nosso um quarto da barrinha marrom. Só que aí ele tá querendo saber quantas barrinhas de um quarto são necessárias para representar um meio da nossa unidade. Então agora a gente vai representar a nossa unidade dividindo ela em dois e a gente vê que ela pode ser representada por duas barrinhas roxas, que no caso seria nosso um meio. E aí agora a gente faz essa divisão né, que é pra ter um meio, quantas barrinhas de um quarto eu preciso, e a gente viu que precisava de duas. A gente fez a divisão de um meio por um quarto.*
> Nos esquemas desenvolvidos pelos grupos para este caso, a regra de ação do primeiro e do segundo grupo difere da regra de ação do terceiro grupo somente na ação de substituir duas barras que representam um quarto (cada uma) da unidade escolhida por uma única barra.

CONCLUSÕES

Este estudo se propôs a responder a seguinte pergunta norteadora: de que modo acontece a Gênese Instrumental das barras de Cuisenaire no processo de dar sentido à operação matemática divisão com frações? Para tanto, definimos como objetivo analisar, com base nas ações de um grupo de licenciandos em Matemática, a Gênese Instrumental das barras de Cuisenaire no processo de significação da operação matemática divisão de frações.

Por meio da Abordagem Instrumental, pudemos analisar as ações dos sujeitos enquanto resolviam tarefas matemáticas de mentalidade de crescimento. Essas análises foram baseadas em duas orientações: instrumentação e instrumentalização.

A instrumentalização é a relação entre o sujeito e o objeto mediado pelo instrumento, bem como, a relação entre o instrumento e o objeto. A evidência da ocorrência desse processo pode ser percebida nos momentos em que os participantes selecionaram peças específicas das barras de Cuisenaire para atender aos objetivos e condições das situações, como por exemplo, "escolher uma barra que possa ser separada em duas ou em três partes iguais". Ou ainda, quando agruparam peças, produzindo e definindo funções, transformando o artefato e enriquecendo suas propriedades, como por exemplo, "atribuir o valor 1/3 a uma barra e agrupar em sequência três dessas barras para obter uma unidade".

No modelo SAI, o processo de instrumentação se refere à relação entre o sujeito e o instrumento. Esse processo ficou evidenciado quando os participantes construíram esquemas, procedimentos e operações para a utilização do artefato barras de Cuisenaire. Pôde-se perceber o surgimento e evolução de esquemas de utilização e da ação instrumental.

Dessa forma, o artefato barras de Cuisenaire, agregado aos esquemas de utilização mobilizados ou construídos nas ações dos participantes, transformou-se em instrumento. Vale ressaltar que as análises das tarefas propostas e as atividades realizadas foram fundamentais para a percepção dos esquemas de utilização do tipo esquemas de ação coletiva instrumentada.

Os dados dão indícios de que o fato das situações propostas serem tarefas abertas contribuiu para a diversidade de esquemas de ação coletiva instrumentada e oportunizou a investigação. Ademais, o artefato barras de Cuisenaire favoreceu as representações dos esquemas e foi um importante componente visual. Por fim, o trabalho em grupo estimulou os participantes a argumentar e convencer os demais colegas sobre seus esquemas individuais.

Como perpectivas de estudos futuros, visamos a analisar, à luz do modelo SAI, orquestrações instrumentais que busquem favorecer a gênese instrumental de artefatos materiais como réguas de frações e Geoplano em situações de tarefas abertas e no contexto do trabalho em grupo.

AGRADECIMENTOS

Á **Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas – FAPEAM** pelo apoio no âmbito do Programa de Apoio a Pós-Doutores – PRODOC/FAPEAM – Edital n.º 003/2022.

REFERÊNCIAS

BAILEY, Drew H. *et al*. Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. **Journal of experimental child psychology**, v. 113, n. 3, p. 447-455, 2012. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022096512001063. Acesso em: 15 jun. 2023.

BELLEMAIN, Franck; TROUCHE, Luc. Compreender o trabalho do professor com os recursos de seu ensino, um questionamento didático e informático. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, v. 9, n. 1, p. 105-144, 2018. Disponível em: http://funes.uniandes.edu.co/28574/1/Bellemain2018COMPREENDER.pdf. Acesso em: 15 jun. 2023.

BOALER, Jo. **Mentalidades matemáticas:** estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Porto Alegre: Penso, 2018.

BOALER, Jo. **Mentalidades matemáticas na sala de aula:** ensino fundamental, v. 2. Porto

Alegre: Penso, 2020.

BOOTH, Julie L.; NEWTON, Kristie J. Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman?. **Contemporary Educational Psychology**, v. 37, n. 4, p. 247-253, 2012. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0361476X12000392 . Acesso em: 15 jun. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular–Documento preliminar. MEC:Brasília, DF, 2017.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 9 ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1989.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto**; Tradução Magda Lopes. 3 ed. Porto Alegre: ARTMED, 296 páginas, 2010.

DRIJVERS, Paul *et al*. The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. **Educational Studies in mathematics**, v. 75, p. 213-234, 2010. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9254-5

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

POWELL, A. B. Melhorando a Epistemologia de Números Fracionários: uma Ontologia baseada na História e Neurociência. **REMATEC**, *[S. l.]*, v. 13, n. 29, 2018a. Disponível em: https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/200 . Acesso em: 15 jun. 2023.

POWELL, Arthur B.. Reaching back to advance: Towards a 21st-century approach to fraction knowledge with the 4A-Instructional Model. **Perspectiva**, v. 36, n. 2, p. 399-420, 2018b.

POWELL, A. B. Measuring Perspective of Fraction Knowledge: Integrating Historical and Neurocognitive Findings. **ReviSeM**, Sergipe,n. 1, p. 1-19, 2019a. Disponível em: http://funes.uniandes.edu.co/30098/1/Belford2019Measuring.pdf. Acesso em: 15 jun. 2023.

POWELL, A. B. How does a fraction get its name?. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 3, n. 3, p. 700–713, 2019b. https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2019.v.3.n.3.23846. Acesso em: 15 jun. 2023.

RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains**. Paris: Armand Colin, 1995. 239 p. Disponível em: https://hal.science/hal-01017462/document. Acesso em: 15 jun. 2023.

SALAZAR, J. V. F. **Gênese instrumental na interação com Cabri 3D**: um estudo de transformações geométricas no espaço. 2009. 319f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009. Disponível em: https://www.pucsp.br/pos/edmat . Acesso em: 15 jun. 2023.

SIEGLER, Robert S. *et al*. Fractions: The new frontier for theories of numerical development. **Trends in cognitive sciences**, v. 17, n. 1, p. 13-19, 2013. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364661312002653. Acesso em: 15 jun. 2023.

THIOLLENT, Michel. Metodologia da Pesquisa-Ação. São Paulo: Cortez, 1985.

TORBEYNS, Joke *et al*. Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. **Learning and instruction**, v. 37, p. 5-13, 2015. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0959475214000255. Acesso em: 15 jun. 2023.

TROUCHE, L. Environnements informatisés et mathématiques: quels usages pour quells apprentissages? **Educational Studies in Mathematics**. v. 55, p.181-197, 2004. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1023/B:EDUC.0000017674.82796.62. Acesso em: 15 jun. 2023.

TROUCHE, Luc. An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. In: **The didactical challenge of symbolic calculators**. Springer, Boston, MA, 2005. p. 137-162. Disponível em: https://link.springer.com/chapter/10.1007/0-387-23435-7_7. Acesso em: 15 jun. 2023.

VERGNAUD, Gérard. La teoría de los campos conceptuales. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 10, n. 2, p. 3, 1990.

VERGNAUD, Gérard. Teoria dos Campos Conceituais. **Anais do Primeiro Seminário Internacional De Educação Matemática do Rio de Janeiro**. Rio de Janeiro. 1993.

VERGNAUD, G. Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation. In: ÉCOLE D'ETE DE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES. **Actes de la 8ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques**. Clermont-Ferrand: IREM (Université Clermont-Ferrand 2), 1996. pp. 174-185.

VERILLON, Pierre; RABARDEL, Pierre. Cognition and artifacts: A contribution to the study of though in relation to instrumented activity. **European journal of psychology of education**, p. 77-101, 1995.

WEARNE, D.; KOUBA, V. L. Rational numbers. In: SILVER, E. A.; KENNEY, P. A. **Results from the seventh mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000. pp. 163-191.

XIMENES , P. de A. S.; PEDRO, L. G.; CORRÊA , A. M. de C. A pesquisa-formação sob diferentes perspectivas no campo do desenvolvimento profissional docente . **Ensino em Re-Vista**, *[S. l.]*, v. 29, e010, 2022. https://doi.org/10.14393/ER-v29a2022-10. Disponível em: https://seer.ufu.br/index.php/emrevista/article/view/64666. Acesso em: 15 jun. 2023.

ZUCHI, I. A integração dos ambientes tecnológicos em sala: novas potencialidades e novas formas de trabalho. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2, 2008, Recife. **Matemática Formal e Matemática não-Formal 20 anos depois: sala de aula e outros contextos.** Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2008. Disponível em: http://www.ded.ufrpe.br/sistemática/CD-Rom%202%2OSIPEMAT/artigos/CO-167.pdf> Acesso em: 15 jun. 2023.

Histórico

Recebido: 15 de junho de 2023.
Aceito: 24 de julho de 2023.
Publicado: 13 de agosto de 2023.

Como citar – ABNT

Feitosa, Francisco Eteval da Silva; Ferreira, Veronica Gitirana Gomes; Rodrigues, Roberta dos Santos. Gênese Instrumental das Barras de Cuisenaire na Formação Inicial de Professores de Matemática. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 43, e2023029, 2023. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n43.pe2023029id497.

Como citar – APA

FEITOSA, F. E. S.; FERREIRA, V. G. G.; Rodrigues, R. S. Gênese Instrumental das Barras de Cuisenaire na Formação Inicial de Professores de Matemática. ***Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC***, (43), e2023029. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n43.pe2023029.id497.