Rematec
Revista Matemática, Ensino e Cultura

e-ISSN: 2675-1909 | ISSN: 1980-3141
N. 43, e2023031
10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n43.pe2023031.id498

Cálculo integral, desenvolvimento de um método alternativo e soluções de problemas de Física e Matemática

Integral calculus, development of an alternative method and solutions to Physics and Mathematics problems

Cálculo integral, desarrollo de un método alternativo y soluciones a problemas de Física y Matemáticas

José Francisco da Silva Costa[1]

Manuel Raimundo Ferreira Pinheiro[2]

RESUMO

O presente artigo objetiva desenvolver um cálculo de integral considerando uma nova alterativa e soluções de problemas físicos e matemáticos. A metodologia consiste em desenvolver um teorema de uma integral que apresenta no integrando uma expressão quadrática e aplicar o método em três problemas físicos de campo magnético e elétrico e confirmar a veracidade do teorema para alguns valores do parâmetro m, resolvendo as integrais pelo teorema demonstrado. O teorema fundamental determina primitivas em função de parâmetros a,p,q and Δ provenientes do integrando de funções lineares e quadráticas. O método pode ser estendido e aplicado em campo magnético e elétrico. Conclui-se como resultado da pesquisa, uma alternativa de soluções de problemas de integrais que facilitam os resultados de integrais num desenvolvimento mais simples, tendo em vista que os valores do parâmetro m, conduz a expressões integrais que podem ser obtidas com o auxílio dos parâmetros a,p,q e Δ.
Palavras-chave: Cálculo Integral; Método alternativo; Aplicações.

ABSTRACT

The present article aims to develop an integral calculation considering a new alternative and solutions of physical and mathematical problems. The methodology consists in developing a theorem of an integral that represents not integrating a quadratic expression and applying the method in three physical problems of magnetic and electric fields and confirming the veracity of the theorem for some values of the parameter m, solving the integrals by the demonstrated theorem. The fundamental theorem determines primitives as a function of parameters a,p,q and Δ coming from the integrand of linear and quadratic functions. The method can be extended and applied in magnetic and electric fields. It was concluded as a result of the research, an alternative of solutions of integral problems that we facilitate the results of integrals with a simpler development, considering that the values of the parameter m, lead to integral expressions that can be obtained with the help of two parameters a,p,q and Δ.
Keywords: Integral Calculus; Alternative method; Applications.

RESUMEN

Este artículo tiene como objetivo desarrollar un cálculo integral considerando una nueva alternativa y solución a problemas físicos y matemáticos. La metodología consiste en desarrollar un teorema de una integral que presente una expresión cuadrática en el integrando y aplicar el método en tres problemas físicos de campos magnéticos y eléctricos y confirmar la veracidad del teorema para algunos valores del parámetro m, resolviendo el integrales por el teorema demostrado. El teorema fundamental determina anti derivadas en función de los parámetros a,p,q y Δ derivados del integrando de funciones lineales y cuadráticas. El método puede extenderse y aplicarse en campos magnéticos y eléctricos. Se concluye como resultado de la investigación, una alternativa de solución de problemas integrales que faciliten los resultados de integrales en un desarrollo más sencillo, considerando que los valores del parámetro m, conduce a expresiones integrales que se pueden obtener con ayuda de los parámetros a,p,q y Δ.
Palabras clave: Cálculo integral; Método alternativo; Aplicaciones.

1 Doutor em Física pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Professor adjunto da Faculdade de Formação e desenvolvimento do Campo (FADECAM-UFPA), Abaetetuba, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Manoel de Abreu, s/n, Bairro Mutirão, Campus Universitário de Abaetetuba, Abaetetuba, Pará, Brasil, CEP: 68440-000. E-mail: jfsc@ufpa.br.

2 Graduação em Licenciatura Plena em Física pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Endereço para correspondência: Rua Manoel de Abreu, s/n, Bairro Mutirão, Campus Universitário de Abaetetuba, Abaetetuba, Pará, Brasil, CEP: 68440-000. E-mail: muriloferreira1313@gmail.com.

INTRODUÇÃO

A geração bem como a propagação de campos elétricos e magnéticos por cargas elétricas e da dinâmica de cargas em resposta a estes campos, tem sido motivo de grande pesquisa ao longo da História (NUSSENZVEIG, 2002) e o cálculo diferencial e integral foram e são essenciais para interpretar e calcular esses campos para certa distribuição de cargas. A geração de campos por cargas é descrita pelas Equações de Maxwell e, em casos particulares, por leis simples como a Lei de Coulomb e a Lei de Biot-Savart (NUSSENZVEIG, 2002).

Uma vez criados, os campos se propagam como ondas no espaço com uma velocidade constante e igual à velocidade da luz (HALLIDAY,1996). Nesse sentido tem muitos resultados experimentais ou teóricos que tem mostrado que na presença de campos elétricos e magnéticos, cargas sofrem forças elétricas e magnéticas e que todos os fenômenos eletromagnéticos, são descritos de uma forma ou outra com base as Equações de Maxwell e pela Força de Lorentz, teoricamente (BUTLER,1992; DAVID, 1997).

Do ponto de vista experimental, o eletromagnetismo tem grande importância, uma vez que as interações eletromagnéticas descrevem átomos, moléculas, propriedades dos materiais, aparelhos eletrônicos, entre outros (WILLIAM,1997). O que se tornou essencial para o desenvolvimento tecnológico e para as telecomunicações e pode ser aplicado na área educacional para que o aluno compreenda melhor como a teoria e a prática estão intrinsicamente ligados (SOUTO,2015).

O que antes era estudado separadamente, hoje o eletromagnetismo se tornou a unificação de dois ramos distintos que representou no grande exemplo de unificação de leis Físicas, pois os fenômenos elétricos e magnéticos correspondem como um único formalismo devido à identificação que carga em movimento gera campo magnético e todos esses resultados levaram ao fato de que a luz representa ondas de campos eletromagnéticos que se propagam como forma de radiação eletromagnética (NUSSENZVEIG, 2002).

Um dos postulados da relatividade considera que essa radiação se propaga no espaço com a mesma velocidade para todos os referenciais iniciais. Essa questão foi o que levou Einstein a propor em 1905 a Relatividade Especial, que revolucionou as noções clássicas de espaço-tempo (HOBSON, 2006).

Com base nesse contexto, justifica-se o presente artigo considerando que a teoria da integral (THOMAS, 2009). Gonçalvez (1999) tem uma forte influência na contribuição em muitas áreas cientificas como na Física, Química, Biologia e etc. de modo que as ciências são interligadas. Assim sendo, procura-se a partir de um teorema de uma integral que apresenta no integrando funções lineares no numerador e quadráticas no denominar, ampliar o estudo da teoria desse tipo de integral dependentes de parâmetros a, p, q e Δ que levam para o cálculo direto de integrais com facilidades para obtenção de primitivas, sem no entanto, exigir técnicas e artificios presentes em outros livros (GUIDORIZZI, 2001; LEITHOLD, 1986; STEWART, 2001; SWOKOWSKI, 1995).

Dessa maneira, busca-se justificar o trabalho, considerando que o cálculo das primitivas pelo método alternativo, excluí o desenvolvimiento de técnicas e artífices que podem tornar a aprendizagem de difícil compreensão e portanto, com o método alternativo, ele pode obter as primitivas apenas fazendo substituições dos parámetros na fórmula de uma integral conhecida pelo método descrito (CORDEIRO; COSTA,2019). O método alternativo traz como metodologia primeiramente, a demonstração de um teorema de uma integral cujo integrando representa uma razão entre uma função linear e quadrática e a partir desse ponto, do cálculo integral em três problemas Físicos e um matemático, como cálculo do campo magnético de uma linha infinita de carga localizada de um eixo horizontal, bobina toroidal e um disco carregado. O desenvolvimento Matemático que se fará ao longo das soluções, consiste em mostrar uma nova alternativa nas soluções das integrais nesses tipos de problemas Físicos.

REFENCIAL TEÓRICO

Soluções de integrais com a utilização de uma nova alternativa

Este tópico trata do estudo de um novo método de integração, baseando-se nos coeficientes reais e complexos. Para comparar essa nova metodologia de calcular integrais de funções de uma variável real, faz-se a comparação com o método tradicional. Ambas as soluções conduzem aos mesmos resultados, mostrando que o método alternativo é consistente e possui a vantagem de obter as integrais sem recorrer a soluções repetitivas como nos métodos de frações parciais. Portanto esse capítulo aborda como tópicos, integral com denominador de função quadrática com K real; integral com denominador de função quadrática: K complexo; integral com denominador de função quadrática sob sinal de radical e integral com numerador de função quadrática sob sinal de radical. Nesse primeiro capítulo aplicar-se-ão as soluções dessa integral com intuito de mostrar a relevância do método alternativo.

A descrição do método

Teorema Geral toda integral do tipo, $I = \int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^m}$ (1)

Pode ser considerada como a soma de duas integrais $I = I_1 + I_2$.

Onde, $I_1 = \frac{p}{2a(1-m)} e^{y\left(\frac{1-m}{m}\right)}$ (2)

e $I_2 = K_1 \int \frac{1}{\sqrt{1+X_1^2}} X_1^{1-2m} dx_1$ (3)

Com $X_1 = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\Delta}} e^{\frac{y}{2m}}$. (4)

A partir da Eq. (1), pode-se obter o coeficiente , o qual é escrito como:

$$K = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \left(\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\Delta}}\right)^{2m} \cdot \left(\pm q \mp \frac{Pb}{2a}\right) \quad (5)$$

Demonstração do teorema

Seja a integral, $I = \int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^m}$ (1)

Para obter uma primitiva função dos parâmentos do integrando, vamos usar o seguinte artifício.

$$\left(ax^2+bx+c\right)^m = e^y \rightarrow ax^2+bx+c = e^{\frac{y}{m}} \text{ (2)}$$

Nesse ponto, pode surgir uma pergunta: Por que expressar uma igualdade entre uma função quadrática com uma exponencial?

Podemos considerar que o objetivo principal consiste em encontrar a primitiva dada literalmente, para todo tipo de integral dada pela equação (1) e sendo a exponencial uma função que tem a mesma integral ou derivada a menos de uma constante, é possível substituir o integrando do denominador dado em (2), pela exponencial considerada em (2), considerando uma igualdade entre as funções quadrática e exponencial. Assim derivando (2), obtemos,

$$\rightarrow (2ax+b)\,dx = \frac{dy}{m}e^{\frac{y}{m}} \rightarrow dx = \frac{e^{\frac{y}{m}}}{m}\frac{1}{2ax+b}dy \text{ (3)}$$

Levando (3) em (1), vem que,

$$\rightarrow I = \int \frac{(Px+q)}{(2ax+b)}\frac{1}{m}\frac{e^{\frac{y}{m}}}{e^y}dy \rightarrow I = \int \frac{(Px+q)}{(2ax+b)}\frac{1}{m}e^{y\left(\frac{1}{m}-1\right)}dy \text{ (4)}$$

Tomando, novamente a equação (2) e trazendo os termos do 2° membro para o 1° membro, obtemos,

$$ax^2+bx+c = e^{\frac{y}{m}} \rightarrow ax^2+bx+\left(c-e^{\frac{y}{m}}\right) = 0 \text{ (5)}$$

Devemos considerar que a equação em (5) deve ser encarada como uma função quadrática, embora tenha a presença da exponencial . Assim, calculando o em (5), obtemos, após o desenvolvimento,

$$\Delta_1 = \Delta\left[1+\left(\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\Delta}}e^{\frac{y}{2m}}\right)^2\right]$$

Observe os passos,

$$\begin{gathered}
\Delta_1 = b^2-4ac = b^2-4a.\left(c-e^{\frac{y}{m}}\right) = b^2-4ac+4ae^{\frac{y}{m}} \\
\Delta_1 = \Delta+4ace^{\frac{y}{m}} = \Delta\left(1+\tfrac{4a}{\Delta}e^{\frac{y}{m}}\right) \\
\Delta_1 = \Delta\left[1+\left(\tfrac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\Delta}}e^{\frac{y}{2m}}\right)^2\right]
\end{gathered} \text{ (6)}$$

Considerando que,

$$x_1 = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\Delta}}e^{\frac{y}{2m}} \text{ (7)}$$

E extraindo a raiz de Δ_1, vem que,

$$\sqrt{\Delta_1} = \pm\sqrt{\Delta}\sqrt{(1+x_1^2)} \text{ (8)}$$

Como

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta_1}}{2a} = -\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{\Delta}\sqrt{1+x_1^2}}{2a} = V_x\pm\frac{\sqrt{\Delta}\sqrt{1+x_1^2}}{2a}$$

Onde $V_X = -\dfrac{b}{2a}$ é representado como a abscissa do vértice da função quadrática Trazendo o primeiro termo do 2° membro para o 1° membro e após um desenvolvimento, obtemos o resultado,

$$2ax + b = \pm\sqrt{\Delta}\sqrt{1+x_1^2} \to V_x \pm \frac{\sqrt{\Delta}\sqrt{1+x_1^2}}{2a} \quad (9)$$

Levando a equação (9) e (4) na equação dada por (1), obtemos após os desenvolvimentos que,

$$I_1 = K_1 . \int \frac{1}{\sqrt{1+x_1^2}} .x_1^{1-2m} dx_1$$

E

$$I_2 = \frac{P}{2a\,(1-m)} e^{y\left(\frac{1-m}{m}\right)}$$

Com

$$K_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\left(\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\Delta}}\right)^{2m}\left(\pm q \mp \frac{Pb}{2a}\right)$$

E

$$x_1 = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\Delta}} e^{\frac{y}{2m}}$$

Observe as seguintes passadas, de (9) e (4) em (1), para obtenção dos resultados anterior,

$$I = \int \frac{(px+q)}{\pm\sqrt{\Delta}\sqrt{1+x_1^2}} \cdot \frac{1}{m} e^{y\left(\frac{1-m}{m}\right)} dy \quad (10)$$

Distribuindo os termos, obtemos,

$$I = \int \left[p. \left(v_x \pm \frac{\sqrt{\Delta}\sqrt{1+x_1^2}}{2a} \right) + q \right] . \frac{1}{\pm m\sqrt{\Delta}\sqrt{\left(1+x_1^2\right)}} e^{y\left(\frac{1-m}{m}\right)} dy \quad (11)$$

Distribuindo os termos em (11). Isto é,

$$I = \int \frac{(\pm pV_x)}{m\sqrt{\Delta}\sqrt{1+x_1^2}} e^{y\left(\frac{1-m}{m}\right)} dy + \int \frac{p}{2am} e^{y\left(\frac{1-m}{m}\right)} dy \pm \frac{q}{\sqrt{\Delta m}} \int \frac{e^{y\left(\frac{1-m}{m}\right)}}{\sqrt{1+x_1^2}} dy$$

Agrupando os termos constantes e extraindo do sinal da integral, temos,

$$I = \left(\frac{\pm q}{\sqrt{\Delta m}} \pm \frac{pV_x}{m\sqrt{\Delta}} \right) \int \frac{1}{\sqrt{1+x_1^2}} e^{y\left(\frac{1-m}{m}\right)} dy + \int \frac{p}{2am} e^{y\left(\frac{1-m}{m}\right)} dy$$

Ou, ainda,

$$I = \frac{1}{m\sqrt{\Delta}} \left(\pm q \mp \frac{pb}{2a} \right) \int \frac{1}{\sqrt{1+x_1^2}} e^{y\left(\frac{1-m}{m}\right)} dy + \int \frac{p}{2am} e^{y\left(\frac{1-m}{m}\right)} dy \quad (12)$$

Denotando K para o primeiro termo da equação (12) e tomando, $V_X = -\dfrac{b}{2a}$, obtemos que,

$$K = \frac{1}{m\sqrt{\Delta}} \left(\pm q \mp \frac{Pb}{2a} \right) \quad (13)$$

Levando (13) em (12), vem,

$$I = K. \int \frac{1}{\sqrt{1+x_1^2}} e^{y\left(\frac{1-m}{m}\right)} dy + \int \frac{p}{2am} e^{y\left(\frac{1-m}{m}\right)} dy \quad (14)$$

Denotando na equação (14), I_2. Isto é, sendo

$$I_2 = \frac{P}{2am} \int e^{y\left(\frac{1-m}{m}\right)} dy \quad (15)$$

Fazendo uma mudança de variável na exponencial da equação em (15), vem que,

$$y\left(\frac{1-m}{m}\right) = u \rightarrow dy = \frac{du.m}{(1-m)} \quad (16)$$

Levando (16) em (15), temos que,

$$I_2 = \frac{P}{2am} \cdot \frac{m}{(1-m)} \int e^u.du = \frac{P}{2a\,(1-m)} e^u$$

Logo, a integral em (15), possui a seguinte primitiva, pois a exponencial permanece a menos de sinal, como era de se esperar. Assim,

$$I_2 = \frac{P}{2a\,(1-m)} e^{y\left(\frac{1-m}{m}\right)} \quad (17)$$

Onde a exponencial da relação em (17) com a relação dada em (2) deve ser relacionada para encontrar a primitiva em função da variável x.

Seja, agora, o primeiro termo da expressão dada em (14), isto é,

$$I_1 = K. \int \frac{1}{\sqrt{1+x_1^2}} e^{y\left(\frac{1-m}{m}\right)} dy \quad (18)$$

Seja a expressão em (7), quer dizer,

$$x_1 = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\Delta}} e^{\frac{y}{2m}}$$

Diferenciando a expressão (7) na variável em função de y, obtemos que,

$$dx_1 = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\Delta}} \cdot \frac{dy}{2m} e^{\frac{y}{2m}} \rightarrow dy = \frac{\sqrt{\Delta} m dx_1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{y}{2m}} \quad (19)$$

Levando (19) em (18), vem,

$$I_1 = K \int \frac{1}{\sqrt{1+x_1^2}} . e^{y\left(\frac{1-m}{m}\right)} . \frac{\sqrt{\Delta} m}{\sqrt{a}} e^{-\frac{y}{2m}} dx_1 \rightarrow I_1 = K. \frac{\sqrt{\Delta} m}{\sqrt{a}} \int \frac{1}{\sqrt{1+x_1^2}} e^{y\left(\frac{1-m}{m} - \frac{1}{2m}\right)} dx_1$$

Como $\frac{\sqrt{\Delta} m}{\sqrt{a}}$ é um termo constante, foi retirado de sob o sinal da integral, assim,

$$I_1 = \frac{K\sqrt{\Delta} m}{\sqrt{a}} \int \frac{1}{\sqrt{1+x_1^2}} e^{y\left(\frac{2-2m-1}{2m}\right)} dx_1 \rightarrow$$

$$I_1 = \frac{K\sqrt{\Delta} m}{\sqrt{a}} \int \frac{1}{\sqrt{1+x_1^2}} e^{y\left(\frac{1-2m}{2m}\right)} dx_1 \quad (20)$$

Tomando, novamente a relação em (7), obtemos que,

$$x_1 = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\Delta}} e^{\frac{y}{2m}} \rightarrow e^{\frac{y}{2m}=\frac{x_1\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{a}}} \quad (21)$$

Colocando o logarítmico natural em ambos os membros,

$$\frac{y}{2m} = 1n\left(\frac{x_1\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{a}}\right) \rightarrow y = 1n\left(\frac{x_1\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{a}}\right) (22)$$

Substituindo y dado pela relação (22) na expressão (20), vem que,

$$I_1 = \frac{K\sqrt{\Delta m}}{\sqrt{a}} \int \frac{1}{\sqrt{1+x_1^2}} e^{\left(\frac{1-2m}{2m}\right).1n\left(\frac{x_1\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{a}}\right)^{2m}} dx_1 \, (23)$$

Considerando a exponencial dada em (23) e usando a propriedade do logarítmico, teremos,

$$e^{\left(\frac{1-2m}{2m}\right).In\left(\frac{x_1\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{a}}\right)^{2m}} = e^{In\left[\left(\frac{x_1\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{a}}\right)^{2m}\right]^{\frac{1-2m}{2m}}} = \left[\left(\frac{x_1\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{a}}\right)^{2m}\right]^{\frac{1-2m}{2m}} \quad (24)$$

Levando (24) em (23), vem que,

$$I_1 = \frac{k\sqrt{\Delta m}}{\sqrt{a}} \int \frac{1}{\sqrt{1+x_1^2}} \left(\frac{x_1\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{a}}\right)^{1-2m} dx_1 \, (25)$$

Tirando para fora do sinal da integral os termos constantes em (25), vem que,

$$I_1 = \frac{K\sqrt{\Delta}m}{\sqrt{a}}.\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{a}}\right)^{1-2m} \int \frac{1}{\sqrt{1+x_1^2}} \left(\frac{x_1\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{a}}\right)^{1-2m} dx_1 \, (26)$$

Denotando por o termo constante fora do sinal da integral na relação (26), obtemos que

$$K_1 = \frac{K\sqrt{\Delta}m}{\sqrt{a}}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{a}}\right)^{1-2m} \quad (27)$$

E a integral em (26) com a substituição da relação (27), transforma-se em,

$$I_1 = K_1. \int \frac{1}{\sqrt{1+x_1^2}}.x_1^{1-2m} dx_1 \, (28)$$

Que representa a segunda solução da integral dada por (1).

Assim, Tendo em vista a integral (1), e os resultados dados por (15) e (28), obtemos que,

$$I = \int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^m} = I_1 + I_2 = K_1. \int \frac{1}{\sqrt{1+x_1^2}}.x_1{}^{1-2m} dx_1 + \frac{P}{2a\,(1-m)} e^{y\left(\frac{1-m}{m}\right)} (29)$$

O que completa o teorema. A integral dada por (29) possibilita resolver um grande número de integral e pode ser utilizada para obtenção de primitivas, auxiliando em soluções precisas e menos complicadas quando comparadas com o método de soluções usuais. O teorema dado por (29), pode ser utilizado com intuito de obter importantes primitivas para cada valor atribuído a constante m. Nesse artigo utilizaremos a relação (29) e aplicar em três tipos de integrais onde serão considerados para as integrais a serem discutidas neste trabalho, valores possíveis para m igual a 1, 1/2 e 3/2.

Tendo em vista ainda, a expressão dada por (27) e a relação dada por (13), obtemos em função dos parâmentos,

$$K_1 = \frac{\sqrt{\Delta}m}{\sqrt{a}}.\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{a}}\right)^{1-2m}.\frac{1}{m\sqrt{\Delta}}\left(\pm q \mp \frac{Pb}{2a}\right) \rightarrow K_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{a}}\right)^{1-2m}.\left(\pm q \mp \frac{Pb}{2a}\right) \rightarrow$$
$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{a}}\right)\left(\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\Delta}}\right)^{2m}\left(\pm q \mp \frac{Pb}{2a}\right) \rightarrow$$
$$K_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\left(\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\Delta}}\right)^{2m}\left(\pm q \mp \frac{Pb}{2a}\right) \quad (30)$$

A relação dada por (30) representa um coeficiente que pode ser real (para positivo) e complexo (para o negativo). Dessa maneira, poderá ser considerado real ou complexo sendo dependente do tipo de integral a ser calculada. Na seção seguinte, vamos estudar dois casos para o valor atribuído a K.

Casos particulares do teorema e aplicações em integrais e em problemas físicos

Para $m = 1$

De acordo com a expressão (29), o primeiro termo admite solução para enquanto o segundo termo não apresenta solução. Nesse caso, vamos levar em conta apenas solução da integral dada pelo primeiro termo. Isto é,

$$K_1.\int \frac{1}{\sqrt{1+x_1^2}}.{x_1}^{1-2m}dx_1 \quad (31)$$

Quando na integral dada por (31), faz-se , a integral assume a seguinte solução,

$$I = K_2 In\left(x - x_2\right) + K_1 In\left(x - x_1\right) \quad (32)$$

Onde

$$K_1 = P\left(\frac{-b}{2a\sqrt{\Delta}} + \frac{1}{2a}\right) + \frac{q}{\sqrt{\Delta}} \quad (33)$$

E

$$K_2 = P\left(\frac{b}{2a\sqrt{\Delta}} + \frac{1}{2a}\right) - \frac{q}{\sqrt{\Delta}} \quad (34)$$

E x_1 e x_2 são as raízes reais ou complexas da função quadrática. Para esse tipo de integral a solução nos leva a seguinte primitiva,

$$I = I_1 + I_2 = \frac{p}{2a}.In\left(ax^2 + bx + c\right) - 2\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\left(\frac{pb}{2a} - q\right).arctag\left(\frac{x-p}{\mu}\right) \quad (35)$$

Onde se supõe discriminante negativo e que ρ e μ são as raízes complexas do binômio que aparece no denominador de sob o sinal da integral original.

Para o discriminante positivo, a integral assume a seguinte primitiva

$$I = \left(\frac{bp}{2a\sqrt{\Delta}} - \frac{q}{\sqrt{\Delta}}\right).Ln\left(\frac{x-x_1}{x-x_2}\right) + \frac{p}{2a}Ln\left(ax^2+bx+c\right) \quad (36)$$

Onde e são as raízes reais do binômio que aparece no denominador de sob o sinal da integral original.

Exemplo 1

Calcule a integral

$$I = \int \frac{(2x-3)}{(1+4x^2)}dx$$

De acordo com essa expressão, temos que:

$$p = 2, q = -3, a = 4, c = 1eb = 0$$
$$1 + 4x^2 = 0 \rightarrow x^2 - \tfrac{1}{4} \rightarrow x = \pm\tfrac{i}{2} \rightarrow x_1 = \tfrac{i}{2}ex_2 = -\tfrac{i}{2}$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4.4.1 = -16$$
$$\Delta = -16$$

Como Δ é negativo, a solução é dada por (75). Isto é,

$$I = I_1 + I_2 = \frac{p}{2a}.In\left(ax^2+bx+c\right) - 2\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\left(\frac{pb}{2a} - q\right).arctag\left(\frac{x-p}{\mu}\right)$$

Logo, a primeira integral tem como solução,

$$I_1 = \frac{p}{2a}ln\left(ax^2+bx+c\right) = \frac{1}{4}\ ln\left(4x^2+1\right)$$

E a segunda integral de (75). Isto é,

$$I_2 = -2\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\left(\frac{pb}{2a} - q\right).arctag\left(\frac{x-p}{\mu}\right)$$

Logo, temos que,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{-\Delta}i}{2a} = 0 + \frac{\pm i}{2} = \rho \pm i\mu$$

Logo,

$$\rho = 0 \text{ e } \mu = \frac{1}{2}$$

Logo,

$$I_2 = -2\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\left(\frac{pb}{2a} - q\right).arctag\left(\frac{x-\rho}{\mu}\right)$$

Como, $\Delta = -16, \rho = 0, \mu = \dfrac{1}{2}, p = 2, q = -3$

Substituindo, obtemos,

$$I_2 = -\frac{3}{2}.arctag2x$$

Assim a integral procurada será,

$$I = \frac{1}{4}ln\left(4x^2 + 1\right) - \frac{3}{2}arctg2x + c$$

Para $m = 1/2$

A integral da expressão por (1), tem como solução a primitiva quando :

$$I = \frac{P}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\right)^{-1} + K_1 ln\left(\sqrt{1 + x_1^2} + x_1\right) \text{(37)}$$

Com

$$x_1 = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\Delta}}e^y \text{(38)}$$

E

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\pm q \mp \frac{Pb}{2a}\right) \text{(39)}$$

Discriminante Δ negativo: $a < 0$ e $\Delta < 0$

$$I_1 = \frac{p}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\right)^{-1} + \frac{q}{\sqrt{-a}}arsen\left(\frac{|2ax + b|}{\sqrt{\Delta}}\right) \text{(40)}$$

E para discriminante Δ positivo: $a < 0$ e $\Delta > 0$

$$I = \frac{p}{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{1}{\sqrt{a}}k\ ln\left|\frac{2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} + |2ax + b|}{\sqrt{-\Delta}}\right| \text{(41)}$$

Caso: $a < 0$ e $\Delta < 0$

Nesse caso, temos que:

$$I = \frac{p}{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{k}{\sqrt{-a}}arcsen\left(\frac{|2ax + b|}{\sqrt{-\Delta}}\right) \text{(42)}$$

caso: $a > 0$ e $\Delta < 0$

Nesse caso, temos que:

$$I_2 = \frac{p}{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{1}{\sqrt{a}}k\ ln\left|\frac{2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} + |2ax + b|}{\sqrt{\Delta}}\right| \text{(43)}$$

Para $m = 3/2$

Quando se considera na integral dada por (1) $m = 3/2$ a integral da se transforma em

$$\int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{3}{2}}},(44)$$

Tendo como primitiva a solução,

$$I = -K_1\frac{\sqrt{1+x_1^2}}{x_1} - \frac{p}{a}\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}(45)$$

Onde K_1 deve ser positivo ($K_1 > 0$)

Para $m = 3/2$, temos que

$$K_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\left(\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\Delta}}\right)^3\left(\pm q \mp \frac{bp}{2a}\right) = \frac{4\sqrt{a}}{\Delta}K(46)$$

Com

$$k = \pm q \mp \frac{bp}{2a}(47)$$

Assim a integral será,

$$I_1 = -\frac{2k}{\Delta}.\,|2ax+b|\,\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} - \frac{p}{a}\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}(48)$$

Exemplo 2

Seja calcular a integral,

$$I = \int \frac{x-1}{(x^2-3x+2)^{\frac{3}{2}}}dx$$
$$P = 1, q = -1, a = 1, b = -3, c = 2$$

Como o $\Delta = 1$ e, portanto, positivo, a solução será,

$$I_1 = -\frac{2k}{\Delta}\frac{|2ax+b|}{\sqrt{ax^2+bx+c}} - \frac{p}{a}\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Onde,

$$k = \pm q \mp \frac{bp}{2a}$$

Considerando os valores dados, obtemos que,

$$k = \mp 1 \pm \frac{3}{2}$$

O que se deve considerar o valor positivo. Assim, temos que,

$$K = 1/2$$

Substituindo os valores dos parâmetros na integral, obtemos que,

$$I_1 = -\frac{2k}{\Delta}\frac{|2ax+b|}{\sqrt{ax^2+bx+c}} - \frac{p}{a}\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$I_1 = \frac{-(2x-3)}{\sqrt{x^2-3x+2}} - \frac{1}{1}\frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$$

Ou,

$$I_1 = \frac{2(-x+1)}{\sqrt{x^2-3x+2}}$$

Para m = -1/2 e $p = 0$

Para m = -1/2, p = 0, tem-se:

$$I = \int \sqrt{ax^2+bx+c}dx \quad (49)$$

E cuja Solução será,

$$I = \frac{\Delta\sqrt{a}}{8a^2}x_1\sqrt{1+{x_1}^2} - \frac{\Delta\sqrt{a}}{8a^2}In\left(x_1+\sqrt{1+{x_1}^2}\right) (50)$$

Onde

$${x_1}^2+1 = \frac{|2ax+b|}{\sqrt{\Delta}} \quad (51)$$

E

$$x_1 = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\Delta}}\sqrt{ax^2+bx+c} \quad (52)$$

Assim,

$$I_1 = \frac{\Delta\sqrt{a}}{8a^2}\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\Delta}}\sqrt{ax^2+bx+c}\frac{|2ax+b|}{\sqrt{\Delta}} \quad (53)$$

$$I_1 = \frac{1}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c}.\,|2ax+b| \quad (54)$$

Para I_2

$$I_2 = -\frac{\Delta\sqrt{a}}{8a^2}In\left(\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\Delta}}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{|2ax+b|}{\sqrt{\Delta}}\right) (55)$$

Temos que $a < 0$

$$I_2 = -\frac{\Delta i\sqrt{-a}}{8a^2}In\left(\frac{2i\sqrt{-a}}{\sqrt{\Delta}}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{|2ax+b|}{\sqrt{\Delta}}\right) (56)$$

$$I_2 = -\frac{\Delta\sqrt{-a}}{8a^2}arcsen\left(\frac{|2ax+b|}{\sqrt{\Delta}}\right) (57)$$

Logo, a solução será:

$$I = \frac{1}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c}.\,|2ax+b| + \frac{\Delta\sqrt{-a}}{8a^2}arcsen\left(\frac{|2ax+b|}{\sqrt{\Delta}}\right) 58)$$

Se $\Delta < 0$ temos apenas que:

$$I = \frac{1}{4a}\sqrt{ax^2 + bx + c}.\,|2ax + b| + \frac{\Delta\sqrt{-a}}{8a^2} arcsen\left(\frac{|2ax + b|}{\sqrt{-\Delta}}\right) \quad (59)$$

Exemplo 3

Calcule a integral,

$$I = \int \sqrt{x^2 + 24x + 244}dx$$

Logo, temos que $a = 1$ ($a < 0$), $\Delta = 24^2 - 4.1.244 = -400$ ($\Delta < 0$)

Assim de acordo com (59), temos que,

$$I_1 = \left|\frac{\sqrt{1}}{4.1^2}\,|2x + 24|\,\sqrt{x^2 + 24x + 244}\right|$$
$$I_1 = \left|\frac{(x+12)}{2}\sqrt{x^2 + 24x + 244}\right|$$

Analogamente para I_2.

$$I_2 = -\frac{(-400).1}{8.1} In\left|\frac{2.1\sqrt{x^2+24x+244}+|2x+24|}{\sqrt{400}}\right|$$
$$I_2 = 50In\left|\frac{(x+12)+\sqrt{x^2+24x+244}}{10}\right|$$

Portanto,

$$I = \left|\frac{(x+12)}{2}\sqrt{x^2 + 24x + 244}\right| + 50In\left|\frac{(x+12) + \sqrt{x^2 + 24x + 244}}{10}\right|$$

ANÁLISES E RESULTADOS

Aplicações em problemas físicos de eletromagnetismo

No Fluxo magnético de uma Bobina teroidal

Uma bobina toroidal pode ser descrita como um solenoide dobrado e atravessado por uma corrente i. O campo magnético no interior da bobina toroidal pode ser calculado através da aplicação da Lei de Ampére de modo que o campo magnético no interior da bobina toroidal é dado pela expressão,

$$B = \frac{\mu_0 i N}{2\pi r} \quad (1)$$

O fluxo magnético como se pode ser observado em livros textos de Física, é representado por,

$$\Phi = \int \vec{B}.\vec{N}ds = \frac{N\mu_0 i}{2\pi}\int_0^b \rho d\rho \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a-\rho cos\varphi}$$
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a-\rho cos\varphi} = 2\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{a-\rho cos\varphi} \quad (2)$$

A solução da integral dada por (2), pode ser resolvida supondo como mudança de variável as seguintes notações,

$$tg\frac{y}{2} = \varphi, dy = \frac{2dy}{1+y^2} \text{ e } cos\varphi = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

Substituindo em (2), obtemos que

$$I = 2\int \frac{2dy}{(1+y^2)} \frac{(1+y^2)}{[a(1+y^2)-\rho(1-y^2)]}$$
$$I = 4\int \frac{dy}{[(a+\rho)y^2+a-\rho]}$$

Essa Integral, como foi abordado é semelhante a integral

$$I = 4\int \frac{dy}{ay^2+by+c}$$

Com

$$a = a + \rho$$

E

$b = 0$ e $c = a - \rho$

e

Onde y_1 e y_2 são as raízes da função quadrática.

Logo, sendo $a_1 = a + \rho$, $b = 0$ e $= a - \rho$, vem que,

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4.(a+\rho).(a-\rho) = -4.(a^2-\rho^2) \rightarrow$$
$$\sqrt{\Delta} = \pm 2i\sqrt{a^2-\rho^2}$$
$$y = -\frac{b\pm\sqrt{\Delta}}{2a_1} = \frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2a^2} \rightarrow y_1 = \frac{2i\sqrt{a^2-\rho^2}}{2.a+\rho} = \frac{i\sqrt{a^2-\rho^2}}{a+\rho}$$
$$y_2 = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a_1} = -\frac{2i\sqrt{a^2-\rho^2}}{2(a+\rho)} = -\frac{i\sqrt{a^2-\rho^2}}{a+\rho}$$

Levando na Integral I, obtemos,

Sendo o discriminante negativo, podemos usar a seguinte expressão dada por (35). Isto é,

$$I = \frac{p}{2a}.In\left(ax^2+bx+c\right) - 2\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\left(\frac{pb}{2a} - q\right).arctag\left(\frac{x-\rho}{\mu}\right)$$

Onde, temos que, $\rho = 0$ e $\mu = \dfrac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{a+\rho}$

Logo,

$$I = \frac{p}{2a}.In\left(ax^2+bx+c\right) - 2\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\left(\frac{pb}{2a} - q\right).arctag\left(\frac{x-\rho}{\mu}\right)$$

Como $p = 0$, resta-nos,

$$I = -2\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\left(\frac{pb}{2a} - q\right).arctag\left(\frac{y-\rho}{\mu}\right)$$

Pois a integral está a variável y,

Substituindo os valores dados, obtemos que,

$$I = \frac{4}{\sqrt{a^2-\rho^2}}.arctag\left[\frac{(a+\rho)}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\right]$$

Como $y = tg\frac{\varphi}{2}$, vem que,

$$\to I = \frac{4}{\sqrt{a^2-\rho^2}} tg^{-1}\left(\frac{a+\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}.tg\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^\pi$$
$$\to I = \frac{4}{\sqrt{a^2-\rho^2}}.\frac{\pi}{2} \to I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-\rho^2}}$$

Logo,

$$I = 2\pi\int_0^b \frac{N\mu_0 i}{2\pi}\frac{\rho d\rho}{(a^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}}} = N\mu_0 i\int\frac{\rho d\rho}{(a^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}$$

A Integral

$$I = \int\frac{\rho d\rho}{(a^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Provém da expressão

$$I = \frac{(Px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^m}$$

Para $m = 1/2$, e sendo

$a = -1$, $x = \rho$ e $c = a^2$, $b = 0$

O discriminante tem o seguinte valor,

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4.(-1)\,a^2 \to \Delta = 4.a^2$$

Como esse valor é positivo, a integral tem como solução,

$$I = \frac{P}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\right)^{-1} + .Kln\left(\frac{|2ax+b|}{\sqrt{\Delta}} + \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\Delta}}\left(ax^2+bx+c\right)^{1/2}\right)$$

Onde,

$$K = \left(\pm q \mp \frac{bp}{2a}\right)$$

Logo,

Como $q = 0$ e $b = 0$, temos que $K = 0$

Logo, temos apenas o primeiro termo da integral, isto é,

$$I = \frac{P}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\right)^{-1}$$

Substituindo os valores dos parâmetros, encontramos para o valor da corrente a bobina,

$$I = -\sqrt{a^2 - \rho^2}$$

Devemos considerar o limite de integração de 0 a b, logo

$$I = -\sqrt{a^2 - \rho^2}|_0^b = -\sqrt{a^2 - b^2} + a \rightarrow I = a - \sqrt{a^2 - b^2}$$

Logo, o fluxo será,

$$\Phi = \frac{N\mu_0 i}{2\pi}.\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right)$$

No Cálculo de campo magnético pela Lei de Biot-Savart de uma linha infinita de carga

A lei de Biot-Savat pode ser usada para cálculo de campo magnético. No entanto, as integrais que dependem dos vetores posições entre o ponto em que se pretende calcular o campo e do elemento diferencial de corrente. A integral que resulta na expressão do campo magnético daquela distribuição obedece ao seguinte formalismo,

$$B\left(r_2\right) = \frac{\mu_\circ}{4\pi} i \int d\hat{I} \times \frac{\left(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}\right)}{\left|\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}\right|^3}$$

Omitiremos considerações e aprofundamentos porque o foco é aplicar o método alternativo nesse tipo de integral. Para uma linha infinita de carga distribuída uniformemente ao longo do eixo x, o campo magnético pode ser expresso da seguinte forma,

$$I = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R dx}{\left(x^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Onde representa a distância perpendicular do ponto P até a distribuição uniforme de corrente. O cálculo dessa Integral, como foi mostrado, anteriormente, é dado pela expressão,

$$I = \int \frac{\left(px + q\right) dx}{\left(ax^2 + bx + c\right)^m}$$

Nesse caso, para obter aquela integral, é conveniente considerar que supondo $m\frac{3}{2}, a = 1, b = 0, p = 0, c = R^2$ e $q = 1$. Dessa forma, na integral,

$$I = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R dx}{\left(x^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{R\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R dx}{\left(x^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

O objetivo consiste em resolver a expressão,

$$I = \int \frac{dx}{\left(x^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Nesse caso, a solução depende do sinal do discriminante. Logo, tomando os valores dos parâmetros, obtemos que,

$$\Delta = -4.R^2$$

Como é negativo, a solução será,

$$I_1 = -\frac{2k}{\Delta}\frac{|2ax+b|}{\sqrt{ax^2+bx+c}} - \frac{p}{a}\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Onde

$$k = \pm q \mp \frac{bp}{2a}$$

De modo que devemos considerar o sinal positivo.

Assim, temos que,$p = 0, c = R^2, q = 1$ e b = 0

k = 1

Como $p = 0$, o segundo termo da integral se anula e ficamos com,

$$I_1 = -\frac{2k}{\Delta}\frac{|2ax+b|}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Substituindo os valores, obtemos, obtemos que,

$$I_1 = -\frac{2}{-4.R^2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+R^2}} = I_1 = -\frac{1}{R^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

Logo, como,

$$\frac{R\mu_0 i}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Logo,

$$I = \frac{R\mu_0 i}{4\pi}.\frac{1}{R^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}.\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

Portanto,

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}|_{-\infty}^{\infty}$$

Nesse caso temos que

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} = cos\theta$$

Segundo consta no livro de Física (.....), a expressão, assim obtemos que,

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}cos\theta|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}\left(cos\left(-\pi\right) - cos\pi\right) = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}\left(1+1\right)$$

Logo,

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

Que representa o mesmo resultado obtido por outros métodos.

Disco uniformemente carregado

Pode-se usar o resultado encontrado para o potencial no eixo de um anel de carga para calcular o potencial no eixo de um disco uniformemente carregado, pois se considera que este é composto por vários anéis carregados. Utilizando o princípio de superposição, o campo produzido em P é a integral dos campos produzidos por anéis de raio r, com r variando entre 0 e R. De acordo com a equação.

$$E = \frac{\sigma z \hat{k}}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{rdr}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Vamos calcular o mesmo problema do campo elétrico, usando o método do coeficiente k, levando em conta as considerações anteriores, vimos que o campo elétrico resultante em um ponto z de um disco uniformemente carregado com uma densidade de carga σ, é dado pela expressão:

$$E = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{rdr}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{k}$$

Seja:

$$I = \int_0^R \frac{rdr}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Logo:

$$E = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \hat{k} I$$

Para resolver a integral I, devemos considerar que obedece a uma classe de integrais de forma:

$$I = -\frac{2k}{\Delta} \frac{|2ax + b|}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} - \frac{p}{a} \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Com $k \geq 0$

Sendo $p = 1$, $x = r$, $dx = dr$, $q = 0$, $a = 1$, $b = 0$ e $c = z^2$, assim sendo, temos que:

$$k = 0$$

Logo, resta apenas a integral.

$$I_1 = \frac{p}{a} \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Logo:

$$I = -\frac{1}{1} \frac{1}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \rightarrow I = -\frac{1}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Assim, temos que, o valor da integral é:

$$I = -\frac{1}{(r^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\Big|_0^R \rightarrow I = -\frac{1}{(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{|z|}$$
$$I = -\frac{1}{(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{z}$$

Como $z > 0$, o valor do campo elétrico é:

$$E = \frac{\sigma\hat{k}}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

Ou

$$E = \frac{z\sigma\hat{k}}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{(r^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na modelagem de inúmeros problemas de Matemática, física, química e engenharia. É comum encontrarem integrais cujas soluções podem ser obtidas analiticamente através dos métodos das mudanças de variáveis e das frações parciais. Contudo, torna-se relevante a obtenção de métodos alternativos para o cálculo de tais soluções. Onde foram apresentados neste trabalho um novo método, como objetivo a discutir uma nova maneira de escrever explicitamente as soluções de integrais, relacionando os seus coeficientes K com os parâmetros dos integrandos.

Muitos livros textos utilizam igualdade de polinômios para obtenção de integrais já conhecidas. No entanto, nesse trabalho abordou-se um tema de integral, utilizando uma nova abordagem para soluções de tais integrais, uma forma de integração diferente do que se costuma operar com tais funções. Os teoremas relevantes da teoria foram omitidos, levando em consideração apenas os resultados com intuito de mostrar que podem contribuir em soluções de inúmeros problemas Físicos e Matemáticos como se verificou em alguns dos problemas apresentados anteriormente. Observou-se a utilização de uma expressão que determina diretamente os coeficientes K_1 e K_2 para determinar a expressão de integrais que apresentam denominador ou numerador de função quadrática. Os quatro exemplos matemáticos e os outros três problemas físicos constataram que os coeficientes são consistentes e podem ser utilizados para contribuição metodológica dando uma alternativa de soluções de problemas de Matemática e Física em nível de graduação e pós-graduação.

REFERÊNCIAS E BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

BUTLER, R. B. **Paleomagnetism**: Magnetic Domains to Geologic Terranes., 1992.

CORDEIRO, S. M. S. ; COSTA, J. F. S. . Applications Of Integrals Under A New Alternative Of Differential And Comprehensive Calculation. **International journal of scientific and technical research in engineering (IJSTRE)**, v. 4, p. 49-65, 2019.

GONÇALVES, M. B; FLEMMING, D. M. Cálculo. Funções de Várias Variáveis e Integrais Duplas e Triplas, Makron Books, 1999.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**, Vol. I e II, Livros Técnicos e Editora, 2001 (livro texto)

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1996. v. 3.

HENNIES, C. E.; GUIMARÃES, W. O. N; ROVERSI, J. A. **Problemas Experimentais em Física**. Campinas-SP: UNICAMP, 1993. v. 1 e 2.

HOBSON; M. P.; EFSTATHIOU; G. P.; LASENBY; A. N. **General Relativity**: Na Introduction for Physicists. Cambridge University Press, 2006. ISBN: 978-0-511-13795-2

KELLER, F. J.; GETTYS, W. E.; SKOVE, M. J. **Física**. São Paulo: Makron Books, 1999, v. 2.

LEITHOLD, L. **Cálculo com Geometria Analítica**, Vol. 1, Harper & Row Publ., 1986

LOWRIE, William. **Fundamentals of Geophysics**, Cambridge University Press, 1997;

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica**. São Paulo: Edgard Blucher, 2002, v. 3

STEWART, James. **Cálculo**, Vol. 1 e 2, Pioneira, 2001 (livro texto).

SWOKOWSKI, E.W. **Cálculo com Geometria Analítica**, Vol. 1 e 2, RJ, Makron: Boo Editora Ltda, 1995.

THOMAS, G. B. **Cálculo**, Vol. 1, Pearson, Addison Wesley, 2009 (livro texto).

TIPLER, P. A. **Física**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1999. v. 2.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física**. São Paulo: Pearson, 2003, v. 3.

Histórico

Recebido: 15 de junho de 2023.
Aceito: 04 de agosto de 2023.
Publicado: 10 de dezembro de 2023.

Como citar – ABNT

COSTA José Francisco da Silva; PINHEIRO, Manuel Raimundo Ferreira. Cálculo integral, desenvolvimento de um método alternativo e soluções de problemas de Física e Matemática. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 43, e2023031, 2023. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n43.pe2023031.id498

Como citar – APA

COSTA, J. F. S.; PINHEIRO, M. R. F. Cálculo integral, desenvolvimento de um método alternativo e soluções de problemas de Física e Matemática. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC*, (43), e2023031. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n43.pe2023031.id498