

Aprendizagem dos conceitos matemáticos na Teoria APOS e o ensino na Sequência Fedathi: Algumas interseções

Learning mathematical concepts in APOS Theory and teaching in the Fedathi Sequence: Some intersections

Aprendizaje de conceptos matemáticos en la Teoría APOS y enseñanza en la Secuencia Fedathi: algunas intersecciones

Maria Vanísia Mendonça de Lima¹  

Hermínio Borges Neto²  

RESUMO

Este artigo objetiva apresentar interseções entre a Sequência Fedathi e a Teoria APOS (Ação, Processo, Objeto e Esquema). Trata-se de um recorte de uma pesquisa de doutorado em andamento do Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal do Ceará. O trabalho se classifica como bibliográfico, cujas fontes utilizadas foram livros, teses, dissertações e periódicos científicos. Concluímos com o estudo que existem convergências entre a Sequência Fedathi e a Teoria APOS, havendo a possibilidade de complementaridade entre as duas perspectivas teóricas. Assim, perspectivamos com este trabalho deixar uma contribuição acadêmica no sentido de mostrar a possibilidade de se trabalhar com a Sequência Fedathi e a Teoria APOS, promovendo uma aprendizagem em que o aluno desenvolva o raciocínio lógico e participe das construções dos conceitos matemáticos estudados.

Palavras-chave: Sequência Fedathi; Teoria APOS; Matemática; Ensino; Aprendizagem.

ABSTRACT

This article aims to present intersections between the Fedathi Sequence and the APOS Theory (Action, Process, Object and Scheme). This is an excerpt from a doctoral research in progress at the Postgraduate Program at the Federal University of Ceará. The work is classified as bibliographic, whose sources used were books, theses, dissertations and scientific journals. We conclude with the study that there are convergences between the Fedathi Sequence and the APOS Theory, with the possibility of complementarity between the two theoretical perspectives. Thus, with this work, we intend to leave an academic contribution in the sense of showing the possibility of working with the Fedathi Sequence and the APOS Theory, promoting learning in which the student develops logical reasoning and participates in the construction of the studied mathematical concepts.

Keywords: Fedathi Sequence; APOS theory; Mathematics; Teaching; Learning.

RESUMEN

Este artículo tiene como objetivo presentar las intersecciones entre la Secuencia Fedathi y la Teoría APOS (Acción, Proceso, Objeto y Esquema). Este es un extracto de una investigación de doctorado en curso en el Programa de Posgrado de la Universidad Federal de Ceará. El trabajo se clasifica como bibliográfico, cuyas fuentes utilizadas fueron libros, tesis, disertaciones y revistas científicas. Concluimos con el estudio que existen convergencias entre la Secuencia Fedathi y la Teoría APOS, con la posibilidad de complementariedad entre las dos perspectivas teóricas. Así, con este trabajo pretendemos dejar un aporte académico en el sentido de mostrar la posibilidad de trabajar con la Secuencia de Fedathi y la Teoría APOS, promoviendo un aprendizaje en el que el estudiante desarrolle el razonamiento lógico y participe en la construcción de los conceptos matemáticos estudiados.

Palabras clave: Secuencia Fedathi; Teoría APOS; Matemáticas; Enseñando; Aprendiendo.

1 Doutoranda em Educação Brasileira pela Universidade Federal do Ceará (UFC). Professora de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE– Campus Cedro), Cedro, Ceará, Brasil. Alameda José Quintino, s/n, Prado, Cedro, Ceará, CEP: 63400-000. E-mail: vanisia@multimeios.ufc.br.

2 Pós-doutorado em Matemática pelo IMPA, Pós-doutorado em Ensino de Matemática e Tecnologias Digitais pela Université Paris VII, França e Université TÉLUQ, Canadá. Professor da Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Ceará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Waldery Uchoa, 01–Benfica–Fortaleza–CE CEP 60020-110. E-mail: herminio@multimeios.ufc.br.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

No livro intitulado por *Sequência Fedathi interfaces com o pensamento pedagógico*, publicado em 2019 e organizado por Hermínio Borges Neto, encontramos diversos diálogos da Sequência Fedathi com teorias de vários teóricos, entre eles: Dewey, George Polya, Felix Klein, Freinet, Piaget, Vygotsky, Skinner, Paulo Freire, David Ausubel, Lakatos, Davis & Hersh e Guy Brousseau. Porém, até o presente momento, nenhum pesquisador estabeleceu algum diálogo entre a proposta metodológica de ensino nominada de Sequência Fedathi e a Teoria de aprendizagem matemática denominada de Teoria APOS (Ação, processo, Objeto e Esquema). Dessa forma, neste estudo empenhamo-nos em apresentar as interseções entre a Sequência Fedathi e a Teoria APOS. Essa proposta de discussão se constitui em um recorte de nossos estudos da tese de doutorado que vem sendo desenvolvida pelo Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Ceará (UFC).

A Sequência Fedathi desde a sua apresentação formal por meio da defesa da tese de Pós-doutorado de seu idealizador, o professor Dr. Hermínio Borges Neto, na Universidade de Paris VII em 1996, vem sendo estudada, aperfeiçoada e aplicada em diversos estudos, tanto no campo da Matemática, quanto em outros campos, tais como: Inclusão Digital, Educação a Distância, Informática Educativa, Formação de Professores, Física e Química.

A proposta da Sequência Fedathi é que o ensino deve ser conduzido de tal maneira que o aluno ao se deparar com um conteúdo novo ou com uma situação desafiadora, adote a função de um matemático que se empenha em solucionar um problema de sua área, explorando o raciocínio lógico-dedutivo, refletindo, fazendo conjecturas, mobilizando conhecimentos prévios, buscando estratégias de resolução para as situações propostas e interagindo com os colegas e o docente. Já o professor deve atuar como um mediador entre o conhecimento e o aluno, transformando a sala de aula em um espaço de investigação.

Referente a teoria APOS, Dubinsky e McDonald (2001) destacam que essa perspectiva teórica tem apresentado muita utilidade na tentativa de compreender a aprendizagem de uma variada gama de tópicos da Matemática do ensino superior, tais como: Cálculo, Estatística, Matemática Discreta e Álgebra Abstrata, entre outras áreas da Matemática. Inclusive, pesquisadores no campo da Educação Matemática no Brasil a têm utilizado em estudos referentes a aprendizagem de conteúdos matemáticos, entre eles destacamos: Prado (2010), Elias (2012), Rachelli (2017), Veloso (2018) e D'Almeida (2021).

Apesar da existência de uma profusão de trabalhos fundamentados na Sequência Fedathi e outros que utilizaram a Teoria APOS como aporte teórico, constatamos que até o desenvolvimento deste estudo, nenhuma investigação foi realizada com uma abordagem que contemple as duas perspectivas, a nossa será a primeira com este propósito.

Enfatizamos que a relevância e justificativa deste trabalho é evidenciada por tratarmos de uma proposta metodológica de ensino, a Sequência Fedathi, que tem mostrado, por meio dos estudos, eficácia nas experiências de ensino apoiadas em seus fundamentos e princípios, bem como também, por ampliarmos o debate no rol das pesquisas em Educação Matemática a respeito da Teoria APOS, que como já destacamos, vem sendo utilizada em muitas pesquisas.

Ademais, como já enfatizamos, este é o primeiro trabalho a apresentar as interseções entre a Sequência Fedathi e a Teoria APOS. Além disso, a relevância acadêmica deste estudo se justifica por apresentamos uma discussão que pode ter utilidade para os professores de Matemática, seja da Educação Básica ou do Ensino Superior, uma vez que por meio deste escrito, eles verão a possibilidade de trabalhar com a Sequência Fedathi e a teoria APOS em caráter de complementaridade, vislumbrando uma abordagem que promova o desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno e o possibilite a fazer construções mentais a respeito dos conceitos matemáticos estudados, proporcionando um ensino diferente do que é recorrentemente empregado nas aulas de Matemática, principalmente no ensino superior.

A SEQUÊNCIA FEDATHI

A Sequência Fedathi foi idealizada pelo matemático, professor e pesquisador da Universidade Federal do Ceará (UFC), Dr. Hermínio Borges Neto. A origem da referida sequência está nas ideias e questionamentos do seu idealizador a respeito da forma como acontece o ensino de Matemática. Durante o período em que lecionava no Bacharelado em Matemática da UFC, entre 1971 e 1996, mediante um índice de reprovação alto dos alunos nas disciplinas do curso, o referido professor notou duas questões principais que estavam atreladas ao desempenho dos bacharéis em formação, uma delas foi a questão do verdadeiro sentido da Matemática e o serviço que ela estava proporcionando aos estudantes, o outro ponto foi a falta de compreensão do papel dessa ciência por parte do grupo de professores do curso. (SANTOS, 2021).

Segundo Sousa (2015), as reflexões sobre o ensino de Matemática feitas pelo idealizador da sequência foram amadurecidas em seu pós-doutoramento na área de Educação Matemática. O amadurecimento das ideias do professor Hermínio Borges Neto resultou na apresentação formal da Sequência Fedathi quando defendeu a sua tese de Pós-doutorado na Universidade de Paris VII em 1996.

Conforme Sousa (2015), o termo *Sequência* foi atribuído a referida metodologia pela forma como ela está organizada, de tal maneira que as suas ações perpassam por quatro etapas sucessivas que posteriormente iremos apresentar. Já referente ao nome *Fedathi*, entendemos por meio da fala de Sousa (2015), que essa palavra é um acrônimo formado pelas sílabas iniciais dos nomes dos três filhos do professor Hermínio Borges Neto, que são: Felipe, Daniel e Thiago.

Borges Neto em sua tese de professor titular da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará em 2016, apresenta a seguinte definição para a Sequência Fedathi:

A Sequência Fedathi é uma proposta de ensino, talvez uma metodologia, com fundamentação teórico-metodológica baseada na proposta lógico-dedutiva-construtiva, acrescida de uma postura, enfoque, de um comportamento, de uma atitude por parte do professor, perante seus estudantes, que respeite e tente reproduzir o método de trabalho de um matemático (conhecido como 'la méthode') (BORGES NETO, 2016, p. 15).

Santana (2018) afirma que a Sequência Fedathi tem como intuito ressignificar os papéis no contexto da sala de aula. Compreendemos que ressignificar papéis nesse ambiente

significa que o professor terá o papel de mediador do conhecimento e nisso o aluno terá voz no processo de aprendizagem, o que não acontece no ensino tradicional, cujo foco, como a própria autora afirma, é a fala e o ditar do docente. A Sequência Fedathi apresenta um diferencial que é essencial para uma aprendizagem de qualidade, uma vez que segundo a autora, o objetivo da Fedathi é “[...] estimular os alunos a pesquisa, à reflexão, ao senso de investigação, à colaboração e a sistematização do conhecimento [...]” (SANTANA, 2018, p. 17).

O ensino de um conteúdo específico na Sequência Fedathi é introduzido quando o professor, mediador do conhecimento, escolhe e propõe uma situação-problema referente ao assunto a ser ensinado. Souza (2013) afirma que o ensino também pode ser iniciado com uma situação proposta pelo estudante.

De posse do problema, o estudante passará a buscar uma estratégia de resolução. Posteriormente, quando solucionar a situação problematizadora, o docente analisará, juntamente com a turma, a validade da resposta encontrada. Nesse momento, acontece à mediação entre o professor, o saber em jogo e o aluno, em uma discussão gerada no ambiente de aprendizagem, as reflexões e debates entre o professor e o grupo de alunos terá como resultado a formulação do saber pelo estudante (SOUZA, 2013).

A Sequência Fedathi apresenta princípios que norteiam as ações do professor em sala de aula, possibilitando ao aluno pensar, interagir, conjecturar, refletir sobre os erros e participar das construções dos conceitos estudados. Esses princípios serão apresentados a seguir.

PRINCÍPIOS DA SEQUÊNCIA FEDATHI

Os princípios que regem o trabalho docente com a Sequência Fedathi reunidos no livro intitulado por *Sequência Fedathi: fundamentos*, organizado por Hermínio Borges Neto, são os seguintes: *Mão no bolso*, *Acordo didático*, *Situação adidática*, *Pergunta*, *Mediação*, *Contraexemplo* e a *Concepção do erro*.

O princípio da *mão no bolso* é definido por Santana (2018) como sendo uma pedagogia que requer do professor atenção, segurança e ousadia para intervir na realização das atividades quando os alunos estão vivenciando as fases da Sequência Fedathi. Ao inserir a mão no bolso, o educador possibilita ao aluno colocar a “mão na massa”, ou seja, permite que o aprendiz mobilize conhecimentos, interaja com os colegas e execute a atividade, pondo em prática o conteúdo. A utilização deste princípio exigirá o exercício da paciência do professor em esperar o tempo do aluno para raciocinar, criar suas hipóteses e estratégias de resolução.

A *mão no bolso* é uma postura ativa do professor, pois colocar a mão no bolso não significa se ausentar e deixar os alunos sozinhos. Pelo contrário, o docente terá muito trabalho, pois deve a todo momento observar as ações dos alunos, seus diálogos, raciocínios, estratégias utilizadas para solucionar o problema proposto, bem como analisar a necessidade de intervir e fazer interlocuções, caso sinta necessidade de fazê-las.

O *acordo didático* é outro princípio que não pode ser negligenciado em uma aula fundamentada na Sequência Fedathi. Este princípio deve ser instituído antes do professor apresentar uma situação-problema aos alunos, de maneira que fiquem claras “[...] as normas

inerentes à resolução da situação que será apresentada como desafio, bem como as regras gerais de convivência na sala de aula.” (SOUSA, 2015, p. 61). Dessa forma, o acordo didático corresponde a:

[...] combinação e os ajustes feitos entre professor e estudantes, de modo a garantir que cada uma das partes desenvolva na sala de aula o que for necessário, dentro da capacidade de cada um, para que o ensino e a aprendizagem sejam efetivados em um ambiente harmônico, também levando em consideração as possíveis desavenças que normalmente acontecem em um espaço aberto à investigação, à pesquisa (SOUSA, 2015, p. 62).

A *situação adidática* é outro princípio que fundamenta a Sequência Fedathi e que segundo Almouloud (2007, p. 33) “[...] é uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar a este, condições favoráveis para a apropriação do novo saber que deseja ensinar.” A situação adidática é parte de uma situação didática, sendo que por meio de sua vivência, o aluno poderá interagir, refletir, fazer conjecturas e participar da construção do conhecimento.

No cenário de vivência de uma situação adidática, em que o professor é mediador do saber, um princípio muito importante da Sequência Fedathi é a *Pergunta*, que segundo Sousa (2015) se constitui a essência da ação mediadora na proposta metodológica de ensino de Borges Neto. Assim, o autor destaca a importância do investimento em torno da pergunta na atividade de mediação do professor, enfatizando o cuidado em garantir que as repostas para as perguntas não estejam reduzidas a uma única palavra que confirme ou negue diretamente o questionamento feito pelo aluno. Ainda conforme Sousa (2015), a pergunta na Sequência Fedathi corresponde a uma situação em que o docente questiona e estimula o aluno a pensar sobre o problema proposto ou sobre outras situações do estudo.

Dessa forma, é fundamental a *mediação* do professor que é outro princípio de grande relevância na Sequência Fedathi. A mediação se caracteriza pela postura e ação docente que intenciona orientar o estudante e auxiliá-lo em seu desenvolvimento no processo de construção de conhecimentos, tendo em vista proporcionar um ambiente em sala de aula em que o aluno participa da construção dos conceitos, dialoga com o professor e com os colegas, faz reflexões e descobertas, sempre atuando de forma ativa.

Na mediação, o professor utiliza também os demais princípios da Sequência Fedathi, entre eles está o *contraexemplo* que é utilizado para instigar no aluno a reflexão. Segundo Sousa (2015), este princípio corresponde a um exemplo ou situação que contradiz ao que foi apresentado pelo indivíduo. Ele é pensado pelo professor com o intuito de desequilibrar o aluno e gerar reflexões sobre as suas ações, pode ter o formato de pergunta ou mesmo de uma sugestão para uma ação a ser executada.

Agora vejamos do que se trata o princípio da *concepção do erro* na Sequência Fedathi. Nesta proposta metodológica de ensino, o erro é utilizado como um recurso que ajuda o professor a identificar as dificuldades dos alunos na aprendizagem dos conteúdos estudados e assim, fazer as intervenções necessárias para possibilitar que o aluno supere os obstáculos e obtenha sucesso na aprendizagem. Nesta perspectiva, o erro não é utilizado para punir o estudante e sim como um instrumento que pode gerar reflexões e auxiliar no desen-

volvimento e autonomia do aprendiz. A forma como o professor lida com o erro influencia diretamente na aprendizagem do aluno. Então, é necessária sabedoria por parte do docente para utilizar este princípio a favor do desenvolvimento dos estudantes, tendo o zelo de não gloriar algum aluno pelo acerto e ridicularizar outro pelo erro, de forma que todos sejam encorajados a aprender e superar os desafios. (SOUSA, 2015).

Além dos princípios apresentados, Sousa (2015) destaca em sua tese outros elementos indispensáveis a utilização da Sequência Fedathi que ele também denomina de princípios desta metodologia, que são os seguintes: o *plateau*, a *análise do ambiente* e a *análise teórica*, que passaremos a apresentar agora.

O *plateau* para Sousa (2015) corresponde ao nível de conhecimento básico do aluno necessário a aprendizagem do novo conteúdo que será ensinado. Em outras palavras, corresponde ao “[...] nivelamento do conhecimento, este proporcionado pelo investimento, pela intervenção docente, para que os alunos cheguem ao patamar necessário à introdução do novo tema [...]” (SOUSA, 2015, p.58).

Referente a *análise teórica*, de acordo com o nosso entendimento do estudo de Sousa (2015), este princípio corresponde ao momento em que o professor irá refletir sobre suas limitações, analisar seus conhecimentos a respeito do conteúdo que vai ensinar, reconhecer qual o saber que já é de seu domínio e o que precisa aprimorar. Também é a ocasião em que irá identificar o conhecimento pedagógico que fundamentará a sua organização didática.

A *análise do ambiente* proporcionará ao professor ter a visão do espaço em que irá atuar, considerando o conteúdo que irá trabalhar com os alunos e os recursos didáticos que poderá utilizar na aula e como usá-los, portanto, é no momento desta análise que o docente fará a seleção do material que vai usar, considerando as estratégias definidas e os objetivos a serem alcançados na aula. Também deverá obter informações referentes ao ambiente (sala de aula ou outro espaço) no qual serão vivenciadas as experiências com a Sequência Fedathi.

Após a análise teórica e a análise do ambiente, vem o momento da vivência das sessões de ensino com a Sequência Fedathi. Uma sessão de ensino fundamentada na Sequência Fedathi compreende quatro etapas, que são: *tomada de posição*, *maturação*, *solução* e *prova*. Borges Neto (2016) destaca que todas essas etapas apresentam a sua função e devem ser exploradas na totalidade. Na subseção seguinte descrevemos essas etapas.

ETAPAS DA SEQUÊNCIA FEDATHI

A *tomada de posição* corresponde ao momento em que o professor apresentará uma situação-problema que deverá ser solucionada pelos alunos. A situação proposta deve ser previamente elaborada pelo professor com muito critério, considerando o conteúdo a ser ensinado e aprendido pelo aluno, bem como os pré-requisitos necessários à sua solução, ou seja, se os estudantes possuem os conhecimentos prévios necessários a serem mobilizados para a sua resolução, como também para a compreensão do novo conhecimento a ser ensinado. Além disso, a situação proposta deve ter uma linguagem acessível ao aluno.

A situação-problema proposta deve ser desafiadora de forma que o aluno sinta motivação em aprender e deve ter como um meio de resolução a aplicação do conhecimento

a ser aprendido. Ademais, a situação proposta deve ser generalizável, ou seja, partir de um contexto particular para um modelo geral, de maneira que o seu modo de execução possa ser utilizado para solucionar outras situações. (SOUZA, 2013; MENEZES, 2018).

O professor poderá apresentar a situação-problema escolhida de diversas formas, seja por meio de um problema escrito ou verbal, por meio de jogos, utilização de *softwares* matemáticos, manipulação de materiais concretos, por meio de uma pergunta etc. (SOUZA, 2013). A situação-problema pode ser também uma propriedade ou teorema a serem demonstrados e os alunos podem trabalhar individualmente ou em grupos, o importante é que sejam estimulados a solucionar a situação e a interagir com os colegas e com o professor.

A *maturação*, segunda fase da Sequência Fedathi, é o momento em que os alunos já se apropriaram da situação-problema proposta e estarão empenhados em buscar uma solução para ela. Assim, passarão a identificar as variáveis que compõem a situação problematizadora, as relações entre essas variáveis, irão refletir sobre a situação proposta, mobilizar conhecimentos prévios que possam auxiliá-los na busca pela solução, fazer interpretações, relacionar informações e desenvolver estratégias de resolução. Esta etapa é essencial para o desenvolvimento do raciocínio do aprendiz e para o sucesso da aprendizagem desejada.

A ideia é fazer com que a sala de aula se transforme em um ambiente de investigação e que os alunos assumam o papel de um matemático quando se empenha em resolver um problema da sua área. Ou no caso de ser uma aula de outra disciplina, o aluno deve atuar como um pesquisador em seu campo de estudo. Mas para isso acontecer, o docente deve ter atitudes adequadas de mediação, tendo como arrimo os princípios da Sequência Fedathi. Os alunos também devem reconhecer a relevância de suas atuações e ter disposição em participar da aula. Se os pares estiverem conscientes de suas ações e se esforçarem para executá-las, a etapa de maturação será bem-sucedida e o aluno obterá êxito na aprendizagem.

A próxima etapa da Sequência Fedathi é a *solução* que se refere ao momento em que o aluno organiza e apresenta o modelo para a solução do problema proposto. O esquema ou modelo desenvolvido pelo estudante para justificar a solução encontrada pode ser representado em linguagem matemática escrita ou por meio de desenhos, gráficos ou mesmo por intermédio de averbações. (SOUZA, 2013). Neste momento acontecerá um debate científico em sala de aula. O professor solicitará aos alunos que apresentem as suas estratégias de resolução para a situação problematizadora proposta e mediará o debate. O estudante deverá explicar os seus modelos de resolução, justificando a validade e pertinência destes. A solução apresentada será submetida a apreciação dos colegas e do professor. É um momento rico de interações e reflexões, por meio do qual o aluno terá a oportunidade de ter acesso a “[...] diferentes formas de interpretações das questões trabalhadas, tornando-os conscientes da resolução correta além de ajudar a não reincidirem em raciocínios equivocados na resolução de questões semelhantes [...]” (SOUZA, 2013, p. 31-32).

Quando um aluno estiver apresentando o seu modelo de resolução, os demais que estarão assistindo poderão interagir, fazendo questionamentos, apontando os pontos que discordam ou solicitando mais esclarecimentos por parte do emissor. É importante que aconteçam essas interações e o professor deverá estimulá-las. O docente também deverá analisar

juntamente com os alunos as respostas apresentadas. Ainda conforme Souza (2013), a atuação do professor durante o debate acontece por meio de interações bilaterais. O professor fica à frente das discussões, conduzindo e organizando o debate a medida em que vai analisando as soluções e averbações dos alunos, identificando erros e acertos. É importante que o educador valorize as respostas encontradas pelos alunos, estando estas certas ou erradas, pois essa atitude proporcionará a construção do conhecimento dos conteúdos estudados.

A fase seguinte a solução na Sequência Fedathi é nominada de *prova*, que é a ocasião em que o professor determinará as condições que irão formalizar as argumentações utilizadas nas etapas anteriores, ou seja, é nesta etapa em que serão apresentados e formalizados os conceitos matemáticos ou o modelo geral que será ensinado e utilizado, tanto para a resolução da situação-problema proposta, como para a solução de outras questões diversas. Neste momento, a situação problema encontra-se totalmente finalizada, com o desenvolvimento analítico devidamente descrito em linguagem matemática e demonstrações rigorosas. Acontece, portanto, a institucionalização do saber em jogo. Em outras palavras, a prova corresponde a:

Uma espécie de síntese ou modelagem matemática do problema, as ideias formuladas são revisadas, chegando-se à solução mais sistematizada, que será formalizada, permitindo a generalização. Essa capacidade de síntese ao problema, ou modelagem, permitirá que a solução encontrada seja aplicada há outras situações, em contextualizações diferentes da inicial (BORGES NETO, 2016, p. 16).

Na tese de Sousa (2015) encontramos a ampliação da Sequência Fedathi em níveis para além das etapas de *tomada de posição, maturação, solução e prova*. O 1º nível refere-se à *preparação* que corresponde ao momento de planejamento da vivência com a Sequência Fedathi. Aqui o professor fará a análise do ambiente no qual acontecerá a aula, selecionará e organizará os recursos didáticos que irá utilizar, bem como também, preparará o conteúdo que irá ministrar, considerando suas limitações, já estudando o que precisa aprimorar e planejando as situações-problema que irá propor aos alunos. Aqui é importante o professor já pensar nos possíveis obstáculos que poderá vivenciar na aplicação das situações-didáticas para planejar estratégias de como superá-los, caso eles venham a acontecer.

O 2º nível, nominado de *vivência*, corresponde a aplicação e execução das sessões didáticas. É o momento de desenvolvimento das aulas em que o professor colocará em prática os princípios da Sequência Fedathi e executará, juntamente com os alunos, as quatro fases dessa proposta metodológica de ensino (*tomada de posição, maturação, solução e prova*).

No 3º nível, na *análise*, o professor vai analisar o trabalho que ele realizou tomando como referência o que foi executado no 1º e 2º níveis. Ele verificará o que cumpriu ou deixou de cumprir de acordo com o seu planejamento. Também é importante que ele reflita sobre suas ações, analisando o que deu certo e pensando no que precisa aprimorar para as próximas vivências. É relevante destacar que a avaliação das ações dos alunos também deve ser feita.

Feita a apresentação da Sequência Fedathi, passaremos agora a apresentar o segundo aporte teórico deste estudo, a Teoria APOS (Ação, Processo, Objeto, Esquema).

A TEORIA APOS (AÇÃO, PROCESSO, OBJETO, ESQUEMA)

A teoria APOS foi desenvolvida pelo matemático e educador matemático professor Ed Dubinsky da Georgia State University, EUA e por colaboradores do grupo de pesquisa RUMEC (Comunidade de Pesquisa em Educação Matemática na Graduação). O nome APOS é um acrônimo, formado pelas iniciais das palavras em inglês *Action*, *Process*, *Object* e *Schema*.

Dubinsky e McDonald (2001) caracterizam a Teoria APOS como sendo uma teoria construtivista de aprendizagem de Matemática e uma perspectiva teórica que apresenta os seguintes atributos: tem poder explicativo, é aplicável a uma ampla gama de fenômenos, funciona como ferramenta para análise de dados, pode auxiliar a organizar o pensamento sobre fenômenos complexos e inter-relacionados e serve para fornecer uma linguagem para comunicação de ideias sobre a aprendizagem que excedem as descrições superficiais.

Ao pensar em uma teoria de aprendizagem de Matemática, o idealizador da Teoria APOS e seus colaboradores estavam interessados em entender o processo de aprendizagem dessa área de conhecimento e fornecer explicações para fenômenos que podem ser observados na construção das compreensões dos conceitos matemáticos. Nesse sentido, referente a essa teoria, Veloso (2018, p. 40) afirma que:

[...] O seu objeto de estudo são modelos do que pode ocorrer na mente de um indivíduo quando este procura aprender conceitos matemáticos. A partir de tais modelos a teoria estrutura materiais instrutivos e avalia os sucessos e os insucessos dos alunos ao lidar com situações problemáticas da Matemática.

Conforme Dubinsky e McDonald (2001), a ideia com a teoria é estender para conceitos matemáticos mais avançados o mecanismo de abstração reflexionante introduzido por Jean Piaget para descrever o desenvolvimento do pensamento lógico em crianças. Ed Dubinsky e colaboradores viram a possibilidade da abordagem de Piaget ser utilizada em tópicos avançados na graduação em Matemática e se concentraram em entender o processo de aprendizagem dos alunos quando estão construindo suas compreensões a respeito de conceitos matemáticos.

Arnon et al. (2014) citado por Veloso (2018) explicam que na visão de Jean Piaget, a abstração reflexionante corresponde ao mecanismo mental a partir do qual derivam todas as estruturas lógico-matemáticas. Em outras palavras, a abstração reflexionante estimula e sustenta toda a estrutura de uma construção lógico-matemática. Saravali *et al.* (2019) explicam com mais detalhes como funciona a abstração reflexionante no trecho seguinte.

[...] na abstração reflexionante, nota-se um trabalho fundamental e mental que realiza coordenações internas a partir das ações que executamos. Assim, a abstração reflexionante origina-se das atividades cognitivas do sujeito por meio de um movimento que contempla uma projeção e uma reorganização. Isso significa que é necessário transpor aquilo que se retira de um patamar inferior a um patamar superior, assim como neste patamar superior é necessária uma reorganização, ou reconstrução cognitiva, deste novo elemento que acaba de ser transposto e que nutre algumas características essenciais que possuía quando estava no patamar antigo, ao mesmo tempo que, na nova condição, transforma e melhora seus poderes. Esses dois momentos indissociáveis foram nomeados como reflexionamento (*réfléchissement*) e reflexão (*réflexion*) (p. 265).

Dubinsky (2002) observa alguns exemplos de abstração reflexionante apresentados por Piaget e destaca, a partir deles, tipos de abstrações reflexionantes que segundo ele são importantes para o pensamento matemático avançado, que são: *interiorização*, *encapsulação*, *generalização*, *coordenação* e *reversibilidade*. Os quatro primeiros tipos foram identificados por meio de exemplos apresentados por Jean Piaget e a reversibilidade foi acrescentada por Ed Dubinsky, pois segundo ele, Piaget não a considerava parte da abstração reflexionante. Na subseção seguinte apresentamos a descrição de cada um desses mecanismos que auxiliam na construção de estruturas mentais.

MECANISMOS DE CONSTRUÇÕES MENTAIS NA TEORIA APOS

Conforme Backendorf (2020) a *interiorização* consiste na construção de processos internos que dão sentido a compreensão de fenômenos, permitindo que o indivíduo tome consciência das coordenações de suas ações e tenha abstrações refletidas que possibilitam a construção de novos conceitos. Para Dubinsky (2002), a interiorização acontece quando a partir da capacidade de utilizar símbolos, linguagens, figuras e imagens mentais, o indivíduo consegue realizar abstrações reflexionantes para representar e construir processos internos que dão sentido aos fenômenos percebidos.

Nas palavras de Prado (2010, p. 29), na interiorização “[...] o sujeito constrói uma série de ações sobre um objeto matemático que podem ser executadas, em sua mente, sem necessariamente realizar todas as indicações descritas durante a ação.” Veja que na interiorização o indivíduo passa a ter o controle interno das ações, já que consegue imaginar cada passo da execução da ação, sem explicitá-lo e não depende de dicas e intervenções externas para executar uma ação. Isso acontece devido a repetição de ações e a reflexão sobre elas.

Prado (2010) cita como uma ilustração para este tipo de abstração reflexionante a comutatividade da adição. Ele explica que inicialmente, o indivíduo tem a necessidade de fazer cálculos para verificar que dois inteiros quaisquer adicionados resultam no mesmo valor, independentemente da ordem em que foram adicionados. Após a constatação deste fato, o indivíduo interioriza a propriedade da comutatividade e aceita que , para quaisquer e inteiros.

A *encapsulação* consiste no convertimento do processo que é dinâmico em uma estrutura estática. Em outras palavras, significa que a encapsulação ocorre quando o sujeito consegue compreender o processo como um objeto estático. Mas para chegar a esse ponto, ele deve ter entendimento da totalidade do processo e realizar ações sobre as estruturas. Rachelli (2017, p.73), por exemplo, explica que “[...] para multiplicar, é necessário primeiro encapsular a ação (mental) da adição num objeto ao qual a adição pode ser aplicada.”

Agora vejamos em que consiste a *generalização* dentro da ideia da abstração reflexionante. Segundo Dubinsky (2002) a generalização acontece quando o indivíduo consegue aplicar um esquema existente a uma coleção ampla de fenômenos. Para o autor, isso pode acontecer porque o indivíduo toma consciência da vasta aplicabilidade do esquema e pode ocorrer quando o processo é encapsulado a um objeto.

Dubinsky (2002) apresenta alguns exemplos de generalização, entre eles a ideia de

funções. O autor explica que o esquema funcional no qual funções transformam números (processo de encontrar a imagem de um valor numérico por meio da lei de formação da função), é generalizado para incluir outros objetos, como outras funções (o caso de composição de funções) e vetores (funções com valores vetoriais), por exemplo. Ele cita também o esquema de fatoração de inteiros positivos que é generalizado para a fatoração de polinômios e os esquemas de vetores de dimensão dois e três, cuja ideia se expande para vetores de n dimensões.

Agora vejamos em que consiste a ideia de *coordenação*. Segundo Dubinsky (2002), a coordenação corresponde a composição de dois ou mais processos para a construção de um novo processo. O autor cita como exemplo para este tipo de abstração reflexionante a composição de duas funções. Ele apresenta a seguinte explicação para essa ilustração:

[...] A composição é uma operação binária, o que significa que ela atua sobre dois objetos para formar um terceiro. Assim, é necessário partir de duas funções, consideradas como objetos. O sujeito deve desencapsular esses objetos, refletir sobre os processos correspondentes e interiorizá-los. Então os dois processos podem ser coordenados para formar um novo processo que pode ser encapsulado em um objeto que é a função que resulta da composição. [...] (DUBINSKY, 2002, p. 103, tradução nossa).

O quinto e último tipo de abstração reflexionante é a *reversibilidade*, que conforme já vimos, foi acrescentada por Ed Dubinsky como uma forma adicional de mecanismo mental, pois segundo esse autor, Piaget não discutiu a reversão de processos no contexto da abstração reflexionante. De acordo com o estudo do escrito de Ed Dubinsky intitulado por "*Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking*" (Abstração Reflexiva no Pensamento Matemático Avançado), compreendemos a reversibilidade como um meio de construção de um novo processo que consiste na inversão do processo original. Segundo o autor, não se trata de desfazer o processo original, mas uma vez que o processo existe internamente, o sujeito pode pensar sobre ele em um sentido inverso. Dubinsky (2002) cita vários exemplos de reversão de processos na Matemática, tais como: adição e subtração, multiplicação e divisão, o mecanismo de encontrar a inversa de uma função, a antidiferenciação ou integração etc.

Os mecanismos mentais de abstração reflexionante que acabamos de descrever são muito importantes na Teoria APOS. Esse modelo teórico se baseia nas estruturas mentais de ação, processo, objetos e esquemas que o sujeito realiza quando aprende os conceitos matemáticos e isso envolve os mecanismos mentais de abstração reflexionante (interiorização, coordenação, encapsulação, generalização e reversibilidade). Passaremos agora a descrever as quatro estruturas mentais essenciais da Teoria APOS, que conforme já vimos corresponde a: ação, processo, objeto e esquema, vejamos o que elas significam.

ESTRUTURAS DE CONSTRUÇÕES MENTAIS NA TEORIA APOS

Asiala *et al.* (1997) definem a estrutura mental *Ação* como sendo uma transformação de objetos que é realizada por meio de reações a estímulos externos, ou seja, o sujeito terá o suporte de pistas externas que irão fornecer todos os detalhes sobre quais passos tomar na execução da transformação. Assim, o sujeito que tem uma compreensão de um conceito no nível da ação só conseguirá executar uma transformação de um objeto, se receber as instruções ou passo a passo da operação que deverá executar.

Asiala *et al.* (1997) citam como exemplo da estrutura mental ação, o caso em que o aluno não consegue interpretar uma situação que envolve uma função, a menos que seja apresentada a ele a sua lei de formação para que sejam calculados valores numéricos a partir dela. Assim, quando o aluno não consegue explorar essa função e estudá-la de uma forma aprofundada e se restringe apenas a manipular a fórmula de sua lei de formação e avaliá-la em pontos específicos, os autores indicam que a ideia do aluno fica restrita a um conceito de ação de função.

Asiala *et al.* (1997, p. 7, tradução nossa) explicam que “quando uma ação é repetida e o indivíduo reflete sobre ela, ela pode ser interiorizada em um processo. Ou seja, é feita uma construção interna que executa a mesma ação, mas agora não necessariamente dirigida por estímulos externos.” Tomando como base essa explicação dos autores, com o nosso entendimento, podemos definir o *Processo* como sendo uma construção mental que ocorre por meio da *interiorização* de ações que foram repetidas e refletidas pelo indivíduo sem a ajuda de estímulos externos. Segundo Asiala *et al.* (1997), o indivíduo que tem a concepção processo consegue refletir, descrever ou mesmo inverter as etapas da transformação do objeto sem executá-las. Isso é possível porque o processo é uma construção interna e está sob o controle do indivíduo que é independente a qualquer tipo de sugestões externas.

D’Almeida (2021) esclarece que as estruturas mentais ação e processo correspondem a mesma transformação, a distinção entre elas está na forma como são concebidas, pois na ação, o indivíduo precisa seguir explicitamente todos os passos da transformação do objeto com o auxílio de sugestões externas, enquanto no nível da construção mental processo, os passos podem ser realizados apenas mentalmente. Um exemplo da concepção processo é encontrado em Rachelli (2017), a autora explica que: “Na Álgebra Linear, quando as ações envolvidas na construção de uma n -upla são interiorizadas em processos, o sujeito pode construir uma n -upla mentalmente, mesmo quando n não está especificado; pode considerar uma n -upla em qualquer espaço vetorial [...]” (p. 75).

Enfatizamos que um processo pode ser revertido (no caso da inversa de uma função, por exemplo), pode também acontecer de dois processos serem coordenados originando um novo processo (a composição de funções, por exemplo) e um processo ser encapsulado em um objeto.

O *Objeto* é o resultado da encapsulação do processo que ocorre quando o indivíduo reflete sobre as operações realizadas e toma consciência da totalidade do processo. Podemos citar como exemplo, a construção do conceito de grupo algébrico. Referente a este objeto, Elias (2012) entende que um aluno tem a concepções objeto de grupo quando entende essa estrutura algébrica como um conjunto munido de uma operação binária que satisfaz as propriedades (o fechamento, a associatividade, existência do elemento neutro e elemento simetrizável). Dessa forma, o aluno “[...] compreende grupo como um objeto matemático estático, que possui características próprias, além de conhecer diversos exemplos de grupos.” (ELIAS, 2012, p. 51).

Asiala *et al.* (1997) afirmam que geralmente é extremamente difícil encapsular processos em objetos e que algumas vezes será necessário que o objeto seja desencapsulado de volta ao processo que o originou. A desencapsulação do objeto possibilita ao indivíduo

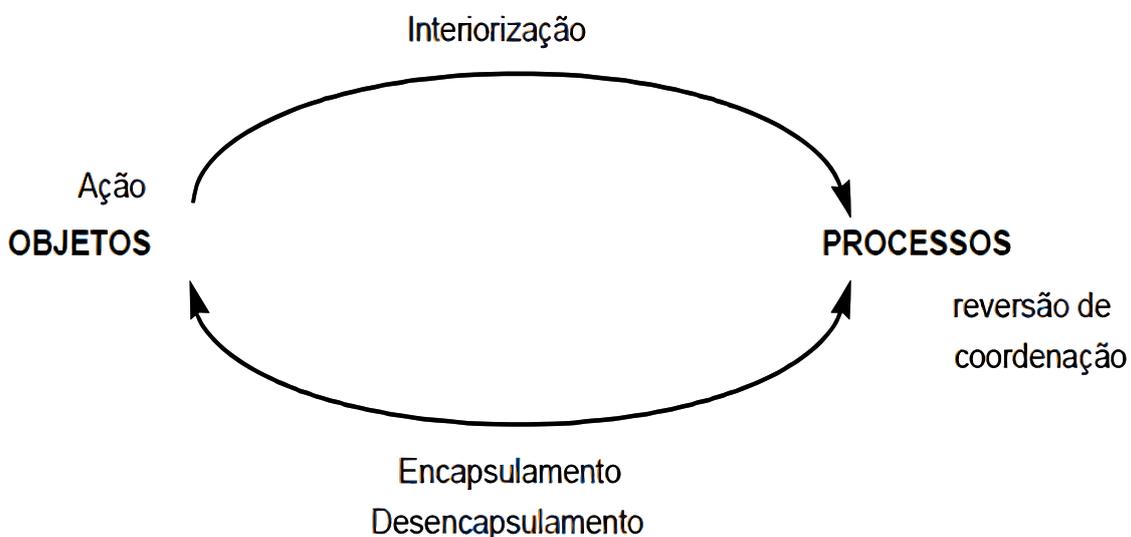
refletir sobre o processo, identificar ideias equivocadas, pensar sobre elas e até reconstruir o objeto que fora elaborado de forma errada.

Uma vez construídos ações, processos e objetos, eles podem ser organizados de maneira estruturada com a finalidade de formar um esquema. Dessa forma, Dubinsky e McDonald (2001) definem um *Esquema* para um conceito matemático como sendo a coleção de ações, processos, objetos e outros esquemas que se conectam por meio de princípios gerais para formar uma estrutura na mente do indivíduo. Essa estrutura será colocada em prática em situações-problema relacionada ao conceito estudado. Rachelli (2017) afirma que o sujeito pode refletir sobre o esquema e convertê-lo em um novo objeto. Já vimos anteriormente que processos são encapsulados em objetos e agora temos que o esquema pode ser transformado em um objeto. Portanto, temos duas maneiras de formar o objeto, por meio de processos ou de esquemas.

Podemos exemplificar a estrutura mental esquema utilizando o conceito de grupo algébrico. Podemos dizer que o aluno alcançou a concepção esquema de grupo quando ele compreende essa estrutura algébrica como um sistema matemático composto por um conjunto, uma operação e axiomas e consegue conectar esses três elementos por meio de princípios gerais. E para além disso, consegue aplicar a estrutura mental formada em outras situações, como por exemplo, homomorfismo e isomorfismo de grupos.

Agora que vimos os quatro tipos de estruturas mentais que compõem a Teoria APOS, vamos retomar a ideia geral dessa abordagem teórica. Conforme Asiala et al. (1997), a compreensão de um conceito matemático tem início com a manipulação de objetos físicos ou mentais para formar *ações*. As *ações* passam por uma *interiorização* e formam *processos* que passam por uma *encapsulação* para formar *objetos*. Os *objetos* podem ser *desencapsulados* de volta ao processo original. E por fim, *ações*, *processos* e *objetos* organizados formam um *esquema*. A Figura 1 ilustra como acontece a coordenação entre os mecanismos mentais (interiorização, reversibilidade, coordenação e encapsulação) e as estruturas mentais (ação, processo, objeto e esquema) na construção do esquema de um conceito matemático.

Figura 1. Construção de um esquema para um conceito matemático



Fonte: Asiala et al. (1997, p. 6)

Veja que na Figura 1 temos registrados dois mecanismos mentais que não citamos na descrição da construção mental do esquema apresentada no parágrafo anterior. São os mecanismos de reversão e coordenação. Eles aparecem porque na construção do esquema pode acontecer a coordenação de processos para formar nossos processos e a reversão de um processo para o processo original. Também observamos na Figura 1 que o mecanismo mental de generalização não aparece na construção do esquema. Como já vimos anteriormente, a generalização acontece quando o indivíduo, consciente da ampla aplicabilidade do esquema aprende a aplicá-lo a fenômenos diversos. Então no estágio da generalização, o esquema já está construído e o trabalho do indivíduo consiste em utilizá-lo em contextos distintos.

A respeito da forma de apresentar no texto as componentes da teoria APOS: ação, processo, objeto e esquema em forma sequencial, dando a ideia de ordem de construção das estruturas mentais, ou seja, que uma estrutura irá se desenvolver após a anterior ter sido construída, Dubinsky e McDonald (2001) destacam que essa é a maneira mais útil de falar sobre as construções mentais e que de certa forma cada estrutura na lista deve ser construída antes da etapa seguinte, porém na prática, quando o sujeito está aprendendo um conceito, as estruturas mentais não acontecem de forma tão linear.

Outro elemento-chave muito importante na Teoria APOS é a *decomposição genética* de um conceito, que segundo Dubinsky (2002) corresponde a uma descrição da forma de como o sujeito pode fazer as construções mentais que o possibilitam compreender a matemática envolvida. O autor enfatiza que a decomposição genética de um conceito pode não ser única, pois não é única a forma de como o sujeito pode aprender esse conceito. Mesmo não sendo única, ele afirma que a decomposição genética deve fazer sentido do ponto de vista matemático.

Outra definição de decomposição genética de um conceito na Teoria APOS é apresentada por Asiala *et al.* (1997). Para os autores, a decomposição genética corresponde a um conjunto estruturado de construções mentais que descrevem a forma como o conceito é construído na mente de um indivíduo.

Nesse sentido, Veloso (2018) define uma decomposição genética como sendo um modelo hipotético que apresenta a descrição das estruturas e mecanismos mentais que o aluno poderá construir na aprendizagem de um conceito matemático. Ele afirma que a decomposição genética “[...] é fruto das diversas combinações de mecanismos e estruturas mentais em vários esquemas diferentes de como o aluno constrói o seu conhecimento. Até ser experimentada, a decomposição genética é considerada a nível de hipótese e não como algo consumado” (VELOSO, 2018, p. 47).

Com a apresentação do conceito de decomposição genética finalizamos a descrição dos elementos que compõem a Teoria APOS. Agora, apresentaremos no tópico as conexões entre a Sequência Fedathi e a Teoria APOS.

CONEXÕES ENTRE A SEQUÊNCIA FEDATHI E A TEORIA APOS

O primeiro ponto comum que identificamos entre a Sequência Fedathi e a Teoria APOS está relacionado as suas origens, pois os seus idealizadores se preocuparam em primeira instância com questões relacionadas a aprendizagem de Matemática. Como já foi dito, Borges Neto, antes de formalizar a Sequência Fedathi, estava pensativo a respeito do desempenho dos estudantes do curso de Bacharelado em Matemática da UFC, refletindo sobre o ensino de Matemática, o sentido dessa ciência e o papel que ela estava prestando aos alunos do curso.

Ed Dubinsky, também se preocupou com a aprendizagem dos conceitos matemáticos e manifestou interesse em entender as dificuldades na aprendizagem da Matemática. É tanto que segundo Dubinsky e McDonald (2001), o desenvolvimento de uma teoria ou modelo em Educação Matemática deveria partir de uma tentativa de entender como a Matemática pode ser aprendida e como um programa educacional pode auxiliar nessa aprendizagem. Assim como Ed Dubinsky, Borges Neto (2016) também destaca a necessidade de se buscar uma proposta de Educação Matemática que priorize mais o raciocínio e a compreensão dos processos de aprendizagem. Inclusive, ele questiona em sua tese de professor titular da Faculdade de Educação da UFC, o ensino em que predominam regras e algoritmos e o aluno é visto como uma esponja absorvendo o conteúdo ministrado pelo professor.

Outro ponto comum entre a Sequência Fedathi e a Teoria APOS que realçamos, é referente a característica construtiva de ambas, pois Dubinsky e McDonald (2001) apresentam essa teoria como sendo uma teoria construtivista de aprendizagem da Matemática e Borges Neto (2016) apresenta a Sequência Fedathi como uma proposta lógico-dedutiva-construtiva para o ensino de Matemática. Inclusive, Santos (2021, p. 53) afirma que “[...] a Sequência Fedathi entende que toda ideia matemática precisa ter uma demonstração construtiva na qual explora a ação do sujeito em busca das respostas para a pergunta que gerou sua investigação [...]”

Na perspectiva do construtivismo, a finalidade do ensino de Matemática tem natureza formativa. Dessa forma, os conteúdos são meios úteis para a construção e desenvolvimento das estruturas elementares da inteligência, mas o essencial não é aprender ou assimilar o conhecimento, mas “aprender a aprender”, desenvolvendo o pensamento lógico-formal, pois na concepção dessa corrente, o conhecimento matemático é oriundo da ação interativa/reflexiva do indivíduo com o meio (meio ambiente e/ou atividades), não resultando diretamente do mundo físico e/ou de mentes isoladas. Ou seja, a corrente construtivista prioriza o processo de construção do saber, invés do produto do conhecimento. (FIORENTINI, 1995).

A Teoria APOS se alinha com a corrente construtivista por também dar mais atenção ao processo de construção do conhecimento do que a aprendizagem deste. Esta perspectiva teórica busca explicar como acontece a construção de um conceito matemático na mente do sujeito. Ademais, a Teoria APOS tem como ponto de partida a noção piagetiana de abstração reflexionante que segundo Bartelmebs, Harres e Silva (2014, p. 79) “[...] capacita o sujeito poder ver e significar aquilo que seus olhos transmitem a seu cérebro [...]”. Esse tipo de abstração tem caráter construtivo e se apoia em construções mentais que o indivíduo realiza. Para esse tipo de abstração os conhecimentos prévios são extremamente necessários

para a aquisição de novos conhecimentos.

A Sequência Fedathi também preza pelo processo de construção do conhecimento do aluno e pelas “[...] ações estabelecidas com esteio nas interações do sujeito com o objeto e que ocorrem internamente[...]” (SANTOS, 2021, p. 53). Esta proposta sugere que o aprendiz ponha a “mão na massa” e participe ativamente da construção do conhecimento por meio de experiências significativas. A intenção primordial também é o “aprender a aprender” e como resultado vem a aquisição do conhecimento específico adicionado a habilidades diversas de saber buscar estratégias para resolver situações diversas que venham a ser propostas.

Quando usamos a expressão “mão na massa” na Sequência Fedathi estamos nos referindo ao aluno executar ações que o conduzam a construção do conhecimento. Na prática, nem sempre ele lidará com o manejo de objetos palpáveis e observáveis, ele pode também apenas lidar com construções internas desenvolvidas na mente, articulando conhecimento prévios, elaborando e testando estratégias de resolução para uma determinada situação, demonstrando propriedades e teoremas etc.

Ademais, sobre a questão da valorização dos conhecimentos prévios para avançar nos patamares com as abstrações reflexionantes, na Sequência Fedathi é fundamental que o docente conheça o nível cognitivo do estudante e valorize seus conhecimentos prévios, pois é a partir do saber já adquirido e de domínio do aprendiz que o professor irá investir em intervenções para que o aluno atinja um novo patamar com a aprendizagem de novos conteúdos. Daí a questão de conhecer o *plateau*, que é um princípio da Sequência Fedathi visto anteriormente. Além disso, a proposta da referida sequência também preza pela ação do estudante em refletir, agir e logo após um ato voltar a refletir sobre sua ação. O exercício constante de executar ações e refletir é indispensável em uma aula baseada na Sequência Fedathi. Os alunos, a partir de suas ações, poderão identificar características e propriedades do objeto (palpável ou não) que o possibilitará aprender e produzir algo novo. Assim, é essencial que ele pense sobre como agir, mobilize conhecimentos prévios e reflita sobre suas ações.

O processo de reflexão é indispensável e para isso o professor pode utilizar os princípios da pergunta e do contraexemplo da Sequência Fedathi para instigar o aluno a pensar e desenvolver ações mentais por meio da organização e reorganização de ideias. O professor também pode conduzir o aluno a refletir sobre o erro que ele venha a cometer na construção do conhecimento e possibilitar que o estudante redirecione as suas ações.

Perceba que essa toada que consiste em: construção do conhecimento, aproveitamento de saberes adquiridos anteriormente, exploração do objeto físico ou mesmo o objeto que não é observável, agir e pensar, ação refletida, explorar o raciocínio e construções mentais, está alinhada tanto com a proposta da Sequência Fedathi quanto com a proposta da Teoria APOS.

Outra interseção entre a Sequência Fedathi e a Teoria APOS está na proposta de lançar situações-problema ao sujeito. A luz da Teoria APOS, o conhecimento matemático consiste na tendência do indivíduo em lidar com situações-problema de Matemática que são percebidas por meio de construções mentais de ações, processos e objetos. Essas constru-

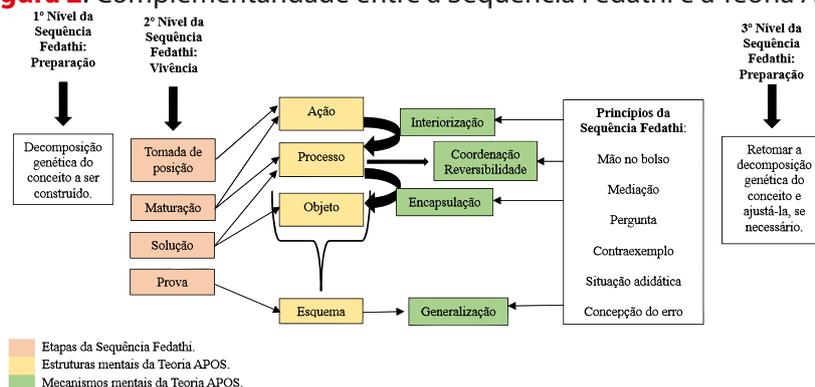
ções são organizadas internamente em esquemas para dar sentido as situações e possibilitar a resolução do problema proposto. (DUBINSKY; MCDONALD, 2001). Dubinsky (2002) ressalta que deve ser proposto ao longo das etapas cognitivas da decomposição genética, uma instrução que possibilite ao aluno a desenvolver atividades e criar situações que o induzam a fazer abstrações reflexionantes.

A Sequência Fedathi também propõe que o professor apresente ao aluno situações problematizadoras que os desafie a agir, criando estratégias para a solução da situação proposta e conseqüentemente adquirindo a aprendizagem do conteúdo que esteja relacionado a situação lançada. A proposta com o problema é desestabilizar (no bom sentido) o aluno e impulsioná-lo a agir, pensar, elaborar estratégias de resolução e por conseguinte fazer construções mentais, desenvolvendo a habilidade do raciocínio. Neste processo o indivíduo participa da construção dos conceitos e aprende conteúdos novos.

Outro ponto de convergência entre a Sequência Fedathi e a Teoria APOS está relacionada a questão da generalização, pois nas duas propostas esse tipo de abstração reflexionante é realçada. Como já vimos anteriormente, a Teoria APOS destaca o mecanismo mental da generalização na construção de estruturas mentais na aprendizagem de um conceito matemático. Na classe de generalização, o indivíduo terá condições de aplicar um esquema que foi encontrado em uma situação particular e utilizá-lo em outros contextos com uma ampla gama de fenômenos. Conforme a Teoria APOS, o sujeito toma consciência da vasta aplicabilidade do modelo ou esquema encontrado, quando a estrutura mental processo é encapsulada na estrutura mental objeto. Na proposta da Sequência Fedathi, o trabalho com a generalização tem o mesmo sentido. A ideia no ensino de um conteúdo com esta proposta metodológica é propor ao aluno uma situação generalizável e prover condições que possibilitem o aprendiz a abstrair um modelo de um contexto particular e aplicá-lo em circunstâncias diversas no trato com outros fenômenos.

Além de identificar os pontos em comum entre a Sequência Fedathi e a Teoria APOS, procuramos relacionar uma perspectiva teórica com a outra, considerando o trabalho docente fundamentado na Fedathi. A Figura 2, apresenta um esquema que serve para ilustrar como acontece a coordenação entre a proposta de Borges Neto e a teoria de aprendizagem de Matemática de Ed Dubinsky. A Figura 2 foi desenhada durante os estudos das duas propostas, quando buscávamos alinhar uma concepção com a outra e entender em quais níveis e etapas da Sequência Fedathi poderíamos enquadrar os conceitos-chave na Teoria APOS.

Figura 2. Complementaridade entre a Sequência Fedathi e a Teoria APOS



Fonte: Elaborada pelos autores.

Na Figura 2, podemos observar que no primeiro nível da Sequência Fedathi (*preparação*) que corresponde ao momento em que o professor irá fazer o planejamento das vivências, consideramos que seria conveniente a elaboração da decomposição genética do conceito a ser aprendido, levando em consideração, para a elaboração desse modelo hipotético, os mecanismos e estruturas mentais conforme a teoria APOS.

No 2º nível da Sequência Fedathi em que o professor irá colocar em prática o planejamento construído na preparação, ocorrerá a vivência da aula fundamentada nesta proposta metodológica. A vivência perpassará por quatro etapas, tomada de posição, maturação, solução e prova. Aqui o professor utilizará os princípios da Fedathi (mão no bolso, mediação, pergunta, contraexemplo, concepção do erro e situação adidática) para mediar cada vivência. Defendemos a ideia de que serão os princípios da Fedathi que auxiliarão os alunos a desenvolverem os mecanismos mentais de interiorização, coordenação, reversibilidade, encapsulação e generalização, possibilitando consequentemente que os aprendizes evoluam de uma estrutura mental para a outra seguinte.

Entendemos que na tomada de posição o aluno ainda estará na estrutura de Ação, conforme a Teoria APOS, pois nesta ocasião, ele ainda precisa de instruções externas para avançar rumo a transformação do objeto. Aqui o professor apresenta a situação-problema ao aluno e este provavelmente por ainda não ter acionado os mecanismos mentais, dependem de sugestões do professor. Mas cabe ao docente colocar em prática os princípios da Sequência Fedathi, seja a pergunta, o contraexemplo, a mediação e pode até começar a colocar a mão no bolso, permitindo que o aluno ponha a mão na massa e comece a acionar os mecanismos mentais.

Na fase de maturação, o aluno já está com a “mão na massa” e consequentemente iniciando a interiorização das ações. Ele está agindo, refletindo, pensando em estratégias de solução para a situação proposta e quase chegando na estrutura de processo na teoria APOS. Compreendemos que será na etapa de solução da Sequência Fedathi que o aluno terá interiorizado por completo as ações e terá evoluído para a estrutura seguinte (o processo). Na fase de solução, quando o aluno já está na estrutura mental processo, terá condições de fazer operações mentalmente sem ter que recorrer a execução de ações. Ele já está com mais independência e já consegue apresentar e justificar o seu modelo. Na solução, o estudante estará apto a coordenar e reverter processos. Mas enfatizamos que é necessária uma mediação adequada do professor para que aconteça a evolução do aluno a nível de estruturas mentais.

Ainda é na fase de solução que o aluno fará a encapsulação do processo em um objeto estático, ou seja, ele chegará ao modelo de resolução da situação proposta, seja esse modelo válido ou não. O modelo encontrado pelo aluno passará pela avaliação do professor e será submetida a apreciação dos pares. Aqui, ressaltamos mais uma vez a importância de o professor trabalhar com o erro, não o utilizando para punir o aluno, mas como instrumento de reflexão que possa ajudar o aprendiz a evoluir na construção dos conceitos.

Na etapa da prova, o modelo adequado a solução do problema proposto será formalizado. O ideal é que ele possa ser utilizado tanto para a situação proposta inicialmente, quanto para a resolução de outras questões diversas. Nesta etapa, o aluno já terá evoluído

para a estrutura mental de esquema com condições de trabalhar com generalizações.

Por fim, no 3º nível da Sequência Fedathi, que corresponde ao momento em que o professor irá avaliar o seu trabalho, ele deverá retomar a decomposição genética do conceito elaborada no 1º nível e fazer uma avaliação tanto da sua postura, quando da aprendizagem dos alunos, identificando quais as dificuldades que os estudantes tiveram na aprendizagem e verificando se a decomposição genética foi validada ou não. Caso não tenha sido, ele pode reajustá-la tendo sempre como foco a evolução do raciocínio lógico do aluno.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em síntese, temos que os pontos em comum identificados entre a Sequência Fedathi e a Teoria APOS são as seguintes: 1) Desenvolvimento de ações internas baseadas nas interações do indivíduo com o objeto (físico ou não palpável); 2) Valorização da abstração reflexionante de generalização; 3) A concepção do erro; 4) Ação refletida; 5) Trabalho com o *plateau*; 6) Professor mediador do conhecimento; 7) Trabalho com situações-problema de Matemática que são percebidas por meio de construções mentais de ações, processos, objetos e esquemas; 8) Perspectivas construtivistas e 9) Exploração do raciocínio e construções mentais.

Como podemos perceber, são várias as convergências entre a Sequência Fedathi e a Teoria APOS e referente a complementaridade entre ambas, podemos ver que as estruturas mentais de ação, processo, objeto e esquema da Teoria APOS se encaixam nas etapas da Sequência Fedathi e que os princípios da Fedathi podem servir de instrumentos para auxiliar o desenvolvimento dos mecanismos mentais da Teoria APOS.

Assim, acreditamos que uma abordagem fundamentada na Sequência Fedathi e sob o olhar da Teoria APOS, tem de tudo para promover uma aprendizagem matemática em que o aluno desenvolva o raciocínio lógico e habilidades matemáticas, conseguindo participar das construções dos conceitos matemáticos estudados.

A nossa perspectiva com essa ideia é tão positiva que em nossa pesquisa de doutorado estamos trabalhando com a proposição de que a ação docente fundamentada na Sequência Fedathi propicia aos professores de Matemática em formação inicial desenvolver estruturas mentais segundo a Teoria APOS na aprendizagem da estrutura algébrica nominada de Grupo. Então, como estamos buscando desenvolver estratégias de ensino com as duas propostas teóricas, perspectivamos que outros professores de Matemática, tanto do ensino básico quanto do ensino superior, vejam a possibilidade de trabalhar com as duas perspectivas e desenvolvam experiências de ensino de Matemática com a Sequência Fedathi e a Teoria APOS, promovendo uma abordagem diferenciada daquelas que recorrentemente são empregadas em sala de aula em que o foco do ensino é especificamente a abordagem mecânica e analítica do conteúdo.

REFERÊNCIAS

- ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.
- ASIALA, Mark *et al.* A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate

Mathematics Education. **ResearchGate**, p. 1-23, nov. 1997.

BACKENDORF, Viviane Raquel. **Abstração reflexionante e matemática dinâmica: compreensão do conceito de integral dupla**. 2020. 127 f. Tese (Doutorado)–Curso de Doutorado em Informática na Educação, Centro de Estudos Interdisciplinares em Novas Tecnologias da Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2020. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/220418>. Acesso em: 04 nov. 2022.

BARTELMEBS, Roberta Chiesa; HARRES, João Batista Siqueira; SILVA, João Alberto da. A Teoria da Abstração Reflexionante e a história da Astronomia. **Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia–RELEA**, [S. l.], ano 2014, n. 18, p. 73-88. Disponível em: <https://www.relea.ufscar.br/index.php/relea/article/view/201>. Acesso em: 2 abr. 2023.

BORGES NETO, Hermínio (org.). **Sequência Fedathi interfaces com o pensamento pedagógico**. Curitiba: CRV, 2019.

BORGES NETO, Hermínio (org.). **Sequência Fedathi: fundamentos**. Curitiba: CRV, 2018.

BORGES NETO, H. **Uma proposta lógico-dedutiva-constructiva para o ensino de matemática**. 2016. Tese (Professor Titular)–Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016. Disponível em: <http://blogs.multimeios.ufc.br/wp-content/blogs.dir/33/files/2020/11/tese-titular-faced-2016-hbn.pdf>. Acesso em 15 abr. 2022

D'ALMEIDA, Joice. **As concepções sobre o Teorema Fundamental da Aritmética de professores de Matemática da rede pública paulista, sob o olhar da teoria APOS**. 2021. 255 f. Tese (Doutorado)–Curso de Doutorado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2021. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/24520>. Acesso em: 07 jan. 2023.

DUBINSKY, E. **Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking**. In: TALL, David. (Org.), *Advanced Mathematical Thinking*, Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2002, p. 95-123. Disponível em <http://www.math.wisc.edu/~wilson/Courses/Math903/ReflectiveAbstraction.pdf>. Acesso em: 04 nov. 2022.

DUBINSKY, E.; McDONALD, M. A. APOS: **A Constructivist Theory of Learning in Undergrad Mathematics Education Research**. In: HOLTON, D...et. al. (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, 2001. Disponível em <http://www.math.wisc.edu/~wilson/Courses/Math903/ICMIPAPE.PDF>. Acesso em: 04 de nov. 2022.

ELIAS, Henrique Rizek. **Dificuldades de estudantes de Licenciatura em Matemática na compreensão de conceitos de grupo e/ou isomorfismo de grupos**. 2012. 152 f. Dissertação (Doutorado)–Curso de Ensino de Ciências e Educação Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012. Disponível em: <https://pos.uel.br/pecem/wp-content/uploads/2021/08/ELIAS-Henrique-Rizek.pdf>. Acesso em: 11 jan. 2023.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino de Matemática no Brasil. **Revista Zeteriké**, v. 3, n. 1, 1995.

MENEZES, Daniel Brandão. **O Ensino do Cálculo Diferencial e Integral na perspectiva da Sequência Fedathi: caracterização do comportamento de um bom professor**. 2018. 127 f. Tese (Doutorado)–Curso de Programa de Pós-graduação em Educação Brasileira, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018. Disponível em: http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/37124/1/2018_tese_dbmenezes.pdf. Acesso em: 19 mar. 2019.

PRADO, Eneias de Almeida. **Alunos que completaram um curso de extensão em Álgebra Linear e suas concepções sobre base de um espaço vetorial**. 2010. 186 f. Dissertação (Mestrado)–Curso de Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2010. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11458>. Acesso em: 06 jan. 2023.

RACHELLI, Janice. **Compreensão dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca: análise segundo o modelo cognitivo APOS**. 2017. 294 f. Tese (Doutorado)–Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática, Santa Maria/RS, 2017. Disponível em: <http://www.tede.universidadefranciscana.edu.br:8080/handle/UFN-BDTD/601>. Acesso em: 4 jan. 2023.

SANTANA, Ana Carmen de Souza. Mão no Bolso: postura, metodologia ou pedagogia? In: BORGES NETO, Hermínio (org.). **Sequência Fedathi: fundamentos**. Curitiba: CRV, 2018. p. 15-21.

SANTOS, Joelma Nogueira dos. **O Laboratório de Matemática e Ensino (LME) na formação inicial do professor: orientações metodológicas com base na Sequência Fedathi**. 2021. 209 f. Tese (Doutorado)–Curso de Doutorado em Educação Brasileira, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2021. Disponível em: <https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/59281>. Acesso em: 19 jan. 2023.

SARAVALI, Eliane Giachetto; MANO, Amanda de Mattos Pereira; GUIMARÃES, Taislene; ORIANI, Angélica Pall; ROTOLI, Liliane Ubeda Morandi. Abstração reflexionante em estudantes: implicações pedagógicas e psicopedagógicas. **Rev. Psicopedagogia**, [S. l.], p. 263-274, 2019. Disponível em: <http://pepsic.bvsalud.org/pdf/psicoped/v36n111/02.pdf>. Acesso em: 7 dez. 2022.

SOUSA, Francisco Edisom Eugenio de. **A pergunta como estratégia de mediação didática no ensino de matemática por meio da Sequência Fedathi**. 2015. 282 f. Tese (Doutorado)–Curso de Doutorado em Educação Brasileira, Faculdade de Educação–FACED, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/14363>. Acesso em: 19 nov. 2021.

SOUZA, Maria José Araújo. Sequência Fedathi: apresentação e caracterização. In: BORGES NETO, Hermínio; SOUSA, Francisco Edisom Eugenio de; VASCONCELOS, Francisco Herbert Lima; LIMA, Ivoneide Pinheiro de; SANTOS, Maria José Costa dos; ANDRADE, Viviane Silva de (Org.). **Sequência Fedathi: uma proposta pedagógica para o ensino de ciências e matemática**. Fortaleza: Edições UFC, 2013. p. 15-47.

VELOSO, Jorge Dias. **Aprendizagem do Cálculo para economistas — Caracterização de conceitos matemáticos no nível superior**. 2018. 270 f. Tese (Doutorado)–Curso

de Doutorado em Didática da Matemática, Faculdade de Ciências–Departamento de Matemática, Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2018. Disponível em: <https://ubibliorum.ubi.pt/bitstream/10400.6/6975/1/VelosoTeseUBI20181211release.pdf>. Acesso em: 01 fev. 2023.

Histórico

Recebido: 20 de junho de 2023.

Aceito: 24 de julho de 2023.

Publicado: 27 de julho de 2023.

Como citar–ABNT

LIMA, Maria Vanísia Mendonça de; BORGES NETO, Hermínio. Aprendizagem dos conceitos matemáticos na Teoria APOS e o ensino na Sequência Fedathi: Algumas interseções. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura–REMATEC*, Belém/PA, n. 43, e2023026, 2023. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n43.pe2023026.id499>.

Como citar–APA

LIMA, M. V. M.; BORGES NETO, H. Aprendizagem dos conceitos matemáticos na Teoria APOS e o ensino na Sequência Fedathi: Algumas interseções. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC*, 43, e2023026. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n43.pe2023026.id499>.