

Uma reflexão sobre o ensino atual da geometria

A reflection on current geometry teaching

Una reflexión sobre la enseñanza actual de la geometría

Renato Borges Guerra¹  

Raquel Soares Do Rêgo Ferreira²  

RESUMO

Este trabalho objetiva fazer uma contribuição reflexiva para as pesquisas sobre o ensino de geometria nas escolas básicas brasileira, frente ao tipo de transposições didáticas nelas utilizadas, em busca de traços de um possível modelo epistemológico que as tenham subsidiado. Para isso, análises espontâneas de fragmentos do percurso de estudos e investigações na matemática no entorno dos últimos quinhentos anos é empreendido, considerando a importância desse período para o desenvolvimento da matemática. Em conclusão é destacado que a geometria ensinada nas escolas básicas pode ser vista como transposições didáticas da geometria com procedimentos algébricos propostas por estudiosos dos séculos anteriores ao século XVIII e permite apontar possíveis dificuldades no estudo de geometria bem como possíveis caminhos que retirem o seu estudo do isolamento temático que se encontra atualmente nas escolas brasileiras.

Palavras-chave: Ensino de geometria; Transposição didática; Geometria analítica.

ABSTRACT

This work aims to make a reflective contribution to research into the teaching of geometry in Brazilian primary schools, in view of the type of didactic transpositions used in them, in search of traces of a possible epistemological model that has subsidized them. To this end, spontaneous analysis of fragments of the path of studies and research in mathematics over the last five hundred years is undertaken, considering the importance of this period for the development of mathematics. In conclusion, it is pointed out that the geometry taught in basic schools can be seen as didactic transpositions of geometry with algebraic procedures proposed by scholars from the centuries before the 18th century and allows us to point out possible difficulties in the study of geometry as well as possible ways to remove its study from the thematic isolation that is currently found in Brazilian schools.

Keywords: Teaching geometry; Didactic transposition; Analytic geometry.

RESUMEN

Este trabajo pretende hacer una contribución reflexiva a la investigación sobre la enseñanza de la geometría en las escuelas primarias brasileñas, en vista del tipo de transposiciones didácticas utilizadas en ellas, en busca de rastros de un posible modelo epistemológico que las haya subsidiado. Para ello, se realizan análisis espontáneos de fragmentos de la trayectoria de estudios e investigaciones en matemáticas de los últimos quinientos años, considerando la importancia de este período para el desarrollo de las matemáticas. En conclusión, se destaca que la geometría enseñada en las escuelas básicas puede ser vista como transposiciones didácticas de la geometría con procedimientos algebraicos propuestos por estudiosos de los siglos anteriores al siglo XVIII y permite señalar posibles dificultades en el estudio de la geometría, así como posibles caminos para sustraer su estudio del aislamiento temático que actualmente encuentra en las escuelas brasileñas.

Palabras clave: Enseñanza de la geometría; Transposición didáctica; Geometría analítica.

1 Doutor pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Belém, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Tiradentes, número 700, Edifício Eduardo Angelin, apto. 603, reduto, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66053-330. E-mail: rgufpa@gmail.com

2 Doutora Universidade Federal do Pará (UFPA). Professora da Educação Básica na Secretaria Estadual de Educação (SEDUC), Belém, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Tv. Apinagés, número 621, Edifício Tambatajá, Batista Campos, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66030-460. E-mail: raquellrego@gmail.com

INTRODUÇÃO

Este trabalho objetiva contribuir para o debate reflexivo sobre o ensino da geometria nas escolas brasileiras da atualidade e, portanto, não pretende encerrar nenhuma problemática apontada nas pesquisas publicadas ou em andamento nos dias de hoje sobre esse tema por especialistas da educação matemática.

Esta investigação se assenta majoritariamente em análises espontâneas do currículo, de livros didáticos e de artigos acadêmicos, no sentido dado por Garcia et.al (2006, p.236).

uma “análise espontânea” dos documentos curriculares e livros didáticos é um tipo de análise que apenas observa e descreve o conteúdo incluídos nestes documentos e sua distribuição, sem ferramentas teóricas. Esta análise não pretende ser explicativa, mas descritiva. Pode ser interpretada como um primeiro contato com o campo empírico que será objeto de pesquisa posteriormente.

No entanto, aqui, essas análises sofrem influências de noções da teoria antropológica do didático, TAD, incorporadas pelos autores desta investigação, que tem entre seus objetos de pesquisa os problemas didáticos tratados em âmbito mais amplo a partir de ferramentas como os Modelos Epistemológicos de Referência, MER, que tomam como imprescindível a dimensão epistemológica desses problemas.

Um MER pode ser tomado, no sentido aqui adotado, da taxonomia das organizações matemáticas, com base na crescente complexidade de integrações saberes, não somente matemáticos, proposta por Chevallard (1999), as quais podem permitir construções de transposições didáticas de atividades matemáticas, no sentido das adequações desses saberes, sejam acadêmicas ou não, para o ensino que pode permitir aprendizagens desse tipo de atividades nas escolas.

Com essas considerações iniciais passamos a descrever a investigação realizada e os resultados por ela alcançados como segue.

A QUESTÃO QUE NORTEIA ESTA INVESTIGAÇÃO

A história da matemática deu um lugar singular à geometria, talvez por suas glórias em diferentes atividades humanas ao longo dos séculos até os dias de hoje, entre elas, por exemplo, as dos artesões, as das artes, das engenharias e das ciências e, excepcionalmente importante, por seu longo percurso no tempo, se assim podemos dizer, como o primeiro e único conhecimento organizado, que se tornou até inquestionável, do que veio a ser chamado de matemática. Nessa rota do tempo, até meados do século XVIII, ainda era o modelo que todos os estudiosos buscavam imitar, embora nem sempre com sucesso.

A geometria clássica euclidiana foi e ainda é utilizada no enfrentamento de diferentes questões, em diferentes campos de conhecimento, que ao serem postas ou interpretadas como problemas geométricos permitem a recorrências a argumentos dotados de verdades que, por deduções lógicas, levam à outras verdades que rendem bons argumentos para justificar ou até mesmo produzir respostas à essas questões.

Na escola básica brasileira, o que inclui os livros didáticos por elas adotados, é recorrente o ensino da disciplina matemática recorrer à geometria para justificar, explicar ou pro-

duzir certos afazeres e algoritmos da aritmética e da álgebra escolar, entre eles, por exemplo, a regra de três é produzida a partir da “aplicação” da teoria das proporções ou, ainda, como “aplicação” do teorema de Tales e, não menos importante, no ensino dos produtos notáveis por “completação do quadrado no sentido geométrico” ou ainda para reduzir um trinômio do segundo grau a um quadrado de um binômio, geralmente utilizado nas resoluções de equações algébricas do segundo grau. Enquanto neste caso a justificativa se mostre um tanto quanto inadequada por limitações desse tipo de argumento, no caso da regra de três parece haver algum consenso, mesmo que sob indisfarçável pudor, dessa justificativa no mundo da matemática, embora argumentos humanistas possam deles discordar, como revelam Borges e Silva (2012)

Esse tipo de organizações matemáticas ainda se fazem presente em nossas escolas e, em geral, são tomadas como tentativas de professores em tornar certos conhecimentos matemáticos mais acessíveis aos seus alunos, entretanto esse ensino parece contribuir para consolidar certas organizações matemáticas de ensino como dotadas de verdades indiscutíveis, mesmo que sejam inadequadas perante a matemática da atualidade, oriunda de questionamentos e superações da mentalidade matemática em que se assentam essas organizações de ensino, a qual remonta a séculos anteriores ao século XVIII, quando a “geometria, e talvez também a aritmética, era aparentemente o único domínio onde o raciocínio matemático tomava a forma perfeita” (REVUZ, 1971, p. 48).

Nesse sentido, o ensino da escola básica torna a geometria euclidiana uma teoria matemática isolada que funciona como argumento indiscutível de validação de procedimentos de outros conhecimentos deixando escapar o seu verdadeiro papel como um modelo, entre muitos outros existentes na matemática, que nos permitem modelar situações, entre elas, as do e para o espaço real em que vivemos e atuamos.

Essa compreensão confronta a crença, ainda vigente na escola básica, de que a geometria estuda o espaço real, embaçando a realidade de que nesse espaço real não existem pontos, retas, triângulos, quadriláteros ou círculos, mas tão somente objetos reais, mesmo quando em potencialidade, que podem ser interpretados como eles, senão que foram produzidos a partir deles e, portanto, que esses objetos do espaço real não são objetos da geometria euclidiana; grande parte do espaço em que vivemos e atuamos pode ter inspirado a construção da geometria, mas é a geometria, como modelo, que recorremos para a construção e interpretação de grande parte desse espaço.

O ensino de organizações inadequadas por professores é determinado, em geral, pelos livros textos didáticos adotados pela escola que impõe a observância das práticas docentes às organizações didático-matemática desses livros. Além disso, os professores sofrem a ausência de fontes de transposições didáticas da geometria para o ensino nesse tipo de escola, que os atenda quanto as suas próprias condições e quanto as impostas pelos níveis mais externos da transposição didática, onde se decide o que estudar dessa geometria e como estudar essa geometria na escola básica.

Assim, dirigindo olhar sobre as transposições didáticas da geometria que vivem nas escolas básicas, perceberemos sem grande esforço em análise espontânea que elas não traduzem a geometria clássica euclidiana em si, já que elas não atendem, entre outras condições,

a restrição ao estudo totalmente dedutivo, que é a principal característica genética das atividades da geometria euclidiana clássica, por alunos com idade inferior a 15-16 anos, o que encerra praticamente todos os anos da escola básica.

Nesse contexto, uma questão Q se põe, senão naturalmente, reflexivamente: como os níveis mais externos das transposições didáticas escolares chegaram às organizações didático-matemática da geometria euclidiana ensinadas na escola básica brasileira atual?

As possíveis respostas à essa questão não se constroem de modo simples, pois exigem análises praxeológicas (CHEVALLARD, 1999) de diferentes transposições didáticas para o ensino de geometria que foram utilizadas ao longo do tempo nas escolas básicas, com seus diferentes formatos atendendo os diferentes sistemas de ensino oriundos de diferentes reformas educacionais.

Isso demanda um hercúleo trabalho de estudo da história e epistemologia das organizações de ensino para geometria nas escolas básicas brasileiras, que certamente exige esforços imensuráveis de pesquisadores da educação matemática que ainda não estão disponíveis para “garimpagem” de elementos que permitam a segurança para a produção de uma resposta parcial, o que a faz escapar da produção deste texto, mas não do desejo de tê-la em investigações futuras.

Nessa linha, frente as análises espontâneas sobre a história das organizações matemática com geometria que podem ter revolucionado o modo de fazer e pensar a matemática, uma a questão Q' é derivada da anterior Q: *quais seriam os traços principais do possível modelo epistemológico de referência (MER) que pode ter subsidiado as construções das transposições didáticas sobre geometria euclidiana que vivem nas salas de aula da escola básica brasileira atual?*

Essa questão derivada certamente não é uma questão determinada, no sentido de possuir uma resposta pronta, mas que pode admitir resposta parciais a partir das organizações didático-matemáticas da geometria que vivem no ensino da atualidade frente as históricas organizações matemáticas que revolucionaram a geometria e, não menos importante, que levaram ao desenvolvimento da matemática até os dias atuais.

Para a construção de uma resposta ao questionamento derivado, aqui entendida como os traços de um MER que possivelmente subsidiam, de algum modo, as construções das transposições didáticas da geometria euclidiana que vivem nas escolas básicas brasileiras, foi empreendido uma investigação orientada por um MER que encaminhe o objetivo de encontrar “elementos” na história e epistemologia da matemática que podem estar presentes, de algum modo, nas transposições didáticas da geometria que vivem nas escolas básicas, considerando a proficuidade das fontes históricas das organizações matemáticas, mesmo que em fragmentos, que foram desenvolvidas no entorno dos últimos quinhentos anos.

O MER DESTA INVESTIGAÇÃO

A coluna vertebral ou eixo transversal que suporta o MER desta investigação consiste de quatro princípios, todos oriundos ou fundamentados pela TAD, o que inclui seus objetos de pesquisa, teorias e saberes que a subsidiam, como a história e a epistemologia dos sabe-

res matemáticos que habitam ou habitaram os espaços sociais de produção, de utilização, transposição didática e de ensino de matemática. Os princípios são:

1) É assumido o postulado da TAD que toma a matemática como uma atividade humana que se realiza no interior e chancela de um espaço social, dos estudiosos matemáticos e das escolas básicas, por exemplo. Essa atividade se desenvolve segundo sistemas organizados de tarefas para atender propósitos que lhe dão sentidos reconhecidos e aceitos no espaço social em que se realiza.

Um sistema organizado de tarefas é denominado de organização praxeológica, cuja organização se dá sobre bases de um ou mais discursos que justificam, explicam ou produzem os modos de fazer e de pensar cada tarefa em acordo com o propósito dessa organização. Nesse sentido, em uma organização praxeológica existe um discurso mais inclusivo que admite e orienta a utilização dos demais discursos e, em consequência, a inclusão ou não de uma dada tarefa nessa organização.

Nos espaços sociais dos conhecimentos formais, como o da matemática acadêmica, por exemplo, os discursos que coordenam uma organização são teorias reconhecidas nesses espaços e que também sustentam, a partir de seus elementos, ditos tecnológicos, as técnicas ou modos de executar as tarefas dessa organização.

Em um espaço não tão formal, ou não formal, pode não haver teorias, mas sim saberes culturais práticos que se legitimaram nesses espaços a partir do sucesso alcançado na produção de organizações praxeológicas que conseguem atingir os propósitos desejados por esse espaço. Nesse caso, as tarefas podem ter sido organizadas empiricamente, com ou sem planejamento prévio, e assim continuarão até que tenham suas técnicas e ou sua organização questionada pelos atores desse espaço social.

Nesse tipo de espaços sociais se inserem a escola básica quanto ao uso das matemáticas ensinadas e, não menos importante, o espaço social dos estudiosos da matemática dos séculos anteriores ao entorno do século XIX. Em ambos espaços há carências de teorias que assegurem sistemas de tarefas por eles recorridos em suas atividades.

2) Que a atividade matemática realizada em um dado espaço social, enquanto objeto de investigação da TAD, tem sua história e epistemologia dada por suas organizações praxeológicas matemáticas utilizadas segundo certas, senão todas, atividades realizadas nesse espaço.

Considerando que o espaço social dos estudiosos matemáticos pode ser sempre visto como um espaço social formal quanto a atividade matemática e que o espaço social das escolas básicas, em contraste, tem sua atividade matemática realizadas com imposições de condições que tornem o ensino e a aprendizagem supostamente possível, é necessariamente nem tão formal, ou nada formal, então recorremos a história e epistemologia das organizações praxeológicas matemáticas dos estudiosos matemáticos como possíveis suportes epistemológicos para as transposições didáticas que ainda vivem nessas escolas.

3) Em consonância com o princípio anterior, cada organizações praxeológica tem uma história e uma epistemologia que depende do espaço social em que vive e ou viveu,

pois cada discurso e cada propósito é dado pelo espaço social que a produz e ou a utiliza. Por exemplo, Fernandes (2015) mostra que uma organização praxeológica da matemática pode ter um discurso e utilização, que inclui suas técnicas, de modo distinto no espaço social das engenharias.

É preciso, então, considerar que organização praxeológica da escola não repete necessariamente os modos de fazer e pensar das organizações praxeológicas dos estudiosos matemáticos, visto que a escola básica realiza suas atividades matemáticas sob condições distintas do espaço social dos matemáticos.

Assim, consideramos que nas escolas básicas o ensino de matemática pode primar pelo uso de técnicas algorítmicas, onde o jeito de pensar do porquê se faz assim daquele jeito, valorizado pelos estudiosos da matemática, não está em jogo. Embora isso possa ajudar a despistar a ausência de teorias e métodos matemáticos, que incluem o propósito matemático, nas realizações das tarefas escolares, tomamos o suposto de que isso não esconde de todo o entorno epistêmico que envolve o sistema de tarefas que define uma organização praxeológica.

4) A partir da noção de vigilância epistemológica (CHEVALLARD, 2005) e de sua necessária e indispensabilidade observância na construção de transposições didáticas de organizações praxeológicas matemáticas, tomamos o suposto de que, mesmo que em marcha com ritmo diferente, a rota histórica de desenvolvimento das organizações praxeológicas da matemática escolares mantem-se próxima epistemologicamente da rota histórica do desenvolvimento das organizações praxeologias dos estudiosos matemáticos.

Sob esse olhar, foi considerado que o espaço social da escola básica recorre a transposições didáticas de organizações praxeológicas presentes no espaço dos estudiosos matemáticos e que, por vigilância epistemológica, mantém traços epistemológicos dessas organizações que supostamente lhes deram origem, mesmo que as transposições didáticas pareçam anteriores e, quiçá, mais perenes.

Frente a conjugação desses princípios que definem o MER, que orienta esta investigação, fomos encaminhados à atenção sobre as organizações praxeológicas de geometria da escola básica por meio dos tipos tarefas e os modos de fazer esses tipos de tarefas em busca de consonância de suas técnicas com as técnicas usadas para o mesmo tipo de tarefas das organizações praxeológicas dos estudiosos da matemática desenvolvidas ao longo do tempo, em particular das organizações praxeológicas com geometria que revolucionaram o modo de fazer geometria/matemática e que nos trouxeram até a matemática atual.

A “COLUNA VERTEBRAL” DO MER DA GEOMETRIA ESCOLAR

Sob o MER, recorreremos à análise espontânea de fragmentos da história e epistemologia da ligação entre álgebra e geometria de modo a apontar os elementos do suposto MER que sustenta ainda hoje as transposições didáticas da geometria nas escolas básicas brasileiras.

Nessa análise observamos que, historicamente, o espaço social dos estudiosos da matemática até meados do século XIX, senão início do século XX, pode ser visto como um

espaço social nem tão formal, de modo que muito das mudanças do fazer matemática que implicava na mudança das organizações matemáticas ocorreram, principalmente em séculos anteriores a esses séculos, sem existência de teorias matemáticas que a sustentassem.

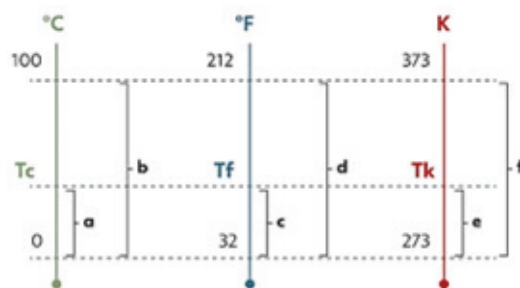
Nesse contexto matemático, bem anterior ao século XVIII, surgiram novas praxeologias em diferentes trabalhos de diferentes estudiosos matemáticos que recorreram a geometria para justificar, explicar ou produzir soluções para problemas algébricos, por exemplo, os algebristas italianos, entre eles, Leonardo de Pisa (1445-1514), Niccolò Tartaglia (1500-1557), Girolamo Cardano (1501-1576) e Rafael Bombelli (1526; 1572) e, com grande influência mais tarde, o trabalho de François Viète (1540-1603), publicado em 1591 em que realiza uma ligação entre a álgebra e a geometria ao propor a resolução de equações usando a teoria das proporções da geometria euclidiana.

Como citamos anteriormente, análise espontânea de materiais didático-matemáticos nos levou a encontrar tarefas escolares, relativa a álgebra que são justificadas por argumentos geométricos.

Figura 1 – Esboço do Teorema de Tales

Esboço do Teorema de Tales em termômetros

Considere que os termômetros marcam os pontos de fusão e de ebulição das escalas



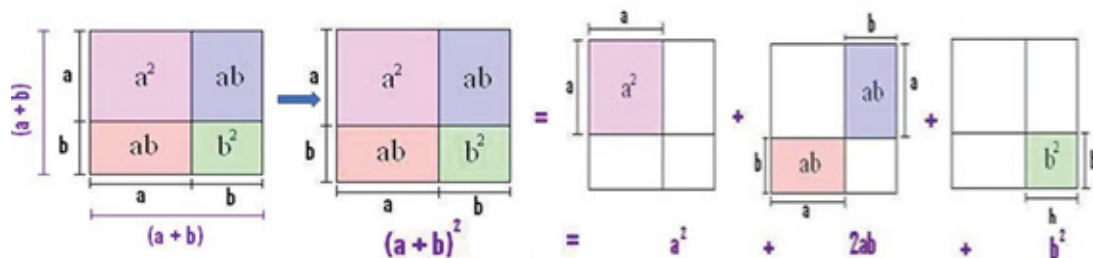
Teorema de Tales com regra de três

Considerando apenas os valores de Celsius e Fahrenheit para encontrar o resultado

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &= \frac{c}{d} \\ \frac{T_c - 0}{100 - 0} &= \frac{392 - 32}{212 - 32} = \\ \frac{T_c}{100} &= \frac{360}{180} = \\ 180 T_c &= 360 \times 100 \\ 180 T_c &= 36000 \\ T_c &= \frac{36000}{180} \\ T_c &= 200\end{aligned}$$

Fonte: Globo (G1, 2021)

Figura 2 – Esboço do Quadrado da Soma



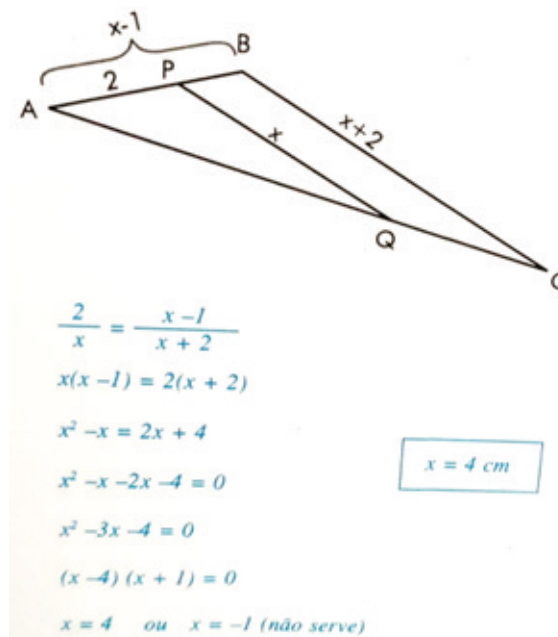
Fonte: Brasil Escola (2021)

Entretanto, mais frequente e natural, é o modo reverso, o da realização da tarefa de geometria com argumentos da álgebra. Nesse caso, as tarefas de geometria, em geral, são dotadas de uma figura dada ou descrita, em que segmentos e ou operações geométricas entre eles são dados e ou solicitados em forma de números conhecidos ou desconhecidos, como é ilustrado a seguir.

Exemplos de tarefas desse tipo

(1) Calcule o valor de x , sabendo que $PQ \parallel BC$ (as unidades estão em cm).

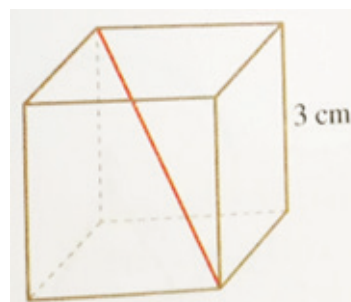
Figura 3 – Representação do Teorema de Tales



Fonte: Matsubara e Zaniratto (1998, p. 224)

(2) Quanto mede a diagonal do cubo abaixo, destacada?

Figura 4 – Representação do Cubo



Fonte: Bianchini (2011, p. 149)

(3) Em um triângulo isósceles, a base mede 12 cm e cada um dos lados congruentes mede 9 cm. Em seu caderno, faça um esboço desse triângulo e calcule a medida da altura desse triângulo.

As técnicas utilizadas em cada exemplo requerem diferentes conhecimentos relativos a saberes da geometria de Euclides que são ‘traduzidos em expressões algébrica’ que permitam a utilização de procedimentos algébricos.

As técnicas podem ser descritas de modo breve e invariante para todos as tarefas desse tipo como segue: A leitura da figura geométrica, dada ou descrita, coordena a utilização da tecnologia da geometria euclidiana produzindo interpretações que permitam o encontro de relações geométricas entre os entes geométricos dados e desconhecidos que, vistos como números, são postos em relações algébricas que, então, permitirá a utilização

de procedimentos algébricos para encontrar uma solução, na qual é interpretada como uma solução geométrica, ou não, a luz dos conhecimentos sobre saberes da tecnologia da geometria requerida.

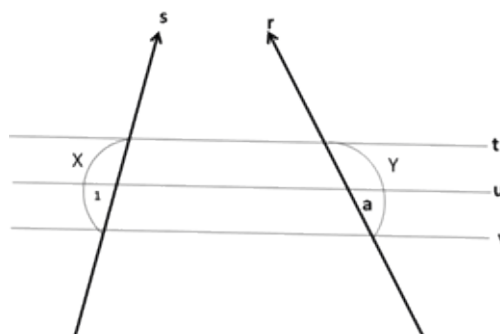
Esse modo invariante das técnicas para tarefas da geometria plana e espacial estudadas nas escolas básicas atuais apareceram inicialmente em trabalhos que envolveram relações entre álgebra e geometria propostas por estudiosos, entre eles, René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665) ao “estabelecerem ligações entre expressões algébricas e curvas, e entre operações algébricas e construções geométricas” (MASSA, 2006, p.82-112).

A parte invariante da técnica adotada em todas as transposições didáticas constante nos livros didáticos e, em consequência, nas práticas docentes para o ensino a geometria nas escolas básicas atuais, substitui por figuras já construídas ou descritas a construção geométrica de figura que dá maior clareza as relações geométricas, mas preserva as demais característica de descrever as relações geométricas em relações algébricas proposta nos trabalhos de Descartes, por exemplo, de modo que se pode chamar essa invariância da técnica de procedimentos cartesianos da geometria analítica, principalmente por encarnar a geometria analítica como um método para resolver problemas geométricos por procedimentos algébricos e não como uma teoria matemática.

O procedimento cartesiano exigiu de Descartes tratar os segmentos geométricos como números e, mais, criar uma estrutura algébrica com operações de produto de segmentos, mesmo que a álgebra moderna ainda não existisse na matemática. Nessa estrutura o produto de segmentos resulta em um segmento e, ainda, que existe um segmento identificado com a unidade numérica e, em consequência, outros segmentos podem ser vistos como múltiplos dessa unidade ou de outros segmentos.

Essa estrutura viole a interpretação da geometria de euclidiana do produto de segmentos como uma superfície, ela permite operar com segmentos como se operava com os números e, então, o uso de procedimentos da álgebra para a resolução de problemas geométricos.

Figura 5 – Representação Teorema de Tales



Fonte: Próprio autor (2023)

$$\frac{X}{1} = \frac{Y}{a} \Rightarrow Y \cdot 1 = a \cdot X \Rightarrow Y = aX$$

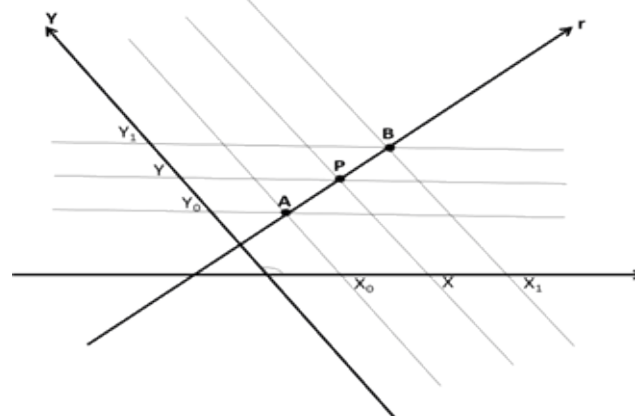
A geometria com álgebra, senão a álgebra com geometria, de Fermat, grosso modo, a que assume que uma equação é uma curva e que, como equação admite uma solução algébrica com interpretação geométrica, parece ter inspirado a transposição didática da geometria que na escola básica é um setor da geometria chamado de geometria analítica.

Esse tipo de transposição didática desenvolve a geometria a partir de procedimentos cartesianos num plano sob os axiomas euclidianos, em que o destaque são as equações para entes geométricos.

Grosso modo, essa geometria se assenta inicialmente nas tarefas de representar um ponto do plano por um par de números e sob a compreensão da geometria euclidiana sobre dois pontos distintos A e B determinarem um único segmento AB cujo comprimento é a distância euclidiana entre esses pontos.

Para representar um ponto no plano, toma-se o princípio euclidiano que esse plano é determinado por duas retas numeradas e concorrentes em um único ponto O e, ainda, que seus pontos são extremos de segmentos que determinam os pontos externos a essas retas por meio das tarefas relativas ao teorema de Tales.

Figura 6 – Representação Teorema de Tales



Fonte: Próprio autor (2023)

A figura 6 ilustra o que afirmamos sobre as tarefas escolares sobre o teorema de Tales. Elas permitem determinar o lugar geométrico da reta r por uma equação ao considerar que r passa por dois pontos distintos A e B do plano determinado por duas retas concorrentes X e Y. Para isso, tomando os segmentos da reta r a partir dos segmentos correspondentes nas retas X e Y, que são determinados por feixe de retas paralelas a essas retas X e Y. Recorrendo-se as tarefas escolares sobre o teorema de Tales atinge-se o propósito desejado como segue:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{X - X_0}{Y - Y_0} = \frac{X_1 - X}{Y_1 - Y} \Rightarrow \frac{Y_1 - Y_0}{Y - Y_0} = \frac{X_1 - X_0}{X - X_0} \Rightarrow Y - Y_0 = \left(\frac{Y_1 - Y_0}{X_1 - X_0} \right) (X - X_0)$$

O ângulo entre as retas X e Y podem ser qualquer ângulo não nulo, no entanto a escolha desse determina a maior ou menor dificuldades de representação algébrica dos entes geométricos no sistema XOY e isso pode facilitar ou dificultar o tratamento algébrico dos problemas geométricos. Adota-se, em geral, que as retas X e Y devem ser perpendiculares. Isso reduz o trabalho de encontrar as expressões algébricas e reduz suas formas algébricas como solução de vários problemas geométricos, mas não de qualquer problema posto.

Na escola básica, a geometria analítica é um setor da geometria cujo estudo se dá no ensino médio, mas de forma isolada, sem relações objetivas com a geometria plana e espacial, bem como com o estudo de funções que é um setor da álgebra (GARCIA *et al.*, 2006). Isso contribui em não dar sentido ao estudo da matemática e ainda reforça a ideia da geometria analítica como um método sem sentido e não um modelo matemático que permite, entre outras coisas, estudar o espaço em que vivemos, mesmo que não seja esse o seu objetivo.

Nessa linha de compreensão, o isolamento da geometria analítica na escola leva professores e alunos a questionar a falta de “aplicações” da geometria analítica, principalmente que seja convincente sobre o mundo real.

De qualquer modo, as transposições didáticas da geometria que vivem nas escolas básicas da atualidade se mostram como transposições da geometria com álgebra desenvolvida com os procedimentos propostos por Descartes e, portanto, que tal procedimento cartesiano pode ser tomado como o traço transversal do MER que subsidia essas transposições didáticas escolares da geometria euclidiana.

CONCLUSÕES

Nas escolas não há clareza de que a geometria ensinada e aprendida pode ser transposições didáticas da geometria euclidiana com álgebra, embora esteja claro a utilização de procedimentos algébricos para enfrentamento de problemas da geometria euclidiana.

O procedimento cartesiano pra resolução de problemas da geometria se mostra, sem dúvidas, como o traço transversal de um possível modelo epistemológico de referência para essas transposições didáticas utilizadas no ensino de geometria nas escolas básicas brasileiras.

O ensino desse procedimento se dá de forma mimética, como extensão do uso das práticas algébricas, no sentido em que o aluno aprende imitando a ação do professor. No entanto, as tarefas nesse meio praxeológico parecem problemáticas para número expressivo de alunos, pois eles não se dão conta que são necessários conhecimentos sobre os saberes da geometria euclidiana para interpretar adequadamente as figuras dadas ou descritas e, assim, permitir equacionar algebricamente o que se deseja nessas figuras.

Os conhecimentos de saberes da geometria euclidiana que referimos podem ser vistos como tarefas intermediárias (FERREIRA, 2014) necessárias, e até indispensáveis, para tornar possível o estudo da geometria euclidiana com os procedimentos cartesianos e, entre essas, encontram-se desde as tarefas primeiras e fundamentais do tipo que usam o procedimento cartesiano sem clareza, como as relativas ao teorema de Tales, até as da geometria construtiva com parcial estudo interpretativo de proposições da geometria euclidiana, sem esquecer os seus axiomas, que podem se mostrar necessárias para o estudo dessas transposições.

É importante notar que o procedimento algébrico restrito a geometria plana euclidiana esconde o verdadeiro papel revolucionário desse procedimento que antes já fora

destacado por Descarte em sua obra *La Geometrie de 1637*³ (BRUNSCHVICG, 1912) quando encaminha a *De la construcion des Problemes, qui sont Solides, ou plus que Solides*, em que este título já evidencia que os espaços podem ir além das três dimensões usuais que não são alcançadas pelas construções da geometria euclidiana clássica.

De outro modo, o procedimento cartesiano com axiomas da geometria euclidiana limitada a espaços tridimensionais permite pensar em generalidade das equações e, por exemplo, pensa-las como equações em espaços com dimensões superiores a dimensão tri-dimensional. Isso desencadeou diferentes problemas no seio da matemática, agora sem vínculos diretos com o espaço real em que vivemos.

Isso implica no esforço de professores construírem transposições didáticas da geometria euclidiana com procedimentos algébricos que primem por destacar os saberes da geometria como necessário, mas sem perder de vista a importância do ensino da utilização do procedimento cartesiano em conjugação com outros modelos geométricos do espaço a partir de condições não acatadas pela geometria euclidiana, como a da Geometria Urbana proposta por Jonh Fossa (2003).

O procedimento cartesiano permite encontrar equações para curvas geométricas e, por generalidade, por exemplo, pensar essas equações em espaços com dimensões superiores a dimensão natural três. Isso desencadeou diferentes problemas no seio da matemática, agora sem vínculos diretos com o espaço real em que vivemos.

Entre os trabalhos sobre esses problemas que podemos imputar interesses para a construção de transposições didáticas, nessa linha, encontra-se o trabalho Euler (1750) sobre o Paradoxo de Cramer intitulado *Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes*.

Nesse trabalho, de forma inusitada para sua época, Euler faz um estudo qualitativo de um sistema de equações algébricas lineares, como interseções de superfícies planas (lineares), usando apenas um método de resolução de sistemas. Esse tipo de estudo até então não fora realizado, pois ainda não havia sido posto e tampouco havia a teoria da Álgebra Linear para tal tarefa.

Esse fazer nem tanto formal encaminhou um dos conceitos básicos da Álgebra linear chamado de dependência linear e revelou a potencialidade dos procedimentos algébricos ainda vivo em nossas escolas básicas para esse empreendimento. Euler recorreu à organização praxeológica conhecida no nível fundamental da escola básica como método da substituição para resolução de sistemas de equações algébricas lineares com duas equações e duas incógnitas, embora para a resolução e análise de sistemas de com maior número de equações e incógnitas, vistas como hipersuperfícies planas.

Esse modo de fazer nos mostra o método da substituição da escola fundamental como sustentação, pelo procedimento algébrico utilizado, do método do escalonamento, estudado no nível médio, bem como do método da eliminação gaussiana estudado no nível

3 Tradução feita por Brunschvicg, L. *La Géométrie de 1637*. Em: *Les Étapes de la Philosophie Mathématique*. cap. 7, sec. C. Paris: Félix Alcan, 1912, p. 113-123

superior dos cursos ciências tecnológicas e matemática, independentes do estudo de matrizes, hoje estudadas a partir do ensino médio.

Essa ausência de conexões do método da substituição com os demais métodos de resolução de sistemas acaba por esconder a epistemologia do estudo das matrizes que deles podem derivar quando a carência de uma teoria de matrizes se fizer necessária para a compreensão desses procedimentos que se situam inicialmente no coração da geometria analítica.

A ausência de conexões de saberes no ensino de matemática constitui um dos grandes problemas didáticos da atualidade, em particular sobre as controvérsias entre a geometria sintética e a geometria analítica é útil ver Gascón (2001) e, mais geralmente, sobre as conexões de saberes é útil ver, por exemplo, Garcia (2005), García & Higuera (2006) e Garcia, F.J., Pérez, J.G., Higuera, L.R. *et al* (2006).

As conexões de saberes estão no coração das atividades matemáticas e a potência do procedimento cartesiano em meios praxeológicos de outros saberes derivam métodos, que derivam teorias matemáticas. No caso do estudo na escola elementar de sistemas lineares de duas equações com duas variáveis, vistos como estudo de intersecções ou não de retas do plano, se pode contar com ajuda de figuras dessas retas, que podem estimular e tornar possível o estudo de sistemas com números de equações lineares e de variáveis superior a três que não admitem ajuda de representações gráficas; isso mostra um novo fazer matemático que dispensa representações geométricas que impediam o desenvolvimento da matemática.

Sob essa compreensão, o que está em jogo em níveis superiores de estudo a respeito desse possível MER que subsidia a transposição da geometria com álgebra é também o estudo do procedimento algébrico recorrido por Descartes mediante novos modelos geométricos e, não menos importante, por exemplo, de teorias derivadas que suportam a estrutura algébrica e outras noções matemáticas, como a de reta numerada que demandou grande e profundo esforço de estudiosos matemáticos na construção dos números reais como pontos de uma reta.

As importantes utilizações das transposições didáticas da geometria com procedimentos algébricos podem ajudar a encaminhar que a mentalidade matemática, que se desenvolvia em torno da geometria euclidiana clássica e vigente até meados do século XVIII, contraria a mentalidade atual da matemática que integra a geometria a outros saberes matemáticos para produzir novos modelos que estão além da compreensão teórica da geometria clássica euclidiana.

Nesse sentido, Revuz (1971) destaca muitas teorias matemáticas tem algo a ver com a geometria, mas que nenhuma delas tem a ver apenas com geometria. Desse modo a geometria não pode ser tomada no ensino como uma parte isolada e independente da matemática.

Entre essas teorias influenciadas, senão derivas diretamente, da geometria euclidiana com procedimentos algébricos, que fundaram novos modos de pensar e fazer matemática, encontramos a Geometria Analítica; o Cálculo Infinitesimal; a Teoria das Matrizes; "Ál-

gebra Linear; Espaços de Hilbert; Topologia (geral e algébrica); Teoria da Medida; 5 Teoria dos Grupos, incluindo os grupos topológicos; 6 Teoria dos Grafos; e 7 naturalmente todos os outros tipos de "geometrias": geometria diferencial, geometria algébrica" (REVOUZ, 1971, p. 25, tradução nossa).

Mediante a compreensão aqui desenvolvida, pode-se pensar que as transposições didáticas da geometria com procedimentos algébricos pode ser positiva para a aprendizagem não somente da geometria euclidiana, mais também de outras geometrias e de outros saberes, entre eles, em relação direta como o estudo de funções, com destaque sobre as funções polinomiais que levam a sistemas de equações lineares que levam ao estudo de matrizes cujo meio praxeológico permite tratar as resoluções e análises das equações quadráticas como cônicas. O desafio é construir transposições didáticas que atendam essas condições ou outras de eliminar o isolamento temático da geometria nas escolas básicas brasileiras.

REFERÊNCIAS

BORGES G. R.; PANTOJA S. D. **Práticas sociais da regra de três e a proporcionalidade**. REMATEC, [S. l.], v. 7, n. 11, 2012. Disponível em: <https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/366>. Acesso 31 out. 2023.

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini**, 9º ano, Moderna: 2004.

BOMBELLI, R. L'Algebra. Milão: Feltrinelli, 1966 apud MILIES, op. cit., 1993, p. 8-9. 16

BOMBELLI, op. cit., 1966 apud MILIES, op. cit., 1993, p. 9

BRUNSCHVIG, L. **La Géométrie de 1637**. Em: Les Étapes de la Philosophie Mathématique. cap. 7, sec. C. Paris: Félix Alcan, 1912, p. 113-123

CARDANO, G. **Autobiografia**. (B. Angelo, Trad.). Milano: La Famiglia Meneghina Editrice. Biblioteca Ambrosiana, A.S. 3599. 1932. [Trabalho original de 1576].

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado**. Buenos Aires. Aique Grupo Editor, 2005.

CHEVALLARD, Y. **L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique**. Recherches en Didactique des Mathématiques 19/2, 221-226, 1999.

FERREIRA, R. S. R. **Tarefas intermediárias: um modelo epistemológico de referência para o ensino das frações**. 2014. 120f. Belém: Dissertação. Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2014. Disponível em: <https://bit.ly/3HhH5Nr>. Acesso 22 out. 2023.

FOSSA, J. A. **Geometria Urbana**. João Pessoa: Editora Universitária / UFPB, 2003.
FERNANDES, J. A. N. **Ecologia do saber: o ensino de limite em um curso de engenharia**. 2015. Belém: Tese (doutorado) Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém,

2015. Disponível em: <https://www.repositorio.ufpa.br/jspui/handle/2011/13296> . Acesso 20 out. 2023.

FRAÇÕIS V. In **Artem Analyticem Isagoge**. Tvronis, Apud I ametivm Mettayer Typographum Regium. 1595.

GARCIA, F.J., PÉREZ, J.G., HIGUERAS, L.R. *et al.* **Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics**. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* **38**, 226–246. <https://doi.org/10.1007/BF02652807>, 2006.

GARCÍA, F. J. **La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales**. Tesis doctoral. Universidad de Jaén, 2005. Disponível em: <https://dialnet.unirioja.es/metricas/documentos/TES/19566> Acesso 20 out 2023.

GASCÓN, J. **Evolución de la controversia entre geometría sintética y geometría analítica. Un punto de vista didáctico-matemático**. Disertaciones del Seminario de Matemáticas Fundamentales (UNED, Madrid), 28, 1-20, 2001.

GARCÍA, F.J. & RUIZ HIGUERAS, L. Mathematical praxeologies of increasing complexity. In M. Bosch, Proceedings of the 4th Conference of the European Research in Mathematics Education, 2006.

MASSA, M.R. **Algebra and geometry in Pietro Mengoli (1625-1686)**. *Historia Mathematica*, 33 (1 SPEC. ISS.), pp. 82-112, 2006.

MATSUBARA, R, ZANIRATTO, A. A. **Big Mat**, IBEEP: 1998. MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. *Matemática, História, Conscientização – 8ª série*, Saraiva: 2004.

RAMOS, D. M. **"Quadrado da soma"**; *Brasil Escola*. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/quadrado-soma.htm>. Acesso 01 nov 2023.

REVUZ, A. **Educational Studies in Mathematics**. *Educ Stud Math* 4 , 48–52 <https://doi.org/10.1007/BF003057964> 48 -52, 1971.

RUSSELL, D. **Biography of Leonardo Pisano Fibonacci, Noted Italian Mathematician**. Disponível em: <https://www.thoughtco.com/leonardo-pisano-fibonacci-biography-2312397> Acesso 10 out de 2023

SANTOS, E. **Conversão de temperaturas: é possível aplicar a regra de três para descobrir o resultado?** Disponível em: <https://g1.globo.com/educacao/noticia/2021/10/25/conversao-de-temperaturas-e-possivel-aplicar-a-regra-de-tres-para-descobrir-o-resultado.ghtml>. Acesso 01 nov 2023

TARTAGLIA, N. **La prima parte del general trattato di numeri, et misure/di**. Veneza: Curtio Troiano de i Navo, 1556.

Histórico

Recebido: 06 de outubro de 2023.

Aceito: 11 de janeiro de 2024.

Publicado: 09 de fevereiro de 2024.

Como citar – ABNT

GUERRA, Renato Borges; FERREIRA, Raquel Soares Do Rêgo. Uma reflexão sobre o ensino atual da geometria. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 48, e2024008, 2024.
<https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n48.e2024008.id595>

Como citar – APA

GUERRA, R. B., & FERREIRA, R. S. R. (2024). Uma reflexão sobre o ensino atual da geometria. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC*, (48), e2024008. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n48.e2024008.id595>

Número temático organizado por

Saddo Ag Almouloud  

José Messildo Viana Nunes  

Afonso Henriques  