

Dimensions institutionnelle et écologique de l'organisation mathématique «quadrilatères» au second cycle de l'enseignement fondamental au Mali

Study of the institutional and ecological dimensions of the mathematical organization “quadrilaterals” in the second cycle of basic education in Mali

Estudo das dimensões institucionais e ecológicas da organização matemática “quadriláteros” no segundo ciclo da educação básica em Mali

Ibrahima Kériha Doumbia¹ 

Saddo Ag Almouloud²  

RESUME

Nous étudions la problématique écologique de l'organisation mathématique «quadrilatères» au second cycle de l'enseignement fondamental malien, sur la période 1960 à 2020, en nous appuyant sur les programmes et les manuels de cette période, ainsi que la théorie Anthropologique du Didactique et aux trois dimensions d'un problème didactique. Notre étude montre que le savoir «quadrilatères» n'était pas parfaitement défini au départ et que c'est avec le temps qu'il est bien clarifié. Nous observons aussi que certaines praxéologies ont évolué en ce qui concerne les techniques utilisées. Du point de vue de la dimension écologique, nous observons que certains types de tâches ont disparu et d'autres ont fait leur apparition. A la fin de notre étude, nous proposons un modèle praxéologique de références mettant en jeu des organisations mathématiques et des types de tâches susceptibles de favoriser une organisation didactique prenant les différentes caractéristiques des quadrilatères.

Mots-clés: Quadrilatères ; Epistémologie; Écologie; Institution; Praxéologie.

ABSTRACT

We study the ecological problem of the mathematical organization “quadrilaterals” in the second cycle of Malian basic education, over the period 1960 to 2020, drawing on the programs and textbooks of this period, as well as the Anthropological Theory of Didactics and the three dimensions of a didactic problem. Our study shows that “quadrilateral” knowledge was not perfectly defined at the outset, and that it has only become clearer over time. We also observe that certain praxeologies have evolved in terms of the techniques used. In terms of the ecological dimension, we note that certain types of tasks have disappeared, while others have appeared. At the end of our study, we propose a praxeological model of references involving mathematical organizations and task types likely to promote a didactic organization considering the different characteristics of quadrilaterals.

Keywords: Quadrilaterals; Epistemology; Ecology; Institution; Praxeology.

RESUMO

Estudamos o problema ecológico da organização matemática “quadriláteros” no segundo ciclo da educação básica no Mali, no período de 1960 a 2020, com base nos currículos e livros didáticos desse período, bem como na Teoria Antropológica do Didático e nas três dimensões de um problema didático. Nosso estudo mostra que o conhecimento sobre “quadriláteros” não estava perfeitamente definido no início, e que somente com o passar do tempo ele se tornou mais claro. Também observamos que certas praxeologias evoluíram em termos das técnicas utilizadas. Do ponto de vista da dimensão ecológica, observamos que certos tipos de tarefas desapareceram e outros surgiram. No final de nosso estudo, propomos um modelo praxeológico de referências envolvendo organizações matemáticas e tipos de tarefas que podem promover uma organização didática levando em conta as diferentes características dos quadriláteros.

Palavras-chave: Quadriláteros; Epistemologia; Ecologia; Instituição; Praxeologia.

1 Docteur en Didactique des Mathématiques de l'université des sciences, des techniques et des technologies de Bamako (USTTB), Professeur au Département de Mathématiques de l'École Normale Supérieure de Bamako ; Rue du 22 octobre 1946, Quartier du Fleuve, Bamako - MALI, 8P241. E-mail: keriba.idoumbia@gmail.com

2 Docteur en Mathématiques et Application de l'Université de Rennes I – France. Professeur du Programa de Pós-graduação em Ensino, Filosofia e História da Ciência (PPGEFHC) da Universidade Federal da Bahia – Bras. Rua Antonio Turati, 78, Vila Celeste, São Paulo – SP, cep. 02464-050. E-mail: saddoag@gmail.com

INTRODUCTION ET CONTEXTE DE L'ÉTUDE

L'étude que nous proposons a été réalisée au Mali. Elle résulte d'une analyse des dimensions épistémologique, économique-institutionnelle et écologique de l'organisation mathématique des «quadrilatères» au second cycle de l'enseignement fondamental malien (élèves de 13-15 ans).

Rappelons que le système éducatif malien comprend: l'enseignement préscolaire (la maternelle, enfants moins de six ans), l'enseignement fondamental composé de deux cycles: 1^{er} cycle qui a six classes (élèves de 7 -13 ans); 2^e cycle (ou second cycle Fondamentale) qui a trois classes (élèves de 14 -16 ans), l'enseignement secondaire (plus de 16 ans ou lycées), des instituts de formation et des écoles de formations professionnelles), l'enseignement supérieur (universités et grandes écoles).

Notre recherche se situe au second cycle de l'enseignement fondamental. Dans cet ordre d'enseignement, sur la période 1960 à 2020, nous étudions les changements des programmes des mathématiques, voir comment l'objet mathématique «quadrilatères» a résisté à ces changements.

Nous nous posons à ce sujet les questions suivantes: Comment les «quadrilatères» ont-ils vécus dans cet ordre d'enseignement pendant cette période ? Quelle est l'écologie des quadrilatères sur cette période? Pour cela on se pose des questions d'écologie au sens de Artaud (1997) pour savoir dans l'enseignement des quadrilatères : quel savoir a résisté? Pour quoi? – quel savoir a disparu? Pourquoi? – quel savoir a réapparu? Pourquoi?

REVUE DE LA LITTÉRATURE ET PROBLÉMATIQUE

Nous entreprenons une brève revue de la littérature en nous appuyant sur deux travaux liés à l'enseignement et l'apprentissage des quadrilatères. Il s'agit des travaux de Maioli (2002) et Ferreira (2016).

La recherche de Maioli (2002) vise à contribuer à la formation des enseignants "à la fois en ce qui concerne l'acquisition des «Quadrilatères», ainsi qu'à l'amélioration des connaissances susceptibles de les aider à élaborer des stratégies appropriées pour travailler sur la géométrie dans la classe". Avant de proposer le scénario de la formation des enseignants, Maioli (2002) a analysé trois collections de manuels de la 5^e à la 8^e année (qui correspondent à la 6^e à la 9^e années au Mali). Sur la base des recommandations des Paramètres Curriculaires Nationaux (BRÉSIL, 1998) et des questions soulevées par Duval (1995) concernant les recherches sur les registres de représentation sémiotique. Maioli a choisi sept critères pour analyser les manuels : (CI)–L'auteur du manuel présente-t-il le contenu à partir de situations problématiques ? (CII)–L'auteur du manuel présente-t-il des activités de construction géométrique? (CIII)–Les activités permettent-elles à l'élève de faire des conjectures ? (CIV)–Les activités impliquent-elles des démonstrations ? (CV)–L'auteur travaille-t-il avec plusieurs registres de représentation sémiotique (DUVAL, 1995) ? (CVII)–Quelle définition du trapèze est considérée ?

Maioli (2002) a observé des variations entre les définitions du quadrilatère, bien que tous les auteurs soient conformes aux définitions choisies. Ce point mérite d'être souligné,

car le manuel sert de support principal à l'enseignant, et une interprétation problématique d'une définition, associée à l'utilisation de plus d'un manuel pour la préparation des cours, peut générer des erreurs conceptuelles de la part des enseignants.

Ferreira (2016) dans sa recherche, présente une analyse des organisations mathématiques et didactiques proposées dans les manuels. Cette analyse a été faite à la lumière de la Théorie Anthropologique du Didactique en termes de tâche, de technique et de bloc théorico-technologique, en examinant comment les auteurs présentent la méthode déductive et comment l'étude des quadrilatères est effectuée, en se concentrant sur les définitions et les démonstrations. Pour l'analyse des manuels choisis, Ferreira (2016) s'est appuyé sur les questions suivantes:

Comment les manuels de géométrie plane, utilisés dans les cours de mathématiques de premier cycle de l'université, abordent-ils les démonstrations concernant le thème des "quadrilatères"? Les tâches proposées dans les manuels de géométrie plane, utilisés dans les cours de premier cycle ont-elles le potentiel de motiver les étudiants à faire des découvertes et de leur offrir des moments d'action, de formulation et de validation? Les tâches proposées dans les manuels de géométrie plane, utilisés dans les cours de premier cycle, ont-elles le potentiel d'amener les élèves à réfléchir sur la figure, à faire des conversions entre des représentations de registres différents et à évoluer d'une appréhension perceptive à une appréhension discursive? (FERREIRA, 2016, p.107, traduction libre)

Dans sa recherche, l'auteure montre que dans les manuels analysés, l'étude des concepts et des propriétés est directe, sans utiliser des ressources qui amènent l'étudiant à faire des conjectures. Au lieu de cela, ils procèdent à la formalisation, suivie de la résolution de problèmes. Dans ces manuels, le contenu "quadrilatères" est étudié comme une révision, sans chapitre spécifique consacré à son étude et avec peu de démonstrations effectuées par les auteurs, la plupart étant laissées comme exercices pour l'étudiant. Dans l'un des manuels, un chapitre est consacré à l'étude des quadrilatères.

En ce qui concerne les tâches proposées à l'élève, l'un des manuels combine des tâches de reproduction d'une technique et des tâches d'interprétation, pour ensuite appliquer la technique et des tâches de tests. Il y a une prédominance de tâches de réalisation de tests, mais en nombre réduit, prévalant dans la section des exercices, le complément de la théorie.

Dans les trois manuels analysés, les définitions de trapèze et de trapèze isocèle adoptées ne sont pas cohérentes avec les propriétés énoncées. Le contenu "quadrilatères" est présenté de manière directe et superficielle. Étant donné que le manuel est un outil de soutien important pour les étudiants et les enseignants et considérant le faible niveau en géométrie des étudiants entrant dans les cours de mathématiques de premier cycle de l'enseignement supérieur, Ferreira affirme que la façon dont le contenu "quadrilatères" est présenté dans les manuels analysés peut contribuer aux difficultés présentées par les étudiants dans l'apprentissage de ce contenu.

De plus, cette auteure souligne que:

[...] d'un point de vue mathématique, le contenu « quadrilatère » permet d'explorer un nombre important de propriétés géométriques permettant de résoudre plusieurs problèmes. Il permet également de résoudre des problèmes avec l'utilisation d'une règle et d'une équerre, ce qui permet de soulever des conjectures. De plus, il favorise

l'exploration des théorèmes, des théorèmes réciproques, des démonstrations et des différents registres de représentation. (FERREIRA, 2016, p.104, Traduction libre)

À la suite de ces analyses, Ferreira (2016, p. 254) déclare que:

Au vu de ce qui a été rapporté sur les livres analysés, nous pouvons affirmer que l'approche des quadrilatères présentée dans ces livres est directe, dans le sens d'une formalisation pour la résolution de problèmes. L'organisation didactique concernant le thème des quadrilatères ne permet pas à l'élève de participer à la construction de la théorie, mais seulement de comprendre ce qui a été fait par un autre. Quant aux tâches proposées à l'élève dans les trois ouvrages analysés, elles ont le potentiel d'inciter les élèves à élaborer des conjectures, à réfléchir sur la figure, à faire des conversions entre registres et à passer d'une appréhension perceptive à une appréhension discursive. Mais les livres analysés n'explorent pas suffisamment ce potentiel pour que l'élève entre dans les processus de preuves et de démonstrations. (FERREIRA, 2016, p.154, traduction libre)

Dans le cas du Mali, nous n'avons pas trouvé de travaux de recherches sur le thème que nous étudions. Vue l'importance des résultats de cette brève revue de la littérature et l'absence de recherches au Mali sur le thème, notre objectif est de faire une analyse épistémologique, économique et écologique des organisations mathématiques et didactiques liées à l'objet mathématique "quadrilatères" proposées dans les manuels et les programmes du Mali au cours de la période 1960-2020.

RÉFÉRENTS THÉORIQUES ET MÉTHODOLOGIQUES

Nous présentons dans cette partie les éléments théoriques et méthodologiques qui nous servent d'appui pour construire notre recherche.

Quelques éléments théoriques de la Théorie Anthropologique du Didactique et des dimensions d'un problème didactique

Notre recherche s'appuie sur la Théorie Anthropologique du Didactique et les dimensions d'un problème didactique.

L'objectif de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) est d'étudier les conditions de possibilité et de fonctionnement des systèmes didactiques, pour comprendre les relations sujet-institution-savoir. Les connaissances mathématiques organisent une forme particulière de la connaissance, le produit de l'action humaine dans une institution est caractérisé par quelque chose que peut être produit, utilisé et enseigné (CHEVALLARD, 1999).

Ainsi, l'auteur introduit la notion d'habitat d'un objet mathématique comme étant le type d'institution où se trouvent les connaissances liées à l'objet d'études, qui à son tour déterminera la fonction de cette connaissance, c'est-à-dire la niche de cet objet.

Les notions de (types de) tâches, (type de) technique, technologie et théorie permettent de modéliser les pratiques sociales en général et, en particulier, l'activité mathématique. Toute la pratique institutionnelle peut être analysée de différents points de vue dans un système de tâches relativement bien connue. La conformité avec la tâche découle du développement d'une technique (CHEVALLARD, 1999).

Le mot technique est utilisé ici comme une « façon de faire » une tâche, mais il n'est

pas nécessairement comme une procédure structurée et méthodique ou algorithmique.

Dans chaque type de tâche T , il existe un quadruplet formé d'une technique τ (au moins), d'une technologie θ et d'une théorie Θ . $[T, \tau, \theta, \Theta]$ est la praxéologie mathématique, appelée praxéologie ponctuelle pour dire qu'il s'agit d'une praxéologie qui concerne un seul type de tâche. Les praxéologies ponctuelles sont généralement les plus fréquentes dans les pratiques d'enseignement.

Au sein d'une institution I , généralement, une théorie Θ justifie plusieurs technologies θ_j , chacune de ces technologies, justifiant et rendant intelligibles plusieurs techniques τ_{ij} qui correspondent à autant de types de tâches T_{ij} .

Les organisations ponctuelles vont donc s'agréger, d'abord en organisations locales $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$, focalisées sur une technologie θ donnée. Puis en organisations régionales $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta/\Theta]$, formées autour de la théorie Θ .

Chevallard (1999) appelle organisation globale le complexe praxéologique $[T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta_k/\Theta_k]$, obtenu, dans une institution, par l'agrégation de plusieurs organisations régionales correspondant à plusieurs théories Θ_k .

Concernant l'écologie des tâches, Bosch et Chevallard (1999, pp. 85-86) déclarent que « l'écologie des tâches et des techniques sont les conditions et les besoins qui permettent la production et leur utilisation dans les institutions [...] ». On suppose que, pour exister dans une institution, une technique doit être au moins compréhensible, lisible et justifiée. Ces conditions et restrictions des problèmes écologiques impliquent l'existence d'un discours descriptif et justifiant des tâches et techniques, appelées technologie de la technique. Chaque technologie a également besoin d'une justification, c'est-à-dire la théorie de la technique.

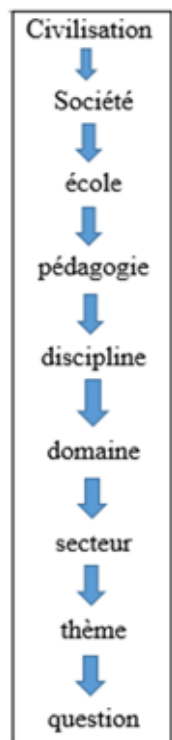
Pour Chevallard (2002 apud ALMOULOU, 2007, p. 116)

Le « savoir-faire », identifié par une tâche et une technique, n'est pas une entité isolée car toute technique nécessite, en principe, une justification, c'est-à-dire un « discours logique » (logos) qui le soutient, appelé la technologie. Selon l'auteur, la technologie décrit et justifie la technique comme un moyen d'accomplir correctement une tâche.

Pour l'élaboration d'une praxéologie associée aux connaissances mathématiques, il est important de placer ces connaissances dans une échelle hiérarchique dans laquelle chaque niveau se réfère à une réalité et sert à déterminer l'écologie des organisations mathématiques et didactiques liées à cette connaissance.

En accord avec Almouloud (2007, p.128), nous affirmons que l'ensemble des conditions et des besoins qui permettent le développement des mathématiques (écologie d'une praxéologie mathématique) dépendent des objets qui sont des composants ostensifs des tâches, techniques, technologies et théories.

Chevallard (2009) montre que de nombreux événements qui ont lieu à l'intérieur de la classe sont influencés par des variables externes à lui, dont l'ensemble a été appelé niveaux de codétermination (Figure 1).

Figure 1 - Codétermination didactique

Source: Doumbia (2020, p.45)

Regarder la structure du système éducatif du Mali, la législation qui discipline l'enseignement et les instruments avec lesquels la société exerce son influence à l'école ; de la garderie (destinée aux enfants de zéro (0) à trois (3) ans) aux études de troisième cycle (doctorat- dernier niveau de scolarisation envisagé dans la législation). Nous pouvons supposer que la représentation des niveaux de cogestion de transposition didactique de l'enseignement du Mali a un composant complexe - la structure éducative qui se divise initialement en enseignement de base et supérieur étant tous les deux subdivisés, constituant de nouvelles structures aussi subdivisées.

Nous avons l'intention d'utiliser les niveaux de codétermination didactique dans notre analyse institutionnelle pour mettre en évidence les influences sur le système éducatif du Mali, plus précisément, en ce qui concerne le contenu « quadrilatères ». Ce qui nécessiterait, à un certain stade de cette recherche, d'analyser les processus de transposition de l'objet mathématique «quadrilatères». Une telle structure au sein du schéma représentatif proposé par Chevallard correspondant à l'élément école dans l'univers des niveaux de cogestion de l'influence du processus de transposition didactique défini par cet auteur. Par rapport aux dimensions (épistémologique, économique-institutionnelle et écologique), nous nous appuyons sur les travaux de Gascón (2011, 2013).

DIMENSION ÉPISTÉMOLOGIQUE ET ÉCONOMICO-INSTITUTIONNELLE D'UN PROBLÈME DIDACTIQUE

Pour Almouloud (2007, p.156), l'analyse épistémologique est basée sur le développement historique, permettant d'identifier les différentes formes de conceptions d'un certain objet mathématique (les quadrilatères, dans notre cas) qui peuvent favoriser l'analyse didactique.

Pour Mattos (2017, p. 85, traduction libre),

pour étudier les facteurs qui affectent les processus d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, nous devons considérer la nature des contenus et nous demander quel est le rôle de l'activité humaine et que les processus sont le développement socioculturel des idées mathématiques, de sorte que l'analyse épistémologique des objets mathématiques devrait aider à clarifier la nature de ces objets.

Barquero, Bosch et Gascón (2013) indiquent que la dimension épistémologique est importante et présente dans tout problème didactique, car c'est en elle que nous cherchons à comprendre :

- L'étendue du champ mathématique pour situer notre problème didactique;
- Les types de problèmes qui en découlent ;
- Les tentatives d'approche et même de résolution de ce problème;
- Les raisons d'être de cet objet mathématique et de la problématique de son enseignement.

Nous comprenons que ces aspects permettent d'entrevoir le modèle épistémologique de référence (MER) de l'objet mathématique étudié. En plus de ces aspects, nous décrivons les quadrilatères au moyen d'un modèle épistémologique de référence compatible avec le modèle épistémologique général de l'activité mathématique proposé par la TAD (BARQUERO, BOSCH et GASCON; 2013))

L'étude de la dimension économique vise à répondre à la question suivante : comment les praxéologies relatives aux quadrilatères se comportent-elles dans le système éducatif malien? Pour répondre à cette question, nous étudions les conditions d'organisation et de fonctionnement de ces praxéologies dans l'institution de référence, c'est-à-dire, des questions relatives au système de règles, de principes et de lois (normes) qui régissent sa vie institutionnelle.

La dimension économique-institutionnelle imprègne la dimension écologique, puisque la "naissance", la "vie" et la possibilité de "résurgence" ne dépendent pas des conditions économiques. C'est ce que soulignent Gascón (2011) et Barquero, Bosch et Gascón (2013), lorsqu'ils affirment que la dimension écologique, parmi d'autres facteurs, devrait mettre en évidence:

- a) Les sphères institutionnelles considérées;
- b) Les institutions impliquées et les façons dont elles décrivent et interprètent l'objet de la recherche;
- c) Les pratiques mathématiques existant dans les institutions impliquées en relation avec l'objet de la recherche;
- d) Les modèles épistémologiques des mathématiques impliqués dans les institutions;
- e) les difficultés qui surgissent lorsque l'on tente de modifier les organisations didactiques (OD) dans une institution donnée.

Ces éléments permettent, par exemple, de situer, en termes de la didactique des mathématiques, les habitats et les niches de l'objet mathématique étudié (les quadrilatères) dans l'écosystème d'enseignement considéré.

Les habitats seront les environnements conceptuels dans lesquels un objet de connaissance mathématique se trouve et expérimente ses pratiques. Il s'agit des secteurs d'un écosystème où les composantes du programme d'étude abritent les praxéologies des objets mathématiques.

Les niches, à leur tour, contempleront leurs fonctionnalités et praxéologies, qui sont mises en évidence par les pratiques qui, en relation avec un objet d'enseignement, sont dans un habitat donné d'un certain écosystème, en interaction avec les autres niches.

Pour étudier les dimensions économiques et écologiques de la problématique didactique, le chercheur (ou l'enseignant) utilise inévitablement—comme référence—un modèle (qui peut être implicite) des praxéologies mathématiques en jeu, c'est-à-dire un MER du champ d'activité mathématique en question.

Lorsque nous parlons de modèle épistémologique de référence, nous nous référons aux manières d'interpréter et de décrire un champ conceptuel (VERGNAUD, 1990) d'un objet mathématique appartenant au cadre, comme la géométrie euclidienne, l'algèbre scolaire, la proportionnalité ou les statistiques, qui est prévalent dans les institutions scolaires, mais aussi dans la noosphère et dans les institutions productrices de savoirs mathématiques. C'est l'instrument avec lequel le didacticien peut déconstruire et reconstruire les praxéologies dont il entend analyser la diffusion intra-institutionnelle et interinstitutionnelle.

Le MER est également essentiel pour étudier les connaissances mathématiques avant qu'elles ne soient transformées pour être enseignées. Lorsque ce modèle est ouvertement et explicitement exposé à la critique et au contraste empiriques, il constitue un instrument d'émancipation (de la didactique et de la science didactique) par rapport au modèle épistémologique dominant dans l'institution (GASCÓN, 2014).

En accord avec ce MER et sur la base de celui-ci, le formateur (ou le chercheur) utilise (et éventuellement construit) un modèle didactique de ce que signifie "apprendre" des connaissances mathématiques dans le domaine en question.

ÉTUDE DES DÉFFÉRENTES DIMENSIONS DE L'OBJET "QUADRILATÈRES"

Dans cette partie, nous étudions les différentes dimensions (épistémologique, économique-institutionnelle et écologique) de l'organisation mathématique «Quadrilatères».

Dimensions historiques et épistémologiques

Dimension historique

Les premiers travaux de géométrie ont été menés il y a plus de 3 000 ans à Babylone et en Égypte pour résoudre des problèmes concrets de mesure : à Babylone pour résoudre des problèmes d'astronomie, et en Égypte pour retrouver les limites de terrains qui avaient été recouverts par les eaux pendant les crues du Nil. Les mathématiciens de cette époque avaient établi des formules pour déterminer les mesures des aires de polygones élémentaires (triangle, trapèze, parallélogramme...) et les mesures de volumes de polyèdres (pavé, prisme droit...)

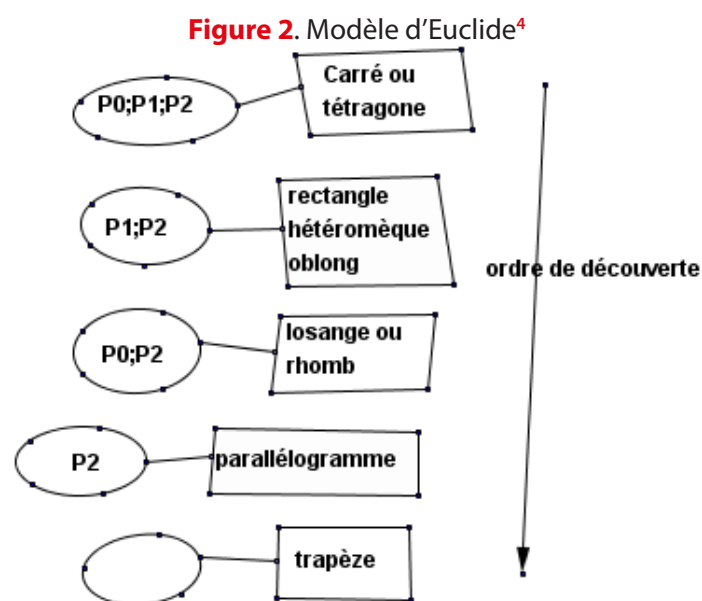
Au III^e siècle avant J.-C., Euclide organise les savoirs géométriques de manière logique à partir de définitions, d'axiomes et de propriétés démontrées. Ses *Éléments* constituent sans doute un ouvrage important de l'histoire des mathématiques qui rassemblent tous les savoirs mathématiques de son époque, ils comportent 13 livres portant des thèmes différents : la géométrie plane, la théorie des nombres, la géométrie des solides.

Ici nous **donnons fidèlement** une **interprétation** des définitions **qu'Euclide** a donné des quadrilatères, tirée sur le net des "éléments d'Euclide" (EUCLIDE, 1944, p 9, 11). Euclide définit les polygones comme suit: les figures trilatères sont déterminées par trois droites; les figures quadrilatères, par quatre et les figures multilatères, par plus de quatre. **Parmi les quadrilatères**, il part du plus parfait des quadrilatères (carré) au moins parfaits. Le carré possède toutes les propriétés de chacun des autres quadrilatères particuliers.

- un carré est celui qui est équilatérale et rectangle (possède quatre côtés de même longueur et quatre angles droits, il le nomme «tétragone»).
- un rectangle, celui qui est rectangulaire et non équilatère (possède quatre angles droits et les côtés opposés ont même longueur, il l'appela «l'hétéromèque» d'autres«oblong»)
- un losange, celui qui est équilatère et non rectangulaire.
- un parallélogramme, celui qui a ses côtés opposés égaux entre eux et qui n'est ni équilatérale ni rectangulaire.
- Les autres quadrilatères, ceux-là, exceptés, se nomment trapèzes.

La première figure dont les propriétés sont étudiées par Euclide est le carré. La propriété «rectangle» du carré exprime qu'il a des angles droits.

Euclide emploie l'expression «surface parallélogrammatique» pour désigner un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles. D'après Euclide, les rectangles sont des «parallélogrammes rectangulaires»³. La figure 2 représente de façon synthétique les différents quadrilatères et leurs propriétés étudiés par Euclide.



Source : Doumbia (2020. p.50)

³ https://fr.wikipedia.org/wiki/Livre_I_des_%C3%89l%C3%A9ments_d%27Euclide

⁴ P0 : 4 côtés égaux ; P1 : 4 angles droits ; P2 : côtés opposés égaux.

Il n'y a pas d'hérédité dans ces définitions: le rectangle exclut le carré, le losange exclut le carré, le parallélogramme exclut le rectangle et le carré, le trapèze exclut chacun de ces quatre premiers. Euclide définit d'une manière exclusive les différents types de quadrilatères. La démarche consiste à exclure les autres de la famille du carré. Aucun de ces quadrilatères n'est un carré. Mais chacun a au moins une propriété en commun avec le carré. En faisant une lecture inverse de la Figure 2, on retrouve le classement actuel qui n'émane pas d'Euclide.

Comme nous l'avons signalé, le premier quadrilatère (quadrilatère de base) défini par Euclide est le carré qu'il caractérise par trois propriétés: 4 angles droits, 4 côtés égaux, côtés opposés égaux deux à deux. Ensuite il définit les autres quadrilatères en excluant certaines de ces trois propriétés. C'est ainsi que le **rectangle** laisse la propriété «équilateral», le **losange** laisse la propriété «4 angles droits», le **parallélogramme** perd deux propriétés «4 angles droits» et «4 côtés égaux», le **trapèze** perd les trois propriétés (les autres). Son modèle est exclusif; pas de lien entre trapèze et parallélogramme, entre parallélogramme et les autres, excepté le fait d'avoir quatre côtés et quatre angles.

Étude de l'organisation mathématique «Quadrilatères»

Le mot *quadrilatère* provient du latin: *quatuor*, quatre et *latus, lateris*, côté. Le mot équivalent d'origine grecque est tétrapleure (de τέττερα / *tettera*, quatre et πλευρά / *pleura*, côté) ou tétragone (de γωνία / *gônia*, angle).

Le mot tétragone était employé par Gerbert d'Aurillac au X^e siècle et par Oresme au XIV^e siècle. Le terme quadrilatère est introduit en 1554 par Peletier.

Certains auteurs latins employaient le mot «quadrangle» (Alcuin, VIII^e siècle) ou «hélmuariphe», terme d'origine arabe (Campanus, XIII^e siècle, et d'autres à la Renaissance).

Pour les Grecs, un quadrilatère avec un angle rentrant s'appelait un «koïlogone» (de κοίλος / *koilos*, creux), et certains appelaient «trapèze» un quadrilatère dont tous les côtés sont inégaux. «Tétragone» est employée par Euclide dans «Les Éléments» pour désigner le carré.

Un quadrilatère est une figure géométrique notée «ABCD» formée de quatre points A, B, C et D, non alignés trois à trois, appelés sommets du quadrilatère, et de quatre segments [AB], [BC], [CD] et [DA] appelés côtés du quadrilatère. Les sommets A et C qui ne sont pas consécutifs sont dits opposés, ainsi que les sommets B et D. Les segments [AC] et [BD] joignant les sommets opposés sont appelés diagonales. Un quadrilatère peut être:

- convexe, si ses deux diagonales sont à l'intérieur du quadrilatère;
- concave, si (au moins) une de ses diagonales est à l'extérieur du quadrilatère;
- croisé, si ses deux diagonales sont à l'extérieur du quadrilatère. Un quadrilatère croisé est concave.

Selon le théorème sur la somme des mesures des angles d'un polygone, la somme des mesures des angles d'un quadrilatère non croisé vaut 360°.

En géométrie élémentaire, une grande place est accordée aux quadrilatères conve-

xes. Un quadrilatère est convexe si et seulement si, quel que soit le côté que l'on choisit, le quadrilatère est entièrement inclus dans un demi-plan dont la frontière porte ce côté. Cette caractérisation est générale à tout polygone convexe. Dans le cas particulier du quadrilatère, il existe aussi une autre caractérisation: un quadrilatère est convexe si et seulement si les diagonales forment des segments sécants.

Quand un quadrilatère est convexe, une droite du plan ne passant pas par un sommet ne peut pas rencontrer plus de deux côtés du quadrilatère.

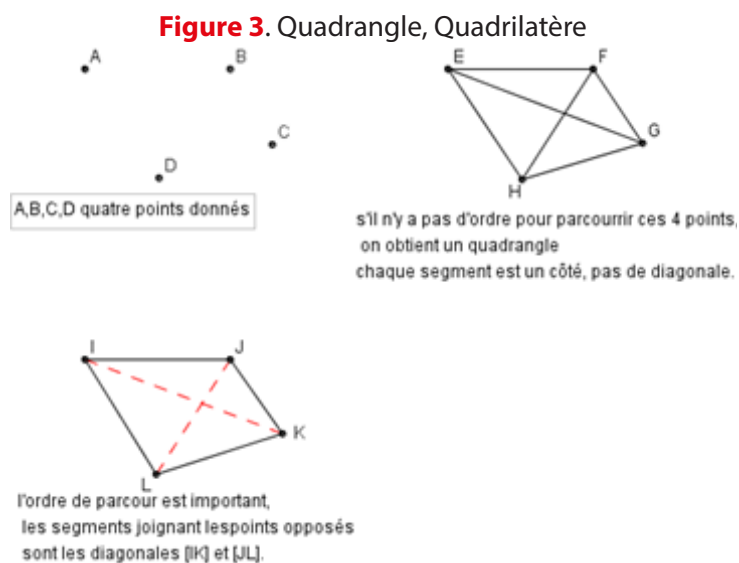
La mesure de l'aire d'un quadrilatère convexe est égale au demi-produit des mesures des diagonales multiplié par le sinus de l'angle qu'elles forment (l'angle utilisé étant le plus petit des deux angles formés par les droites).

L'intérieur d'un quadrilatère convexe ABCD est alors défini comme l'intersection des demi-plans délimités par (AB), par (BC), par (CD) et par (DA) et contenant respectivement chacun les points C, D, A et B.

Un quadrilatère dérive directement d'un quadrangle par le regroupement des sommets en deux paires. Pour chaque paire, les deux sommets sont dits *opposés* et le segment qui les joint (côté du quadrangle), n'est plus considéré comme un côté, mais comme une *diagonale* du quadrilatère.

Donc la première chose à savoir sur les quadrilatères quelconques, c'est que, contrairement aux triangles, la donnée de leurs sommets ne suffit pas à les définir (mais définit un quadrangle, sous certaines conditions).

En effet, considérons quatre points A, B, C et D (non alignés trois à trois pour éviter certains problèmes). Ces quatre points sont les extrémités de six segments distincts : les six côtés du quadrangle: [AB], [AC], [AD], [BC], [BD] et [CD]. Ces segments peuvent être assemblés, quatre à quatre, pour former trois quadrilatères distincts (et trois seulement): [AB], [BC], [CD], [DA] noté ABCD; [AB], [BD], [DC], [CA] noté ABDC; [AC], [CB], [BD], [DA] noté ACBD. Les quatre segments utilisés par le quadrilatère sont ses **côtés**; les deux autres segments sont ses **diagonales** (Figure 3).



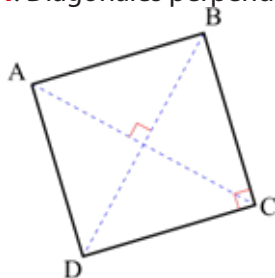
Source: <http://trucsmaths.free.fr/etymologie.htm/#>

$ABCD$ est une notation commune pour définir un quadrangle ou un quadrilatère. Cependant si l'ordre des points n'est pas important pour un quadrangle (Figure 3), il doit en revanche être respecté (à une rotation ou un retournement près) pour conserver un même quadrilatère. Il existe 24 arrangements des quatre points A, B, C et D basés sur le même quadrangle. Il y a trois quadrilatères $ABCD, ACBD, ABDC$. Le quadrilatère $ABCD$ peut donc s'écrire $ABCD, BCDA, CDAB, DABC$ dans un sens; $DCBA, CBAD, BADC, ADCB$ dans l'autre sens.

Les quadrilatères quelconques offrent relativement peu d'intérêt, car ils n'ont pas de propriété permettant de les représenter. Cependant les quadrilatères particuliers (trapèze, parallélogramme, rectangle, losange, carré, cerf-volant, pseudo-carré, etc.) sont caractérisés par leurs propriétés (propriétés des côtés, des angles, des diagonales, etc.).

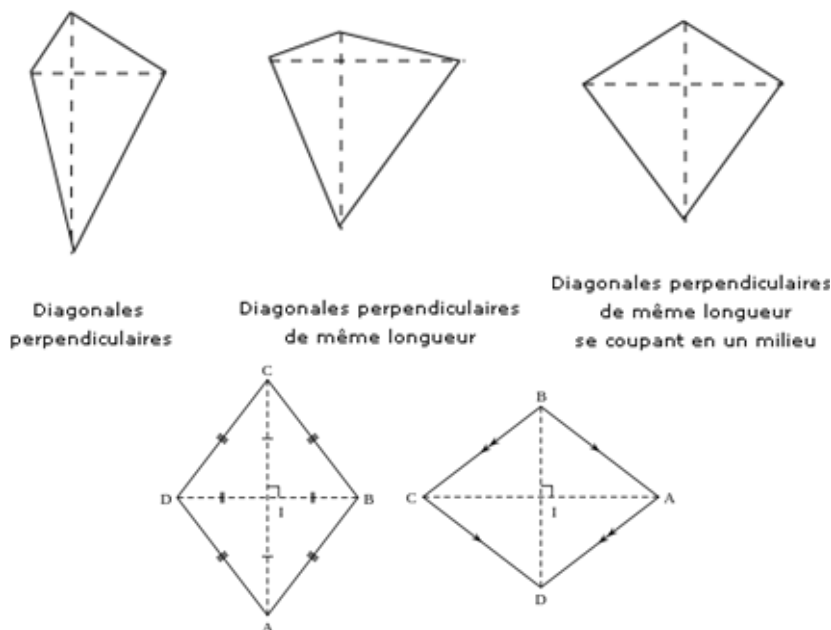
Quand on cherche à classer les quadrilatères en leur imposant des propriétés particulières, on obtient par exemple, les quadrilatères qui ont leurs diagonales perpendiculaires, appelés **quadrilatères orthodiagonaux**. Cette catégorie ne présente pas de régularité d'aspect. Parmi les quadrilatères convexes dont les diagonales sont perpendiculaires, on peut noter ceux représentés par la Figure 4.

Figure 4. Diagonales perpendiculaires



Diagonales perpendiculaires

Deux losanges. La figure de gauche montre que les quatre côtés sont de même longueur. La figure de droite est un losange où les propriétés du parallélogramme sont mises en évidence.



Diagonales perpendiculaires

Diagonales perpendiculaires de même longueur

Diagonales perpendiculaires de même longueur se coupant en un milieu

Source: https://fr.wikipedia.org/wiki/Quadrilat%C3%A8re_orthodiagonal

Nous avons les quadrilatères dont les diagonales sont perpendiculaires et ont deux côtés consécutifs égaux: le cerf-volant, le losange, le cerf-volant concave dit «pointe de flèche».

che» et le carré.

La mesure de l'aire de tous ces quadrilatères convexes est (où D et d sont les mesures des diagonales).

Côtés égaux deux à deux: (le cas des diagonales perpendiculaire est exclu)

Figure 5. Côtés égaux deux à deux



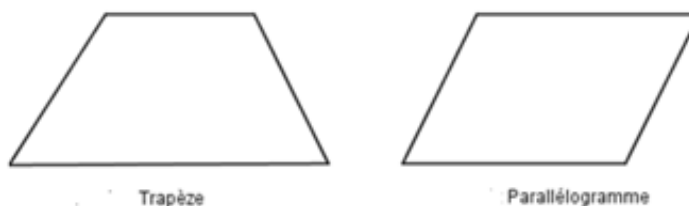
Source: <http://trucsmaths.free.fr/etymologie.htm>

On n'obtient pas toujours un parallélogramme (le cas croisé). Pour obtenir un parallélogramme, il faut que le quadrilatère soit en outre convexe et que les côtés *opposés* soient égaux. Si le quadrilatère n'est pas convexe et les côtés opposés sont égaux deux à deux, on obtient un quadrilatère croisé: l'antiparallélogramme. (Exemple : Figure 5, le quadrilatère à gauche)

Si les côtés égaux sont consécutifs deux à deux, on retombe sur le cerf-volant pour un quadrilatère convexe et la *flèche* pour un quadrilatère concave.

Côtés parallèles: (l'illustration ci-dessous montre qu'il s'agit des cas convexes)

Figure 6. Côtés parallèles

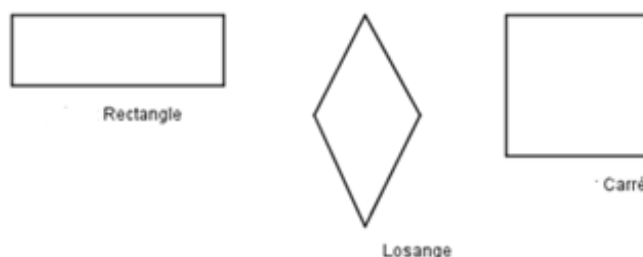


Source: <http://trucsmaths.free.fr/etymologie.htm>

On retrouve là deux classes intéressantes de quadrilatères convexes: les trapèzes et les parallélogrammes. Le trapèze n'exclue pas le parallélogramme, ils sont dissociés ici pour le fait que tout trapèze n'est pas un parallélogramme. L'existence de côtés parallèles veut dire : soit on a seulement deux côtés parallèles (trapèze, Figure 6, à gauche) soit on a deux paires de côtés parallèles (parallélogramme, Figure 6, à droite).

Parmi les trapèzes particuliers, on trouve le trapèze isocèle dont les côtés non parallèles sont de même longueur et le trapèze rectangle qui possède deux angles droits.

Figure 7. Rectangle, losange et carré



Source: <http://trucsmaths.free.fr/etymologie.htm>

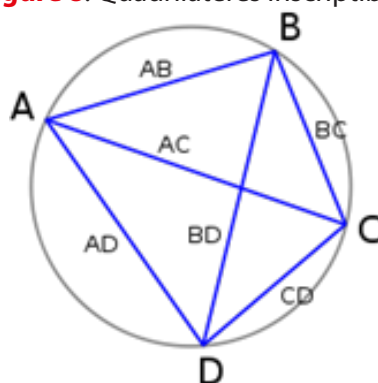
Parmi les parallélogrammes particuliers on trouve les rectangles (parallélogrammes à angles droits), les losanges (parallélogrammes à côtés adjacents égaux) et les carrés (à la fois rectangles et losanges) (Figure 7).

Ainsi, selon cette classification, le carré est le quadrilatère le plus riche en propriétés. Il est aussi l'unique solution du problème isopérimétrique pour les quadrilatères. C'est-à-dire que, parmi tous les quadrilatères de même périmètre, le carré est celui qui possède la plus grande surface.

Quadrilatères inscrits

Les quadrilatères inscrits dans un cercle sont les quadrilatères dont les sommets sont cocycliques (Figure 8).

Figure 8. Quadrilatères inscrits



Source: <http://trucsmaths.free.fr/etymologie.htm>

Le théorème de l'angle inscrit permet les caractérisations suivantes:

- Un quadrilatère croisé est inscrit si, et seulement si, il possède deux angles opposés égaux.
- Un quadrilatère convexe est inscrit si, et seulement si, il possède deux angles opposés supplémentaires.

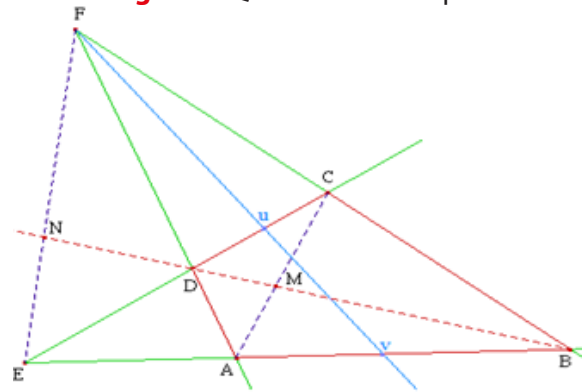
En particulier, un trapèze isocèle, un rectangle sont des quadrilatères inscrits. Le théorème de Ptolémée permet d'affirmer qu'un quadrilatère convexe est inscrit si, et seulement si, le produit des longueurs des diagonales est égal à la somme des produits des longueurs des côtés opposés, c'est-à-dire, dans le cas de la Figure 8, $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$

La formule de Brahmagupta donne la mesure de l'aire d'un quadrilatère convexe dont les sommets se situent sur un même cercle en ne connaissant que la longueur de ses côtés.

$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, où $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ est le demi-périmètre du quadrilatère, a , b , c et d sont les longueurs de ses côtés et la mesure son aire.

Quadrilatère complet

On parle aussi de quadrilatère complet, défini comme suit: soit ABCD un quadrilatère convexe, le prolongement des quatre côtés donne deux nouveaux points E et F, le polygone ABCFDE est appelé "quadrilatère complet" (cf. Figure 9). Ce type de quadrilatère ne vit pas dans le système éducatif malien.

Figure 9. Quadrilatère complet

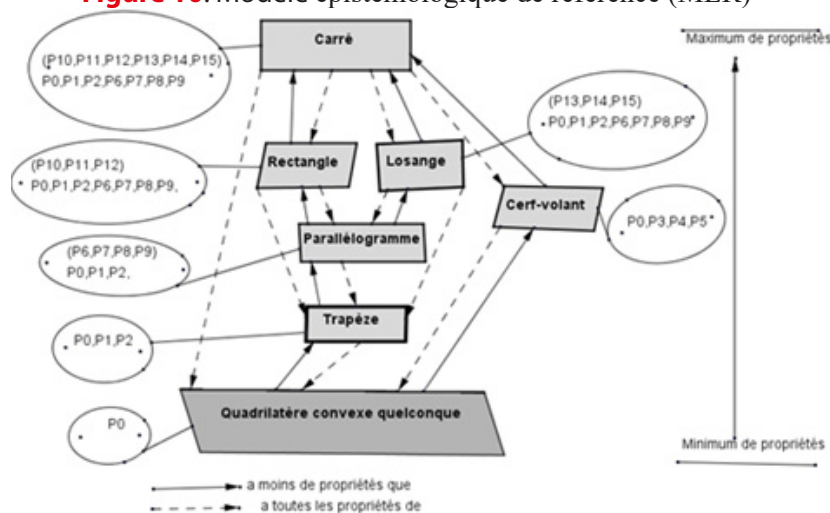
Source: Doumbia (2020, p. 57)

Nous pouvons donc conclure que le polygone qui est formé par 4 segments coplanaires consécutifs et fermé est un quadrilatère. Il est l'objet de notre étude. Les autres cas possibles non coplanaires ne font pas partie des types de quadrilatères qui font l'objet de notre étude.

Construction d'un modèle épistémologique de référence

Pour construire un modèle praxéologique de référence, nous construisons avant tout un modèle épistémologique de référence (MER). Ce modèle épistémologique de référence et notre cadre théorique (TAD) constituent nos outils d'analyse des manuels scolaires ciblés. Dans le cadre de la TAD, nous avons recensé et analysé les types de tâches existant dans les cours et dans les exercices. L'analyse praxéologique des cours et exercices, l'analyse comparée de chaque modèle au modèle épistémologique de référence permettent de mettre en évidence l'écologie des quadrilatères.

La figure 10 représente les articulations entre les différents éléments de notre MER, principalement, la classification des quadrilatères et leurs propriétés.

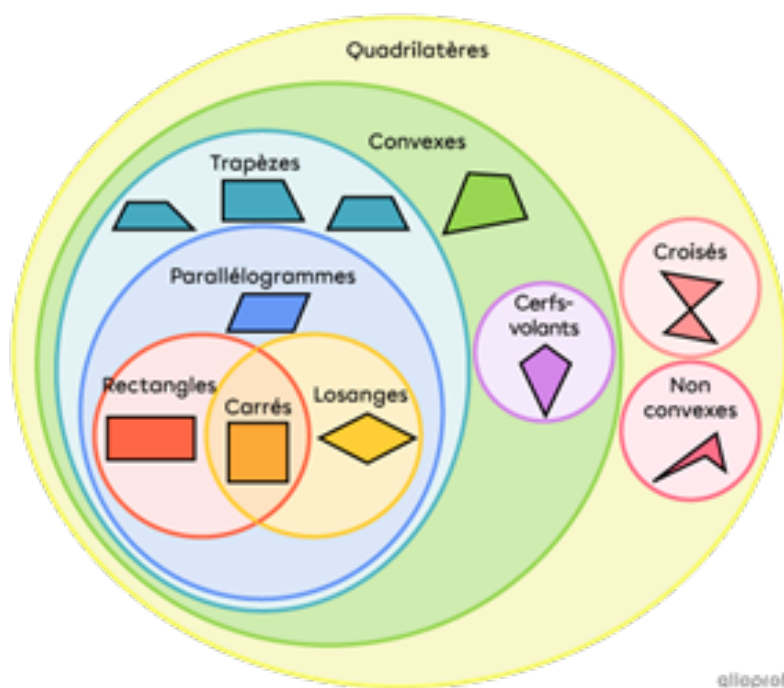
Figure 10. Modèle épistémologique de référence (MER)⁵

Source: Doumbia (2020, p. 96)

⁵ P0 : Convexe ; P1 : Admet un couple de côtés parallèles ; P2 : Admet deux couples d'angles consécutifs supplémentaires ; P3 : Admet deux couples de côtés consécutifs égaux ; P4 : les diagonales sont perpendiculaires ; P5 : la grande diagonale est un axe de symétrie ; P6 : les diagonales ont même milieu ; P7 : les côtés opposés sont égaux ; P8 : les côtés opposés sont parallèles ; P9 : intersection des diagonales est centre de symétrie ; P10 : les médianes sont axes de symétrie ; P11 : les diagonales ont même longueur ; P12 : les quatre angles sont droits ; P13 : les quatre côtés sont égaux ; P14 : les diagonales sont perpendiculaires ; P15 : les diagonales sont axes de symétrie.

Notre modèle épistémologique de référence va du bas vers le haut, du quadrilatère qui a le plus petit nombre de propriétés au quadrilatère qui a le plus grand nombre de propriétés, en respectant le principe d'inclusion: si une flèche en «trait plein» va d'un quadrilatère A vers un quadrilatère B, cela signifie que A possède moins de propriétés que B, mais aussi que toutes les propriétés de A sont contenues dans B. A hérite ainsi de toutes les propriétés de B. Le sens inverse, sens de la flèche en «tiret», correspond au principe d'exclusion de propriétés. Comme l'indique la Figure 10, on va du quadrilatère convexe au carré, le quadrilatère convexe ayant moins de propriétés que les autres; ce qui fait des autres quadrilatères des cas particuliers de ce dernier. Autrement dit, les flèches ascendantes montrent la différence de propriétés entre un quadrilatère et son suivant. Les flèches descendantes montrent que tel quadrilatère est un cas particulier de tel autre (exclusion). Le maximum de propriétés et de cas particuliers des quadrilatères nécessaires à son enseignement/apprentissage figurent dans ce modèle. Le diagramme de la Figure 11 illustre les relations d'inclusion entre les familles de quadrilatères.

Figure 11. Relations entre les familles de quadrilatères



Source: <https://www.alloprof.qc.ca/fr/eleves/bv/mathematiques/les-quadrilateres-m1198>

Les relations et les propriétés mises en évidence par ces deux schémas (Figures 10 et 11) nous serviront de modèle de référence dans le cadre de l'analyse des manuels scolaires étudiés.

Analyse de la dimension économique-institutionnelles

Une analyse des manuels scolaires et des programmes montre que l'étude des quadrilatères est faite pour la première fois en classe de 3^{ème} année fondamentale (9 à 10 ans) pour un besoin de construction géométrique dans le quadrillage et de caractérisation du carré et du rectangle.

En 4^e année l'étude du carré porte sur ses caractéristiques, son découpage, le calcul

de son périmètre, la construction à la règle et à l'équerre du carré et du rectangle. En 5^e année on étudie le trapèze, le parallélogramme, le losange, la construction des quadrilatères, le calcul de périmètre du carré et du rectangle, la reconnaissance du carré, du rectangle et du losange.

En 6^e année, on s'intéresse aux polygones convexes et polygones concaves; à la construction du trapèze, du parallélogramme, du losange; aux patrons et périmètre du carré, du rectangle; aux aires du carré, du rectangle, du trapèze, du parallélogramme, du losange.

Au second cycle fondamental, ces quadrilatères font l'objet d'étude en 7^e et 8^e année. On s'intéresse aux propriétés caractéristiques de ces quadrilatères en mettant un focus sur les propriétés des diagonales qui caractérisent chaque quadrilatère particulier. Ces propriétés des diagonales associées aux premières propriétés (égalité, parallélisme, perpendicularité de côtés) qui ont servi de définition va permettre d'identifier sans équivoque un quadrilatère, d'où l'achèvement de la construction des outils de reconnaissance d'un quadrilatère particulier.

En 7^e, on ne s'intéresse pas encore au trapèze. Il faut attendre la classe de 8^e pour qu'il fasse son apparition comme objet d'enseignement (Trapèze, Trapèze isocèle, Trapèze rectangle).

En 9^e année, ils sont des outils pour la résolution de problèmes.

Du lycée à l'université, ils constituent un domaine fertile pour la compréhension et l'étude de nombreuses notions géométriques.

Pour notre étude, nous considérons les manuels qui ont marqué l'histoire de l'enseignement des Mathématiques au second cycle fondamental du Mali. Il s'agit des manuels de Monge et Guinchant (1964), manuel hérité du système français des années (période des Indépendance de plusieurs pays africains dont le Mali), de Bakary Traoré et Claude Russel (1970) et de Saddo Ag Almouloud et al. (1992).

C'est à partir de 1970 (période des mathématiques modernes) que le Mali commence à produire au sein de l'Institut Pédagogique National (IPN⁶) ses propres manuels pour le second cycle fondamental. Les premiers manuels des classes du second cycle furent alors écrits par Bakary Traoré et Claude Roussel dans le cadre d'une politique nationale de production de manuels appropriés aux programmes du fondamental.

Au début des années 90, nous avons connu l'édition de trois livres par Almouloud et al, "Mathématiques, 7^{ème}, 8^{ème} et 9^{ème} années" de la même collection IPN; cette nouvelle production correspond au passage des mathématiques modernes aux mathématiques dites actives.

Pendant ces deux périodes, 1970 et 1990, la rédaction de manuels du fondamental relevait exclusivement du domaine de l'IPN; les manuels étaient à ce titre étatiques. Les enseignants à l'époque ont compris que seule l'IPN est l'institution habilitée à produire les manuels comme les programmes scolaires (qui étatiques)

6 Institut Pédagogique National (IPN) est une institution du ministère de l'éducation nationale ayant en charge les programmes et la production de documents pédagogiques.

C'est vers les années 2000 que de nouveaux éditeurs de manuels avec des auteurs indépendants (groupes d'enseignants de lycée et/ou professeurs du second cycle, professeur d'université) des institutions étatiques ont commencé à faire leur apparition. Malgré l'arrivée de ces nouveaux manuels, la collection IPN écrite par Almouloud et al. reste la plus utilisée par les enseignants et les élèves.

Par rapport aux raisons d'être des quadrilatères et leur enseignement, nous citons les points suivants:

- Les quadrilatères constituent un domaine assez fertile pour la manifestation de la démonstration.
- La maîtrise de l'utilisation des matériels de géométrie (équerre, compas, règle) pour construire des droites parallèles, des droites perpendiculaires, etc. Ces constructions permettent d'explorer beaucoup de propriétés géométriques permettant de résoudre plusieurs problèmes.
- L'exploration des constructions géométriques dans la résolution de certains problèmes permet entre autres d'émettre des conjectures, de favoriser l'exploration des théorèmes, des théorèmes réciproques, des démonstrations et des différents registres de représentation.

L'analyse de la dimension économique

Une partie de la dimension économique concerne les questions liées aux conditions qui régissent l'organisation et le fonctionnement des praxéologies dans l'institution de référence pendant les trois périodes portant l'étude. Il s'agira entre autres des questions liées au système de règles, principes et lois qui régissent sa vie institutionnelle.

Pendant la période des années 60, nous avons recensé quelques tâches qui ont résisté aux changements de programmes, mais qui ont évolué en ce qui concerne les techniques utilisées pour résoudre ces tâches. Pour ce faire, nous nous proposons de le montrer sur trois exemples, à savoir: (1) Les médianes d'un triangle sont concourantes en un point; (2) Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu ; (3) Dans un triangle, la droite joignant les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté.

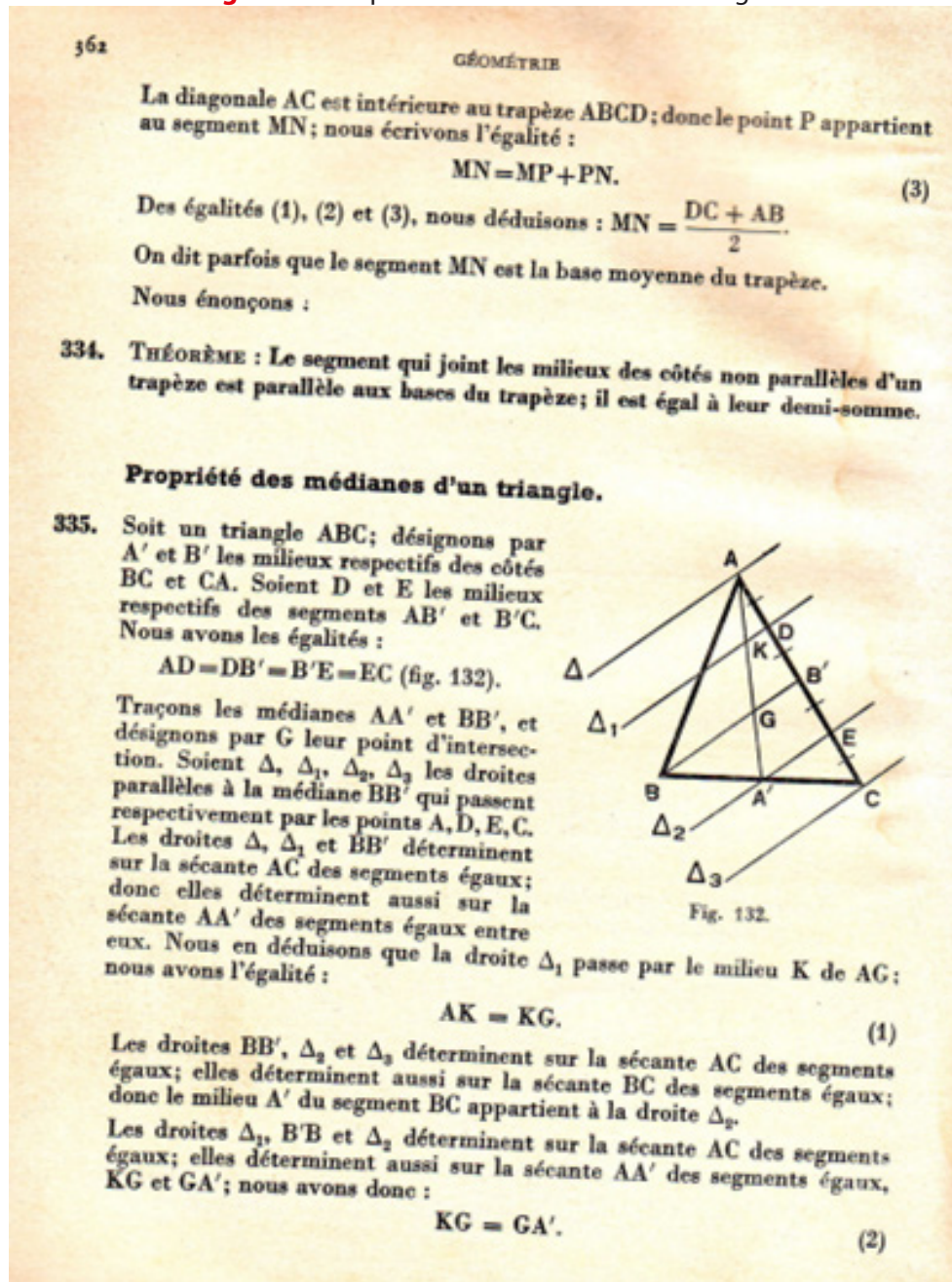
Démonstration de la propriété des médianes d'un triangle

Première période, année 1960

Les techniques en cours à cette époque sont décrites dans le texte représenté par la Figure 12, un extrait du manuel Monge et Guinchan (1964).

Avec les droites parallèles BB' , Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 interceptant les sécantes AC et AA' , on peut en déduire directement que $AK=KG=GA'$, au lieu de casser la double égalité en deux. Il faut reprendre les mêmes actions pour chaque médiane, d'où trois fois la même opération.

Ce manuel de cette période n'utilise pas les propriétés du parallélogramme pour la démonstration. Les auteurs du manuel s'appuient sur la division en segments égaux par des parallèles équidistantes interceptant des sécantes, pour montrer que les médianes d'un triangle sont concourantes.

Figure 12. Propriété des médianes d'un triangle

Source: Livre de Mathématiques 4^e, M. Monge & M. Guinchan (1964, p. 362).

Deuxième période, années 1970

Les manuels des années 70 de Traoré et Roussel, n'envisagent pas la preuve de cette propriété des médianes, mais les auteurs la présentent aux apprenants en 7^e année où elle était admise. Signalons la sobriété des auteurs en ce qui concerne l'étude de la Géométrie qui d'ailleurs était laissée au second plan.

Troisième période, années 1990

Pendant les années 90, la technique employée pour démontrer la propriété des médianes (Figures 13 et 14) d'un triangle est la suivante :

Exemple 1: Tiré du manuel de 8^{ème} année fondamentale (période des années 90)

Figure 13. Activité pour démontrer la propriété des médianes d'un triangle utilisant des propriétés du parallélogramme

Activité 11
Démontrer que les médianes d'un triangle sont concourantes

1. Dessine un triangle ABC.
Soit I et J les milieux respectifs de [AB] et de [AC].
Construis les médianes (BJ) et (CI). Elles se coupent en G.
2. Soit : F l'autre point de (BJ) tel que $GJ = JF$
E l'autre point de (CI) tel que $GI = IE$.
a. Démonstre que AFCG est un parallélogramme, donc que :
(FC) // (AG) et $FC = AG$.
b. Démonstre que AEBG est un parallélogramme, donc que :
(EB) // (AG) et (AE) // (BG).
3. Dédus de a. et b. du 2. que FCBE est un parallélogramme.
4. Soit K le milieu de [BC].
En utilisant la propriété des milieux, démontre que (GK) // (FC).
En déduire, d'après la propriété fondamentale des droites parallèles, que (AG) et (GK) sont la même droite, donc que les points A, G, K sont alignés. Conclue alors que (AG) est la troisième médiane.
Après la résolution de ce problème, tu peux énoncer :
Les trois médianes de ABC se coupent en un point G.
5. En utilisant les résultats de ton problème, démontre que :
 $GJ = \frac{1}{3} BJ$; $GI = \frac{1}{3} CI$; $GK = \frac{1}{3} AK$.

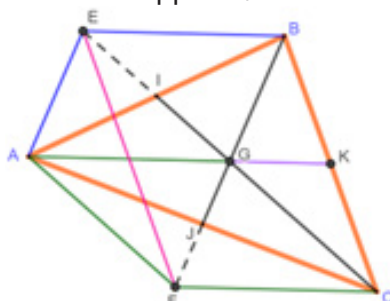
Source: Livre de Mathématiques 8^e, IPN, Saddy et Al. (1990, p.145)

La démarche envisagée pour résoudre le problème fait appel à la configuration cides-sous qui est fondamentalement constituée de parallélogrammes (avec ses propriétés) et des milieux des côtés:

Exemple 2: Tiré du manuel de 8^{ème} année fondamentale (période des années 90)

Soit ABC un triangle tel que : I, J et K sont les milieux respectifs de [AB] , [AC] et [BC] .
Soit G le point de concours des médianes. Montrer [...] que : $GJ = \frac{1}{3} BJ$ $GI = \frac{1}{3} CI$ et $GK = \frac{1}{3} AK$

Figure 14. Construction de la preuve de la propriété «les médianes d'un triangle se coupent dans le rapport 1/3



AEBG et AGCF parallélogrammes dont AG est le côté commun D'où
AG//EB et AG//FC implique EB//FC et EB=FC, alors EFB est un parallélogramme.
 $EG=GC=2GI$, $CI = CG + GI = 3GI$ implique $GI = \frac{1}{3} CI$
 $FG = GB = 2GJ$, $BJ = GJ + BG = 3GJ$ implique $GJ = \frac{1}{3} BJ$

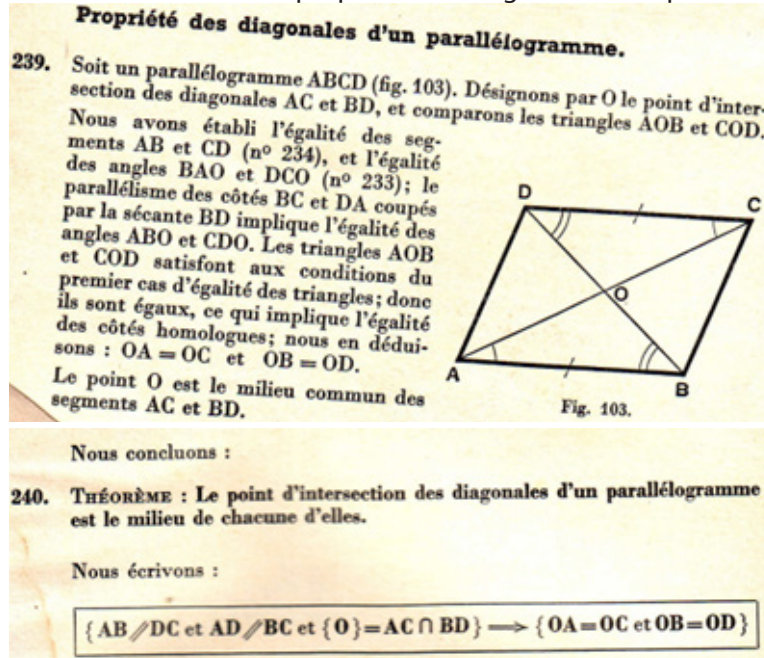
Source: Doumbia (2020, p.62) en s'appuyant sur le Livre de Mathématiques 8^e, IPN, Almouloud et al. (1990)

À cette période, l'aspect outil des propriétés des quadrilatères est utilisé dans les cours et dans les exercices pour prouver des propriétés et des théorèmes.

Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu

Pour la période des années 60, nous prenons comme exemple la démonstration proposée par Monge et Guinchan (1964) qui met en jeu le «cas d'égalité de deux triangles». (Figure 15)

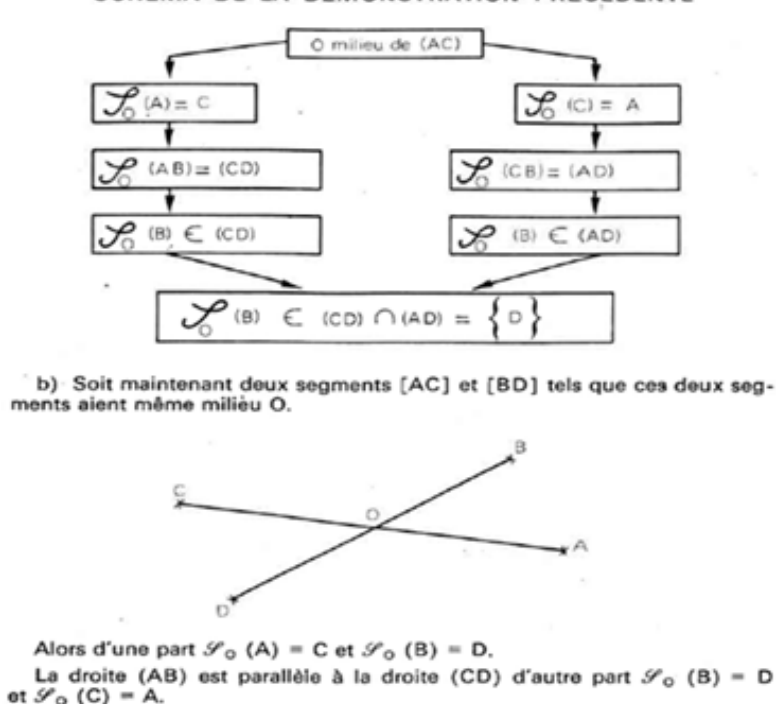
Figure 15. démonstration de la propriété des diagonales d'un parallélogramme



Source: Livre Mathématiques 4^e, M. Monge & M. Guinchan (1964, pp.330-331)

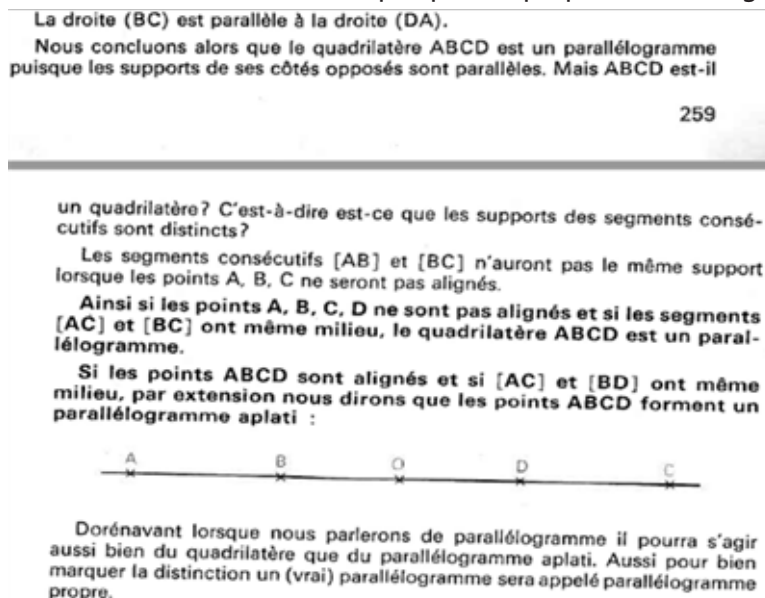
Pour la période des années 70, la démonstration de la propriété des diagonales d'un parallélogramme s'appuie sur les propriétés de la symétrie centrale (Figure 16). En plus de cela, Traoré Russel (1970) démontre la réciproque de cette propriété (Figure 17)

Figure 16. Schéma de la démonstration



Source: Livre de Mathématiques 8^e IPN. B Traoré. (1970)

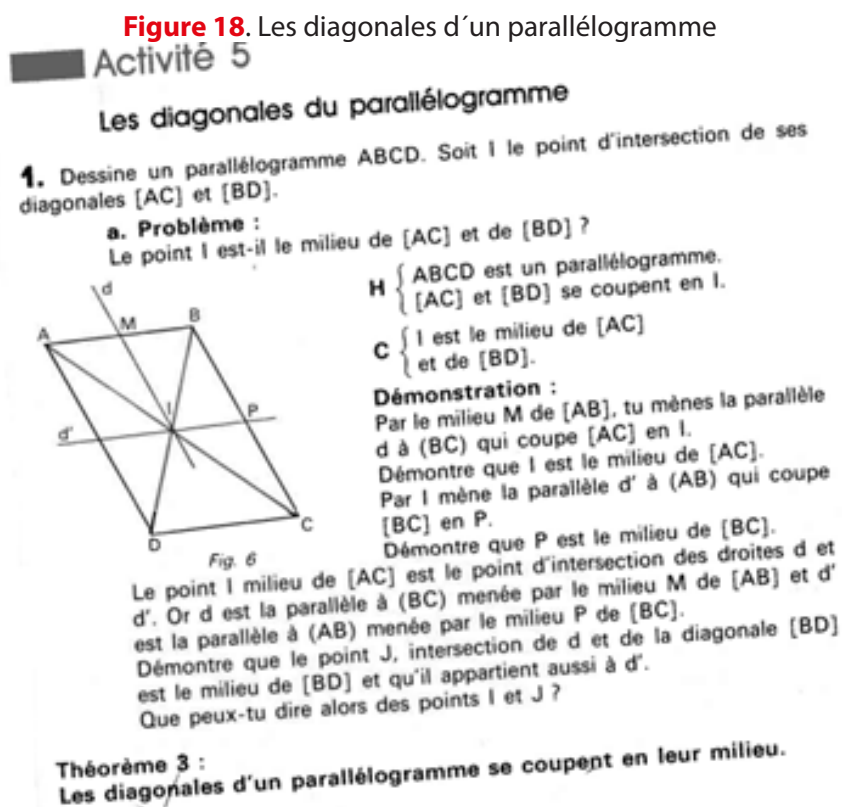
Figure 17. Démonstration de la réciproque des propriétés des diagonales



Source Livre de Mathématiques 8^e IPN. B Traoré. (1970)

Pour la période des années 90, l'élève est amené à écrire l'énoncé sous forme d'hypothèse et conclusion avant de chercher une technique de résolution. Car quand on sait d'où on vient et d'où on va, on a plus de chance de réussir la tâche donnée. Ici, il s'agit d'une stratégie différente que celle du manuel des années 60, pour résoudre le même problème.

Pour la période des années 90, la démonstration de la propriété des diagonales d'un parallélogramme, Almouloud et al. Procèdent par des reconfigurations de la figure en ajoutant à la figure initiale des droites parallèles comme ils le décrivent dans le schéma (Figure 18)



b. Problème réciproque :

Construis deux segments sécants [AC] et [BD] se coupant en leur milieu. ABCD est-il un parallélogramme ?

H { [AC] et [BD] se coupent
en leur milieu I.

C { ABCD est un
parallélogramme.

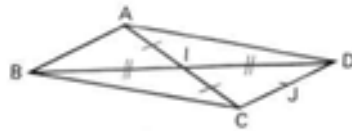


Fig. 7

Démonstration :

Soit J le milieu de [CD]. Démontre, en utilisant le théorème 2 de cette leçon et sa conséquence, que (IJ) est parallèle à (BC) et à (AD).

Déduis-en que (BC) est parallèle à (AD) et que $BC = AD$. En utilisant la deuxième propriété des parallélogrammes démontre que ABCD est un parallélogramme.

Théorème 4 :

Lorsque les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, ce quadrilatère est un parallélogramme.

Source: Livre de Mathématiques 8^e IPN. Saddo et Al. (1990, p.139-140)

(3) Dans un triangle, la droite joignant les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté

Il s'agit ici de présenter les démonstrations suivant les trois périodes de la propriétés suivantes: Dans un triangle ABC, la droite qui passe par les points B' et C', milieux respectifs des côtés CA et AB, est parallèle à la droite (BC) et .

Pour la même tâche on a des techniques différentes: les auteurs de la première et la troisième périodes s'appuient sur les propriétés d'un parallélogramme (propriétés des diagonales, parallélisme et égalités des côtés opposés) (Figures 19 et 21), et ceux de la deuxième période font appel aux projections parallèles pour utiliser le théorème de Thalès, la seconde fait appel aux propriétés du parallélogramme (Figure 20).

La première période: années 1960

Figure 19. Segment joignant les milieux de 2 côtés d'un triangle

Segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle.

329. Soit un triangle ABC; désignons par B' et C' les milieux respectifs des côtés CA et AB (fig. 129). Marquons sur la droite C'B' le point M tel que B' soit le milieu du segment C'M. Traçons les segments MA, MC et CC'.

Les diagonales AC et C'M du quadrilatère AC'M se coupent en leur milieu commun B; donc ce quadrilatère est un parallélogramme : ses côtés opposés AC' et MC sont parallèles, égaux et de même sens.

Puisque le point C' est le milieu du segment AB, les segments C'B et MC sont aussi parallèles, égaux et de même sens.

Le quadrilatère C'BCM est donc un parallélogramme; cette propriété implique le parallélisme des supports des segments C'M et BC, et l'égalité de ces segments : $C'M = BC$.

Puisque le point B' est le milieu du segment C'M, nous avons l'égalité :

$$C'B' = \frac{1}{2} C'M = \frac{1}{2} BC.$$

Nous énonçons :

330. **THÉORÈME :** Le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté; il est égal à la moitié de ce troisième côté.

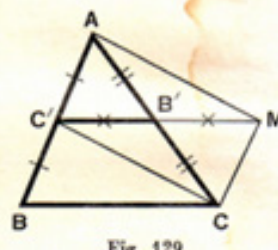


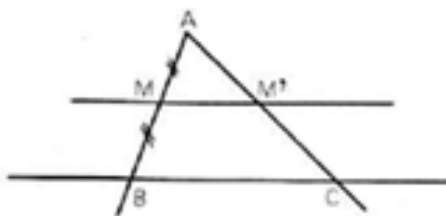
Fig. 129.

Source: Livre Mathématiques 4^e, M. Monge & M. Guinchan. (1964, p.360)

La deuxième période: années 1970

Figure 20. La droite passant par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté

2) Soit un triangle ABC et M le milieu du segment [AB].



Appelons p la projection parallèlement à la droite (BC) sur la droite (AC).

$$\begin{aligned} p(B) &= C \\ p(A) &= A \\ p(M) &= M' \end{aligned}$$

et donc M' est le milieu de [AC].

EN CONCLUSION

La parallèle à la droite (BC) menée par le milieu de [AC] coupe le côté [AB] en son milieu.

Source: Livre de Mathématiques 8^e IPN. B Traoré. (1970, p. 249)

Les manuels de cette période mettent en jeu le théorème de Thalès pour démontrer la propriété du segment qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle (Figure 20).

La troisième période: années 1990

Figure 21. Démonstration de la réciproque du théorème des milieux de deux côtés d'un triangle

1. Problème 1 :

Par le milieu M du côté [AB] d'un triangle ABC, tu mènes la parallèle à (BC). Cette droite coupe (AC) en un point P . P est-il le milieu de [AC] ?

$$H \left\{ \begin{array}{l} \text{ABC est un triangle.} \\ M \text{ est le milieu de [AB].} \\ (MP) \parallel (BC). \\ P \in (AC). \end{array} \right.$$

$$C \left\{ \begin{array}{l} P \text{ est le milieu de [AC].} \end{array} \right.$$

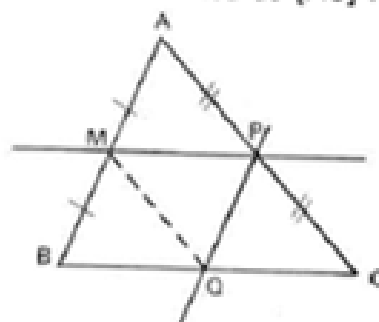


Fig. 3

Source: Livre de Mathématiques 8^e IPN. Sado et al. (1990, p. 137-138)

Ce manuel de la dernière période utilise les propriétés du parallélogramme pour démontrer le théorème (Figure 21).

Les principaux résultats de cette analyse

Cette analyse nous montre que pour une même tâche donnée les techniques ont changé d'une période à l'autre. Ces changements ont évolué vers une meilleure articulation des connaissances sur les quadrilatères. C'est-à-dire que pour la preuve d'une propriété d'un

quadrilatère particulier, on peut articuler d'autres propriétés des quadrilatères.

C'est au niveau de la tâche (3) que nous constatons la même technique (les propriétés du parallélogramme) est utilisée en période (1) et (3). Cette technique est abandonnée en période (2) pour faire son retour en période (3).

Dans le Tableau 1, nous présentons les différentes tâches que nous avons analysées et les techniques employées pour résoudre ces tâches.

Tableau 1. Changement de technique pour certaines tâches

Tâches	Techniques utilisées		
	1 ^{ère} période (1960)	2 ^{ème} période (1970)	3 ^{ème} période (1990)
(1) Les médianes d'un triangle sont concourantes	Propriété des droites parallèles et équidistantes qui interceptent un segment, produisent une division régulière sur ce segment	Propriété admise sans démonstration	Propriétés du parallélogramme.
(2) Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu	Cas d'égalité de deux triangles	Symétrie centrale	Propriétés du parallélogramme.
(3) Dans un triangle, la droite joignant les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté	Propriétés du parallélogramme	Théorème de Thalès	Propriétés du parallélogramme

Source: Doumbia (2020, p. 70)

Quels sont les modèles épistémologiques de références par rapport aux quadrilatères mis en jeu par les auteurs des manuels?

Pour la période des années 60, le programme officiel n'étant pas disponible pour la classe de 7^e année, nous avons alors focalisé nos analyses sur les rappels de cours en classe de 8^e année.

Le programme d'étude du second cycle fondamental relevait à l'époque du programme français du collège. C'est un programme qui est resté en vigueur huit années après l'indépendance du Mali malgré les aménagements apportés par la réforme de 1962 qui réduit le cycle fondamental à 9 ans avec un premier cycle de 6 ans et un second cycle de 3 ans.

Les programmes de la 8^{ème} année (4^e du collège français) et de la 9^{ème} année (3^e du collège français) figuraient au début des manuels de Mathématiques de Monge & Guinchan (1964).

Dans le manuel de 4^{ème} (8^e fondamental au Mali), on étudie les quadrilatères en trois chapitres: (1)Trapèze, Parallélogrammes; (2)Parallélogrammes particuliers: Rectangles, Losanges et Carrés; (3)Applications des propriétés des parallélogrammes.

Nous modélisons cet enseignement par le schéma de la Figure 22).

Figure 22. Modèle de la 1^{ère} période⁷

Source: Dombia (2020, p. 72)

Ce modèle introduit le quadrilatère à partir des polygones. On va du quadrilatère en général aux quadrilatères particuliers tout en donnant leurs définitions et toutes leurs propriétés.

Les flèches interrompues expriment l'inclusion entre les ensembles de quadrilatère. Exemple: l'ensemble des carrés est inclus dans celui des rectangles

Ce modèle inclusif présente une hérédité: tout carré est un rectangle, tout rectangle est un parallélogramme, tout parallélogramme est un trapèze; tout carré est un losange, tout losange est un parallélogramme, tout parallélogramme est un trapèze.

Dans le tableau 2, nous listons les types de tâches proposées pendant cette période en 8^e année

Tableau 2. Types de tâche en 8e année

T1 : Construire un trapèze.	T2 : Construire un trapèze dont certains côtés sont donnés.
T3 Définir un quadrilatère particulier donné.	T4 : Construire un quadrilatère donné.
T5 : Montrer qu'un quadrilatère est convexe.	T6 : démontrer une propriété du parallélogramme
T7 : Démontrer une condition pour qu'un quadrilatère convexe soit un parallélogramme.	T8 : Démontrer une condition pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme.
T9 : Construire un parallélogramme donné.	T10 : Construire un parallélogramme dont un côté et les deux diagonales sont donnés.
T11 : Construire un parallélogramme dont les deux diagonales et un angle sont donnés.	T12 : Construire un parallélogramme dont un côté, une diagonale et un angle sont donnés.
T13 : Construire un parallélogramme dont les deux côtés sont donnés	T14 : Calculer, dans un parallélogramme ABCD l'angle A est donné, les trois autres angles.
T15 : La somme de deux des angles d'un parallélogramme est donnée, calculer les angles de ce parallélogramme.	T16 : Le rapport entre deux angles du parallélogramme est donné, calculez les angles de ce parallélogramme
T17 : Démontrer que deux segments ont même longueur	T18 : Montrer que deux droites sont parallèles.

⁷ Les propriétés sont: P0: convexes; P1: quatre côtés; P2: deux côtés parallèles; P3: un angle droit; P4: deux côtés opposés égaux; P5: deux paires de côtés parallèles; P6: angles opposés égaux; P7: deux côtés opposés parallèles et égaux; P8: les diagonales ont même milieu; P9: quatre côtés égaux; P10: les diagonales sont égales; P11: les diagonales sont perpendiculaires; P12: quatre angles droits; P13: l'intersection des diagonales est centre de symétrie; P14: une médiane est un axe de symétrie; P15: les deux médianes sont des axes de symétrie; P16: une diagonale est un axe de symétrie; P17: les deux diagonales sont des axes de symétrie.

T19 : Montrer l'égalité de deux angles.	T20 : Démontrer que deux droites sont perpendiculaires.
T21 : Démontrer une propriété du trapèze isocèle.	T22 : trouver la nature d'un quadrilatère dans une situation donnée.
T23 : Montrer qu'un point est milieu d'un segment donné	T24 : Montrer que deux segments ont même milieu.
T25 : Montrer qu'un quadrilatère donné est un parallélogramme	T26 : Comparer les longueurs de deux segments donnés
T27 : Montrer que trois points donnés sont alignés.	T28 : Montrer qu'un quadrilatère donné est un trapèze
T29 : Montrer que quatre points donnés sont alignés	T30 : Construire un trapèze isocèle
T31 : Trois points étant placés, peut-on placer le quatrième point afin d'avoir un carré.	

Source: Doumbia (2020, p.75)

Pour la période des années 70, en ce qui concerne la géométrie, le maintien de la cohérence du mouvement en question exigeait "de proposer un travail sur la géométrie sous l'approche des structures, réalisées par des plans vectoriels ou par des transformations [géométriques]". L'étude (de la géométrie) ne se limitait plus désormais à décrire les attributs ou les propriétés d'un être géométrique pour en déduire les implications qu'il contient, mais les propriétés formelles de sa structure à travers les transformations qu'elle admet ou qu'elle empêche (PAVANELLO, 1989).

Le changement abrupt dans l'approche des contenus des manuels de mathématiques à ce moment historique a surtout entraîné une grande résistance de la part de ses principaux utilisateurs, les enseignants, qui ne se sentaient pas capables de travailler les mathématiques, et en particulier la géométrie, de la manière proposée par les Mathématiques modernes.

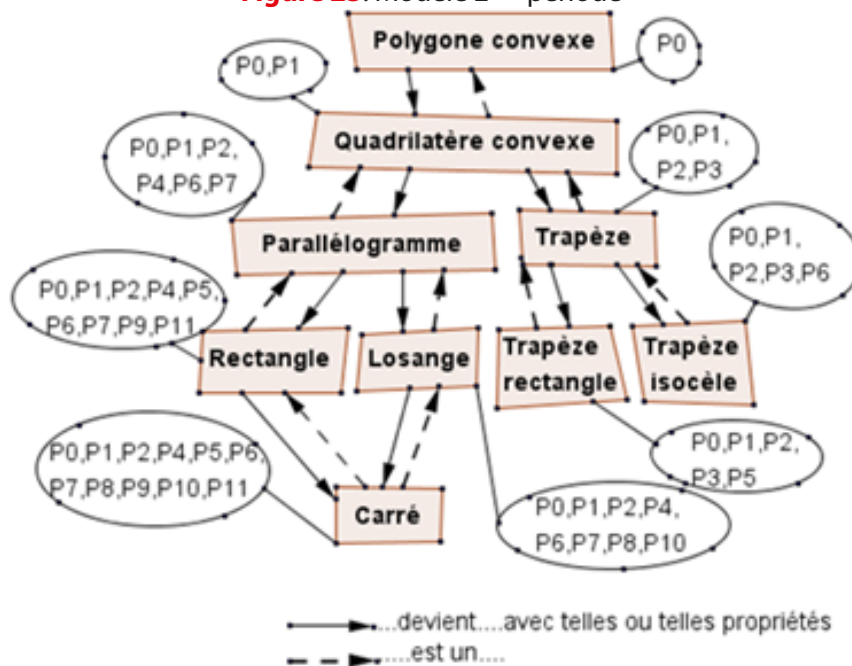
Dans le manuel de la 7^e année, on définit les différents quadrilatères, les propriétés sont données sans démonstration.

En 8^e année, nous avons des tâches qui exigent des démonstrations des propriétés admises en 7^e, les techniques sont données aux apprenants. Cependant, dans le cours, les auteurs de ces manuels n'ont démontré que les propriétés suivantes: « les diagonales d'un parallélogramme ont même milieu »; « la projection d'un parallélogramme est un parallélogramme aplati ».

C'est dans les exercices résolus qu'on trouve des tâches utilisant les propriétés du parallélogramme, comme « Montrer qu'un quadrilatère donné est un parallélogramme », « Montrer que deux droites données sont parallèles », « Montrer que deux bipoints donnés ont même milieu », « Montrer l'égalité de deux segments donnés », « Montrer qu'un point est milieu d'un segment ».

Nous modélisons cet enseignement par la Figure 23.

Ce modèle présente un seul élément de symétrie des quadrilatères, celui du centre de symétrie du parallélogramme donné en 7^e année sans preuve. "Le point de concours des diagonales est centre de symétrie du parallélogramme". La propriété des angles opposés d'un parallélogramme n'est pas donnée explicitement.

Figure 23. Modèle 2^{ème} période⁸

Source: Doumbia (2020, p.84)

Il y a une hérédité différente de celle du modèle précédent par le fait qu'un parallélogramme n'est pas un trapèze. Il prend en compte les quadrilatères convexes, les quadrilatères croisés et les quadrilatères non croisés. Il étudie le trapèze avant le parallélogramme, la définition du trapèze exclu le parallélogramme.

Dans le **Livre de la 8^e année**, les tâches sont essentiellement des démonstrations des propriétés admises en 7^e et les techniques à utiliser sont données aux apprenants. La collection ne donne pas de travaux pratiques, pas de résumé de cours. Elle ne fournit pas assez d'exercices.

Pour la période des années 90 à nos jours, nous avons analysé la Collection Mathématiques IPN, de Almouloud et al. (1990).

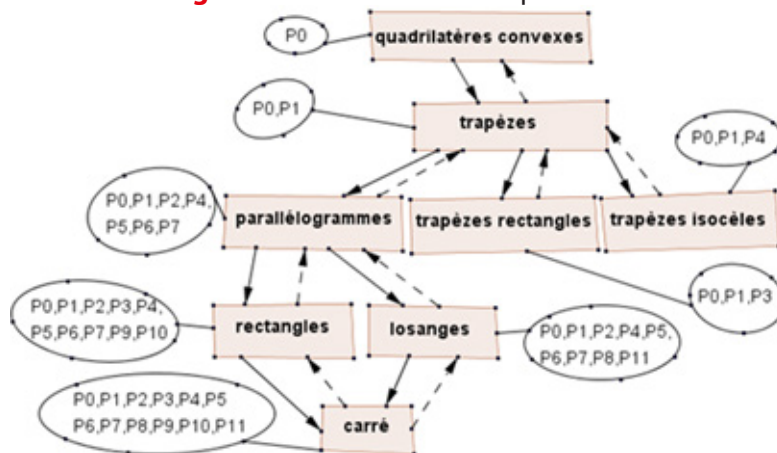
Dans le livre de la 7^e année (5^e), on définit les différents quadrilatères, les propriétés sont données sans démonstration, en organisant les cours en activités. Ils définissent les différents quadrilatères (quadrilatères croisés et non croisés, parallélogramme, rectangle, losange, carré et trapèze) et donnent les propriétés de chacun d'entre eux.

De l'analyse de ces manuels, nous construisons une carte (Figure 24) qui représente le modèle en vigueur pendant cette période.

On retrouve l'hérédité de la première période (Figure 24). On constate un souci de simplification de l'enseignement/apprentissage des quadrilatères dans ce manuel. Le trapèze est étudié après les autres quadrilatères particuliers.

Ce modèle ne se préoccupe pas, de façon explicite, des éléments de symétrie dans les quadrilatères particuliers.

⁸ P0: plusieurs côtés; P1: quatre côtés; P2: convexes; P3: seulement deux côtés parallèles; P4: deux paires de côtés parallèles; P5: un angle droit; P6: deux côtés opposés égaux; P7: les diagonales ont même milieu; P8: quatre côtés égaux; P9: quatre angles droits; P10: les diagonales sont perpendiculaires; P11: les diagonales sont égales.

Figure 24. Modèle de la 3^{ème} période⁹

Source: Doumbia (2020, p.87)

Les types de tâches proposées par le manuel de 8^e année sont décrites dans le Tableau 3.

Tableau 3. Types de tâches

T1 : Maitriser le vocabulaire sur les quadrilatères	T2 : Dessine un quadrilatère particulier et rappelle sa définition
T3 : Prouver une propriété du parallélogramme	T4 : Écrire un énoncé sous forme d'hypothèse et conclusion
T5 : Application des propriétés du parallélogramme	T6 : Démontrer qu'un quadrilatère est un rectangle
T7 : Prouver une propriété du rectangle	T8 : Applications des propriétés du rectangle
T9 : Prouver une propriété du losange	T10 : comparer des quadrilatères en termes de propriétés
T11 : Construire un trapèze rectangle	T12 : construire un trapèze isocèle
T13 : Prouver une propriété du triangle	T14 : Montrer qu'un quadrilatère donné est un parallélogramme.
T15 : Montrer que deux droites sont parallèles	T16 : Reconnaître un parallélogramme/////
T17 : Reconnaître un rectangle :	T18 : Reconnaître un carré
T19 : Reconnaître un losange	T20 : Construire le quatrième sommet d'un parallélogramme sachant trois sommets.
T21 : Construire un rectangle dont on connaît un côté et une diagonale	T22 : Construire un losange de dimensions données
T23 : Construire un parallélogramme sachant un côté et une diagonale	T24 : Construire un carré de côté donné
T25 : Caractériser le parallélogramme	T26 : Caractériser le rectangle
T27 : Caractériser le losange	T28 : Caractériser le carré
T29 : Montrer l'égalité de deux segments	T30 : Montrer que trois points sont alignés
T31 : Montrer que deux droites sont parallèles	T32 : Montrer que quatre points appartiennent à un même cercle
T33 : Montrer que deux droites sont perpendiculaires	T34 : Démontrer qu'un quadrilatère est un carré
T35 : démontrer qu'un quadrilatère donné est un losange	T36 : démontrer qu'un quadrilatère donné est un rectangle
T37 : démontrer qu'un quadrilatère donné est un parallélogramme	

Source: Doumbia (2020, p.90-91)

⁹ P0: Convexes; P1: une paire de côtés parallèles; P2: deux paires de côtés parallèles; P3: un angle droit; P4: deux côtés opposés égaux; P5: angles opposés égaux; P6: les diagonales ont même milieu; P7: deux côtés opposés parallèles et égaux; P8: quatre côtés égaux; P9: quatre angles droits; P10: les diagonales ont même longueur; P11: les diagonales sont perpendiculaires

Comparaison des modèles

D'Euclide à 2020, nous identifions quatre Modèles Épistémologiques de Référence qui se sont succédés pour l'enseignement des quadrilatères.

Le modèle d'Euclide est exclusif, va du carré (qui rassemble toutes les propriétés) aux autres quadrilatères particuliers par suppression de propriétés. Au cours de la période des années 60, les manuels analysés utilisent un modèle inclusif qui va du trapèze aux autres quadrilatères particuliers.

Le modèle de la deuxième période (les années 70) est différent de celui des années 60 par le fait qu'il isole le trapèze des autres quadrilatères; un parallélogramme n'est pas un trapèze. Mais l'inclusion entre les autres quadrilatères est conservée. Dans la première période, l'étude des quadrilatères se termine par le trapèze, alors que dans la deuxième période, elle commence par le trapèze.

La troisième période est organisée sur le même modèle inclusif que la première période. Les éléments de symétries étudiés dans la première période sont presque absents dans la deuxième et troisième périodes.

Cette étude nous montre également que l'enseignement et l'apprentissage des quadrilatères a connu des changements de 1960 à 2020, changement dû aux différents programmes des Mathématiques proposés par les autorités scolaires pendant cette période.

Le modèle d'Euclide est basé sur des définitions exclusives. Le carré n'est pas défini à partir du rectangle, c'est plutôt le contraire. C'est le rectangle qui est défini à partir du carré par la suppression de l'égalité des quatre côtés. Le carré a les quatre côtés égaux et les quatre angles droits (il est rectangulaire qui signifie avoir ses angles droits). En conservant la propriété «rectangulaire» pour définir le rectangle, celui-ci devient rectangulaire comme lui, mais qui n'est pas carré, car ses côtés ne sont pas égaux. Tout se passe comme si c'est le carré qui génère les autres quadrilatères par suppression de propriétés. Le carré est plus riche et plus complet en propriétés que les autres. En allant dans le sens inverse, l'inclusion (par adjonction de propriétés), se trouvant au sommet, il hérite de chacun des quadrilatères particuliers. Il devient alors plus riche et plus complet en propriétés.

La façon dont il définit les différents quadrilatères n'est pas en accord avec notre MER qui adopte des définitions fondées sur le principe de l'inclusion: comme le carré a les propriétés du rectangle alors il en est un. Il n'est pas envisageable, dans le modèle d'Euclide, de procéder à un classement des quadrilatères à partir des propriétés liées aux angles, ou aux diagonales ou encore aux éléments de symétrie, etc.

Le modèle de la première période définit inclusivement les quadrilatères, ce qui est en accord avec notre MER. Ce modèle ne permet pas aux élèves de voir le cerf-volant. Il ne fait pas de classification par propriétés des quadrilatères.

Le modèle de la deuxième période rejoint Euclide en définissant le trapèze, ce qui ne va pas avec notre MER. Pour la définition des autres quadrilatères, il est en accord avec notre MER. Ce modèle ne fait pas de classification par propriétés des quadrilatères, que notre MER prend en compte. Ce modèle n'envisage pas le cerf-volant comme élément de la classe des

quadrilatères particuliers.

Le modèle de la troisième période définit de façon inclusive les quadrilatères, ce qui est en accord avec notre MER.

Les praxéologies mathématiques

La géométrie de ce niveau d'étude est la géométrie plane et en micro-espace.

Selon Chevallard (1992, p. 6) :

L'activité d'une personne se décline en différents types de tâches **T**, accomplis au moyen d'une certaine manière de faire, ou technique, . Le couple **[T,]** constitue un savoir-faire. Les praxéologies, en fait, vieillissent : leurs composants théoriques et technologiques perdent de leur crédit et deviennent opaques, tandis que des technologies nouvelles émergent qui, par contraste, portent à suspecter d'archaïsme les techniques établies.

Cela montre que l'avènement de nouvelles praxéologies peut être source de réforme, surtout, dans un univers de tâches **routinières** surgissent à tout instant, ici et là, des tâches **problématiques**, qu'on ne sait pas – encore – accomplir, de nouveaux types de tâches, qui sont alors des types **de problèmes**, s'affirment ainsi, autour desquels de nouvelles praxéologies devront se constituer.

Les tâches de construction demandent l'utilisation des matériels de géométrie (règle graduée, règle non graduée, équerre, compas, rapporteur) ou l'usage d'un environnement dynamique de géométrie (Geogebra, Cabri-géomètre, Science Word, etc.).

Les tâches de démonstration demandent l'utilisation des propriétés ou de théorèmes déjà prouvés (G2 et G3) (Parzysz, 2006). Mais dans une institution, d'une période à l'autre, les techniques et/ou les technologies ont changé.

Les restrictions

Pour des raisons économiques ou d'utilité¹⁰ sociale (pour la société des experts et/ou la société publique), les décideurs peuvent envisager des réajustements sur quelques objets spécifiques d'un programme d'enseignement ou carrément sur la globalité du programme. Cela peut donner des occasions de retrait d'objets ou rajout de nouveaux éléments. Par exemple, les propriétés du quadrilatère inscriptible dans un cercle sont enseignées au cours de la première période (1960 à 1970) et ne le sont pas de 1970 à 2020. Mais, nous observons que certains objets et/ou propriétés revivent dans les programmes suivants. Nous citons, comme exemple, la classification des polygones en polygones particuliers (trapèze, carré, rectangle, losange, parallélogramme) pour déterminer la mesure de l'aire ou le périmètre de ce polygone; la propriété des angles d'un parallélogramme: cette propriété existait en première période, mais a disparu en deuxième et réapparaît au cours de la troisième période.

10 L'utilité ne se lit pas seulement pour l'articulation des niveaux d'étude, mais aussi pour l'intérêt de la société qui peut être lié au projet de développement d'un pays, ses enjeux et ses grands défis ou encore à l'évolution des connaissances dans le savoir savant (les nouveaux savoirs auxquels la communauté des experts porte un intérêt grandissant). Il y a une autre dimension qui consiste à placer le «*savoir à enseigner*» à des distances «*raisonnées*» du «*savoir savant*» et du «*savoir des parents*», c'est-à-dire en l'éloignant de façon judicieuse du «*savoir des parents*» et en l'approchant au mieux au «*savoir savant*». Ce qui a pour effet premier la légitimation du travail de l'enseignant aux yeux de la communauté.

Dans cette étude, nous observons les types de tâches par période (Tableau 4) à travers les manuels scolaires, pour dégager les types d'activités pouvant être menées dans les différentes institutions. Nous montrons comment les activités menées sont-elles liées? quelles activités vivent-elles normalement dans ces institutions ?

Certains auteurs de manuel utilisent le contrat d'ostension¹¹ (Brousseau, 1996) pour définir certains objets mathématiques.

L'écologie des définitions des quadrilatères

Tableau 4. Comparaison des définitions des concepts

	Monge (1ère période)	B. Traoré (2ème période)	Saddo (3ème période)
Quadrilatère	Ligne brisée fermée, formée par quatre segments	Un polygone qui a quatre côtés et bien sûr quatre sommets.	Introduit par contrat d'ostension, les représentations graphiques des quadrilatères non croisés et quadrilatère croisés sont données.
Trapèze	Est un quadrilatère convexe dont deux côtés sont parallèles	Un quadrilatère, tel que les supports de seulement deux côtés opposés sont parallèles et tel que l'intersection des deux autres côtés est vide	Est un quadrilatère tel que les supports de deux côtés opposés sont parallèles.
Parallélogramme	Un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.	Un quadrilatère dont les supports des côtés opposés sont parallèles [deux à deux]	Est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.
Rectangle	Un parallélogramme dont un angle est droit.	Un parallélogramme dont les supports de deux côtés consécutifs sont perpendiculaires	Est un parallélogramme qui a un angle droit.
Losange	Un parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont égaux.	Un parallélogramme dont deux côtés consécutifs ont même longueur.	Est un parallélogramme dont deux côtés consécutifs ont mêmes longueurs.
Carré	Un parallélogramme dont un angle est droit et dont deux côtés consécutifs sont égaux.	Un losange et en même temps un rectangle.	Un carré est un losange qui a un angle droit.

Source: Construction des auteurs

Une analyse du tableau 4 montre quelques régularités suivant les lignes et les colonnes.

Suivant les lignes nous avons:

- **Première ligne** (quadrilatère): La 1^{ère} période définit le quadrilatère à l'aide de lignes et de segments, la 2^{ème} période rompt avec celle-ci en s'intéressant aux sommets et aux côtés, tant dis que la 3^{ème} période rompt avec les deux premières en proposant des figures à la place d'une définition littérale. Il n'y a pas de régularité dans la façon de définir le quadrilatère, mais elles désignent toute la même figure géométrique.
- **Deuxième ligne** (trapèze): Il y a une constance dans la définition du trapèze avec les trois périodes: elles le définissent toutes à l'aide des "côtés". Cependant la définition de la deuxième période exclut les parallélogrammes des trapèzes ce qui est le contraire chez la première et la troisième.
- **Troisième ligne** (parallélogramme): Il n'y a pas de constance; les deux dernières pé-

¹¹ Brousseau définit le contrat d'ostension de la manière suivante «le professeur montre un "objet" ou une propriété, l'élève accepte de le "voir" comme le représentant d'une classe dont il devra reconnaître les éléments dans d'autres circonstances» (BROUSSEAU, 1996, p 46)

riodes utilisent le parallélisme des droites (supports des côtés opposés), tandis que la première période utilise le parallélisme des côtés opposés (ce qui est relatif aux segments de droite)

- **Quatrième ligne** (rectangle): La constance est que toutes les trois périodes définissent le rectangle en utilisant le parallélogramme. Elles diffèrent par la formulation des propriétés, en occurrence, celles que doit posséder un parallélogramme pour avoir le statut d'un rectangle. Pour définir le rectangle, la première et la troisième périodes s'intéressent aux angles «*un parallélogramme qui possède un angle droit*» tandis que la deuxième période fonde sa définition sur la propriété des côtés consécutifs «*deux côtés consécutifs perpendiculaires*».
- **Cinquième ligne** (losange): La régularité est que toutes les trois périodes définissent le losange en utilisant le parallélogramme. La différence se situe au niveau des objets à comparer: la première période compare des segments, alors que les deux dernières comparent des longueurs de segments.
- **Sixième ligne** (carré): Pas de régularité sur cette ligne car la première période utilise le parallélogramme, la deuxième, le rectangle et le carré et la troisième, le losange. En partant du parallélogramme, on a deux autres propriétés à exiger pour qu'il soit un carré. Cette définition est moins économique que les autres.

Suivant les colonnes:

- La **première colonne**(Monge): elle définit les différents quadrilatères par rapport aux propriétés des côtés.
- La **deuxième colonne** (B Traoré): elle utilise les côtés, supports des côtés et longueur de côté pour définir les concepts.
- La **troisième colonne** (Almouloud et al.): elle s'intéresse aux figures géométriques, aux supports de côtés, aux longueurs de côtés pour définir les concepts.

LE MODÈLE PRAXÉOLOGIQUE DE RÉFÉRENCE (MPR)

Le modèle praxéologique de référence est construit à partir du MER et certains éléments des trois modèles en vigueur pendant les différentes périodes analysées.

Nous nous inspirons de la classification des quadrilatères proposée par Gascón (2004), pour organiser notre MPR en sous-modèles suivant les propriétés mises en jeu.

Comme Gascón (2004, p.42) le souligne, la classification des quadrilatères convexes, telle que nous la révélons au cours de l'étude des manuels des trois périodes, se réduit

à de simples taxonomies sans aucun rapport avec les questions géométriques qui apparaissent dans les situations ombilicales de détermination et de construction de figures et, par conséquent, sans aucun rapport avec des questions telles que : Quels sont les éléments qui déterminent un type de polygone ? Quels sont les éléments qui déterminent un type de figures donné, Existe-t-il différents systèmes d'éléments qui déterminent le même type de figures, Lequel d'entre eux est le plus approprié à utiliser dans une situation de construction donnée, Lequel d'entre eux est le plus approprié à utiliser dans une situation de construction donnée, Existe-t-il différents systèmes d'éléments qui déterminent le même type de figures, Lequel d'entre eux est le plus appro-

prié à utiliser dans une situation de construction donnée ?

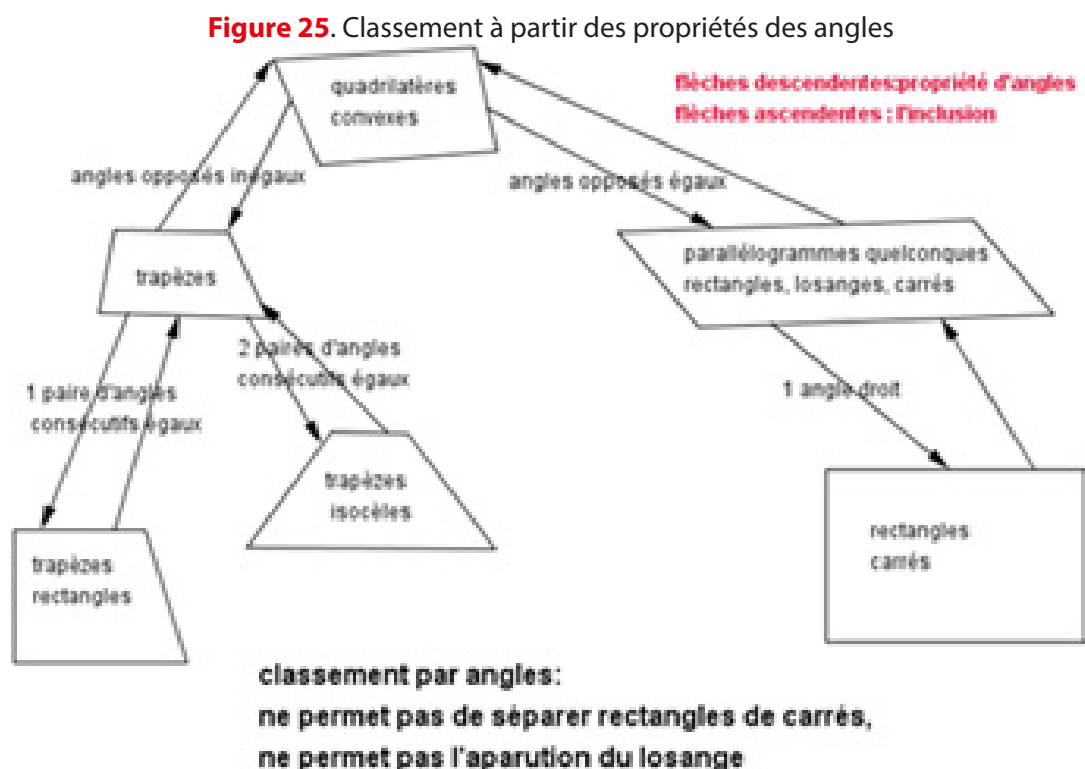
Nos analyses económico-institutionnelles et écologiques montrent, comme dans l'étude de Gascón (2004), que la classification des quadrilatères qui figurent dans les manuels de Mathématiques du second cycle de l'enseignement fondamental du Mali, est basée sur le critère du parallélisme des côtés et sur le fait que les côtés ont ou non la même longueur (la mesure des angles est également utilisée parfois).

En construisant notre MPR et en s'appuyant sur différentes classifications des quadrilatères, nous souhaitons que chacune soit comprise comme une étude du changement de forme des quadrilatères, ce qui permettrait de retrouver la raison d'être de l'étude de ce sujet dans l'enseignement fondamental (GASCON, 2004).

Classement par propriétés des angles (Figure 25)

Cette figure montre comment peut-on passer d'un quadrilatère convexe donné à un autre quadrilatère convexe en utilisant les propriétés caractéristiques liées aux angles d'un quadrilatère.

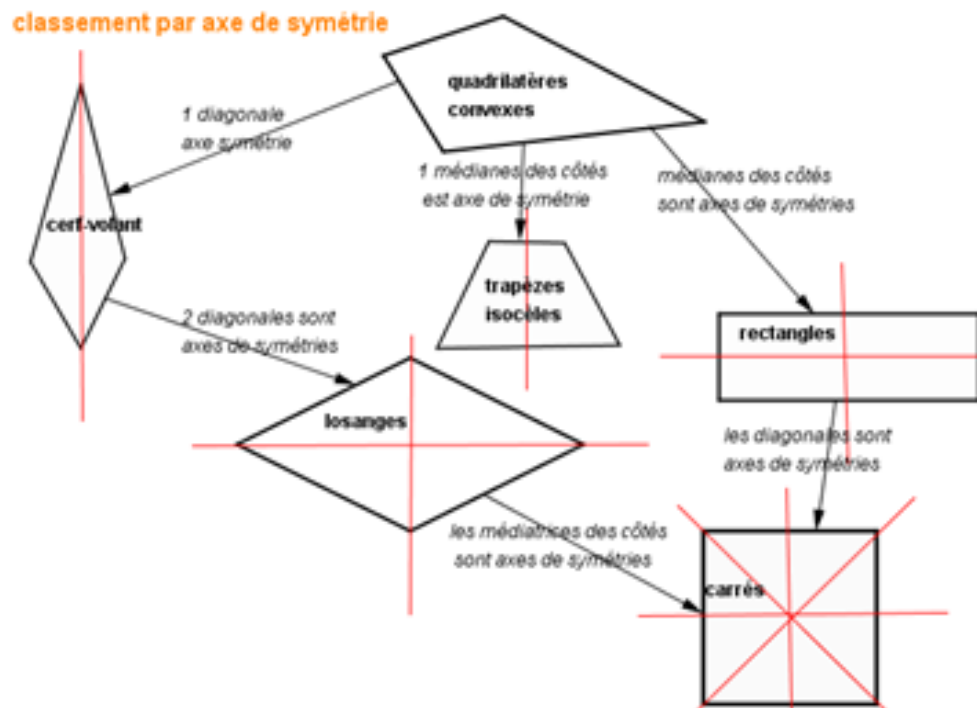
Exemple: dès que les angles opposés d'un quadrilatère convexe sont égaux, alors il est parallélogramme. De plus un parallélogramme, qui a un angle droit, est soit un rectangle ou un carré.



Source: Doumbia (2020, p. 99) en s'inspirant de Gascón (2004)

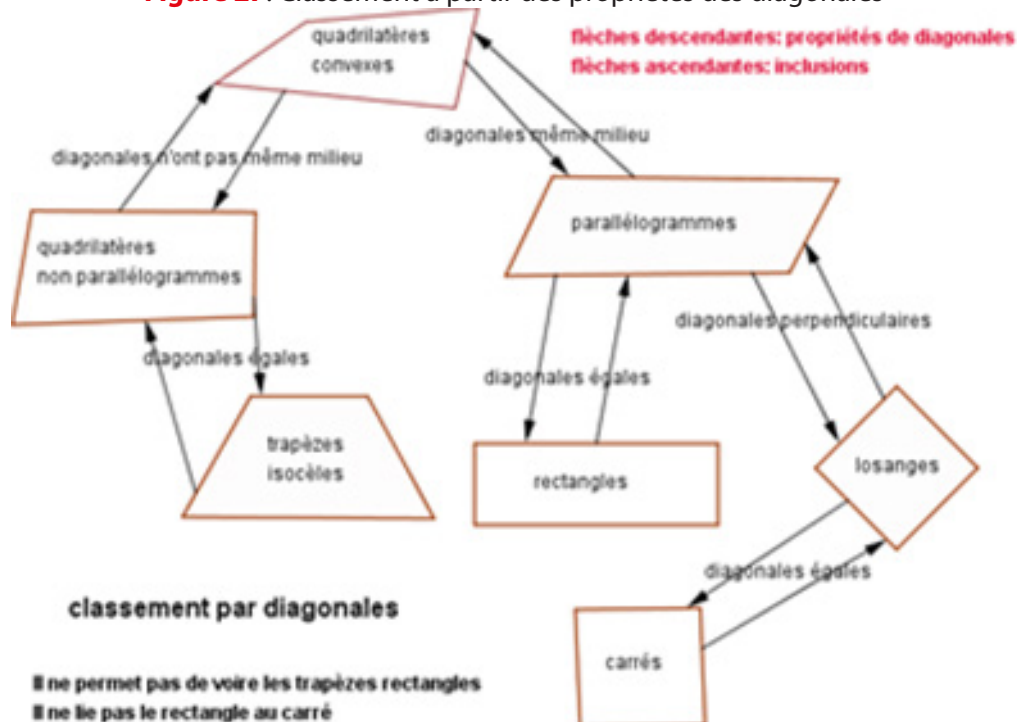
Classement par éléments de symétrie (Figure 26)

Pour un enseignement des quadrilatères basée sur une caractérisation liées aux propriétés d'axe de symétrie des quadrilatères, on ne parlera pas de parallélogramme quelconque ni de trapèze rectangle mais le cerf-volant pourrait apparaître.

Figure 26. Classement à partir des propriétés des axes de symétrie

Source: Doumbia (2020, p. 100) en s'inspirant de Gascón (2004)

Classement par propriétés des diagonales (Figure 27)

Figure 27. Classement à partir des propriétés des diagonales

Source: Doumbia (2020, p. 100) en s'inspirant de Gascón (2004)

Lorsque l'on considère la définition suivante du trapèze: «*quadrilatère convexe qui a deux côtés parallèles*», on peut relever que: le parallélogramme nourrit le trapèze par ses côtés parallèles – le carré, le rectangle et le losange nourrissent le parallélogramme; par deux paires de côtés parallèles et le centre de symétrie (l'intersection des diagonales) – le carré nourrit le rectangle par ses quatre angles droits, ses diagonales égales et ses médianes qui

sont axes de symétrie – le carré nourrit le losange par ses quatre côtés de même longueur, ses diagonales perpendiculaires – le parallélogramme admet un seul centre de symétrie.

Nous résumons dans le Tableau 5, les tâches liées à l'introduction des quadrilatères et l'études de leurs propriétés et classifications.

Tableau 5. Types de tâches liées aux praxéologies mathématiques et didactiques des quadrilatères

T1 : Construire un trapèze dont les bases et la hauteur sont données.	T2 : Construire un trapèze isocèle de dimensions données.
T3 : Construire un trapèze rectangle de dimensions données	T4 : Construire un trapèze.
T5 : Construire un rectangle dont la longueur et la largeur sont données	T6 : Construire un rectangle dont la diagonale et la largeur sont données
T7 : Construire un rectangle dont la diagonale et la longueur sont données	T8 : Construire un losange de côté donné.
T9 : Construire un losange de diagonales données	T10 : Construire un losange dont une diagonale et le côté sont donnés
T11 : Construire un carré de côté donné.	T12 : Construire un carré de diagonale donnée
T13 : Construire un carré d'aire donnée.	T14 : Reconnaître un trapèze dans une configuration géométrique donnée
T15 : Reconnaître un parallélogramme dans une configuration géométrique donnée.	T16 : Reconnaître un rectangle dans une configuration géométrique donnée.
T17 : Reconnaître un losange dans une configuration géométrique donnée.	T18 : Reconnaître un carré dans une configuration géométrique donnée.
T19 : Démontrer l'égalité de deux segments.	T20 : Démontrer l'égalité de deux angles
T21 : Démontrer que trois points sont alignés.	T22 : Démontrer que deux droites sont perpendiculaires.
T23 : Démontrer que deux droites sont parallèles.	T24 : Démontrer que trois droites sont concourantes
T25 : Démontrer qu'un triangle donné est isocèle	T26 : Démontrer qu'un triangle donné est rectangle.
T27 : Démontrer qu'un quadrilatère donné est un parallélogramme.	T28 : Démontrer qu'un parallélogramme donné est un rectangle.
T29 : Démontrer qu'un parallélogramme donné est un losange.	T30 : Démontrer qu'un parallélogramme donné est un carré.
T31 : Démontrer une propriété dans un triangle.	T32 : Démontrer une propriété donnée du parallélogramme
T33 : Construire un parallélogramme de côtés donnés	T34 : Sur plusieurs dessins, vérifie expérimentalement des propriétés d'un quadrilatère particulier
T35 : « faite un classement inclusif d'ensembles donnés »	T36 : Construire un parallélogramme dont un côté et la hauteur relative à ce côté sont donnés
T37 : Écrire les hypothèses et la conclusion d'un énoncé mathématique.	T38 : Trois points non alignés A, B, C étant donnés, construire le quatrième sommet D pour que ABCD soit un parallélogramme

Source: Dombia (2020, p. 103-104)

Le classement de l'ensemble des quadrilatères particuliers par l'inclusion est basé sur la maîtrise de leurs propriétés.

SYNTHÈSE DE CES ÉTUDES ET LEURS APPORTS

Le MER est un outil pour faire les analyses de la dimension économique-institutionnelle et écologique.

La dimension épistémologique a montré que le savoir « *quadrilatères* » n'était pas parfaitement défini au départ et que, c'est avec le temps qu'il a été bien clarifié. Pour Euclide, on ne pouvait pas prendre un parallélogramme pour un trapèze.

Dans la première période, on accepte que tout parallélogramme soit un trapèze. Alors que la deuxième période exprime clairement le fait qu'un parallélogramme ne peut pas être un trapèze. La troisième période revient à l'idée de la première période.

Par rapport à la dimension économique, nous observons que certaines praxéologies ont évolué en ce qui concerne les techniques utilisées. Par exemple, pour la tâche « *démontrer que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu* », les techniques n'ont pas été les mêmes selon les périodes: la première période utilise les cas d'égalité de triangles, la deuxième, la symétrie centrale et la troisième, les propriétés du parallélogramme.

Certains types de tâches ont résisté aux changements, par exemple: les applications du parallélogramme dans un triangle.

Du point de vue de la dimension écologique, nous avons observé que des types de tâches ont disparu et d'autres sont apparus. Par exemple, le modèle de la deuxième période définit le parallélogramme comme Euclide. Pour elle, le parallélogramme n'est pas un trapèze. Ce qui est contraire à notre MER.

On assiste à un changement de conception du « *trapèze* », qui est général (car l'enseignement est uniforme pour la même institution sur toute l'étendue du territoire).

La première période étudie les éléments de symétries pour les différents quadrilatères particuliers, alors que la troisième ne parle pas de ces éléments de symétrie.

Le modèle de la deuxième période ne présente qu'un seul élément de symétrie dans toute l'étude des quadrilatères: « *le point d'intersection des diagonales d'un parallélogramme est son centre de symétrie* ». Cette proposition n'est pas démontrée, alors que dans la première période et dans notre MER, il y a tous les éléments de symétries pour les quadrilatères particuliers. Le Carré a un centre de symétrie et quatre axes de symétries; le rectangle a un centre de symétrie et deux axes de symétries; le losange a un centre de symétrie et deux axes de symétries; le trapèze isocèle a un axe de symétrie. Ceux-ci ont manqué dans le modèle de la deuxième période. C'est le choix didactique fait par les concepteurs des programmes de cette époque. La troisième période n'étudie pas les éléments de symétrie des quadrilatères. La troisième et la première étudient la propriété des angles opposés d'un parallélogramme, alors que la deuxième ne l'étudie pas.

En utilisant la TAD en congruence avec le MER et MPR, nous avons mis en évidence le fait que certaines tâches ont changé de technique, d'autres ont disparu, d'autres ont apparu. Certaines tâches ont disparu et réapparu. Nous résumons dans le Tableau 6 les types de tâches suivant les périodes.

Tableau 6. Résultat de l'analyse des OD

Tâches	1 ^{ère} période	2 ^{ème} période	3 ^{ème} période
1. Montrer que les médianes d'un triangle sont concourantes	Existe : technique t1	Disparaît	Réapparaît : technique t2
2. Montrer que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu	Existe : technique T1	Résiste et change de technique : T2	Résiste et change de technique : T3
3. Propriété des angles d'un parallélogramme	Existe	Disparaît	Réapparaît
4. La parallèle à un côté passant par le milieu d'un autre côté, dans un triangle, passe par le milieu du troisième côté	Existe	Résiste	Résiste
5. Le segment joignant les milieux de deux côtés, dans un triangle, est parallèle au troisième côté.	Existe	Résiste	Résiste
6. Les éléments de symétrie dans : parallélogramme ; rectangle ; losange et carré.	Existe pour tous ces quadrilatères cités.	Le centre de symétrie pour le parallélogramme seul	Disparaît
7. La médiane relative à l'hypoténuse d'un triangle rectangle	Existe	Disparaît	Réapparaît

Source: Construction des auteurs

Dans ce tableau, la tâche 1 a disparu et réapparu avec une nouvelle technique. La tâche 2 a résisté aux changements, mais elle a changé à chaque fois de technique. La tâche 3 a disparu et a réapparu. Les tâches 4 et 5 ont résisté aux changements. La tâche 6 n'a pas résisté aux changements, elle a connu une restriction puis elle finit par disparaître. La tâche 7 disparaît et réapparaît.

Le modèle didactique de référence, s'appuyant sur la classification des quadrilatères en fonctions de certaines de leurs propriétés, peut être un outil pour construire des situations qui favoriseraient la détermination des différents quadrilatères et l'appropriation de leurs propriétés par les élèves. Chacune des classifications proposées et les différents types de tâches liées à chaque classification, peuvent aider à retrouver la raison d'être (Gascón, 2004) de l'étude de ce thème au second cycle de l'enseignement fondamental.

REFERENCES

- ALMOULOUD Saddo Ag et al. (1990). **Collection Mathématiques** (7e ,8e et 9e) IPN édition, 1990.
- ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da Matemática**. Editora da UFPR, 2007.
- ARTAUD, M. (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques . **IX^{ème} école d'été de la didactique des**

mathématiques. Equipe MAPMO (UMR n° 6628).

BARQUERO, Berta, BOSCH, Marianna, GASCÓN, Josep. The ecological dimension in the teaching of mathematical modelling at university. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Vol. 33, n°3 pp. 307-338, 2013. Disponível em: <https://revue-rdm.com/2013/the-ecological-dimension-in-the/>

BOSCH, Marianna, CHEVALLARD, Yves. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, 1999, p.77-124, v.19, n°1.

BRASIL. Os parâmetros Curriculares Nacionais, Ministério da Educação e da Cultura. 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf>

BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e Métodos da Didática da Matemática. In: BRUN, Jean (org.). **Didáctica das Matemáticas Lisboa**: Instituto Piaget, 1996. Capítulo 1, p. 35- 113.

CHEVALLARD Yves (1999, p. 19). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques** 19(2), 221-266. 1999.

CHEVALLARD Yves. La TAD face au professeur de mathématiques» Toulouse, le 29 avril 2009). Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_TAD_face_au_professeur_de_mathematiques.pdf

CHEVALLARD Yves (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage, v. 12.1, p.73-112.

CHEVALLARD Yves (1999, p. 19). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques** 19(2), 221-266. 1999.

DUVAL, R. (1995). **Sémiosis et pensée humaine**. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels

EUCLIDE. Eléments d'Euclide. Disponible em: http://promenadesmaths.free.fr/telecharger/euclide_elements_1804.pdf

FERREIRA, Maridete Brito Cunha. **Uma organização didática em quadriláteros que aproxima aluno de licenciatura das demonstrações geométricas**. Tese de doutorado em Educação Matemática pela PUC-SP. Disponível em <https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/18952>

GASCÓN, Josep. Efectos del *autismo temático* sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. La clasificación de los cuadriláteros convexos. Revista Suma 45, 2004. Disponível em: <https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/44/025-034.pdf>

GASCÓN, Josep (2011). las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. el caso del álgebra **elemental Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, vol. 14, núm. 2, julio, 2011, p. 203-231 Comité Latinoamericano de Matemática

Educativa Distrito Federal, Organismo Internacional.

GASCÓN, Josep. Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica. **Revista Educación Matemática**, 2014, pp. 99-123. Disponível em: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40540854006>

MONGE, M. et GUINCHAN, M. Collection Mathématiques: 4e et 3^e (édition, 1964).

MAIOLI, Marcia. **Uma oficina para a formação de professores com enfoque em quadriláteros**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática da PUC-SP, 2002. Disponível em: https://www.pucsp.br/pensamentomatematico/dissertacao_marcia_maioli.pdf

MATTOS, Fernando Cardoso de. **Praxeologias e modelos praxeológicos institucionais: o caso da álgebra linear**. Tese de doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará, 2017. Disponível em: <http://www.gedimufpa.com.br/teses>

Ministère de l'éducation nationale (MEN): **CADRE** général d'orientation du curriculum de l'enseignement du Mali (Bamako, 28 mars 2000)

PARZYSZ, Bernard. La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles : de quoi s'agit-il ? **Quaderni di Ricerca in Didattica**, n° 17, 2006, p.128-151. G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy). Disponível em: https://math.univ-lyon1.fr/irem/IMG/pdf/quad17_BParzysz_06.pdf

PAVANELLO, Régina Maria. **O abandono do ensino de Geometria: uma visão histórica**, 196 f. Dissertação de mestrado em Educação da Universidade Estadual de Campinas, 1989. Disponível em: <https://www.radarciencia.org/artigo/o-abandono-de-ensino-de-geometria-uma-visao-historica>

TRAORÉ Bakary, RUSSEL, Claude. **Collection Mathématiques** (7e 8e et 9e). Édition IPN 1970.

VERGNAUD, Gérard. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. La Pensée Sauvage. v. 10, n°2-3 1990, p.133-170.

Histórico

Recebido: 30 de junho de 2023.

Aceito: 25 de julho de 2023.

Publicado: 26 de julho de 2023.

Como citar–ABNT

DOUMBIA, Ibrahima Kériba; ALMOULOU, Sado Ag. Dimensions institutionnelle et écologique de l'organisation mathématique «quadrilatères» au second cycle de l'enseignement fondamental au Mali. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura–REMATEC**, Belém/PA, n. 43, e2023024, 2023. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n43.pe2023025.id501>.

Como citar–APA

Doumbia, I. K.; Almouloud, S. A. Dimensions institutionnelle et écologique de l'organisation mathématique «quadrilatères» au second cycle de l'enseignement fondamental au Mali. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC*, 43, e2023024. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n43.pe2023025.id501>.