

Os Elementos de Euclides para o século XXI, um “upgrade” tecnológico em imagens interativas

Euclid’s Elements for the 21st Century, a technological “upgrade” in interactive images

Elementos de Euclides para el siglo XXI, una “actualización” tecnológica en imágenes interactivas

Hélder Pinto¹  

RESUMO

A História e a Tecnologia são duas ferramentas bastante utilizadas no contexto da Educação Matemática. Contudo, a utilização simultânea destes dois instrumentos ainda é extremamente residual. Neste artigo iremos apresentar um exemplo de como utilizar a tecnologia, em particular, o *GeoGebra*, para abordar um livro marcante na História da Matemática: *Os Elementos de Euclides*. Utilizando este software de geometria dinâmica é possível novas abordagens às demonstrações de Euclides, permitindo que os estudantes tenham acesso a imagens construídas «passo a passo» e não apenas a uma imagem final estática como acontece num livro ou num *pdf*.

Palavras-chave: História da Matemática; Tecnologia; Educação Matemática; Os Elementos; Euclides.

ABSTRACT

History and Technology are two tools widely used in the context of Mathematics Education. However, the simultaneous use of these two instruments is still extremely residual. In this article we will present an example of how to use technology, in particular, *GeoGebra*, to approach a remarkable book in the History of Mathematics: *Euclid’s Elements*. Using this dynamic geometry software, new approaches to Euclid’s demonstrations are possible, allowing students to have access to images constructed «step by step» and not just a final static image as it happens in a book or a *pdf*.

Keywords: History of Mathematics; Technology; Mathematics Education; *The Elements*; Euclid.

RESUMEN

La Historia y la Tecnología son dos herramientas muy utilizadas en el contexto de la Educación Matemática. Sin embargo, el uso simultáneo de estos dos instrumentos es todavía extremadamente residual. En este artículo presentaremos un ejemplo de cómo usar la tecnología, en particular, *GeoGebra*, para abordar un libro notable en la Historia de las Matemáticas: *Los Elementos de Euclides*. Con este software de geometría dinámica, son posibles nuevos enfoques a las demostraciones de Euclides, permitiendo que los estudiantes tengan acceso a imágenes construídas «paso a paso» y no solo a una imagen estática final como sucede en un libro o un *pdf*.

Palabras clave: Historia de las Matemáticas; Tecnología; Educación Matemática; *Los Elementos*; Euclides.

1 Doutor em História e Filosofia das Ciências pela Universidade de Lisboa (UL). Professor Adjunto no Instituto Piaget (IP), RECI e CIDMA V. N. Gaia e Almada, Portugal. Endereço para correspondência: Alameda Jean Piaget, 106, V. N. Gaia, Portugal, CP: 4405-678. E-mail: helder.pinto@ipiaget.pt.

INTRODUÇÃO

A utilização da Tecnologia e da História da Matemática como ferramentas educativas está bem documentada, embora não existam muitos estudos que abordem a sua utilização simultânea em contexto escolar.

A tecnologia é uma parte incontornável do quotidiano moderno atual. Assim, a educação não se pode alhear deste movimento e, desde cedo, começou-se a refletir sobre as implicações da tecnologia no processo educativo. Por exemplo, um artigo de 1996 (Cuoco e Goldenberg) já afirmava que a «new technology poses challenges to mathematics educators» e analisava qual deveria ser o papel da tecnologia na educação matemática. De facto, até se ia um pouco mais longe refletindo sobre quais deveriam ser as mudanças no currículo da disciplina de matemática para acomodar o advento da nova tecnologia, em especial da computacional. Note-se que este papel da tecnologia na educação continua em discussão/ análise como pode ser observado, por exemplo em Cullen *et al.* (2020), num artigo de título muito similar ao texto de Cuoco e Goldenberg (1996). Além disso, com o advento de novas tecnologias como, por exemplo, o *ChatGPT* (EATON, 2023), esta é uma discussão que terá de ser revisitada recorrentemente de modo que o processo educativo consiga acomodar as sucessivas tecnologias emergentes.

Math education has been challenged by calculators, by Google, by homework and notes sharing platforms, by WolframAlpha, and more. This is another moment for us to think about how we want to adapt our instruction in light of an ever-changing landscape (EATON, 2023).

Quanto às potencialidades da História da Matemática no ensino também existem muitos estudos como, por exemplo, Clark *et al.* (2018), Clark (2019) e Jankvist (2009), existindo um grupo afiliado no ICMI, criado em 1976, que se dedica a esta temática, *The International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics–HPM*, com conferências internacionais e publicações regulares.

Research on the many ways in which history of mathematics can be used in the teaching and learning of mathematics seems boundless. There are many open questions in the field, yet when considering educational standards set by different countries around the globe and the persistent (primary and secondary) teacher lament that “there is not enough time to teach history of mathematics” in mathematics lessons, addressing the questions through different research efforts can be problematic. Part of the issue with conducting research on the use of history in teaching and learning mathematics is the need to make clear the potential for student learning that research in the HPM domain has shown (CLARK, 2019, p. 49).

Quanto à exploração simultânea das duas áreas (História e Tecnologia) na educação, os estudos são muito escassos. Por exemplo, o artigo de Isoda e Aoyama (2000) aborda exemplos da utilização de LEGO e *softwares* de geometria dinâmica na abordagem de um problema mecânico/geométrico de L’Hospital (1696) em contexto escolar. Em 2004, Isoda indica o potencial para a utilização de ferramentas históricas e softwares computacionais apresentando uma experiência que foi realizada no ensino secundário:

The project has developed more than ten examples in each year and has included activities that students can use to interpret historical texts or their English translations through technology. [...] The historical tool and software enabled students to remind

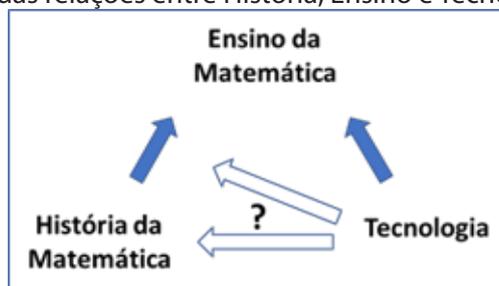
developer's reasoning. Because the lesson started from a historical picture of ellipse compass and gave it meaning within a historical tool for reminding developer's perspective, students could understand mathematics as a Human Endeavor (ISODA, 2004, p. 233 e 236).

Alguns autores defenderam ainda, a propósito das diretrizes de um curso de História da Matemática (da *Mathematical Association of America*), que a tecnologia também pode ser uma ferramenta útil ao abordar conteúdos históricos, uma vez que permite o acesso a muita informação *online*, bem como o acesso a animações e objetos digitais interativos.

While there are several books of original sources in mathematics, there are also several internet sites where such sources and projects that use them can be found. As in other mathematics courses, computer animations and interactive applets can be helpful in developing students' mathematical understanding (TATTERSALL *et al.*, p. 4).

Em conclusão, existem falta de estudos que permitam uma compreensão plena das potencialidades da tecnologia como complemento da utilização da História da Matemática no ensino, bem como quais as potencialidades da tecnologia para ensinar a própria História da Matemática (por exemplo, na formação inicial e contínua de professores) – observe o diagrama apresentado na figura 1. O exemplo apresentado neste artigo tem potencialidades nas duas áreas: a tecnologia permite uma melhor compreensão do conteúdo d'*Os Elementos* e, por outro lado, permite levar esta obra mais facilmente para o contexto escolar, exemplificando e ajudando os estudantes a compreender o rigor de uma demonstração matemática e a natureza da própria disciplina.

Figura 1. Diagrama das relações entre História, Ensino e Tecnologia na Matemática.



Fonte: Elaboração própria do Autor

OS ELEMENTOS DE EUCLIDES: A OBRA E ABORDAGENS ALTERNATIVAS AO LONGO DA HISTÓRIA

Os Elementos de Euclides são uma obra marcante na História da Matemática e, em particular, na Geometria e que manteve a sua centralidade até ao aparecimento da geometria cartesiana. De facto, durante séculos foram sendo publicadas inúmeras versões desta obra, na sua totalidade ou em parte, em diversas línguas e em diversos contextos. Note-se que, mesmo no último século é possível encontrar novas versões desta obra, o que atesta bem o interesse que ainda hoje suscita em matemáticos e historiadores; realçam-se, por exemplo, a extensa versão comentada de Thomas Heath de meados do século XX (Heath, 1956), com re-edições atuais da Dover, bem como a versão de 2009, em português, de Irineu Bicudo (2009). Em <https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/elem.html> é ainda possível encontrar uma outra versão parcial, em português, que é uma reprodução de um original publicado em 1855 pela Universidade de Coimbra (Commandino, 1855). A longevidade

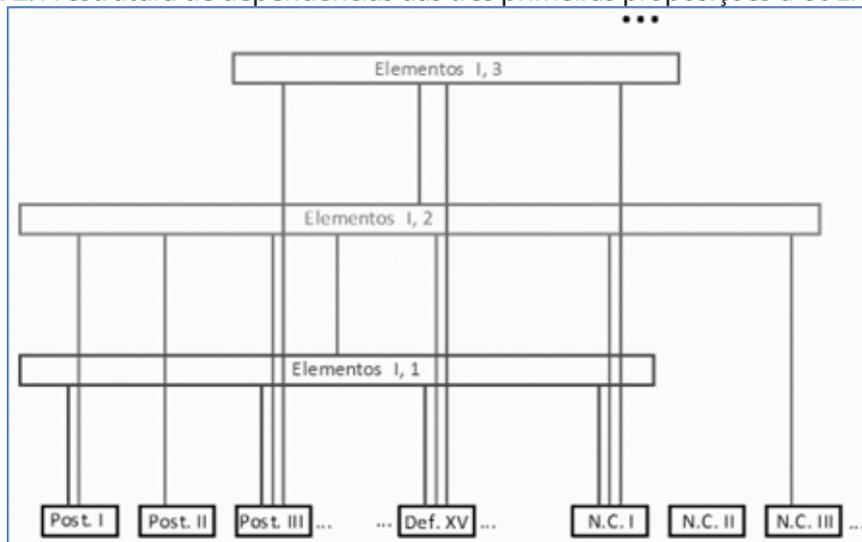
desta obra pode ser explicada por vários fatores, destacando-se a sua extensão (todos os resultados importantes da geometria da época estão lá) e a sua estrutura encadeada de assuntos (em geral, cada demonstração utiliza a proposição imediatamente precedente, o que mostra bem o caráter estruturado e fundamentado da matemática). Esta estrutura, assente em Definições, Postulados e Axiomas (por vezes, também designadas por Noções Comuns), mostra bem como é construído o “edifício matemático” e de onde “nasce” a força dos resultados matemáticos, onde, partindo de poucas premissas que se assumem como verdadeiras, se demonstra, passo a passo, resultados complexos como, por exemplo, o Teorema de Pitágoras e o seu recíproco (as duas últimas proposições, 47 e 48, do Livro I d’*Os Elementos*). Como exemplo, observe a figura 2 abaixo onde é apresentada a estrutura das demonstrações das três primeiras proposições do Livro I, a saber:

Proposição 1: Construir um triângulo equilátero sobre um determinado segmento de reta.

Proposição 2: De um ponto dado, construir um segmento de reta igual a outro segmento de reta dado.

Proposição 3: Dados dois segmentos de retas desiguais, cortar do segmento maior uma parte igual ao segmento menor.

Figura 2. A estrutura de dependências das três primeiras proposições d’*Os Elementos*



Fonte: Silva e Pinto, 2013, p. 217.

A seguir, apresentam-se as premissas em que assentam estas três demonstrações, de modo a verificar que são afirmações “facilmente aceitáveis” por todos e que, por isso mesmo, não necessitam de demonstração (e podem ser as fundações do “edifício matemático”):

- Postulado I: Pede-se como coisa possível que se construa um segmento de reta de um ponto qualquer para outro qualquer;
- Postulado II: E que um segmento de reta possa ser prolongado em direitura de si mesmo até onde seja necessário;
- Postulado III: E que se possa contruir um círculo dado um qualquer centro e um qualquer segmento de reta [raio].
- Definição XV: Círculo é uma figura plana, fechada por uma só linha, a qual se chama

circunferência, de maneira que todos os segmentos de reta, que de um certo ponto existente no meio da figura, se conduzem para a circunferência, são iguais entre si.

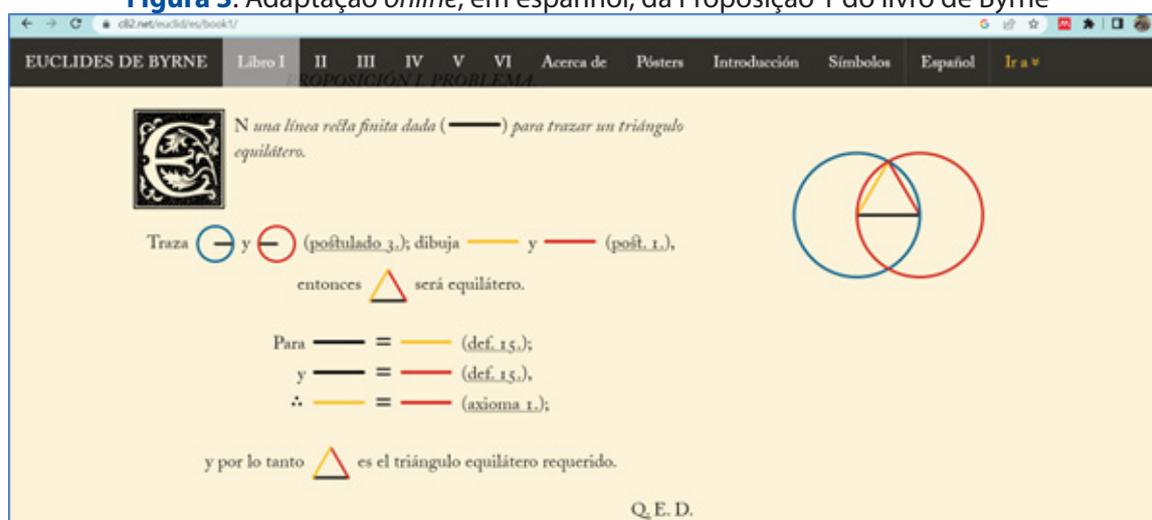
- Noção Comum I: As coisas que são iguais a uma terceira coisa, são iguais entre si.

Por outro lado, realce-se que se utiliza a proposição 1 na demonstração da proposição 2; utiliza-se a proposição 2 na demonstração da proposição 3; e assim sucessivamente. Note-se ainda que, como já foi observado, o Livro I termina com o designado Teorema de Pitágoras (e seu recíproco, isto é, se a soma dos quadrados de dois lados de um triângulo for igual ao quadrado do terceiro lado, então, o triângulo é retângulo) que ainda hoje é ensinado nas nossas escolas do ensino básico e, portanto, é um tema familiar aos estudantes atuais. Esta estrutura permite visualizar facilmente o caráter construtivo e recursivo do conhecimento matemático.

Ao longo da História foram consideradas várias abordagens a esta obra de Euclides. Dada a enorme procura, foi um dos primeiros livros a ser impresso (antes disso circulava em manuscritos copiados à mão), tecnologia inventada em 1430 por Gutenberg. Erhardus Ratdolt (1442–1528) publicou em Veneza, em 1482, a primeira versão impressa desta obra, *Euclid Liber elementorum in artem geometrie*, mas muitas outras foram surgindo ao longo dos séculos.

Uma outra versão muito interessante, apresentando diagramas coloridos para um melhor entendimento das demonstrações foi publicada em 1847 por Oliver Byrne. Esta obra tinha a particularidade de os objetos matemáticos nas demonstrações serem identificados por diferentes cores, tornando-as menos “pesadas” e bastante mais apelativas. Esta versão foi atualizada *online* <https://www.c82.net/euclid/#books> (da responsabilidade de Nicholas Rougeux), onde atualmente é possível consultar o livro, mantendo o mesmo estilo gráfico, em várias línguas («Old English», «Modern English», espanhol e grego). É um bom exemplo de como atualizar um livro antigo tecnologicamente permitindo um novo grupo alargado de leitores.

Figura 3. Adaptação *online*, em espanhol, da Proposição 1 do livro de Byrne

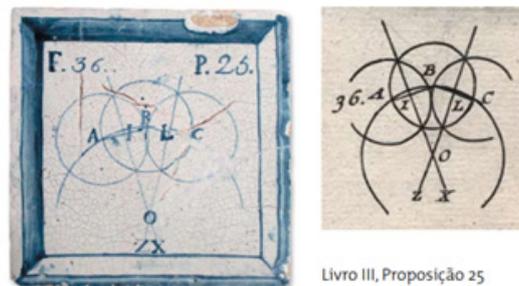


Fonte: <https://www.c82.net/euclid/>

Em Portugal, no século XVII, o Colégio dos Jesuítas em Coimbra apresentava nas suas salas de aula vários azulejos com imagens das demonstrações de Euclides (Duarte, 2007), reproduzindo figuras da versão de André Tacquet. Na figura 4 é apresentado um exemplo

de um desses azulejos, bem como a imagem original a partir da qual terá sido reproduzido. Estes azulejos eram maiores que o usual e pretendiam servir de apoio pedagógico às aulas de matemática, num outro exemplo de inovação utilizando *Os Elementos* de Euclides. Note-se que existiam ainda azulejos de outras áreas temáticas como astronomia e geografia com a mesma finalidade. Atualmente, alguns destes azulejos podem ser visitados no Museu Machado de Castro em Coimbra (Portugal).

Figura 4. Adaptação para azulejo de uma imagem d’*Os Elementos* de Euclides editado por Andre Tacquet

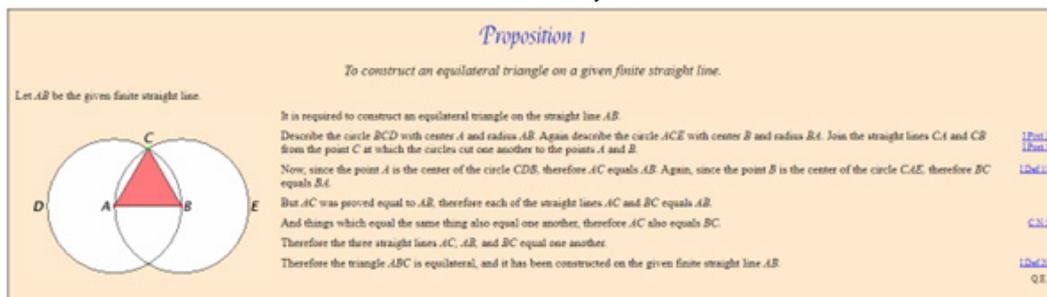


Fonte: Duarte, 2007, pp. 48 e 49.

OS ELEMENTOS DE EUCLIDES: EXEMPLOS INTERATIVOS DA WEB

Com o advento da Internet e da possibilidade de criar conteúdos geométricos dinâmicos, foram surgindo abordagens interativas aos *Elementos* de Euclides. Uma muito divulgada, da autoria de David Joyce (1996-7), pode ser consultada <http://aleph0.clarku.edu/~d-joyce/java/elements/toc.html>. Na figura 5 temos a demonstração da sua proposição 1.

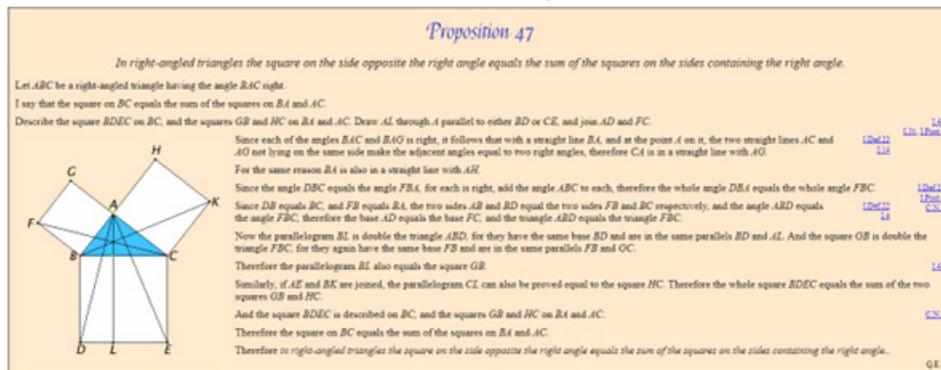
Figura 5. Reprodução da demonstração interativa da Proposição 1 do Livro I d’*Os Elementos* de Euclides (D. Joyce)



Fonte: Joyce, 1996-7.

O utilizador tinha a possibilidade de mover os pontos A e B, “percebendo” que a construção/demonstração apresentada é válida qualquer que seja o segmento de reta inicialmente considerado. Do lado direito existem links que permitem rapidamente recordar quais os Postulados, Definições e Noções Comuns que estão a ser aplicados. Para além disso, todas as demonstrações são posteriormente ricamente comentadas com apontamentos vários como críticas, imprecisões, demonstrações alternativas sugeridas por outros autores antigos, etc. É ainda referido em que outros resultados desta obra é utilizada esta proposição: Proposições 2, 9, 10 e 11 do livro I, bem como nas Proposições 11 e 22 do Livro XI. Nas primeiras demonstrações mais simples, é relativamente fácil de acompanhar os objetos que vão sendo apresentados/criados; o mesmo não sucede quando a demonstração é mais extensa como acontece, por exemplo, na Proposição 47 (Figura 6).

Figura 6. Reprodução da demonstração interativa da Proposição 47 do Livro d’Os Elementos de Euclides (D. Joyce)



Fonte: Joyce, 1996-7.

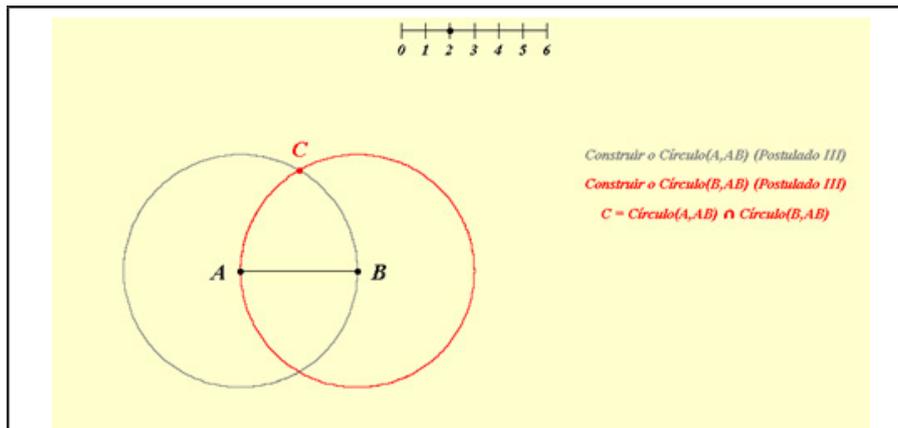
Infelizmente, nesta altura, a interatividade não está funcional e não é possível mover os pontos nas figuras. Ao contrário de um livro, a maioria dos conteúdos tecnológicos necessita de manutenção para continuar funcional e manter as características previstas no momento da sua conceção. No ano letivo 2007/2008, no âmbito do meu doutoramento na Universidade de Lisboa, construí um website similar para o Livro I (PINTO, 2008). Estava em língua portuguesa e apresentava as demonstrações de Euclides «passo a passo», isto é, o utilizador começava apenas com os objetos iniciais do enunciado (que podiam ser alterados movendo o cursor) e ia, conforme pretendido, avançando na demonstração. Na Tabela 1 pode-se consultar o exemplo da demonstração da Proposição 1.

Tabela 1. Reprodução da demonstração interativa, passo a passo, da Proposição 1 do Livro I d’Os Elementos de Euclides

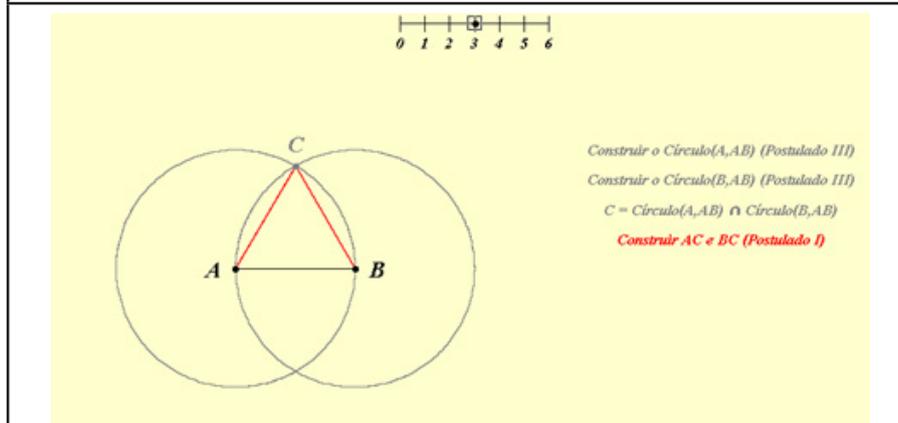
Dados iniciais do enunciado da Proposição 1. Os pontos A e B podem ser movimentados. O ponto acima pode ser movido para avançar na demonstração.

Construir o Círculo(A,AB) (Postulado III)

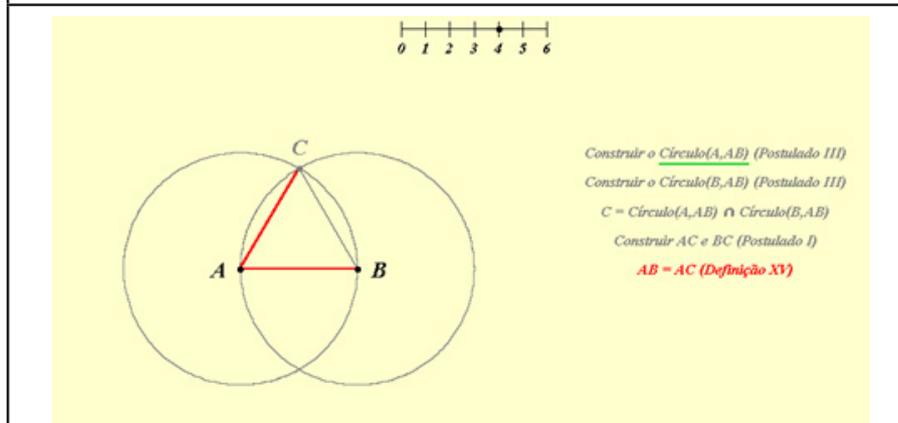
1.º passo da demonstração e respetiva justificação à direita.



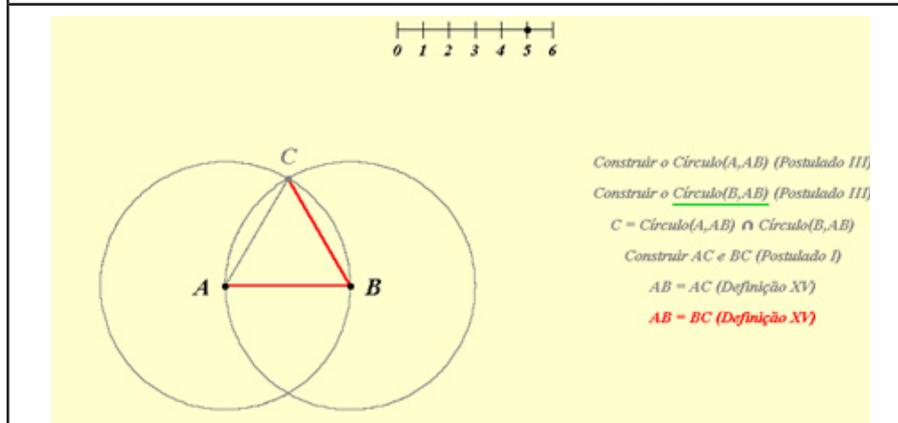
2.º passo da demonstração e respetiva justificação à direita.



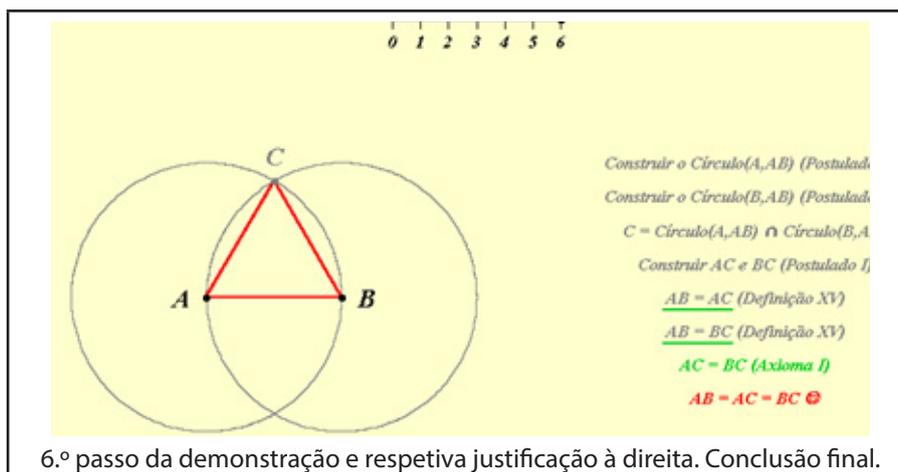
3.º passo da demonstração e respetiva justificação à direita.



4.º passo da demonstração e respetiva justificação à direita.



5.º passo da demonstração e respetiva justificação à direita.



Fonte: Pinto, 2008.

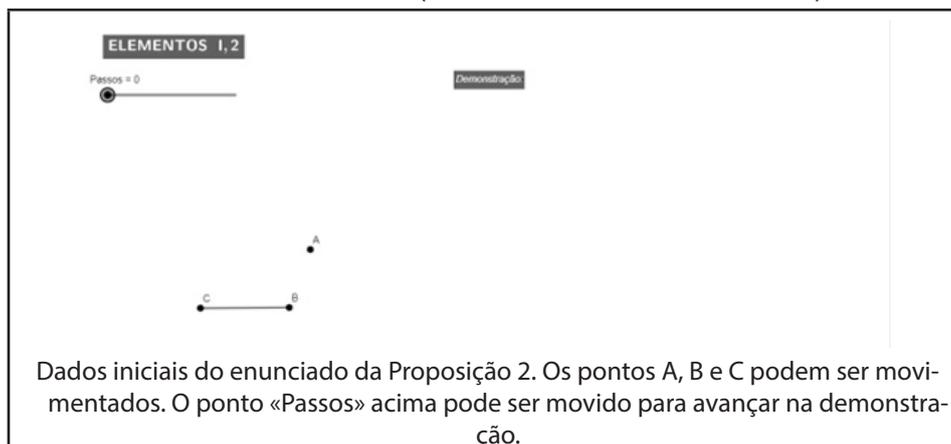
Estes *applets* interativos podiam ser complementados com uma ficha de trabalho em sala de aula, ficha essa que pode ser consultada em (PINTO, 2011, pp. 45-61). Infelizmente, tal como no *website* de David Joyce, estes *applets* também não se encontram presentemente funcionais.

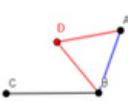
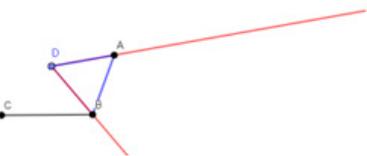
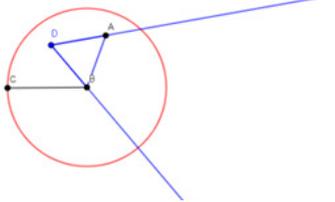
OS ELEMENTOS DE EUCLIDES: UMA POTENCIAL ABORDAGEM USANDO GEOGEBRA

Dada a obsolescência dos dois *websites* referidos na seção anterior, surgiu a necessidade de refazer as demonstrações num novo software. A escolha recaiu no *GeoGebra* por ser gratuito e ser bastante utilizado por professores e alunos em contexto escolar. Em <https://www.GeoGebra.org/materials> pode encontrar muitos materiais interativos construídos neste software e em <http://GeoGebra.es.ipp.pt/> encontra várias informações sobre o Instituto GeoGebra Portugal (congressos, workshops, etc.).

O objetivo passa por replicar as demonstrações do Livro I de Euclides, na lógica de (Pinto, 2008), para o software *GeoGebra*. Trata-se de um trabalho em curso, estando já elaboradas as demonstrações das Proposições 1, 2, 3 e 47. Na tabela 2 estão os passos sequenciais da demonstração da Proposição 2 (que, não sendo difícil, apresenta já uma certa extensão e uma imagem final com bastantes elementos).

Tabela 2. Reprodução da demonstração interativa, passo a passo, da Proposição 2 do Livro I d'Os *Elementos* de Euclides (*GeoGebra* da autoria de H. Pinto).



<p>ELEMENTOS 1, 2</p> <p>Passo = 1</p>  <p>Demonstração Construir o segmento [AB] Postulado I</p> <p>1.º passo da demonstração e respetiva justificação à direita.</p>
<p>ELEMENTOS 1, 2</p> <p>Passo = 2</p>  <p>Demonstração Construir o segmento [AB] Postulado I Construir o triângulo equilátero [ABD] Prop. I, 1</p> <p>2.º passo da demonstração e respetiva justificação à direita (note-se que se utiliza a Proposição imediatamente precedente).</p>
<p>ELEMENTOS 1, 2</p> <p>Passo = 3</p>  <p>Demonstração Construir o segmento [AB] Postulado I Construir o triângulo equilátero [ABD] Prop. I, 1 Prolongar em direitura os segmentos [DA] e [DB] Postulado II</p> <p>3.º passo da demonstração e respetiva justificação à direita.</p>
<p>ELEMENTOS 1, 2</p> <p>Passo = 4</p>  <p>Demonstração Construir o segmento [AB] Postulado I Construir o triângulo equilátero [ABD] Prop. I, 1 Prolongar em direitura os segmentos [DA] e [DB] Postulado II Construir a Circunferência (B,BC) Postulado III</p> <p>4.º passo da demonstração e respetiva justificação à direita.</p>

ELEMENTOS I, 2
Passos = 5

Demonstração
 Construir o segmento [AB] Postulado I
 Construir o triângulo equilátero [ABC] Prop. I, 1
 Prolongar em direita os segmentos [DA] e [DB] Postulado II
 Construir a Circunferência (B,BC) Postulado III
 $G = \text{Semireta}(DB) \cap \text{Circunferência}(B,BC)$

5.º passo da demonstração e respetiva justificação à direita.

ELEMENTOS I, 2
Passos = 6

Demonstração
 Construir o segmento [AB] Postulado I
 Construir o triângulo equilátero [ABC] Prop. I, 1
 Prolongar em direita os segmentos [DA] e [DB] Postulado II
 Construir a Circunferência (B,BC) Postulado III
 $G = \text{Semireta}(DB) \cap \text{Circunferência}(B,BC)$
 Construir a Circunferência (D,DG) Postulado III

6.º passo da demonstração e respetiva justificação à direita.

ELEMENTOS I, 2
Passos = 7

Demonstração
 Construir o segmento [AB] Postulado I
 Construir o triângulo equilátero [ABC] Prop. I, 1
 Prolongar em direita os segmentos [DA] e [DB] Postulado II
 Construir a Circunferência (B,BC) Postulado III
 $G = \text{Semireta}(DB) \cap \text{Circunferência}(B,BC)$
 Construir a Circunferência (D,DG) Postulado III
 $L = \text{Semireta}(DA) \cap \text{Circunferência}(DG)$

7.º passo da demonstração e respetiva justificação à direita.

ELEMENTOS I, 2
Passos = 8

Demonstração
 Construir o segmento [AB] Postulado I
 Construir o triângulo equilátero [ABC] Prop. I, 1
 Prolongar em direita os segmentos [DA] e [DB] Postulado II
 Construir a Circunferência (B,BC) Postulado III
 $G = \text{Semireta}(DB) \cap \text{Circunferência}(B,BC)$
 Construir a Circunferência (D,DG) Postulado III
 $L = \text{Semireta}(DA) \cap \text{Circunferência}(DG)$
 $BC = BG$ Definição XY

8.º passo da demonstração e respetiva justificação à direita.

ELEMENTOS I, 2

Passos = 9

Demonstração

Construir o segmento [AB] Postulado I
 Construir o triângulo equilátero [ABC] Prop. 1.1
 Prolongar em direita os segmentos [DA] e [DB] Postulado II
 Construir a Circunferência (B,BC) Postulado III
 G=Semirreta(DB)∩Circunferência(B,BC)
 Construir a Circunferência (D,DG) Postulado III
 L=Semirreta(DA)∩Circunferência(DG)
 BC=BG Definição XV
 DL=DG Definição XV

9.º passo da demonstração e respetiva justificação à direita.

ELEMENTOS I, 2

Passos = 10

Demonstração

Construir o segmento [AB] Postulado I
 Construir o triângulo equilátero [ABC] Prop. 1.1
 Prolongar em direita os segmentos [DA] e [DB] Postulado II
 Construir a Circunferência (B,BC) Postulado III
 G=Semirreta(DB)∩Circunferência(B,BC)
 Construir a Circunferência (D,DG) Postulado III
 L=Semirreta(DA)∩Circunferência(DG)
 BC=BG Definição XV
 DL=DG Definição XV
 DA=DB Δ equilátero

10.º passo da demonstração e respetiva justificação à direita.

ELEMENTOS I, 2

Passos = 11

Demonstração

Construir o segmento [AB] Postulado I
 Construir o triângulo equilátero [ABC] Prop. 1.1
 Prolongar em direita os segmentos [DA] e [DB] Postulado II
 Construir a Circunferência (B,BC) Postulado III
 G=Semirreta(DB)∩Circunferência(B,BC)
 Construir a Circunferência (D,DG) Postulado III
 L=Semirreta(DA)∩Circunferência(DG)
 BC=BG Definição XV
 DL=DG Definição XV
 DA=DB Δ equilátero
 AL=BG Axioma 3

11.º passo da demonstração e respetiva justificação à direita.

ELEMENTOS I, 2

Passos = 12

Demonstração

Construir o segmento [AB] Postulado I
 Construir o triângulo equilátero [ABC] Prop. 1.1
 Prolongar em direita os segmentos [DA] e [DB] Postulado II
 Construir a Circunferência (B,BC) Postulado III
 G=Semirreta(DB)∩Circunferência(B,BC)
 Construir a Circunferência (D,DG) Postulado III
 L=Semirreta(DA)∩Circunferência(DG)
 BC=BG Definição XV
 DL=DG Definição XV
 DA=DB Δ equilátero
 AL=BG Axioma 3
 AL=BC Axioma 1 QED

12.º passo da demonstração e respetiva justificação à direita. Conclusão final.

Tal como em (Pinto, 2008), a grande vantagem desta aplicação está na interatividade (possibilidade de o utilizador escolher os objetos iniciais da demonstração), bem como a possibilidade de se observar visualmente a construção da demonstração, passo a passo. É ainda utilizado um esquema de cores para se perceber o que está em causa em cada momento da demonstração: a preto os objetos iniciais; a vermelho o que está a ser construído/demonstrado naquele passo; a azul construções que não estão a ser consideradas no momento e a verde resultados que estão a ser utilizados para se concluir o que está assinalado a vermelho.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os Elementos de Euclides foram um sucesso aos longo dos séculos pois apresentam conteúdos que continuam, até aos dias de hoje, essenciais na geometria plana elementar e que surgem recorrentemente na matemática escolar dos primeiros anos. Além disso, é um bom exemplo de como funciona o «edifício matemático» (o que é uma demonstração matemática, o que deve ser o rigor de uma demonstração onde cada passo deve ser devidamente justificado com resultados previamente demonstrados); de facto, aplica-se em Matemática a bem conhecida metáfora dos anões sobre ombros de gigantes, onde só possível descobrir novas verdades a partir das verdades descobertas anteriormente e que nos colocam num patamar acima e privilegiado para avançarmos cientificamente. Assim, aproveitando a tecnologia atual, a interatividade e os softwares de geometria dinâmica existentes atualmente, é possível dar uma nova «roupagem» e aplicar novas abordagens para dissipar parte da dificuldade que existe em ler um texto «original» do passado, como é o acaso da obra aqui referenciada.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi financiado pela RECI e pelo CIDMA–Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações e pela FCT–Fundação para a Ciência e Tecnologia (Portugal), no âmbito dos projetos UIDB/04106/2020 e UIDP/04106/2020.

REFERÊNCIAS

BICUDO, I. (trad.) **Os Elementos Euclides**. São Paulo: Unesp, 2009.

BYRNE, O. **The First Six Books of the Elements of Euclid in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners**. London: William Pickering, 1847.

CLARK, K. History and Pedagogy of mathematics in mathematics education: History of the field, the potential of current examples, and directions for the future. In: **Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**, pp. 29-55. Utrecht: Utrecht University, 2019.

CLARK, K.; KJELDSEN, T.; SCHORCHT, S.; TZANAKIS, K. (Eds.). **Mathematics, Education and History: Towards a Harmonious Partnership (ICME-13)**. Springer, 2018.

COMMANDINO, F. (tradução portuguesa). **Elementos de Euclides. Dos seis primeiros**

livros, do undécimo e duodécimo da versão latina de Frederico Commandino. Coimbra: Imprensa da Universidade, 1855. <http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/elem.html>

CULLEN, C.; HERTEL, J.; NICKELS, M. The Roles of Technology in Mathematics Education. **The Educational Forum**, v. 84, n. 2, p. 166-178, 2020. <https://doi.org/10.1080/00131725.2020.1698683>

CUOCO, A.; GOLDENBERG, P. A Role for Technology in Mathematics Education. **The Journal of Education**, v. 178, n. 2, pp. 15-32, 1996. <https://doi.org/10.1080/00131725.2020.1698683>

DUARTE, A. L. (coord. científico) **Azulejos que ensinam.** Coimbra: Museu Nacional Machado de Castro e Universidade de Coimbra, 2007.

EATON, C. **Technology and Math Education: ChatGPT Is Here—Now What?** (Mathematical Association of America website), 2023. Disponível em: <https://www.mathvalues.org/masterblog/technology-and-math-education-chatgpt-is-herenow-what>. Acesso em: 17 maio 2023.

HEATH, T. **Euclid, The Thirteen Books of The Elements** (Vol. 1, 2 e 3). New York: Dover, 1956.

ISODA, M. Why we use historical tools and computer software in Mathematics Education: mathematics activity as a human endeavor project for secondary school. In: **Proceedings of HPM & ESU4**, pp. 132-141. Uppsala: Uppsala Universitet, 2004.

ISODA, M.; AOYAMA, K. Mathematics history is another door for using technology in education: The change of belief in mathematics via exploring historical text with technology in the case of undergraduates. In: **Proc. Fifth Asian Technology Conference in Mathematics**, pp. 132-141. ATCM, Inc. USA, 2000.

JANKVIST, U. A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. **Educational Studies in Mathematics**, v. 71, n. 3, pp. 235–261, 2009. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10649-008-9174-9>

JOYCE, D. **Euclid’s Elements** (website), 1996-7. <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html>

PINTO, H. **Os Elementos de Euclides – O Livro I** (website), 2008. http://jnsilva.ludicum.org/elementos_livro_1/mat/elementos/index.htm

PINTO, H. (2.^a ed.). **História da Matemática na Sala de Aula.** Lisboa: Ludus, 2011.

ROUGEUX, N. **Byrne’s Euclid The First Six Books of The Elements of Euclid With Coloured Diagrams And Symbols** (website). <https://www.c82.net/euclid/>

SILVA, J. N.; PINTO, H. The Elements of Euclid: The Cornerstone of Modern Mathematics. In: **Alexandrea Ad Aegyptum – The Legacy of Multiculturalism in Antiquity**, pp. 211-220. Porto: Edições Afrontamento, CITCEM e CECHUC, 2013.

TATTERSALL J.; BEERY, J.; BRADLEY, R.; RICKEY, F.; SHIRLEY, L. **History of Mathematics**, sem ano. <https://www.maa.org/sites/default/files/HistoryMathCourses.pdf>

Histórico

Recebido: 18 de abril de 2023.

Aceito: 16 de maio de 2023.

Publicado: 01 de agosto de 2023.

Como citar - ABNT

PINTO, Hélder. Os Elementos de Euclides para o século XXI, um “upgrade” tecnológico em imagens interativas. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC*. Belém/PA, n. 44, e2023009, 2023. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n44.pe2023009.id513>

Como citar - APA

Pinto, H. (2023). Os Elementos de Euclides para o século XXI, um “upgrade” tecnológico em imagens interativas. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC*, (44), e2023009. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n44.pe2023009.id513>

Número temático organizado por

Iran Abreu Mendes  

Luis Andrés Castillo  