

A Matemática dos Trajetos Urbanos: atividades com uma geometria não euclidiana

The Mathematics of Urban Routes: activities with a non-Euclidean geometry

Las matemáticas de las rutas urbanas: actividades con una geometría no euclidiana

Janilson Ananias de Amarante¹  

Fernando Guedes Cury²  

RESUMO

O artigo apresenta reflexões sobre a aplicação de um produto educacional elaborado durante uma pesquisa de mestrado profissional, do Programa de Pós-Graduação Em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte e que ocorreu em uma turma regular do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Natal/RN. O objetivo da pesquisa foi o de analisar uma proposta para o ensino de uma geometria não euclidiana, a geometria do taxista, na Educação Básica, por meio de atividades que simulam problemas envolvendo deslocamentos urbanos usando o Google Maps, realizando o que alguns autores da área denominam experimentação com tecnologias. Para a coleta de dados optou-se pela gravação em áudio da intervenção em uma sala e coleta de registro das respostas escritas dos estudantes para avaliar o conjunto de atividades. Finalmente, discutimos neste texto o emprego das Tecnologias Digitais da Informação e da Comunicação em aulas de Matemática, inclusive, como forma de promoção da cidadania.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Geometria do Taxista; Tecnologias Digitais da Informação e da Comunicação; Google Maps.

ABSTRACT

The paper presents reflections on the application of an educational product developed during a professional master's research, from Postgraduate Program in Teaching of Natural Sciences and Mathematics at the Federal University of Rio Grande do Norte and which took place in a regular High School class of a public school in the city of Natal/RN (Brazil). The objective of the research was to analyze a proposal for teaching a non-Euclidean geometry, the taxicab geometry, in Brazilian Basic Education, through activities that simulate problems of urban displacements using Google Maps, which some authors call experimentation with technologies. For data collection, we opted for audio recording of the intervention and used the students' written to evaluate the activities. Finally, we discuss the use of Digital Information and Communication Technologies in Math classes, also as citizenship promoting.

Keywords: Mathematics Teaching; Taxicab Geometry; Digital Information and Communication Technologies; Google Maps.

RESUMEN

El trabajo presenta reflexiones sobre la aplicación de un producto educativo desarrollado durante una investigación en un programas de posgrado profesional de la Universidad Federal del Rio Grande do Norte y que se llevó a cabo en una clase de bachillerato regular de un colegio público de la ciudad de Natal/RN (Brasil). El objetivo de la investigación fue analizar una propuesta para la enseñanza de una geometría no euclidiana, la geometría del taxi, en la Educación Básica brasileña, a través de actividades que simulan problemas de desplazamientos urbanos utilizando Google Maps, lo que algunos autores denominan experimentación con tecnologías. Para la recolección de datos, optamos por la grabación de audio de la intervención y utilizamos los escritos de los estudiantes para evaluar las actividades. Finalmente, discutimos el uso de las Tecnologías Digitales de la Información y la Comunicación en las clases de Matemáticas, también como promoción de la ciudadanía.

Palabras clave: Enseñanza de las Matemáticas; Geometría del Taxi; Tecnologías Digitales de la Información y la Comunicación; Google Maps.

1 Mestre em Ensino de Ciências Naturais e Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Estudante da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), Natal, RN, Brasil. Endereço para correspondência: Departamento de Matemática. Campus Universitário – Av. Senador Salgado Filho, s/nº. Lagoa Nova, CEP: 59.078-970, Natal, RN. E-mail: janilson.ananias@gmail.com.

2 Doutorado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (Unesp – Rio Claro). Professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), Natal, RN, Brasil. Endereço para correspondência: Departamento de Matemática. Campus Universitário – Av. Senador Salgado Filho, s/nº. Lagoa Nova, CEP: 59.078-970, Natal, RN. E-mail: fernandoguedescury@gmail.com.

INTRODUÇÃO

Cotidianamente realizamos inúmeros deslocamentos, curtos e longos, por percursos já conhecidos ou por caminhos, às vezes, desconhecidos. Manifesta-se, então, a conveniência de ser capaz de localizar-se no espaço e, até mais que isso, a necessidade de estimar distâncias e realizar a correta interpretação das informações que nos são fornecidas para percorrer um determinado itinerário, visando a encurtar trajetos e diminuir o tempo de deslocamento. Para nos ajudar nisso, as informações podem ser obtidas de diversas formas: nossa memória que guarda tentativas empíricas, a análise de um mapa, indicações de placas de trânsito, uma bússola, explicações fornecidas por terceiros e, recentemente, até por intermédio de aparelhos de Global Positioning System (GPS).

Considerando a importância de tratar esse tema no âmbito educacional, documentos oficiais que orientam a Educação Básica como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), apontam a necessidade de desenvolvimento da percepção espacial, tendo em vista que a utilização de mapas e plantas em situações frequentes do dia a dia geram dificuldades para diversas pessoas, ressaltam ainda que as habilidades necessárias para sistematização dos conhecimentos espaciais não tem objeto de aprendizagem nas aulas de matemática (BRASIL, 1998). Uma das recomendações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é a utilização de ferramentas e processos matemáticos, até mesmo as tecnologias digitais disponíveis para resolver e modelar problemas cotidianos por meio da testagem de resultados e estratégias, (BRASIL, 2017).

Refletindo sobre isso, desenvolvemos ao longo da realização do mestrado profissional em Programa de Pós-Graduação Em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) uma pesquisa que resultou na dissertação intitulada “A matemática dos trajetos urbanos: atividades com uma geometria não euclidiana usando o google maps” e em um produto educacional denominado “Uma sequência didática para o ensino de geometria não euclidiana a partir da análise de deslocamentos urbanos utilizando o Google Maps” (AMARANTE, 2020). São oito atividades, que permitem ao professor de matemática utilizar o Google Maps para trabalhar com os estudantes uma geometria não euclidiana, a geometria do taxista, por meio da simulação de trajetos urbanos e análise de imagens de satélite.

Para Fernandes (2017), a geometria do taxista pode ser exemplificada por um plano cartesiano coberto por uma malha quadriculada, com retas paralelas aos eixos coordenados, semelhante aos quarteirões que formam uma cidade bem planejada. Por vezes o ensino de geometria na Educação Básica limita-se ao estudo da geometria euclidiana, o que dificulta o contato dos discentes com outras geometrias. De acordo com os PCN, novas possibilidades surgem após a superação do paradigma da existência de uma única geometria, a euclidiana, para a admissão de uma variedade de modelos geométricos, coerentemente consistentes, capazes de moldar o espaço físico com certa realidade (BRASIL, 1998).

As Tecnologias Digitais da Informação e da Comunicação (TDIC) são recursos que podem contribuir substancialmente para o ensino de matemática. Assim, utilizamos o Google Maps durante as aulas de matemática para realizar o que Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018) entendem como experimentação com tecnologias, ela permite a elaboração de conjecturas,

o desenvolvimento de modelos durante a resolução de problemas. Durante as atividades os discentes realizaram a análise e simulação de deslocamentos em áreas urbanas, coletando informações necessárias para suas tomadas de decisão, desenvolvendo estratégias para a resolução dos problemas propostos enquanto estudavam uma geometria não euclidiana.

Nosso objetivo ao longo dessa pesquisa foi apresentar uma proposta para o ensino de uma geometria não euclidiana, a geometria do taxista, para Educação Básica por meio de simulações realizadas através do Google Maps, de forma a permitir que os estudantes apreciem as duas geometrias identificando semelhanças e diferenças entre elas.

Nas seções a seguir apresentamos a revisão de literatura, discorremos sobre o ensino de geometria, dissertamos sobre a geometria do taxista, tratamos sobre cidadania e TDIC, expomos a sequência didática desenvolvida, comentamos a metodologia utilizada e contexto de aplicação das atividades, apresentamos os dados obtidos e os resultados da pesquisa e por fim nossas últimas considerações sobre a pesquisa realizada.

REVISÃO DE LITERATURA

Com o propósito de verificar a existência de outros trabalhos que discorressem sobre o tema de nossa pesquisa, realizamos uma busca no Portal de Periódicos da Capes pelas seguintes expressões: geometria do táxi, geometria do taxista e geometria urbana; que são as nomenclaturas mais comuns para se referir a geometria em estudo neste trabalho. A busca pela expressão geometria do táxi foi a que apresentou melhor resultado, quatorze artigos.

Um dos artigos, intitulado “Para onde vai esse táxi? uma revisão da literatura sobre a geometria do táxi no Brasil” de autoria de Silva, Bellemain e Galvão (2021), aponta que a geometria do táxi (indicada por *GT*) está sendo lentamente introduzida nas discussões sobre o ensino de geometrias não euclidianas nas escolas brasileiras, para as autoras é possível inferir que:

[...] mesmo a *GT* não sendo ainda amplamente difundida e aplicada no ensino da geometria no Brasil, há um potencial a ser explorado tanto na educação básica como na formação de professores, com base em recursos manuais ou digitais, inseridos no âmbito da geometria ou de suas articulações com outras áreas do conhecimento (SILVA; BELLEMAIN; GALVÃO, 2021, p. 18).

De acordo com as autoras, foram analisados trabalhos (artigos científicos e dissertações) compreendidos entre 2010 e 2019, totalizando um corpus de 25 trabalhos, sendo que onze deles utilizaram algum tipo de recurso digital, dos quais dois utilizaram o *Google Maps* para que os participantes observassem áreas urbanas. A maior parte dos trabalhos analisados por Silva, Bellemain e Galvão (2021) trata-se de aplicações da geometria do táxi (oficinas, atividades ou experimentos) em que são apresentadas distintas formas para abordar conceitos da geometria do táxi.

Uma proposta interessante para a inclusão das geometrias não euclidianas na Educação Básica nas aulas de matemática é apresentada por Gusmão, Sakaguti e Pires (2017), nela a geometria do táxi foi escolhida segundo os autores pela sua fácil compreensão e pelas diversas possibilidades de relacioná-la com outros conteúdos do ensino fundamental e médio. Os autores desenvolveram seis atividades, que foram posteriormente aplicadas com

alunos da 3ª série do Ensino Médio, elas possibilitaram aos estudantes explorar as distinções entre as duas geometrias, ocasionadas pela utilização de métricas diferentes por cada uma delas. Durante as atividades os autores abordam o conceito de distância euclidiana, logo após, a noção de métrica, em seguida realizam a comparação entre a geometria euclidiana e a geometria do táxi, por fim ocorre a comparação entre formas geométricas nas duas geometrias, com a apresentação de uma circunferência sob a perspectiva da geometria do táxi. De acordo com Gusmão, Sakaguti e Pires (2017):

Ao introduzir o estudo da geometria do táxi na sala de aula, os alunos têm, por meio dele, a oportunidade e a capacidade de investigar tópicos da matemática tradicional por uma nova perspectiva, fazendo conexões dentro da própria Matemática com o mundo a sua volta (GUSMÃO; SAKAGUTI; PIRES, 2017, p. 223).

Cavalcante e Oliveira (2020) em sua pesquisa, desenvolvida com alunos da terceira série do Ensino Médio, conduziram os estudantes através da descoberta das propriedades da geometria do táxi a confrontar as diferenças e semelhanças entre essa e a geometria euclidiana, durante o estudo da circunferência. De acordo com Cavalcante e Oliveira (2020):

Após a realização da atividade e com as conclusões obtidas os alunos demonstram-se surpresos por verem que um determinado objeto matemático, com a mesma definição, pode ter diferentes representações, dependendo do contexto em que é apresentado. Passou-se a perceber o círculo, não pela figura em si, a qual todos conheciam desde o ensino fundamental (CAVALCANTE; OLIVEIRA, 2020, p. 462).

Ao fim da atividade os participantes perceberam que na geometria do táxi a circunferência assume o formato de um quadrado, a partir de uma óptica euclidiana. Ao discorrer sobre a pertinência da geometria do táxi no ensino de matemática os autores enfatizam que:

Trazer ao contexto do ensino de Matemática uma aplicação que em um primeiro momento não parece ser usual, mostra ao aluno que a geometria do táxi, em alguns casos, aproxima-se mais da realidade do que a geometria euclidiana (CAVALCANTE; OLIVEIRA, 2020, p. 458).

Em áreas urbanas a geometria do táxi se mostra melhor adaptada do que a geometria de Euclides, podemos citar, por exemplo, os trajetos propostos pelos aplicativos que utilizam o GPS para sugerir itinerários aos seus usuários, outro caso é o caminho percorrido pelas redes de água, esgoto, internet, telefonia dentre outros.

Todos os trabalhos anteriormente apresentados indicam a adequação da geometria do taxista para o ensino de uma geometria não euclidiana, assim como uma forma de aperfeiçoar os conhecimentos sobre a geometria euclidiana, de modo que essa pluralidade permite ao discente uma melhor compreensão dos conceitos de geometria.

SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA

Durante muitos anos o ensino de geometria foi tratado com certa desvalorização, o que é destacado em trabalhos como os de Lorenzato (1995) e Pavanello (1993) que há mais de duas décadas destacaram que a geometria estava praticamente ausente nas salas de aula. Mesmo após muitos estudos terem sido desenvolvidos sobre o tema nos últimos anos, há indícios que os alunos ainda enfrentam muitas dificuldades em atividades com ge-

ometria e seu ensino e aprendizagem está abaixo do desejado, como indicam Mutti (2014), Santos e Tolentino-Neto (2015) e Carneiro et al. (2015), por exemplo.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) ressalta a importância de, durante o estudo da geometria, atentar para o aspecto funcional dela, tanto no que se refere às transformações geométricas, quanto às simetrias (BRASIL, 2017). Essa funcionalidade pode ser devidamente explorada através de situações do dia a dia, segundo as Orientações Curriculares Nacionais (OCN):

O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida (BRASIL, 2006, p. 75).

Existem, segundo Van de Walle (2009), diversas evidências que resolver problemas é uma forma bastante propícia para a aprendizagem da matemática, permitindo aos estudantes fazer matemática: para ele, o ensino deve começar com a proposição de problemas aos estudantes. Diante disso percebe-se que o ensino de geometria a partir de situações do cotidiano pode apresentar resultados expressivos.

Geralmente, em sala de aula, apenas a geometria euclidiana é discutida, ficando de fora as geometrias não euclidianas, e dentre estas está a geometria do taxista, assim chamada pela primeira vez em 1952, por Karl Menger. De acordo com Krause (1986), para uma apreciação mais ampla da geometria de Euclides, é necessário conhecer uma geometria não euclidiana, que segundo ele deve possuir três características, “estar muito próxima da geometria euclidiana em sua estrutura axiomática, ter aplicações significativas e ser compreensível para quem já fez um curso inicial de Geometria euclidiana” (KRAUSE, 1986, p. 4, tradução nossa). Características que segundo o autor estão presentes na geometria do taxista.

Ao discorrer sobre geometria urbana, Fossa (2001) ressalta a importância de realizar a abordagem do conteúdo levando em consideração a realidade do aluno propondo situações-problema. Ainda segundo o autor, o ensino de geometria deve ser exposto como um processo vivo objetivando a construção do raciocínio geométrico por parte do aluno, o que permitirá ao estudante perceber a proficiência do conhecimento geométrico. Os PCN afirmam ser imprescindível que os conteúdos geométricos ensinados na escola proporcionem o desenvolvimento de um conhecimento significativo, ou seja, relacionem os conteúdos escolares com os conhecimentos prévios dos discentes, resultando assim em um processo articulado de elaboração de novos significados, Brasil (1997).

A seguir discorreremos sobre a geometria do taxista, para que o leitor conheça melhor essa geometria e observe como ela se mostra bem adaptada ao contexto dos trajetos urbanos.

A GEOMETRIA DO TAXISTA

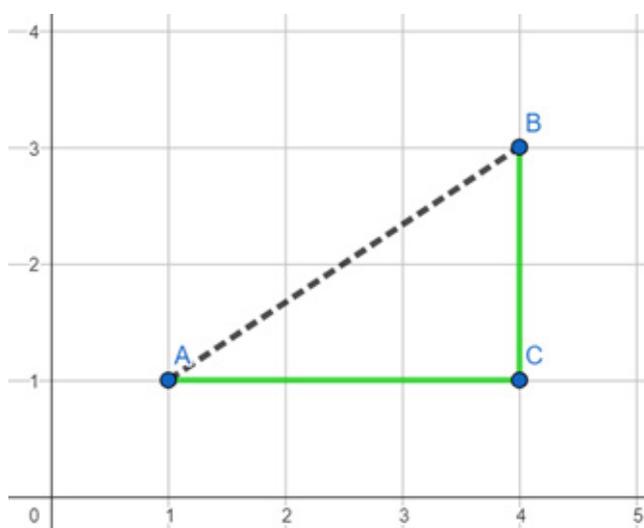
Ao caracterizar a geometria do taxista Lopes (2014) afirma que, as noções de linha, ponto e ângulo são as mesmas da geometria de Euclides, se diferenciando dessa apenas na forma como a distância é definida. Ainda segundo o autor, foi no contexto do surgimento

das geometrias não euclidianas que ela surgiu, Hermann Minkowski (1864–1909) propôs uma família de métricas alternativas, dentre as tais estava a métrica táxi. Ela é definida por Leivas (2016) como:

A função $d : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, que associa, a cada par ordenado $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$, o número real não negativo definido por $d(A, B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$. O número real d é denominado de distância de A até B . (LEIVAS, 2016, p. 180).

Podemos observar uma interpretação geométrica para a métrica táxi na figura 1. Na geometria de Euclides a distância entre os pontos e é representada pela medida do segmento AB (tracejado), a distância táxi é representada pela união das medidas dos segmento AC e CB .

Figura 1. Distância táxi e euclidiana



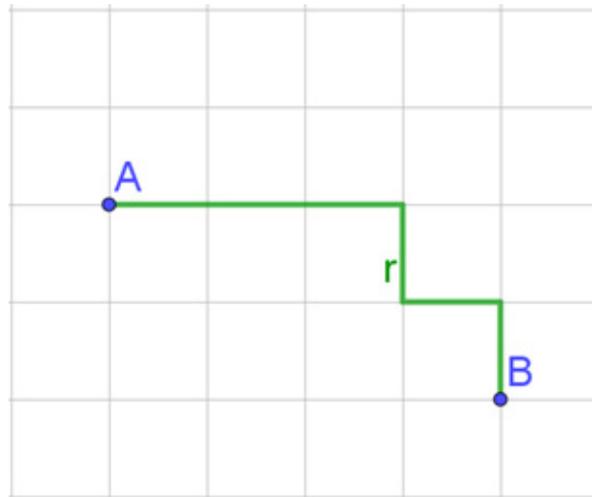
Fonte: Produção do autor (2023), adaptado de Leivas (2016).

A principal diferença entre a geometria do taxista e a geometria de Euclides está na noção de distância utilizada por cada uma delas. Ao descrever a geometria do taxista, Irineu (2013) nos mostra que,

[...] o caminho de menor comprimento entre dois pontos será um segmento de reta apenas se estes se encontrarem em uma mesma vertical (ou horizontal). Para calcular a distância entre dois pontos que não estão na mesma vertical (ou na mesma horizontal) teremos que somar as medidas dos segmentos horizontais e verticais percorridos. (IRINEU, 2013, p. 10).

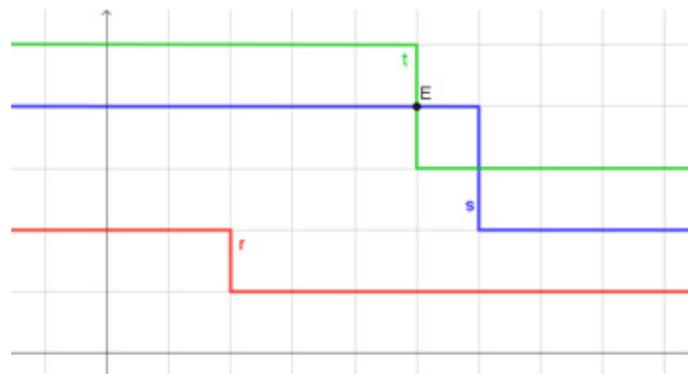
A geometria do taxista pode ser ilustrada, segundo Fernandes (2017), como um plano cartesiano coberto por uma malha quadriculada, com linhas verticais e horizontais paralelas aos eixos coordenados, podendo ser associada a ideia de uma *cidade ideal* (que possui ruas verticais e horizontais equidistantes).

Para Ribeiro (2012, p. 29), “[...] uma geometria não-euclidiana é qualquer geometria que possua algum axioma em contradição a qualquer axioma euclidiano”. A reta na geometria do taxista pode ser entendida como o percurso (horizontal e/ou vertical) mais curto entre dois pontos de uma malha quadriculada. Vejamos um exemplo disso na figura 2.

Figura 2. Retas na geometria do taxista

Fonte: Produção do autor (2020).

A geometria do taxista contraria o quinto postulado de Euclides, e afirma que “[...] por um ponto dado P , exterior à reta r , ambos em um mesmo plano, existem mais de uma reta paralela à reta r ” (CRUZ, 2015, p. 17). Um exemplo disso pode ser observado na Figura 3.

Figura 3. Negação do quinto postulado de Euclides

Fonte: Produção do autor (2020), adaptada de Fernandes (2017, p. 31).

De acordo com Lopes (2014), o conceito de distância traz implicações profundas para a geometria, ele enfatiza que diversos elementos como: ângulos, seções cônicas, áreas e volumes são de alguma forma dependentes da noção de distância. Diante disso inúmeras formas geométricas assumem contornos surpreendentes quando aplicada a métrica táxi, um bom exemplo disso é a circunferência, que assume um formato quadrangular na geometria do táxi, bem distinto do formato arredondado que estamos acostumados a observar na geometria euclidiana.

CIDADANIA E TECNOLOGIAS DIGITAIS DA INFORMAÇÃO E DA COMUNICAÇÃO (TDIC)

As tecnologias digitais estão presentes em diversos locais (supermercados, bancos, clínicas médicas, dentre outros) de modo que, saber utilizá-las é essencial para o exercício da cidadania. Nesse contexto, as TDIC podem ser empregadas como um instrumento na construção do conhecimento por parte do estudante, tendo em vista que as mesmas atuam como um agente facilitador da aprendizagem. Conforme ressaltado por Kenski (2007), os

artefatos tecnológicos interferem em nossa forma de: pensar, agir, sentir, relacionar socialmente e adquirir conhecimentos. Para Belloni (2009, p. 10), “[...] a escola deve integrar as tecnologias de informação e comunicação por que elas já estão presentes e influentes em todas as esferas da vida social [...]”, algo que se tornou mais evidente durante a pandemia de Coronavírus, com profundas transformações sociais ocasionadas pelo distanciamento social.

Ao se falar em inclusão social presume-se a formação para a cidadania. Segundo Takahashi (2000), as tecnologias digitais da informação e da comunicação devem ser utilizadas para a democratização dos processos sociais, para promover a transparência nas ações governamentais e para impulsionar a mobilização dos cidadãos e a sua atuação nas transformações sociais.

Belloni (2009) esclarece que, as tecnologias digitais da informação e comunicação devem ser integradas ao dia a dia escolar de forma crítica, criativa e competente. Em vista disso é importante que a escola oportunize aos seus discentes o contato com as tecnologias, para que eles consigam utilizá-las durante a realização de suas tarefas cotidianas.

Sobre a formação do cidadão Takahashi (2000) ressalta que, ela consiste em preparar o indivíduo para tomar decisões e realizar escolhas informadas sobre os aspectos da vida em sociedade, exigindo para isso acesso ao conhecimento e à informação. Dessa forma torna-se imprescindível que os estudantes conheçam e saibam utilizar as TDIC em suas atividades diárias.

Conforme exposto por Borba e Penteado (2012), o emprego do computador em sala de aula permite a superação de antigas práticas, de forma que a construção do conhecimento priorize o processo e não o produto, o que pode ser realizado com o auxílio das TDIC por meio de atividades baseadas em experimentações e simulações.

Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018) consideram que, é possível compreender a noção de experimentação com tecnologias como a utilização de recursos digitais na exploração de problemas matemáticos ou no estudo de conceitos. Segundo esses autores, uma atividade matemática que foi desenvolvida com base na noção de experimentação com tecnologias deve procurar oferecer formas para: criação de modelos, geração de conjecturas, exploração de diversificadas formas de resoluções, ensinar e aprender matemática de forma alternativa, compreensão de conceitos, além de outros aspectos.

A adequação do cenário de experimentação com tecnologias para o ensino e aprendizagem da matemática ocorre, de acordo com Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018), devido ao fato da produção do conhecimento ocorrer em um dimensão heurística. Os autores destacam ainda que, a visualização é um processo fundamental ao pensamento matemático, sendo ela um recurso para a formação de imagens, permitindo assim a representação de objetos matemáticos para auxiliar o pensamento matemático.

Os aspectos metodológicos de nossa pesquisa sobre o produto educacional por nós elaborado, assim como o contexto em que ele foi aplicado serão apresentados na seção a seguir.

AS ATIVIDADES PROPOSTAS

As atividades proposta tiveram por finalidade trabalhar com estudantes do Ensino Médio uma geometria não euclidiana, a geometria do taxista, ela possui características axiomáticas muito próximas da geometria de Euclides, o que durante as atividades foi bastante explorado, bem como as diferenças entre elas. As atividades foram elaboradas de forma a ampliar as habilidades dos discentes necessárias para: interpretar informações fornecidas por mapas e imagens de satélite, localização em ambiente urbano, tomar decisões embasadas na análise de dados, desenvolver a capacidade argumentativa, elaborar e testar hipóteses, resolver problemas, criar soluções e estimar distâncias.

Percebemos que analisar e simular trajetos urbanos era uma ótima opção para ensinar geometria aplicada à prática, a geometria do taxista se adequa melhor a nossa proposta e também ao ambiente das cidades do que a geometria de Euclides, visto que os deslocamentos urbanos ocorrem, em sua maioria, pelas ruas e avenidas, respeitando a geografia das cidades. Optamos por utilizar o *Google Maps* para simular percursos urbanos e, assim, possibilitar que os estudantes conseguissem visualizar os lugares desejados e coletar as informações necessárias para a execução das atividades. Desejamos, para além da construção de conhecimentos sobre geometrias, que nosso produto educacional possa de maneira transversal contribuir para uma alfabetização tecnológica, ou seja, que os estudantes consigam utilizar o computador e as tecnologias digitais para fins estudantis e também pessoais.

As atividades proposta permitem aos professores de matemática abordar em sala de aula problemas de deslocamento, comparação de distâncias e trajetos que demandam pensamento geométrico, permitindo a discussão de uma geometria não euclidiana, trabalhar de maneira transversal questões que envolvem cidadania, especificamente a convivência pacífica no trânsito. A sequência didática³ é composta por oito atividades e está dividida em duas partes, cada uma delas com uma duração prevista de duas aulas (com duração de 50 minutos para cada aula). O produto educacional está disponível em duas versões: uma destinada aos discentes e outra aos docentes. Essa última dispõe de orientações e sugestões aos professores, além da expectativa de resposta das atividades sugeridas.

As quatro primeiras atividades que constituem a sequência didática possibilitam que os discentes conheçam um pouco mais sobre o *Google Maps* e suas ferramentas e também apresentam questões sobre as formas usuais de cálculo de distâncias e sua eficiência para o deslocamento nas ruas de uma cidade, o que é realizado por meio da simulação de trajetos urbanos. A segunda parte (também composta por quatro atividades) permite a construção de figuras geométricas que possibilitam uma abordagem mais conceitual das geometrias euclidiana e do taxista, o que é realizado por meio do emprego de conceitos (raio, diâmetro, distância, dentre outros) oriundos da geometria euclidiana, na geometria do taxista, é possível ainda trabalhar a posição da reta no plano e o valor da constante π (diferente do que ocorre na geometria de Euclides, na geometria do taxista π assume o valor quatro).

A primeira atividade permite que o aluno consiga observar a região em que uma determinada escola está localizada. Além disso, o discente deve encontrar a distância entre

³ Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/29953?mode=full>.

o colégio e um ponto escolhido nos seus arredores, de forma que ele é confrontado sobre qual a maneira mais adequada de medir a distância entre os dois locais (utilizar a distância euclidiana ou respeitar a dinâmica do caminhar pelas ruas e contornar os quarteirões como indicado pela geometria do taxista).

Na segunda atividade os alunos devem simular o deslocamento da escola até certo endereço e verificar quais as implicações de se utilizar diferentes modos de deslocamento (a pé, de carro, de bicicleta, de transporte público).

Na terceira atividade os estudantes devem analisar qual o roteiro mais interessante para quem deseja visitar os três locais indicados. Além disso, devem combinar mais de um modo de deslocamento (por exemplo, bicicleta e carro) para visitar todos os lugares indicados.

A quarta atividade, mais desafiadora, propõe que os estudantes elaborem um roteiro para um turista que deseja conhecer alguns locais da cidade de Natal-RN. O roteiro deve incluir todos os locais predeterminados, de forma que o itinerário escolhido possua a menor distância possível. Os discentes também devem indicar formas diferentes de deslocamento para o turista durante o percurso.

As quatro atividades anteriormente apresentadas formam a primeira parte da sequência didática, elas possibilitam que os educandos realizem simulações e analisem as informações disponíveis para que possam tomar decisões, além de proporcionar um primeiro contato com a noção de distância nas duas geometrias, também propicia o desenvolvimento da capacidade argumentativa dos participantes.

A quinta atividade possibilita que o estudante investigue algumas situações e realize descobertas sobre essa nova geometria, como, por exemplo, o fato que a distância táxi entre dois pontos é sempre maior ou igual a distância euclidiana; e que se a distância táxi entre dois pontos for maior que a distância euclidiana existe mais de um menor caminho entre esses dois pontos.

Na sexta atividade os discentes devem seguir algumas orientações para construir uma determinada figura, em seguida devem classificar ela sob uma ótica euclidiana (quadrado, retângulo, losango). Após isso os discentes devem observar a mesma figura sob a ótica da geometria do taxista (a figura em questão trata-se de uma circunferência quando da utilização da métrica táxi). A atividade proporciona outra descoberta surpreendente, a relação entre o comprimento da circunferência e o número Pi , possibilitando que os discentes descubram qual o valor assumido pela constante π na geometria do taxista.

A sétima atividade apresenta aos estudantes uma figura que deve ser classificada de acordo com o número de lados que possui (a figura em questão trata-se de um triângulo na geometria do taxista), os alunos devem medir o comprimento dos lados da figura e em seguida classificar o triângulo de acordo com o tamanho de seus lados.

A oitava atividade aborda a posição relativa das retas no plano, e permite que o estudante descubra por que a geometria do taxista é classificada como não euclidiana, para

isso é apresentado aos alunos um contra exemplo para o quinto postulado de Euclides (o postulado das paralelas).

A segunda parte da sequência didática, composta pelas quatro últimas atividades apresentadas, diferente da primeira, não aborda a simulação de trajetos urbanos. As atividades que compõem essa seção possuem um enfoque mais conceitual, nelas utilizamos um recurso do *Google Maps* que permite a criação de mapas, escolhemos como plano de fundo para essas atividades uma região da cidade de Belo Horizonte–MG, mais especificamente o entorno da Praça Geraldo Torres, cujo mapa se assemelha a uma cidade ideal, similar à malha quadriculada utilizada pela geometria do taxista.

METODOLOGIA E O CONTEXTO DA APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

Realizamos a exploração da região entorno do colégio escolhido para aplicação da sequência didática através do *Google Maps* e também circulando pelas ruas de carro, coletamos informações sobre as características de ruas e quarteirões daquela área. Foi constatado que a região da cidade em que a escola está localizada possui a presença de amplo comércio, agências bancárias, empresas, hipermercados, algumas instituições de ensino e um shopping, além de avenidas importantes da cidade se cruzarem naquela região. O intenso tráfego de pessoas e veículos no entorno da escola nos fez perceber que os discentes, em seu cotidiano, já estavam expostos a situações que poderiam ser analisadas e simuladas com a utilização do *Google Maps*, o que também foi levado em consideração para a escolha daquele colégio para a aplicação do produto educacional.

Durante nossa exploração foi observado que na região próxima a escola foi implantado pela prefeitura o sistema binário de trânsito, ele transforma ruas ou avenidas paralelas de mão dupla em vias de sentido único, ou seja, se uma dessas vias permite a circulação no sentido de leste para oeste, a próxima via, paralela a anterior, permitirá a circulação no sentido de oeste para leste, desse modo uma série de ruas e avenidas (paralelas) vão se alternando quanto ao sentido do tráfego. Esse sistema é uma das alternativas para solucionar alguns problemas de mobilidade, ele torna o fluxo dos veículos mais eficiente e torna o trânsito mais seguro, pois reduz o risco de colisões frontais.

O produto educacional desenvolvido foi aplicado em uma escola pública da rede estadual de ensino com uma turma do Ensino Médio composta por 22 estudantes. A aplicação das atividades ocorreu no laboratório de informática da própria escola, devido ao número reduzido de computadores em funcionamento os participantes realizaram as atividades em dupla, porém as respostas escritas foram entregues individualmente.

Percebemos que era necessário utilizar outro instrumento de coleta de dados além do diário de campo (que utilizamos durante toda a pesquisa), e do registro escrito (produzido pelos estudantes no dia da aplicação); sendo assim, optamos por realizar a gravação da aula em áudio para que o diálogo dos discentes durante a realização das tarefas pudesse ser posteriormente analisado. Como não tínhamos a nossa disposição nenhum aparelho profissional para gravação de áudio, decidimos testar a utilização de *smartphones* com aplicativos para a gravação de áudio instalados, os mesmos mostraram-se bastante eficientes. Diante disso, posicionamos dois desses aparelhos pelo laboratório de informática.

Decidimos que a aplicação das atividades com a turma escolhida poderia ser realizada por uma pessoa diferente dos autores da sequência didática, tendo em vista que essa pessoa poderia nos apresentar sugestões (dificuldades enfrentadas, limitações da proposta, potencialidades não abordadas) para o aprimoramento do material a partir da perspectiva do professor utilizador da sequência didática. Dias antes da aplicação realizamos a entrega do material necessário à professora regente da turma escolhida, para que a docente conseguisse preparar a aula e também, caso necessário, solicitar qualquer tipo de apoio ou esclarecimento.

Realizamos a preparação do laboratório de informática e participamos da recepção aos alunos, os mesmos foram informados pela professora sobre o que ocorreria durante aquela aula, em seguida iniciaram a exploração livre do *Google Maps* e a realização das atividades com a professora.

DADOS OBTIDOS E DISCUSSÃO

Os dados coletados por meio dos aparelhos instalados na sala de aula durante a aplicação foram imprescindíveis para a nossa pesquisa, eles captaram informações de grande relevância, o diálogo estabelecido pelos alunos durante as atividades mostrou-se muito rico, a todo instante eles trocavam informações, realizavam novas experimentações, aperfeiçoavam suas estratégias, compartilhavam suas dúvidas e conclusões.

Ao analisar os registros escritos produzidos pelos estudantes percebemos que eles não refletem a riqueza da discussão ocorrida em sala de aula, várias respostas que foram apresentadas pelos participantes e registradas em áudio não estão presentes nos registros escritos; que basicamente reproduzem as respostas apresentadas pela docente ao final de cada atividade. Antes e também durante a aplicação, os discentes foram orientados a realizar os registros escritos no material de forma a apontar suas descobertas e indicar suas conclusões, sem que houvesse a preocupação de anotar apenas as respostas apresentadas pela professora. É possível que os alunos tenham realizado as anotações dessa forma por acreditar que respostas diferentes das apresentadas pela docente resultassem em pontuação inferior a dos colegas, o que não ocorreu.

Comentaremos agora de maneira mais detalhada as características de quatro das oito atividades aplicadas destacando as respostas apresentadas pelos discentes. Detalhar todas as oito atividades tornaria esse artigo demasiadamente extenso, sendo assim mencionaremos as quatro que julgamos apresentar resultados mais relevantes.

Sobre a atividade de número um, os alunos deveriam com o auxílio do *Google Maps* localizar a escola, em seguida medir a distância entre essa e o ponto de ônibus que fica localizado na entrada do Parque Bosque das Mangueiras. Após isso, os estudantes deveriam comparar os valores encontrados com seus colegas. Uma de nossas expectativas era sobre a forma como a distância entre os dois lugares seria verificada, se ela seria medida em linha reta (numa perspectiva euclidiana que ignorasse qualquer impedimento para um deslocamento) ou seguindo a dinâmica das ruas, tendo em vista que estávamos em um contexto que envolvia deslocamentos urbanos. Por último, os alunos deveriam medir a distância entre o colégio e o ponto de ônibus de duas formas distintas: uma medição em linha reta, a dis-

tância euclidiana (que indicaremos por DE) e a outra obedecendo a geografia das cidades, a distância táxi (representaremos a mesma por DT), que é um trajeto pelas ruas e avenidas.

Durante essa atividade os estudantes não apresentaram dificuldades para a utilização do *Google Maps*. Pelo contrário, descobriram outras formas para realizar as tarefas solicitadas empregando outras ferramentas diferentes das inicialmente apontadas por nós, mas igualmente capazes de fornecer a informação desejada. Após os esclarecimentos realizados pela docente sobre os diferentes valores encontrados para as duas distâncias em questão ($DE = 540\text{m}$ e $DT = 710\text{m}$), ocorre o seguinte diálogo sobre a métrica empregada para medir cada uma das distâncias:

Aluno 1: *Aquela por cima de tudo (uma referência a DE que foi medida em linha reta e não observou a dinâmica das ruas).*

Aluno 2: *Essa daqui é aquela pela rua (fazendo referência a DT que obedece a dinâmica das ruas).*

Professora: *Qual das distâncias não está correta?*

Vários alunos: *A euclidiana.*

Aluno 3: *a euclidiana, por que vai por cima das casas (uma alusão a trajetória descrita no mapa pela linha reta que representa a DE).*

Aluno 4: *As duas estão certas.*

Professora: *Isso mesmo.*

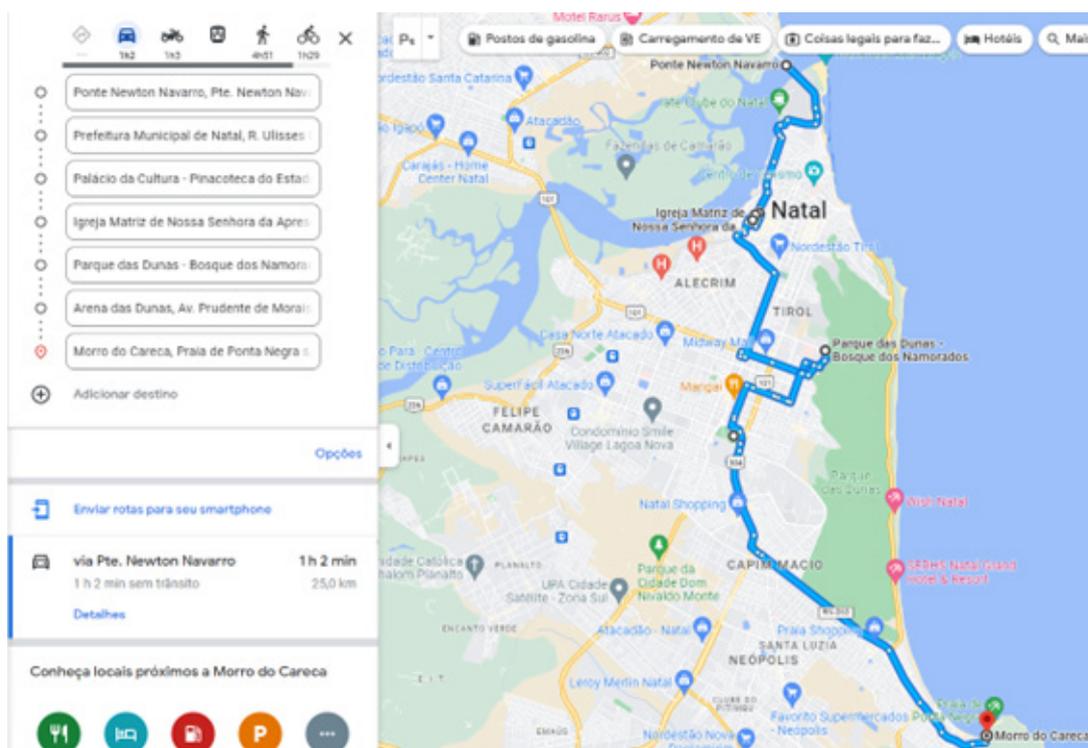
Nesse momento a professora esclareceu que ambas estão corretas, e que é preciso avaliar qual a forma mais adequada para se medir a distância em uma determinada situação. A fala do *aluno 1* aponta indícios que a distância em linha reta entre os dois locais pode não ser a forma mais adequada de medir distância em um contexto de deslocamentos urbanos, pois a mesma não seria um caminho viável, já que existem várias residências que impedem a realização desse trajeto.

Com relação a atividade número quatro, os estudantes deveriam elaborar um roteiro turístico que percorresse sete lugares previamente determinados, de forma que o itinerário proposto possibilitasse a um turista, economia de tempo e dinheiro, além de desfrutar de um agradável passeio pela cidade. Uma das exigências era que durante o passeio, pelo menos três formas distintas de locomoção fossem utilizadas.

Nossa expectativa era que os alunos observassem todos os pontos desejados no mapa e percebessem que existiam dois lugares extremos, a Ponte Newton Navarro e o Morro do Careca—um desses locais deveria ser escolhido como ponto inicial, e o outro final. Após a seleção do primeiro ponto, os estudantes deveriam verificar qual dos lugares desejados estava mais perto do ponto de início, esse seria o segundo ponto do roteiro, o terceiro ponto seria escolhido de forma análoga até chegar ao penúltimo ponto. A estratégia consistia em partindo do ponto de início se aproximar do último destino, à medida que percorria os lugares que estão entre os pontos extremos. Sobre a atividade em questão gostaríamos de destacar a explicação apresentada por um dos participantes sobre a estratégia por ele escolhida para a execução da tarefa, em sua fala o aluno menciona que: “[...] colocando o ponto inicial e o ponto final e depois fui colocando os locais mais próximos um por um e depois fui pelo mais rápido e mais viável”.

Depois de escolher a ordem de visitação, os participantes deveriam sugerir como os deslocamentos poderiam ocorrer, uma opção seria: percursos mais longos realizados de carro ou de ônibus, distâncias intermediárias poderiam ser percorridas de bicicleta enquanto trechos curtos poderiam ser realizados a p  (que são as opções de deslocamento oferecidas pelo *Google Maps*). A respeito de como foi escolhida a forma de deslocamento entre um ponto e outro, um dos participantes escreveu de forma bem objetiva: “A p  – mais perto, carro – lugares longes, bicicleta – lugares não tão longe”. Nessa atividade um roteiro mal elaborado pode sugerir um percurso de aproximadamente 60km, porém uma rota eficiente percorreria cerca de 25km, como pode ser observado na Figura 4.

Figura 4. Roteiro turístico



Fonte: Produção do autor (2023), adaptada de *Google Maps* (2023)

Dando continuidade a atividade os discentes então iniciam uma série de experimenta es reorganizando os lugares desejados em uma tentativa de elaborar um itinerário capaz de atender as necessidades apresentadas, um dos participantes comenta:

Aluno: *O meu ficou 30, estava em 38 (fazendo referência   distância, em quil metros).*

Professora: *O que você fez para diminuir o percurso?*

Aluno: *Eu coloquei o Centro no meio, comecei pela Ponte Newton Navarro, e por último o Morro do Careca (a palavra Centro, foi empregada pelo estudante em alusão aos pontos de visita o que se localizam no Centro da cidade).*

Aluno: *Ficou 23 agora. Eu estava em 38 e agora estou em 23 (valores referentes a resposta em km).*

Quando idealizamos essa atividade a menor distância encontrada para o roteiro foi de 25 km, o que foi aperfeiçoadado pelos discentes, que conseguiram encontrar um valor ainda menor: 22,9 km. A cada nova simula o os estudantes se sentiam desafiados a aperfeiçoar o resultado encontrado, esse momento de experimenta o mostrou-se muito frutífero, a medida que novas informa es eram inseridas no *Google Maps* e rapidamente processadas,

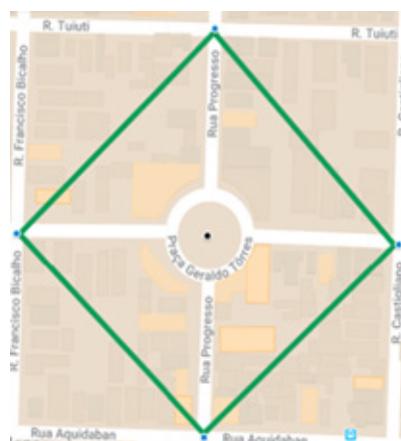
os participantes realizavam a análise das informações obtidas para que pudessem tomar novas decisões que permitissem o aprimoramento do resultado.

Com relação a atividade número cinco, utilizando o *Google Maps* os estudantes deveriam inserir pontos em determinados locais de um mapa (no entorno da Praça Geraldo Torres), logo após verificar quantos caminhos possíveis existiam para se dirigir de um ponto até o outro, de forma que a distância percorrida seja sempre a menor possível. Também deveriam escolher outros dois pontos quaisquer do mapa e encontrar a *DT* e a *DE* entre eles. Esperávamos que os estudantes conseguissem perceber que, diferente do que ocorre na geometria euclidiana, em que a menor distância entre dois pontos é única, um segmento de reta que liga os dois pontos; na geometria do taxista podem existir vários menores caminhos entre dois pontos. Além disso, concluir que a *DT* é sempre maior ou igual a *DE*.

Quando questionada se a *DT* era sempre maior que a *DE*, a turma respondeu que sim, porém um dos alunos alertou a turma que em alguns casos a *DT* e a *DE*, poderiam possuir valores iguais, o que ocorreu em uma simulação construída por ele. O aluno havia posicionado dois pontos sobre o mapa, e realizou a medição da distância entre os pontos; e verificou que tanto a *DT* quanto a *DE* mediam 222m. Tal fato se explica, pois os dois pontos possuíam a mesma coordenada horizontal. Indagados sobre qual seria a relação entre a *DT* e a *DE*, os alunos puderam concluir, com base nas experimentações que realizaram, que $DT \geq DE$.

No que concerne a sexta atividade, os participantes deveriam seguir os passos indicados para construir, sobre o mapa, uma figura, que sob uma perspectiva euclidiana tratava-se de um quadrado, e para geometria do taxista era, na verdade, uma circunferência (que também chamamos, durante a aula de circunferência táxi, que indicaremos por *CT*) como podemos observar na figura 5. Logo após, deveriam classificar a figura construída (quadrado, retângulo, losango, círculo e/ou triângulo). Deveriam ainda seguir as orientações para realizar a construção de dois segmentos (o raio e o diâmetro da *CT*). Por último, precisariam medir o perímetro da *CT* e encontrar a razão entre o comprimento da *CT* e o seu diâmetro, dessa forma os participantes descobririam que na geometria do taxista a constante π assume o valor 4 (quatro).

Figura 5. Circunferências Táxi com raio medindo uma quadra de comprimento



Fonte: Produção do autor (2020), adaptada de *Google Maps* (2020)

Posteriormente a construção da figura os discentes foram questionados sobre a aparência da figura construída, os participantes aparentando certa insegurança mencionaram

que a construção poderia ser um quadrado, outros responderam losango. Depois de uma breve explanação sobre as características do quadrado, do retângulo e do losango; os alunos concluíram que a construção poderia ser classificada como qualquer uma das três formas geométricas. Após a construção sobre a figura de um segmento que atende ao conceito de raio, a turma foi questionada se ele era o raio de uma circunferência, um dos alunos respondeu que sim. Quando indagados se o outro segmento construído era o diâmetro de uma circunferência, apenas um dos alunos respondeu que sim, enquanto o restante da turma permaneceu em silêncio. Quando perguntada se seria possível afirmar que a figura construída, que possui raio e diâmetro pode ser considerada uma *CT* a turma permaneceu em silêncio por alguns instantes, logo em seguida responderam unanimemente que “não”. Depois de repetir a explicação e a pergunta pela segunda vez, de maneira tímida os alunos afirmaram que se tratava de uma *CT*. A impressão foi que em um primeiro momento os alunos apenas aceitaram que a figura se tratava de uma circunferência táxi, o que pode indicar a predominância do pensamento euclidiano entre os estudantes.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino de geometria não euclidiana na Educação Básica não tem por finalidade promover um afastamento da geometria euclidiana, mas proporcionar aos discentes a oportunidade de conhecer outros modelos geométricos, devidamente estruturados em axiomas e logicamente consistentes. Dessa forma os estudantes podem analisar conceitos e relações geométricas sob uma perspectiva não euclidiana, o que contribui para a consolidação dos conhecimentos sobre a geometria euclidiana e a produção de novos conhecimentos a partir de outros modelos geométricos, identificando características, as semelhanças e diferenças.

A geometria do taxista apresenta características muito adequadas para um primeiro contato com geometrias não euclidianas, o que pode ocorrer de modo muito oportuno a partir da simulação e análise de deslocamentos urbanos, tendo em vista que eles fazem parte do cotidiano de uma parcela significativa da população. Ressaltamos, com nosso trabalho, a importância do estudo das geometrias, sejam elas euclidianas ou não, pois não consideramos que uma ou outra possua maior relevância, mas que ambas devem ser apreciadas.

Por outro lado, entendemos que a escola exerce (ou deveria exercer) uma função fundamental na transformação social, e que oportunizar o contato dos alunos com as TDIC possibilita que os estudantes incorporem as tecnologias digitais nas tarefas cotidianas (sejam elas para fins educacionais ou não). O *Google Maps* mostrou-se um recurso bastante eficiente para o ensino de geometria, em virtude de: fornecer informações relativamente atuais, ser de acesso gratuito, possuir uma interface amigável e contar com ferramentas que permitem realizar medições e simulações com dados reais.

De acordo com as Orientações Curriculares Nacionais (OCN) o estudo da geometria deve possibilitar que o discente desenvolva a capacidade de resolver problemas cotidianos dentre eles estão a leitura de mapas, a coleta de dados e orientar-se no espaço. Tudo isso foi efetuado pelos participantes durante a atividade número um de modo bastante satisfatório, eles conseguiram identificar os locais desejados em mapas e imagens de satélite, utilizaram

as ferramentas disponíveis para executar medições e selecionar trajetos apontando as vantagens e desvantagens de cada um deles.

A matemática pode contribuir com a formação do cidadão, como já indicavam os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), ao passo que desenvolve metodologias que ressaltam a construção de estratégias, a comprovação de resultados, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia resultado da própria capacidade de enfrentar desafios. Durante os primeiros minutos de realização das atividades percebemos que a troca de informações entre os participantes ocorria de forma bastante discreta, mas após esse período inicial os alunos intensificaram a troca de informações, foi então que o trabalho colaborativo dos discentes associado às inúmeras experimentações feitas por eles com o auxílio do *Google Maps* permitiram a obtenção de resultados expressivos para as atividades propostas.

Durante as atividades, com destaque para a quarta, os educandos desenvolveram estratégias, que foram aperfeiçoadas à medida que os estudantes realizavam o que Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018) denominam de experimentação com tecnologias, o que permitiu a criação de modelos e a exploração de distintas formas para a resolução dos problemas desejados. Após encontrar uma solução para o problema em questão, os participantes se sentiam desafiados a otimizar o resultado encontrado, pois os mesmos acreditavam que uma solução mais eficiente poderia ser obtida, e para isso realizaram diversas testagens até encontrar o resultado esperado.

Ante o exposto, concluímos que trabalhar a geometria do taxista na Educação Básica por meio do *Google Maps* mostra-se bastante pertinente, podendo ser ricamente explorado através de experimentação com tecnologias.

REFERÊNCIAS

AMARANTE, Janilson Ananias de. **A matemática dos trajetos urbanos: atividades com uma geometria não euclidiana usando o google maps**. 2020. 123f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática)–Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2020.

BELLONI, M. L.. **O que é mídia-educação**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2009.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G.. **Informática e Educação Matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R.; GADANIDIS, G. **Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento**. 1.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2018.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_site.pdf. Acesso em: 09 set. 2021.

BRASIL. **Orientações curriculares para o ensino médio**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_01_internet.pdf. Acesso em: 14 jul. 2023.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: introdução aos parâmetros curriculares nacionais / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf>. Acesso em: 09 set. 2021.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental. Ministério da Educação e do esporte (MEC). Brasília: SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 09 set. 2021.

CARNEIRO, R, F, et al. Ensino e aprendizagem da geometria: um estudo a partir dos periódicos em Educação Matemática. In: **VII Encontro Mineiro de Educação Matemática**. Anais do VII Encontro Mineiro de Educação Matemática, 2015. Disponível em: <https://docplayer.com.br/37530378-Ensino-e-aprendizagem-da-geometria-um-estudo-a-partir-dos-periodicos-em-educacao-matematica.html>. Acesso em: 09 set. 2021.

CAVALCANTE, R, N, B.; OLIVEIRA, J. Q. Construindo o círculo na Geometria do táxi: uma proposta de insubordinação criativa. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, [S.L.], v. 11, n. 3, p. 450-464, 1 abr. 2020. Trimestral. Cruzeiro do Sul Educacional. <http://dx.doi.org/10.26843/rencima.v11i3.2692>. Disponível em: <https://revistapos.cruzeirosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/2692>. Acesso em: 13 jul. 2023.

CRUZ, E. O. **Geometria do táxi**: a táxi-elipse. 2015. 70 f. Dissertação (Mestrado)–Universidade Federal do Piauí, Pós-graduação em Matemática, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Teresina, 2015. Disponível em: <http://repositorio.ufpa.br/jspui/handle/2011/8543>. Acesso em: 09 set. 2021.

FERNANDES, D. A. P. **Lugares geométricos nas geometrias euclidianas X táxi**: conceitos e possibilidades de abordagem no ensino. 2017. 111 f. Dissertação (Mestrado)–Universidade do Estado de Mato Grosso, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Sinop, 2017.

FOSSA, J. A.. **Ensaio sobre Educação Matemática**. Belém: Eduepa, 2001.

GUSMÃO, N. L.; SAKAGUTI, F. Y.; PIRES, L. A. A geometria do táxi: uma proposta da geometria não euclidiana na educação básica the táxicab geometry. **Educação Matemática Pesquisa**: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, [S.L.], v. 19, n. 2, p. 211-235, 2017.

IRINEU, F. N. **Um novo conceito de distância**: a distância do táxi e aplicações. 2013. 46 f. Dissertação (Mestrado)–Universidade Estadual Paulista, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, São José do Rio Preto, 2013.

KENSKI, V.N. **Educação e tecnologias**: O novo ritmo da informação. Campinas: Papyrus, 2007.

KRAUSE, E. F. **Taxicab Geomtry**: An adventure in non-euclidean geometry. New lork: Dover, 1986.

LEIVAS, J. C. P. Geometria do Táxi: resolvendo problemas de rotina. **Alexandria**: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Florianópolis, v. 9, n. 2, p. 177, 2016. <https://doi.org/10.5007/1982-5153.2016v9n2p177>.

LOPES, J. V. Geometria do motorista de táxi e sua emergência no plano da cidade. **Vitruvius**, Lisboa, p. 163-171, maio 2014. Disponível em: https://www.academia.edu/30373045/GEOMETRIA_DO_MOTORISTA_DE_T%C3%81XI_E_SUA_EMERG%C3%8ANCIA_NO_PLANO_DA_CIDADE_TAXICAB_GEOMETRY_AND_ITS_EMERGENCE_IN_THE_CITY_PLAN_. Acesso em: 08 maio 2023.

LORENZATO, S. Por Que Não Ensinar Geometria? **A Educação Matemática em Revista**, Campinas, n. 4, p. 3-13, 1995.

MUTTI, G. S. L. **Sistema de avaliação da educação básica do Paraná (SAEP) e sua relação com a qualidade do ensino da matemática em uma escola pública de Foz do Iguaçu**. 2014. 42 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização)–Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Medianeira, 2014.

PAVANELLO, R. M.. O abandono do ensino da geometria no Brasil: Causas e consequências. **Zetetiké: Revista da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas**, Campinas, v. 1, n. 1, p.7-17, 1993.

RIBEIRO, R. D.G. L. **O ensino das geometrias não-euclidianas: um olhar sobre a perspectiva da divulgação científica**. 2012. 101 f. Dissertação (Mestrado)–Universidade de São Paulo, Faculdade de Educação, Programa de Pós-graduação em Educação, São Paulo, 2012.

SANTOS, J. B. P.; TOLENTINO-NETO, L. C. B. O que os dados do Saeb nos dizem sobre o desempenho dos estudantes em matemática? **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 17, n. 2, p. 309 – 333, 2015.

SILVA, E. C. R. T.; BELLEMAIN, P. M. B.; GALVÃO, T. F. Para aonde vai esse táxi? Uma revisão da literatura sobre a Geometria do Táxi no Brasil. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 16, p. 1-21, 2021. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2021.e75726>.

TAKAHASHI, T. (Org.). **Sociedade da informação no Brasil: livro verde**. Brasília: Ministério da Ciência e Tecnologia, 2000.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. Porto Alegre: Artmed, 2009. p. 584.

Histórico

Recebido: 25 de agosto de 2023.

Aceito: 10 de dezembro de 2023.

Publicado: 14 de dezembro de 2023.

Como citar – ABNT

AMARANTE, Janilson Ananias de; CURY, Fernando Guedes. A Matemática dos Trajetos Urbanos: atividades com uma geometria não euclidiana. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 43, e2023036, 2023. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n43.pe2023036.id517>

Como citar – APA

AMARANTE, J. A.; CURY, F. G. (2023). A Matemática dos Trajetos Urbanos: atividades com uma geometria não euclidiana. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, (43), e2023036. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n43.pe2023036.id517>