

Modelo Epistemológico de referencia en torno al estudio de los vectores en la geometría

Epistemological reference model for the study of vectors in geometry

Modelo epistemológica de referência para o estudo de vetores em geometria

Maritza Luna Valenzuela¹ 

Saddo Ag Almouloud² 

Maria Jose Ferreira da Silva³ 

Francisco Javier Ugarte Guerra⁴ 

RESUMO

Este artículo permite explicitar un instrumento esencial para estudiar y analizar los procesos de transposición didáctica del conocimiento matemático antes de ser transformado para ser enseñado. El objetivo es exteriorizar aspectos importantes de la constitución de un Modelo Epistemológico de Referencia para la enseñanza. En particular nos centramos en la enseñanza de los vectores en la geometría. Se responderá la cuestión ¿Qué modelos existen para el estudio de los vectores en la geometría? Para dar respuesta se realiza un análisis histórico mostrando la razón de ser y la génesis de los vectores en la geometría. Se propone como resultado los tres modelos identificados, es decir el estudio de vectores en la geometría sintética, en la geometría analítica y en el álgebra lineal.

Palabras-chave: Modelo Epistemológico de Referencia; Teoría Antropológica de lo Didáctico; Vectores; Transposición didáctica.

ABSTRACT

This article allows to explain an essential instrument to study and analyze the processes of didactic transposition of mathematical knowledge before being transformed to be taught. The objective is to externalize important aspects of the constitution of an Epistemological Reference Model for teaching. We focus on teaching vectors in geometry. The question will be answered: What models exist for the study of vectors in geometry? To provide an answer, a historical analysis is carried out showing the reason for being and the genesis of vectors in geometry. The three identified models are proposed as a result, and the study of vectors in synthetic geometry, analytical geometry and linear algebra is proposed.

Keywords: Epistemological Reference Model; Anthropological Theory of Didactics; Vectors; Didactic transposition.

RESUMEN

Este artigo permite explicitar um instrumento essencial para estudar e analisar os processos de transposição didática do conhecimento matemático antes de ser transformado para ser ensinado. O objetivo é exteriorizar aspectos importantes da constituição de um Modelo Epistemológico de Referência para o ensino. Em particular, nos centramos na compreensão dos vetores na geometria. Você responderá à pergunta: Quais modelos existem para o estudo dos vetores de geometria? Para dar resposta é realizada uma análise histórica mostrando a razão de ser e a gênese dos vetores na geometria. Se propor como resultado os três modelos identificados, é descrito o estudo de vetores na geometria sintética, na geometria analítica e na álgebra linear.

Palabras clave: Modelo Epistemológico de Referência; Teoria Antropológica do Didático; Vetores; Transposição didática.

1 Doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP). Professora na Pontifícia Universidad Católica de Perú (PUCP), Lima, Perú. Endereço para correspondência: Av. Universitaria, 1801, Urb. Pando, San Miguel, Lima, Perú, CEP: 1761. E-mail: luna.m@pucp.edu.pe.

2 Doutor em Matemática e Aplicações pela Universidade de Rennes I (França). Professor colaborador da Universidade da Bahia e da Universidade Federal do Pará. Endereço para correspondência: Rua Antonio Turati, 78, Vila Celeste, São Paulo – SP, cep. 02464-050. E-mail: saddoag@gmail.com.

3 Doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP). Professora na Pontifícia Universidad Católica de São Paulo (PUCSP). Endereço para correspondência: Rua Marques de Paranaguá, 111 Consolação 01303050 - São Paulo, SP – Brasil. E-mail: maze.fsilva@gmail.com

4 Doutor em Matemáticas pela Universidade de Valladolid (Uva), España. Professor da Pontifícia Universidad Católica del Perú (PUCP) e membro do IREM, Lima, Perú. Endereço para correspondência: Av. Universitaria, 1801, Urb. Pando, San Miguel, Lima, Perú, CEP: 1761. E-mail: fugarte@pucp.edu.pe.

INTRODUCCIÓN

Teniendo presente que la transposición didáctica puso en evidencia la necesidad de ahondar en lo epistemológico como base para entender los factores que posibilitan, condicionan, e incluso, a veces impiden, la construcción de ciertos saberes en una institución determinada, así como las formas que se proponen para la construcción de dichos saberes (saber enseñado), y las construcciones efectivas que se llevan a cabo (saber enseñado y saber aprendido) (García y Sierra, 2015).

Para el análisis de los procesos de trasposición didáctica consideramos los aportes en el marco de la *Teoría Antropológica de lo Didáctico* (TAD) de los *Modelos Epistemológicos de Referencia* (MER).

Este artículo tiene como objetivo presentar elementos que contribuyeron a la construcción del modelo epistemológico del estudio de vectores en geometría. Para lograr dicho estudio se realizó una revisión histórica de la génesis de este objeto matemático en cuestión. La pesquisa fue realizada, para explicitar este modelo epistemológico de referencia como parte de la tesis doctoral acerca de vectores en el espacio, en la perspectiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje en los cursos de ciencias e ingeniería.

Además, considerando que la formulación de un problema didáctico (en el sentido de problema de investigación en didáctica de las matemáticas) involucra siempre, de manera más o menos explícita, una interpretación del ámbito de la actividad matemática que está en juego (Fonseca, Gascón y Lucas, 2014). Así, en la didáctica de la matemática con objetivo de caracterizar un objeto de estudio, en este caso los vectores, siguiendo la perspectiva de Gascón (2011) que propone un padrón heurístico que permite de desarrollo del problema didáctico en investigación, dicho padrón presenta una dimensión nuclear denominada epistemológica.

La dimensión epistemológica del problema didáctico, en particular, para la enseñanza de vector es una dimensión nuclear, porque impregna y condiciona fuertemente las otras dimensiones del problema didáctico (económica y ecológica), además de contener las cuestiones con respecto a la razón de ser de los vectores en determinados sectores en la institución considerada. Además, de acuerdo con Gascón (2011), esta dimensión sitúa lo que es matemático en el centro del problema y trata la génesis y desarrollo del saber. También afirma que, en la formulación de cualquier problema didáctico, el didacta siempre utiliza, implícitamente, una descripción y una interpretación – quiere decir, un modelo epistemológico – del ámbito matemático que está en juego y que se denomina Modelo Epistemológico de Referencia (MER), que es provisorio y nos indica no solo la forma como se interpretan los contenidos matemáticos, sino también el porqué de encontrarse unos objetos y no otros. Además, hay la importancia de la ampliación de la matemática “al integrar de manera inseparable, en la dimensión epistemológica, la génesis, el desarrollo, el estudio, la utilidad y la transposición institucional del saber matemático”.

Según Fonseca, Gascón y Lucas (2014, p.295) “Es importante subrayar que un MER debe considerarse como una hipótesis científica, creativa, que se debe contrastar experimentalmente y, por lo tanto, susceptible de ser modificado constantemente”.

Como indica Gascón 2011 un MER debe ser preferiblemente explícito, con alcance local o regional, formulado en términos de praxeologías en el sentido de TAD. Para construir el MER, siguiendo la sugerencia del autor, formulamos las preguntas que consideramos adecuadas para nuestro objeto de estudio: q_1 : ¿qué es un vector?, q_2 : ¿cómo se describen e interpretan los vectores?, q_3 : ¿cuáles son los tipos de vectores y cómo se pueden estudiar? q_4 : en la institución matemática, ¿qué preguntas, matemáticas o extramatemáticas, ayudan a responder los vectores? y q_5 : ¿qué se entiende por estudiar, aprender, enseñar y/o aplicar vectores en una situación?

Las herramientas para la investigación que propone la Teoría Antropológica de lo Didáctico (CHEVALLARD, 1999), permite abordar la dimensión epistemológica de la construcción del problema didáctico, necesitamos un Modelo Epistemológico de Referencia (MER) sobre vectores. Por eso, el MER constituye un instrumento para la emancipación del investigador y de la didáctica, pues cuestiona la forma en que las instituciones involucradas en el problema didáctico interpretan el conocimiento matemático

El MER también es esencial para estudiar el conocimiento matemático antes de que se transforme en un objeto para ser enseñado. Es el instrumento con el que el investigador puede deconstruir y reconstruir las praxeologías cuya difusión intrainstitucional e interinstitucional pretende analizar. Por esta razón estudiaremos el MER desarrollado en la investigación.

La TAD tiene como postulado contrario a la visión particularista del mundo social, como indica Chevallard (1999) que toda actividad humana regularmente realizada puede ser descrita por un modelo único, que se resume con la palabra praxeología, denotada por $\wp = [T/\tau/\theta/\Theta]$, donde T es un tipo de tarea, τ es el proceso como es resuelta la tarea y que se denomina técnica, θ denota las herramientas matemáticas utilizadas que se denominan tecnología y Θ es la teoría que sustenta la tecnología.

En este estudio se considera la Geometría Sintética (GS) como la que considera los cinco postulados de Euclides y se trabaja sin coordenadas, es decir medir con regla y compas, la Geometría Analítica (GA), la que considera el sistema de coordenadas cartesiana y las representaciones algebraicas y el Algebra Lineal (AL) que considera sistemas de coordenadas y matrices.

GÉNESIS DEL OBJETO MATEMÁTICO DE LOS VECTORES

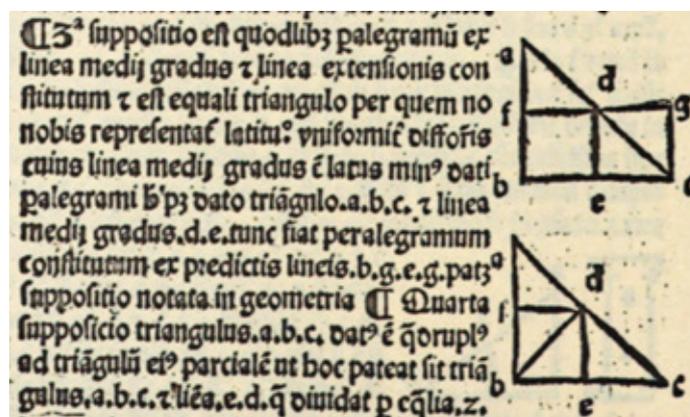
Se considera una revisión histórica donde se explicita la génesis del objeto matemático y sus propiedades. En ese desarrollo se mostrarán los tres modelos que se describen a continuación:

Modelo Epistemológico de Referencia del estudio de vectores en la geometría sintética

La noción de los vectores se puede percibir que fue abordado desde tiempos de Arquímedes (384-322), y continuado por su discípulo Estratón (340-270 a. C.), donde revela indicios de que en la Grecia antigua ya se utilizaba la regla del paralelogramo para resolver problemas de manera gráfica (PROENÇA, 2012, p.176).

En la primera mitad del siglo XIV el grupo de sabios del Merton College de Oxford, conocidos como los calculadores, desarrollan estudios respecto a la variación de intensidades de “formas y cualidades” de la Filosofía Natural y, como resultado, enunciaron el denominado Teorema de Merton College: dada una cualidad uniformemente disforme en un intervalo de tiempo, su cantidad total es igual a la cantidad total de la cualidad uniforme que afecta el cuerpo con la intensidad media de la cualidad uniformemente disforme. (ROQUE, 2012, p. 255). Ese teorema se refiere al movimiento rectilíneo uniformemente acelerado que, en lenguaje moderno, es descrito como un cuerpo en movimiento rectilíneo uniformemente acelerado que recorre, en un determinado intervalo de tiempo, el mismo espacio que sería recorrido por un cuerpo que se mueve con velocidad constante e igual a la velocidad media del primero. Este teorema no fue demostrado por los estudiosos de Oxford, sin embargo, Oresme (1328-1383), de la universidad de Paris, en su obra *Tractatus de Latitudine Formarum*, presenta la prueba que se puede ver en la Figura 1.

Figura 1 – Prueba de Oresme para el teorema de Merton



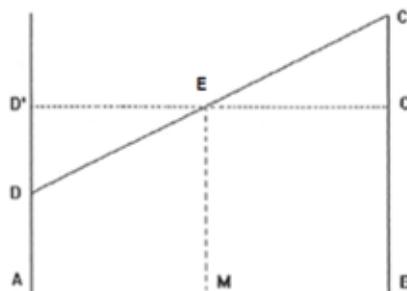
Fuente: Oresme (1486, p. 10)

El estudio presentado nos conduce a identificar el primer tipo de tarea en la Geometría Sintética: determinar la velocidad media de un cuerpo que recorre un espacio en movimiento rectilíneo uniformemente acelerado durante un intervalo de tiempo.

De acuerdo con Tarres (2017), Oresme consideró una recta para diseñar las latitudes (segmentos de rectas perpendiculares a la recta del tiempo), cuyos extremos determinan una recta que caracteriza el movimiento estudiado. Además, observó que la medida del área limitada por las dos rectas, en un determinado intervalo de tiempo, representa la medida del espacio recorrido por un móvil en tal intervalo.

Un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado queda caracterizado por una línea inclinada, como el segmento CD de Figura 2, por tanto, el espacio recorrido por el móvil corresponde a la medida da área do trapecio $ABCD$. Por otro lado, esa área es equivalente al área del rectángulo $ABC'D'$, en que el segmento $C'D'$ representa la línea de velocidad de un movimiento uniforme y cuya velocidad es representada por la medida del segmento EM , siendo M el punto medio del segmento AB . La equivalencia de dichas áreas puede ser observada cuando notamos que AD' y BC son paralelos e interceptadas por DC y que, por M , punto medio de AB , se determina que el segmento EM es paralelo a BC . Por tanto, podemos concluir que los triángulos DED' y CEC' son congruentes, lo cual significa que las áreas del trapecio y del rectángulo son equivalentes.

Figura 2 – Representación gráfica para el teorema de Merton



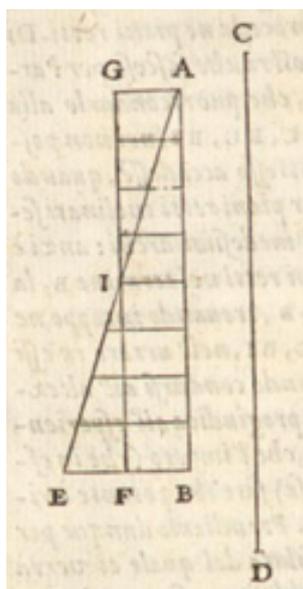
Fuente: Adaptado de Tarres (2017, p. 90)

Según Crombie (1974), la justificación de Oresme que, en esencia, explica lo cualitativo por lo cuantitativo, quiebra las doctrinas tradicionales de la época y abre camino a la modernidad.

El enunciado del grupo de Oxford puede ser considerado como una técnica para resolver el primer tipo de tarea y la demostración de Oresme como un discurso tecnológico-teórico que la justifica. Este teorema nos da indicios de que, en esa época, ya había conocimientos de posición, desplazamiento, velocidad y aceleración de un cuerpo, sin embargo, evidentemente con otros nombres, y esto nos permite enunciar un segundo tipo de tarea: calcular el espacio recorrido por un cuerpo en movimiento rectilíneo uniformemente acelerado durante un intervalo de tiempo.

Dos siglos después de Oresme, Galileo Galilei (1564-1642) presentó una técnica para ese tipo de tarea, y que trata del Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado (MRUV), enunciando: “el tiempo en que cualquier espacio es recorrido por un cuerpo que estaba inicialmente en reposo y uniformemente acelerado es igual al tiempo que el mismo espacio es recorrido por el mismo cuerpo moviéndose con velocidad uniforme. El valor de la velocidad uniforme es la media entre la mayor velocidad y la velocidad al inicio de la aceleración”. Y Galilei demuestra esta idea, como se visualiza en la Figura 3, dentro de la Geometría Sintética.

Figura 3 – Esquema para el movimiento uniformemente acelerado



Fuente: Galilei, 1638, p. 170

En esa figura, el segmento AB representa el tiempo en que el espacio CD es recorrido por un cuerpo que inicia su movimiento en reposo en el punto C y recorre el espacio con un movimiento uniformemente acelerado. Trazando una semirrecta con origen en B , perpendicular al segmento AB , es diseñado el segmento BE para representar la mayor velocidad adquirida. Dividiendo el segmento AB en puntos equidistantes y trazado, por cada uno de esos puntos, segmentos paralelos a la semirrecta para representar la velocidad en cada instante, lo que permite delinear el segmento AE . Considerando el punto F en el medio de BE son trazados los segmentos FG , paralelo a AB y GA , paralelo a FB . Así, como el lado FG del rectángulo $ABFG$ interseca al lado AE del triángulo AEB en el punto I , al extender las paralelas hasta el segmento GI , se puede constatar que el rectángulo $AGFB$ es equivalente al triángulo AEB . Además, es verificado que la suma de las medidas de los segmentos paralelos contenidos en el rectángulo $AGFB$ es igual a la suma de las medidas de los segmentos paralelos contenidos en el triángulo AEB , pues los triángulos IEF y IAG son congruentes. Así los segmentos paralelos contenidos en el trapecio $AIFB$ son comunes a ambos.

En el triángulo AEB es importante observar que las paralelas representan las velocidades en el movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV) y las paralelas en el rectángulo $ABFG$ representan las velocidades en el movimiento rectilíneo uniforme (MRU). Además, lo que es perdido en el momento de la primera parte del movimiento acelerado, representado por las paralelas del triángulo IAG , es compensado por el momento representado por las paralelas del triángulo IEF . Así, el espacio recorrido en el intervalo de tiempo AB es dado, en cada caso, por las medidas de las áreas del rectángulo y del triángulo, que son iguales. Entonces, espacios iguales son recorridos en tiempos iguales en ambos casos, lo que significa que la distancia recorrida es proporcional al tiempo transcurrido que, en lenguaje actual, puede ser representado $e = vt$ por en donde e representa el espacio, v la velocidad y t el tiempo.

Duhem (1914) indica que el “teorema da velocidad media”, o teorema de Merton, es una anticipación de la ley de caída uniformemente acelerada de Galileo, sin embargo, a pesar de la semejanza gráfica de los teoremas de ambos autores, el contenido es diferente, pues Oresme trata de leyes formales, mientras que Galileo trata de leyes de la naturaleza. Cabe mencionar que la matemática y la física, siguiendo la idea aristotélica, se desarrollan de forma separada desde el tiempo de Euclides hasta Galileo, en tanto que la física se basaba en experimentos para explicar los fenómenos que sucedían y las causas que los ocasionan, la matemática era entendida como una ciencia auxiliar. Los fenómenos de caída libre de cuerpos y del movimiento de proyectiles han sido objeto de estudios desde tiempos antiguos, siendo uno de ellos el de Aristóteles (350 a. C.) que, si bien su filosofía dominó hasta los últimos años de la Edad Media, sólo logró que sus resultados fueran aprobados por los especialistas tras la presentación de la primera ley de la física por Galileo, y lo que nos lleva a la tarea:

T_{GS3} : determinar el espacio recorrido por un cuerpo en caída libre en un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Galileo responde a esa tarea enunciando que “el espacio recorrido en un movimiento uniformemente acelerado, para el movimiento en caída libre de un cuerpo, es proporcional

igual para todos los cuerpos, o sea, $d = kt^2$, pero como esa aceleración es la gravedad, tenemos lo que utilizamos hoy, $d = 1/2 gt^2$.

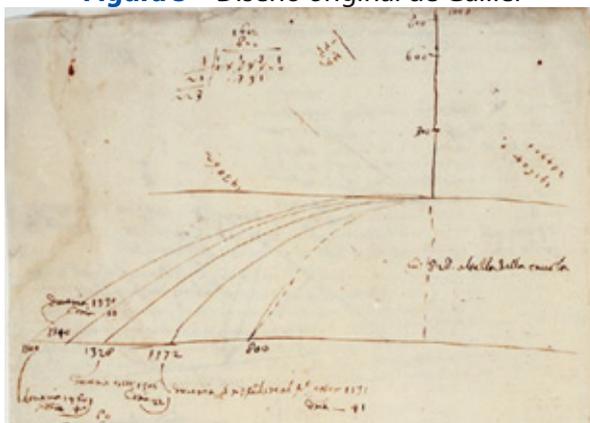
A continuación, presentamos la razón de ser de pasar a resolver tareas con coordenadas.

Modelo Epistemológico de Referencia del estudio de vectores en la geometría analítica

Según Roque (2012), los estudios de caída libre de cuerpos y del movimiento de proyectiles surgieron como influencia directa de las artes de la guerra, ya que a finales del siglo XV surgieron armas de artillería pesada relacionadas a nuevas estrategias de defensa. Las teorías de Galilei tuvieron sus orígenes en conocimientos de artesanos, arquitectos e ingenieros del siglo XVI que adquirieron status por atender las necesidades de la guerra y, en la misma época, surgen también los trabajos de Tartaglia, que se dedicaba al estudio de proyectiles.

Galilei evidenció que la mayoría de los fenómenos, que eran matematizados, no se restringían a una dimensión – como es el caso de determinar la velocidad de una bola, que cae de una mesa, antes de ella tocar el piso – y que parece describir un movimiento compuesto que presenta una trayectoria semiparabólica (Figura 5) que llamó de proyección.

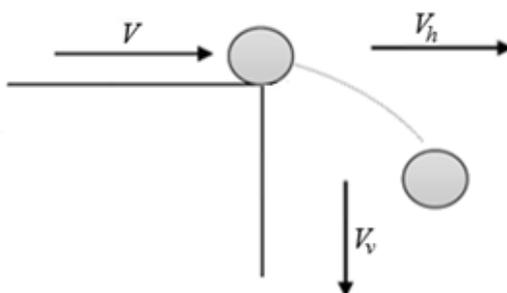
Figura 5 – Diseño original de Galilei



Fuente: Museo Galileo

Así, el esquema de Galilei puede ser representado observando la descomposición del movimiento en dos: un movimiento en la dirección horizontal, V_h , y otro en la dirección vertical, V_v , como muestra a Figura 6.

Figura 6 – Representación de la descomposición de un movimiento



Fuente: Valenzuela (2021, p. 68)

Percibimos que los avances de Galilei para identificar el comportamiento de las trayectorias de cuerpos en caída libre que ocurren en dos direcciones conducen a dos tipos de tarea.

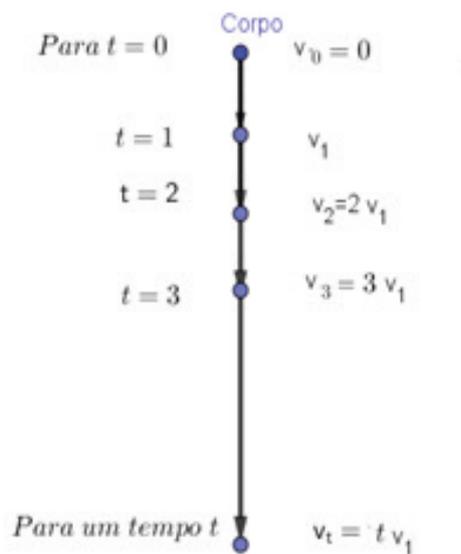
T_{GS4} : Representar por medio de una figura el cambio de velocidad que un cuerpo experimenta al ser liberado de una determinada altura.

La técnica T_{GS4} permite percibir que el diseño de la velocidad es tratado como un objeto que tiene dirección –en este caso, vertical. En el momento en que el cuerpo es liberado, cuando el tiempo es $t = 0$, no tenemos aún velocidad alguna y, por tanto, el vector es $V_v = 0$. Luego, cuando el tiempo es $t = 1$, es dibujado el vector vertical con sentido al piso V_1 , por lo hecho de la gravedad g de la tierra. El módulo es $|g|$.

Para el tiempo siguiente también es el vector paralelo al anterior y en el mismo sentido, con módulo del vector velocidad $V_2 = 2 V_1$ es incrementado al doble de la velocidad V_1 . Así, para los siguientes tiempos, la velocidad vertical es $V_v = tV_1$, como $V_1 = 0$, entonces, $V_t = tg$. En la Figura 7, vemos que V_t tiene el mismo sentido y módulo que tg . La tecnología en la GS en el dibujo es la adición y el paralelismo de segmentos orientados.

T_{GA1} : determinar la velocidad de un cuerpo que está en caída libre después de un tiempo. La técnica que da solución a la tarea en GA es considerar vectores en dirección vertical y sentido negativo, (Figura 7). Como la relación es dada por $\vec{v}_f = \vec{v}_0 + \vec{g}t$, entonces $(v_x, v_y) = (0,0) + (0, -9,8)t$, o sea, $(v_x, v_y) = (0, -9,8t)$.

Figura 7 – Representación de vectores en caída libre



Fuente: Valenzuela (2021, p. 69)

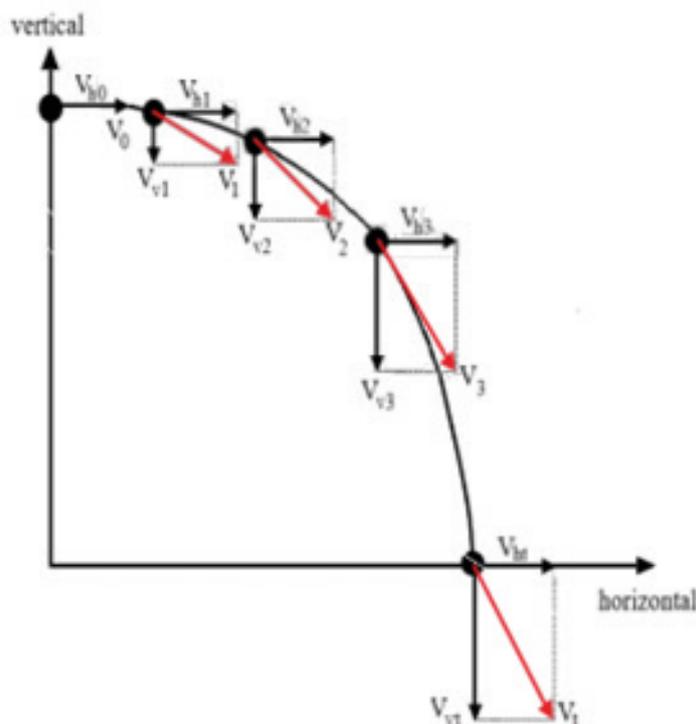
T_{GS5} : representar, por medio de una figura, las velocidades que un cuerpo experimenta al ser lanzado con velocidad horizontal constante, desde una determinada altura describiendo una trayectoria semiparabólica.

La técnica T_{GS4} para el dibujo incluye a análisis del movimiento que es compuesto de un movimiento horizontal y otro vertical. En el movimiento horizontal, la velocidad es constante, esto es, $V_{h0} = V_{h1} = V_{h2} = \dots = V_{ht}$.

Con relación al movimiento vertical, este es con aceleración constante. Particularmente en este caso, se trata de un movimiento de caída libre y una aceleración que es llamada gravedad. La velocidad inicialmente, cuando el cuerpo es liberado, es cero. En seguida, aumenta gradualmente con el tiempo y se observa que la velocidad lo hace proporcionalmente a la gravedad, $V_{v0} = 0$, $V_{v1} = g$, $V_{v2} = 2g \dots V_{vt} = gt$.

Para determinar la velocidad en cada instante de tiempo, las velocidades horizontal y vertical en aquel instante deben ser sumadas vectorialmente (vea la Figura 8).

Figura 8 – Movimiento parabólico

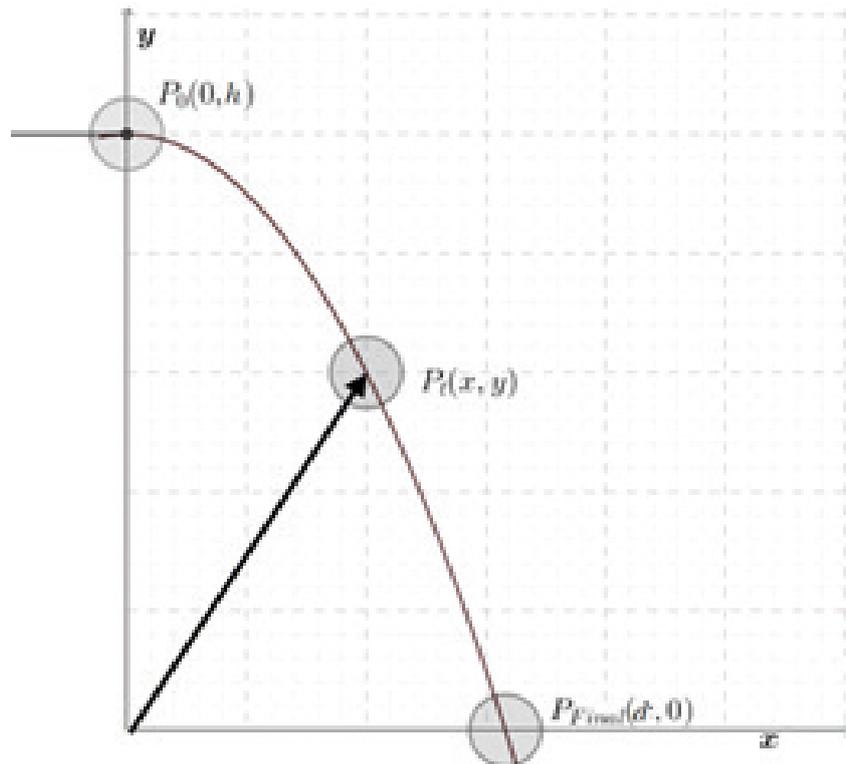


Fuente: Valenzuela (2021, p. 70)

Para Roque (2012), los diagramas que Galilei utilizó para representar el movimiento fueron de suma importancia para demostraciones de proposiciones de naturaleza geométrica. Además, afirma que la historia tradicional, preocupada con la cuestión de los precursores, ve también allí un antecedente para el plano cartesiano. Sin embargo, las obras *Discurso sobre el método* y *La geometría*, de Descartes, ya habían sido publicadas, pero Galilei no estaba al tanto de esas obras.

Así, considerando el referencial cartesiano, permite identificar un primer tipo de tarea en la Geometría Analítica en que un cuerpo en queda libre en el que actúan dos velocidades tendrían sus direcciones representadas paralelamente al eje de las abscisas e de las ordenadas: : determinar la distancia horizontal (d) que un cuerpo alcanza cuando es lanzado de una cierta altura (h) con velocidad horizontal constante (v) describiendo una trayectoria semiparabólica al tocar el suelo.

La técnica T_{GA1} para resolver esta tarea consiste en representar el movimiento rectilíneo uniforme en la componente de las abscisas y el movimiento rectilíneo uniformemente variado, que tiene la acción de la gravedad, en la componente de las ordenadas, basado en el que mostró Galilei. El problema involucra un movimiento parabólico, como en la Figura 9.

Figura 9 – Posición de un cuerpo en caída libre

Fuente: Valenzuela (2021, p. 71)

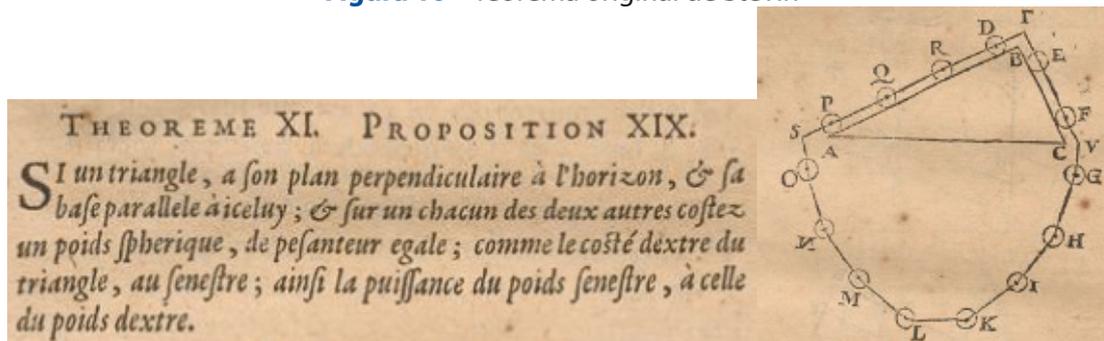
Dado el punto posición $P_t(x, y)$, el cuerpo inicia el movimiento cuando la componente del vector posición es $P_0(0, y) = (0, h)$ y no solo es $P_{Final}(d, 0)$. $P_t(x, y) = (0, h) + (v, 0)t - 1/2(0, g)t^2$.

Cuando el cuerpo está en movimiento en la posición $P_t(x, y) = (vt, h - 1/2gt^2)$, cada componente de la posición describe un movimiento horizontal y vertical. En el movimiento horizontal, $x = vt$, sin embargo, en el movimiento vertical, $y = h - 1/2gt^2$. Ello significa que las dos componentes del vector dependen del mismo tiempo. Para calcular el alcance tenemos que $0 = h - 1/2gt^2$ entonces, $h = 1/2gt^2$ y, por tanto, $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Este tiempo es el mismo para determinar la distancia horizontal. Así, substituyendo $d = vt = v\sqrt{\frac{2h}{g}}$, el alcance dependerá de cuál será el tiempo transcurrido. La técnica es justificada por adición de vectores y producto de un vector por un escalar.

De acuerdo con Jeans (1953), Stevin (1548 – 1620), interesado en mecánica estática, presentó, en 1586, la ley que actualmente denominamos ley del paralelogramo de fuerzas, sin cualquier experimento real, pero imaginando un experimento ideal cuyo resultado puede ser previsto con facilidad, con el enunciado del teorema presentado en la Figura 10.

El teorema, acompañado de la figura llamada cadena de Stevin, afirma que, si una cadena conteniendo catorce eslabones igualmente espaciados sobre los lados de un triángulo rectángulo está en equilibrio cuando cuatro eslabones están sobre el cateto mayor y dos sobre el cateto menor, entonces, es inconcebible que comience a moverse espontáneamente. En caso eso suceda, sería realizado un movimiento perpetuo, porque, en este caso, los dos eslabones de la derecha serían incapaces de equilibrar los cuatro de la izquierda y, supuestamente, los eslabones deben girar continuamente en sentido antihorario.

Figura 10 – Teorema original de Stevin



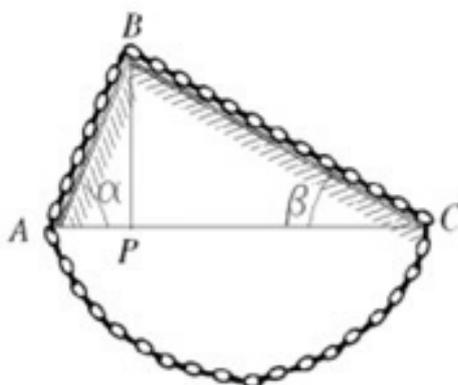
Fuente: Stevin (1634, p. 448)

De acuerdo con Jeans (1953), Stevin imaginó una cuña que se apoya firmemente en el lado horizontal AC que, cuando se apoya en el vértice B , hace con que la cadena circular $ABCD$ permanezca en reposo. Ese resultado sería imposible porque, hasta ese momento, la alternativa concebida era un movimiento perpetuo que, desde los griegos, era un lugar común en la ciencia. Para el autor, los escritos de Stevin de 1634 muestran que el pedazo colgado de la cadena, ADC , podría ser removido sin alterar el equilibrio del resto, o sea, de las partes AB y BC de la corriente, pues las cuentas de esas partes son proporcionales a las longitudes de los lados. Tal resultado, por un simple raciocinio matemático, conduce a una regla para determinar el efecto de dos fuerzas que actúan simultáneamente sobre un mismo objeto.

Este ingenioso argumento se apoya en una mezcla de conocimiento experimental (imposibilidad de movimiento continuo), de intuición y de suposición que tiene importancia sobre dos aspectos: de la idea de un cuerpo sometido a la acción simultánea de varias fuerzas y de un resultado que fue indispensable para el progreso de la mecánica. Ese teorema, que permite descomponer las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, permite enunciar el siguiente tipo de tarea en la GS. T_{GS6} : identificar y representar por medio de una figura las fuerzas que actúan, simultáneamente, en la cadena de Stevin para permanezcan en equilibrio.

Para resolver esa tarea es necesario identificar las direcciones en que las fuerzas actúan, como en el ejemplo de la Figura 11. Como mostró Stevin, consideramos un triángulo ABC en que el conjunto de anillo de la cadena, apoyados en cada lado del triángulo, es considerado un único objeto.

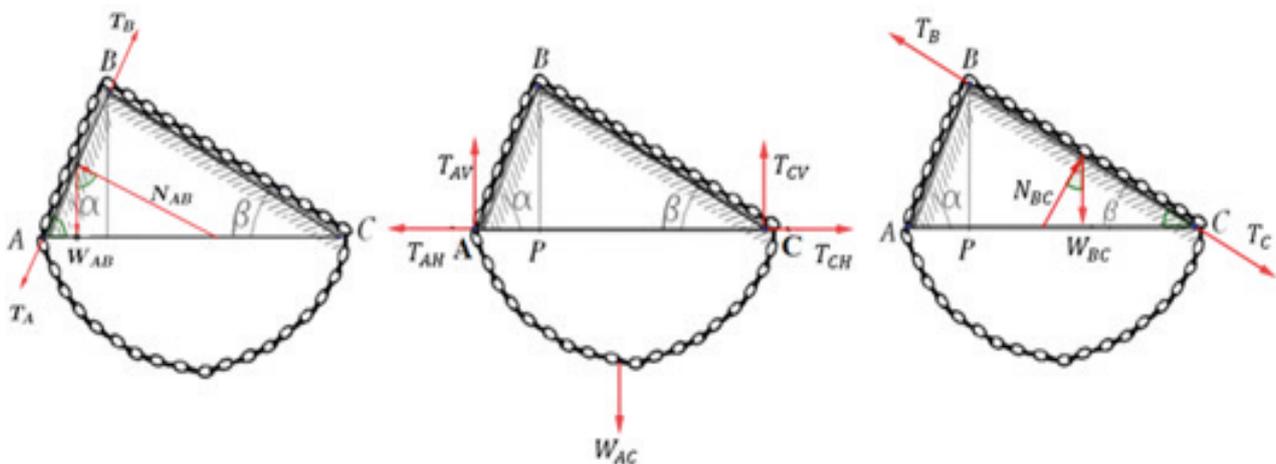
Figura 11 – Cadena de Stevin para la descomposición de fuerzas



Fuente: Serrano (2010, p. 3).

En esa figura, tenemos el triángulo ABC y, como la cadena está en dos de sus lados AB y BC, inferimos que sobre el lado AB actúa una fuerza de tensión en el punto B que denotamos por T_B y otra en el punto A de sentido opuesto, denotada por T_A . Cada anillo de la cadena, a su vez, tiene un peso que hace una fuerza para abajo, W_{AB} . Además, cuando el cuerpo está en la superficie, ejerce una fuerza denotada por N_{AB} que forma con el vector W_{AB} un ángulo α . La Figura 9 muestra los detalles de la representación de las fuerzas en el lado AB del triángulo. El lado AC, que está colgado la cadena, presenta las fuerzas en los extremos. Para el extremo A, se tiene tensión en la dirección vertical T_{AV} y la fuerza de la tensión horizontal, en cuanto para el extremo C existe la fuerza en la dirección vertical y otra horizontal – respectivamente T_{CV} y T_{CH} . Y en el medio de la cadena, por la atracción y el peso de las bolas, tenemos la fuerza W_{AB} en dirección vertical en el sentido para abajo (Figura 12, lado AC).

Figura 12 – Representación de fuerzas que actúan en la cadena de Stevin



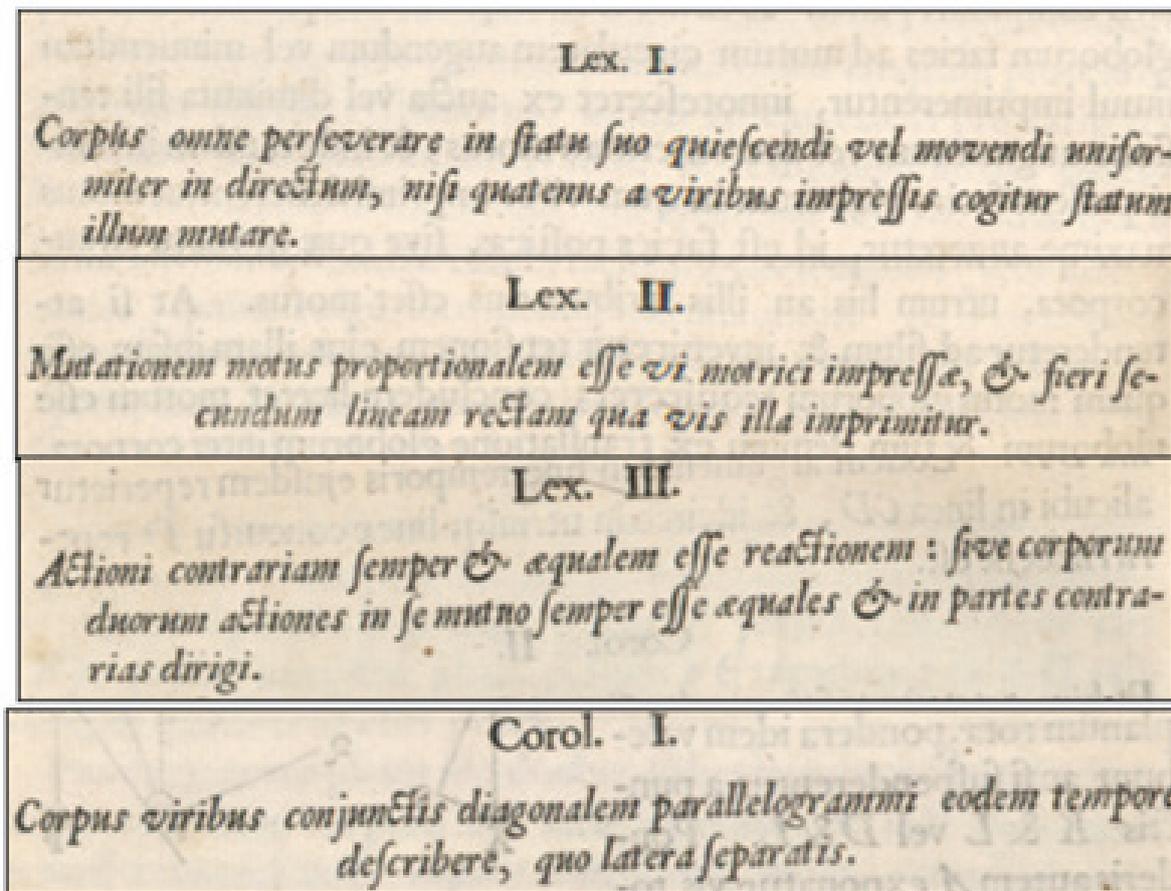
Fuente: adaptado de Serrano (2010, p. 3)

En el lado BC, percibimos que en el extremo B actúa la fuerza T_B y que en el extremo C existe otra tensión T_C en sentido opuesto a T_B . Debido al peso de los anillos de la cadena, hay una fuerza peso W_{BC} y, en el mismo lado AB, los cueros en la superficie provocan una fuerza en el lado N_{BC} en la dirección que forma un ángulo β con W_{AC} . Estas fuerzas descritas hacen con que la cadena este en equilibrio, como Stevin justificaba.

Según Jeans (1953), el uso de vectores tiene su origen en la Mecánica, un campo de conocimiento que tuvo notorios avances en el siglo XVI con relación a la época de Arquímedes. El autor afirma que la mecánica, como una nueva ciencia, quedó establecida con base en las investigaciones de Stevin y de Galilei que, aunque son contemporáneos y trabajan de forma independiente, tienen resultados que se complementan entre sí.

En el siglo XVII, los aportes importantes de Newton (1642-1727) contribuyen para establecer la matematización del movimiento. En su obra *Principia*, Newton propone las tres leyes y un corolario, enunciadas en la Figura 13, que podrían ser considerados como avances en relación a Stevin, pues formaliza la regla del paralelogramo.

Figura 13 – Leyes de Newton



Fuente: Newton (1687, p. 12-13).

Esas leyes indican:

Ley I. Todo cuerpo permanece en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme a menos que se vea obligado a modificar este estado por la acción de fuerzas sobre él.

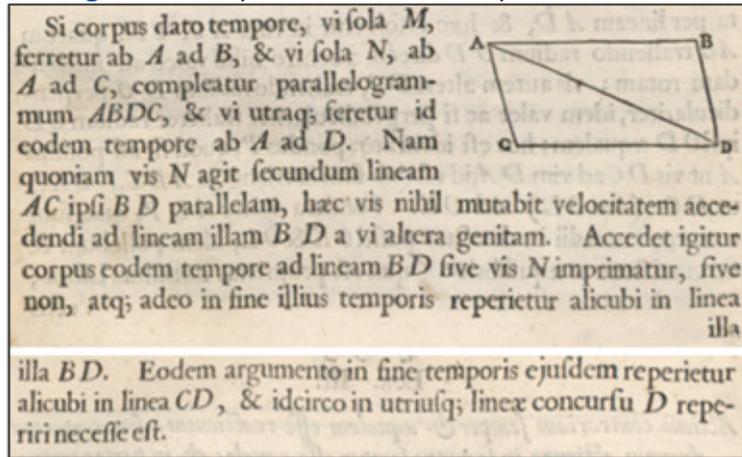
Ley II. La suma de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es igual al producto de su coeficiente de inercia por su aceleración.

Ley III. A toda acción que un cuerpo ejerce sobre un segundo cuerpo corresponde una reacción del segundo sobre el primero de misma intensidad y sentido opuesto.

(ANTUNEZ, GALHARDI, HERNASKI, 2018, p. 331-332, traducción nuestra).

La segunda ley es también conocida como ley de la inercia y una consecuencia de esas tres leyes es el corolario que se traduce en la actualidad por: corolario 1. Si dos fuerzas actúan en un cuerpo simultáneamente, la fuerza resultante es descrita por la diagonal de un paralelogramo cuyos lados describen las fuerzas separadamente. Newton utiliza la Geometría Sintética para explicar, como muestra la Figura 14, en que afirma que, si un cuerpo, en un momento dado, sufre la acción de una única fuerza M en el punto A , entonces, existe un movimiento uniforme de A para B . Y, si el cuerpo sufre la acción de una única fuerza N en el mismo punto, existe, entonces, un movimiento de A para C , el que determinaría así el paralelogramo $ABCD$. Con eso, el referido cuerpo será movido por ambas fuerzas, al mismo tiempo, en la diagonal del paralelogramo de A para B , una vez que la fuerza N actúa en la línea AC , paralela a BD , que, de acuerdo con la segunda ley, no es alterada por la otra fuerza. Por tanto, el cuerpo alcanzará la línea BD al mismo tiempo que la fuerza N es aplicada y, en el final, estará en algún lugar de esa línea.

Figura 14 – Explicación de Newton para el corolario



Fuente: Newton (1687, p. 13 -14).

Por la misma razón, al final de ese período, la fuerza estará en algún lugar en la línea CD , por la actuación de la fuerza M y, por tanto, es necesario que este en la intersección B de ambas líneas. Luego, continuará, en movimiento rectilíneo de A para D , de acuerdo con la primera ley.

La versión moderna de estas leyes y del corolario en el lenguaje vectorial actual permite describirlas de forma más concisa para lo que realmente es importante para el movimiento.

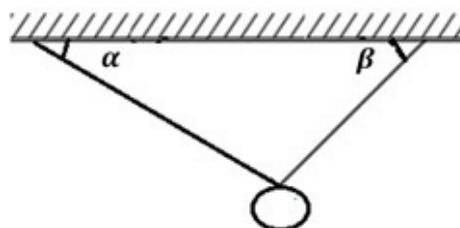
Ley I. Un cuerpo permanece en su estado inicial de reposo o se mueve con velocidad uniforme a menos que sobre él actúe una fuerza exterior no equilibrada.

Ley II. La aceleración de un cuerpo es inversamente proporcional a su masa y directamente proporcional a la fuerza exterior resultante que actúa sobre él: $a = \Sigma F/m$, o sea, la suma de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es: $\Sigma F = F_{res} = ma$.

Ley III. Las fuerzas se presentan siempre en pares. Si el cuerpo A ejerce una fuerza sobre el cuerpo B , este ejerce sobre A una fuerza de igual módulo y dirección, pero de sentido opuesto.

En la versión actual, describimos el corolario como: si dos fuerzas actúan en un cuerpo simultáneamente, la fuerza resultante es descrita por la diagonal de un paralelogramo; al mismo tiempo, sus lados describen las fuerzas separadamente. Así, considerando los vectores en la GS , podemos formular la siguiente tarea: T_{GS7} : representar las fuerzas que actúan simultáneamente en un cuerpo de peso W cuando se encuentra en equilibrio como se representa en la Figura 15.

Figura 15 – Cuerpo suspendido en el techo



Fuente: Valenzuela (2021, p. 77)

La técnica es identificar todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Para eso, observamos que la cuerda forma un ángulo con el techo y sufre una tensión T_1 , mientras que para la cuerda con ángulo β la tensión es T_2 . Finalmente, el peso del cuerpo W es una fuerza en dirección vertical y sentido para abajo. Por la Ley de Newton, si un cuerpo está en equilibrio, entonces, la suma de las fuerzas es $T_1 + T_2 + W = 0$, como se muestra en la Figura 16.

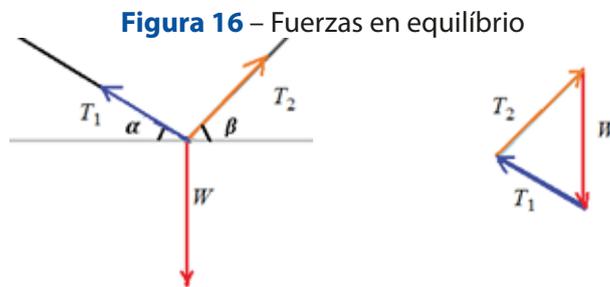


Figura 16 – Fuerzas en equilibrio

Fuente: Valenzuela (2021, p. 77)

Considerando un referencial cartesiano y aplicando el corolario formulado por Newton podemos identificar otro tipo de tarea en la GA.

T_{GA3} : determinar la fuerza resultante cuando dos fuerzas actúan en un cuerpo simultáneamente.

Considerando que los módulos de las tensiones son T_1 y T_2 , con relación al peso del cuerpo W , utilizando la ley de Newton de equilibrio de fuerzas tenemos:

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$(-T_1 \cos \alpha, T_1 \sin \alpha) + (T_2 \cos \beta, T_2 \sin \beta) + (0, -W) = (0,0)$$

$$(-T_1 \cos \alpha + T_2 \cos \beta, T_1 \sin \alpha + T_2 \sin \beta - W) = (0,0).$$

Identificando cada componente, tenemos en la componente horizontal:

$$-T_1 \cos \alpha + T_2 \cos \beta = 0$$

$$T_2 \cos \beta = T_1 \cos \alpha$$

$$T_2 = T_1 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \dots (1)$$

En la componente vertical:

$$T_1 \sin \alpha + T_2 \sin \beta - W = 0$$

$$T_1 \sin \alpha + T_2 \sin \beta = W \dots (2)$$

Sustituyendo (1) en (2)

$$T_1 \sin \alpha + T_1 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \sin \beta = W$$

$$T_1 \left(\frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \beta} \right) = W$$

De esta manera encontramos la tensión $T_1 = \left(\frac{\cos \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} \right) W \dots (3)$

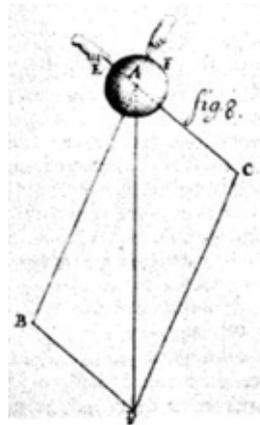
Sustituyendo (3) en (1), encontramos la tensión $T_2 = \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} \right) W$

La técnica es justificada por la adición de vectores, igualdad de vectores y producto de vectores por un escalar.

Según Truesdell (1975), en 1687, año en que fue publicado su libro *Principia*, Varignon⁵ publicó su proyecto para una nueva mecánica (*Nouvelle Mécanique*) en que aplicó la regla del paralelogramo para fuerzas basado en una visión aristotélica para la solución de problemas que no habían sido investigados por Newton.

En una de las ilustraciones del paralelogramo de fuerzas que presentó (Figura 17), Truesdell (1975) indica con un dedo que la fuerza actúa de A para B y, con otro dedo, que la fuerza que actúa de A para C tiene como resultante una fuerza de A para D.

Figura 17 – Una ilustración para el paralelogramo de fuerzas



Fuente: Truesdell (1975, p. 148).

En 1637, Descartes, en su obra *Géométrie*, utiliza el término “imaginario” para los números que son raíces de negativos “ni raíces verdaderas, ni raíces falsas (negativas) son siempre reales, a veces imaginarios” (DESCARTES, 1954, p. 380).

En el siglo XVIII, los números imaginarios quedan establecidos y Leonhard Euler (1707-1783), en su memoria *De Formulis Differentialibus Angularibus* (1777), utiliza la notación i para referirse a la unidad imaginaria $\sqrt{-1}$ y, de acuerdo con Sánchez (2011, p. 3) escribió: “en seguida, denotaré la expresión $\sqrt{-1}$ como i , resultando entonces que $ii = -1$ ”. De acuerdo con Sánchez, hasta esa época los números complejos aún no tenían una teoría, pero ese desarrollo ocurrió por dos caminos – por un lado, asociados a una interpretación geométrica y, por otro lado, como expansión del concepto de número existente hasta entonces. La representación geométrica para números complejos como puntos en un plano fue realizada, simultáneamente y sin conexión, por el noruego Caspar Wessel (1745-1818), el franco-sueco Jean Robert Argand (1874) y el alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855). En 1797, Wessel presentó en un documento para la reunión de la Real Academia Dinamarquesa de Ciencias una interpretación geométrica de los números complejos con el objetivo de abordar:

⁵ Pierre Varignon (1654-1722), publicó en 1687 su tratado *Nouvelle mécanique ou Statique* como resultado de un estudio geométrico que, contrario a la opinión de los matemáticos franceses de su época, escribió las ideas presentadas por Newton con la notación y abordaje de Leibniz para el análisis.

[...] la cuestión de cómo podemos representar una dirección analíticamente; esto es, como expresaremos líneas (segmentos rectos) de tal manera que en una ecuación que resulta en una línea desconocida y otras líneas conocidas, la longitud y la dirección de la línea desconocida puedan ser expresadas. (SÁNCHEZ, 2011, p. 5)

Wessel definió la adición de segmentos rectos colocando el punto inicial de un segmento en el punto final del otro y percibió que la propiedad conmutativa es viable. Luego, definió la multiplicación de segmentos basado en un sistema de ejes perpendiculares considerando +1 como unidad en un de los ejes y + ϵ como unidad en el otro, y escribió:

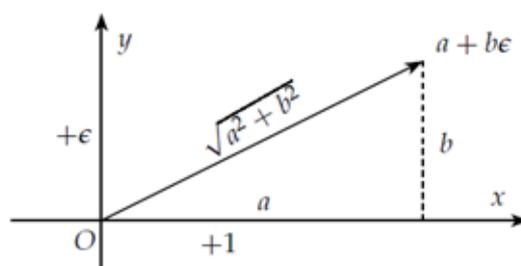
Sea la unidad rectilínea positiva y + ϵ la otra unidad perpendicular la unidad positiva tomada anteriormente, ambas con el mismo origen; entonces el ángulo de dirección de es igual a 0° y, por tanto, para -1 es 180° , para es 90° y para es -90° o 270° . Por la regla de que el ángulo de la dirección del producto es igual a la suma de los ángulos de los factores, tenemos: $(+1)\cdot(+1)=+1$; $(+1)\cdot(-1)=-1$; $(-1)\cdot(-1)=+1$; $(+1)\cdot(+\epsilon)=+\epsilon$; $(-1)\cdot(+\epsilon)=-\epsilon$; $(+\epsilon)\cdot(+\epsilon)=-1$; $(+\epsilon)\cdot(-\epsilon)=+1$; $(-\epsilon)\cdot(-\epsilon)=-1$. A partir de ese resultado, se observa que es igual a y que la divergencia del producto es determinada de tal manera que ninguna de las reglas operacionales comunes es violada (SÁNCHEZ, 2011, p. 5)

Podemos identificar a partir de esos resultados un nuevo tipo de tarea en la Geometría Analítica.

T_{GA4} : representar geoméricamente números complejos en un referencial cartesiano.

Wessel también establece que cualquier segmento recto podría ser representado mediante a expresión $a+b\epsilon$ e representado geoméricamente por la Figura 18.

Figura 18 – Representación gráfica vectorial del número complejo de Wessel

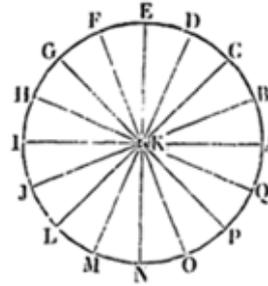


Fuente: Sánchez (2011, p. 5)

Por otro lado, Argand (1874), en su ensayo *Essai d'une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, representa los números imaginarios por medio de construcción geométricas en un referencial, llamado plano de Argand, considerando las medias proporcionales entre cantidades de mismo signo: $-1:+x::+x:-1$ o $+1:+x::+x:+1$ en que la cantidad x debe ser +1 o -1. De esa manera, la cuestión de determinar la media proporcional entre dos cantidades de signos diferentes hace con que Argand investigase las cantidades que pueden satisfacer a $+1:+x::+x:-1$, o sea, las que solucionan la ecuación $x^2 = 1$. Para eso, explicó las ideas de grandeza absoluta y dirección asociadas a las cantidades negativas afirmando que:

[...] si tomamos un punto fijo K (fig 1) y adoptamos por unidad positiva la línea KA, considerada como teniendo la dirección de K para A, el que se podrá designar por \overline{KA} , para distinguir esta cantidad de la línea en que consideramos solamente la grandeza absoluta, la unidad negativa será \overline{KI} , el trazo superior teniendo el mismo destino que aquel que está colocado sobre KA, y la condición que se trata de satisfacer será

rellenado por la línea KE, perpendicular las anteriores y considerada como teniendo su dirección de K para E, y que expresamos también por \overline{KE} . (ARGAND, 1874, p. 6-7)



Así, la condición de proporcionalidad exigida para a cantidad es satisfecha por las líneas KE e KN y, por tanto, las grandezas geométricas que satisfacen la proporción requerida son KE y KN que pueden ser vistas como representaciones geométricas de $+\sqrt{-1}$ e $-\sqrt{-1}$.

De acuerdo con Roque (2012), la representación de Argand para números negativos surgió de la concepción de una oposición de sentido establecida a partir de un punto neutro definido como punto 0 como referencial que permite la elección de un sentido que tornará un número positivo o negativo. Para representar las cantidades imaginarias, obtiene el mismo suceso combinando las ideas de grandeza absoluta y de dirección que no es dada más como oposición, pues como la proporción impone a “+1 estar para +x, como esa cantidad está para -1”, entonces, la dirección debe ser una perpendicular y por eso la multiplicación por $\sqrt{-1}$ debe ser entendida como una rotación en torno de O. En ese ensayo, Argand también propone la idea de módulo para números complejos y para vectores, bien como su notación típica por una flecha encima de los puntos que representan sus extremidades: \overrightarrow{AB} .

Según Oliveira (2010, p. 47), veinticinco años después el trabajo de Argand, el matemático Gauss (1777-1855) publicó, en 1831, el ensayo *Theorie Residuorum Biquadraticorum* en que trata de la teoría de las cantidades llamadas números imaginarios, introdujo el término “número complejo” y pasó a usar la notación por pares ordenados, (a, b) , para representar el número complejo $a + bi$, además de definir las operaciones entre números complejos representados por pares ordenados. Tales resultados nos permiten identificar otro tipo de tarea en la GA.

T_{GA5} : representar números complejos como pares ordenados.

El 4 de noviembre de 1833, Hamilton presentó un artículo a la *Royal Irish Academy* sob el nombre de *Teoría de las funciones conjugadas, o pares algébricos* en que definió las operaciones de adiciones y multiplicación para pares ordenados y mostró que el cuadrado del par $(0, 1)$ es el par $(-1, 0)$, de modo que $(0, 1)$ debe ser considerado como $\sqrt{-1}$. Así, Hamilton introdujo los números complejos como un álgebra formal de pares ordenados de números reales con las operaciones definidas como usamos actualmente:

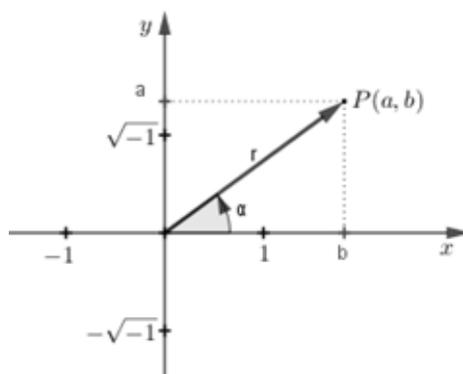
$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ \lambda(a, b) &= (\lambda a, \lambda b) \\ (a, b)(c, d) &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

Además, el calificó el conjunto de pares ordenados como un cuerpo después de observar algunas propiedades aritméticas para esas operaciones. Interpretó además el producto definido formalmente por grandezas orientadas en el plano como un producto en que interviene una rotación y sugirió la extensión de esas operaciones para el espacio.

Para Sánchez (2011), Hamilton fue el primer matemático en tratar los números complejos como pares ordenados, aunque su análisis difiere tanto del punto de vista de los textos modernos como de sus contemporáneos algebristas de Cambridge que veían los números complejos como un conjunto de reglas para manipulación simbólica sin sentido. El autor resalta que Hamilton consideró el álgebra fuertemente conectada a la física en que una interpretación geométrica de números complejos tenía sentido como la realidad material del mundo que nos rodea.

Tait (1882) comenta que, por más de un siglo y medio, la representación geométrica de cantidades algébricas, negativas o imaginarias -1 e $\sqrt{-1}$, era un asunto de especulación entre matemáticos que proponían el uso de símbolos para designar el sentido y no la longitud de una línea recta. Durante un bien tiempo dominaba el principio de que se media cantidades positivas a lo largo de una línea fija en un determinado sentido y cantidades negativas en el sentido opuesto de la misma línea. Este método fue la base del método geométrico de Descartes, en la Geometría Analítica y en la matemática aplicada a la Física – para representar el número $a+b\sqrt{-1}$, considera las cantidades reales en el eje de las abscisas y las cantidades imaginarias en el eje de las ordenadas (Figura 19) para representar ese número por un punto $P = (a, b)$ en el plano.

Figura 19 – Representación de un número complejo por un vector



Fuente: adaptado de Tait (1882, p. 3)

El punto P determina un segmento con el punto que representa el origen del referencial, cuya longitud es dada por $r = \sqrt{(a^2+b^2)}$, y una dirección que determina el ángulo (denotado por α) que forma con el eje de las abscisas. La percepción del triángulo rectángulo conduce a observar que la tangente de ese ángulo es b/a , en otras palabras, el punto que representa el número (a, b) se desplaza en sentido antihorario según un ángulo α .

Estos resultados conducen a la representación trigonométrica para los números complejos y Tait (1882) afirma que operar $\cos \alpha + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \alpha$ sobre una recta del plano provoca un giro en la dirección positiva de un ángulo igual a α . De modo que:

$$(\cos \alpha + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \alpha)(a + \sqrt{-1}b) = a \cos \alpha - b \operatorname{sen} \alpha + \sqrt{-1}(a \operatorname{sen} \alpha + b \cos \alpha)$$

que tiene longitud calculado por:

$$[(a \cos \alpha - b \operatorname{sen} \alpha)^2 + (a + b \cos \alpha)^2]^{\frac{1}{2}} = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$$

e inclinación en relación a eje de las abscisas por:

$$\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{a \cos \alpha - b \operatorname{sen} \alpha}{a \cos \alpha + b \operatorname{sen} \alpha} \right) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\operatorname{tang} \alpha + \frac{b}{a}}{1 - \frac{b}{a} \operatorname{tang} \alpha} \right) = \alpha + \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{b}{a} \right).$$

Estos avances en el estudio de números complejos conducen a la necesidad de considerar elementos de la trigonometría tanto para ampliar sus representaciones como para facilitar cálculos, ello conduce a identificar otro tipo de tarea en la GA.

T_{GA6} : representar un número complejo en su forma trigonométrica

La técnica para representar un número complejo $z = a+bi$ es determinar el módulo del número $\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y el ángulo $\theta = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{b}{a} \right)$. Por tanto, $z = a + bi = r \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$.

Por el estudio gráfico, Argand introduce la notación para indicar un segmento con origen en A en el sentido de B en la dirección determinada por AB, Möbius, Bellavitis e Hamilton definieron un segmento orientado. Möbius (1790-1868), en su obra *Barycentrische Calcul*, publicada en 1827, presentó un sistema geométrico donde un segmento es representado por la diferencia entre dos puntos, esto es, $AB=B-A$, que $AB+BA=0$ o $AB=-BA$ y, con eso, desarrolla una aritmética para segmentos de recta definiendo la adición y la multiplicación por un número real.

Conforme a Crowe (1994) en la obra *Calcolo delle Equipollente* de Giusto publicada en 1832, Bellavitis (1803-1880) aproximó las definiciones de vectores del sentido euclidiano con una explicación completa de ese método considerando que:

1° Una línea (recta) expresada usualmente por dos letras es entendida como tomada a partir de la primera letra hasta la segunda, así y no pueden ser considerados la misma entidad, pero como dos cantidades iguales con signos opuestos.

2° Dos líneas son llamadas *equipolentes* si ellas son iguales, paralelas y dirigidas en el mismo sentido.

3° Se dos o más rectas son relatadas de tal forma que la segunda extremidad de cada recta coincide con la primera de la siguiente, entonces la línea, que juntamente con esta forma un polígono (regular o irregular), y que es trazada a partir de la primera extremidad de la primera línea hasta la segunda de la última, es llamada suma equipolente (compuesta equipolente). Esta es representada por el signo interpuesto entre las líneas combinadas, y el signo indica la equipolencia. Así tenemos

$$AB + BC \simeq AC$$

$$AB + BC + CD \simeq AD \text{ etc.}$$

Tales equipolências continuam verdaderas quando substituídas por suas líneas o por líneas respectivamente equipolentes a ellas [...] (CROWE, 1994, p. 52, traducción nuestra).

Lo descrito en el primer párrafo permite identificar la noción de vector en la GS, pero sin explicitar lo que es segmento orientado, sin embargo, tiene la noción de sentido en una determinada dirección define igualdad y adición de líneas. Luego, describe el caso para líneas en un plano cuyas posiciones determinan ángulos entre ellas:

1. Vamos a restringir, ahora, a líneas situadas en el plano. La inclinación de la línea AB es el ángulo HAB, que forma con la horizontal AH trazada de izquierda a derecha, calificando como positivo los ángulos medidos de la derecha para arriba y de 0° a 360° [...].
2. El ángulo o inclinación de CD sobre AB es igual a la inclinación de CD menos la de AB. (CROWE, 1994, p. 52, traducción nuestra).

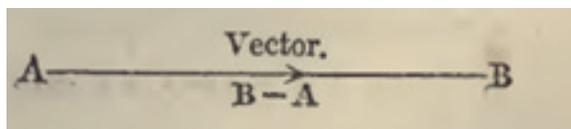
El autor presenta el siguiente teorema:

Teorema Fundamental. En equipolencias, los términos son transpuestos, sustituidos, adicionados, sustraídos, multiplicados, divididos etc., en fin, sufren todas las operaciones algebraicas que serían legítimas si se tratase de ecuaciones, y las equipolencias resultantes son siempre exactas. Como fue indicado en 5°, las equipolencias no lineales solo pueden ser referidas en números en un único plano. (CROWE, 1994, p. 53, traducción nuestra).

Crowe (1994) concluye que Bellavitis describe entidades geométricas que son equivalentes, en comportamiento a los números complejos representados geoméricamente, pero que no generaliza el producto de segmentos orientados.

Tait no usa la diferencia entre el extremo B y el origen A, utilizado por otros investigadores, como en la definición de vector presentada por Hilton en 1843, Grassmann en 1844 y por Burali-Forti (1861-1931) y Marcolongo (1862-1943) en 1910. Hamilton introduce la palabra vector afirmando que:

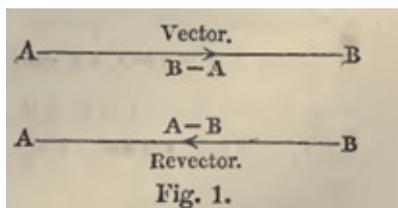
Una línea recta AB, considerada como teniendo no solo longitud, si no también dirección, es considerada un VECTOR. Se dice que su punto inicial A es su origen y su punto final es B. Un vector AB es concebido para ser (o construir) la diferencia de sus dos puntos extremos; o, más plenamente, sea el resultado de la sustracción de su propio origen de su propio termino; y, en conformidad con esa concepción, también es denotado por el símbolo $B-A$: una notación que será considerada extremadamente útil debido a las analogías que sirve para expresar entre operaciones geométricas y algébricas.



(HAMILTON, 1866, p. 1, traducción nuestra).

También Hamilton define vector nulo y vector opuesto o revector y explica que cuando los puntos extremos A y B son distintos, el vector AB o $B - A$ es considerado un vector real (o efectivo), pero cuando (como límite) esos dos puntos son concebidos para coincidir, el vector AA o $A - A$ es considerado nulo y que el vector opuesto es definido de modo similar a AB siendo BA representado por $A - B$, y lo ilustra como la Figura 20.

Figura 20 – Representación de Hamilton para vector opuesto



Fuente: Hamilton (1866, p. 1)

Cabe observar que, la definición actual para vector, en la Geometría Sintética, es dada por:

dos o más segmentos orientados de misma longitud, misma dirección (paralelos o colineales) y mismo sentido son representantes de un vector. En la Figura 1.3, todos los segmentos orientados paralelos, del mismo sentido y misma longitud de AB, representan el mismo vector que será indicado por \overrightarrow{AB} o B-A, en que A es el origen y B es la extremidad del segmento. El vector también acostumbra ser indicado por una letra minúscula con una flecha encima, tal como \vec{v} .

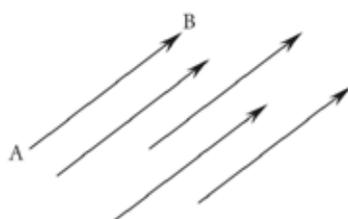
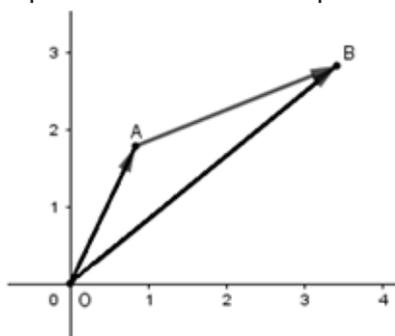


Figura 1.3

(WINTERLE, 2014, p. 2-3)

En dicha definición se observa claramente la diferencia entre dirección y sentido, sin embargo, el autor utiliza la notación que persiste, B - A que conduce a una interpretación operatoria que no es definida para puntos, pero si para vectores, o sea, el vector AB puede ser representado por $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$ (Figura 21), de acuerdo con la definición de sustracción (inverso aditivo) de vectores.

Figura 21 – Representación de vector por suma de vectores



Fuente: Valenzuela (2021, p. 87)

Tait (1882) afirma que dos vectores son iguales si tienen igual longitud, son paralelos y tienen el mismo sentido y lo representa por $\overrightarrow{AB} = \alpha$. Estableciendo su igualdad con el vector \overrightarrow{CD} , denotado por: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \alpha$. Nótese que el autor utiliza el símbolo de igualdad, pero en la actualidad usamos el símbolo de equivalencia o equipolencia. Esta definición nos conduce al tipo de tarea:

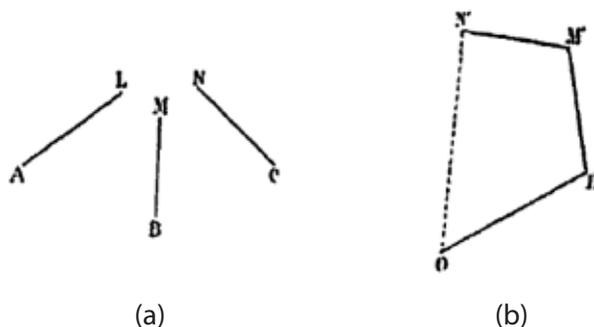
T_{GS8} : determinar la igualdad de vectores.

Cuando se tiene la descomposición de un vector la igualdad de vectores es comparando cada una de las componentes, lo que permite tener el tipo de tarea en la GA:

T_{GS8} : determinar la igualdad de vectores.

En cuanto Hamilton trata la adición de vectores en el plano a través de un paralelogramo, Tait (1873, p. 9) define considerando A, B y C tres puntos cualesquiera y establece que, si $\overline{AB} = \alpha$, $\overline{BC} = \beta$, $\overline{AC} = \gamma$ la relación $\alpha + \beta = \gamma$ representa que $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$, y a partir de ello presenta sus posibilidades. Por ejemplo, si $A = C$, entonces, lo que implica que $\overline{AB} + \overline{BA} = 0$ (observando que el signo “-” aplicado a un vector produce el efecto de invertir el sentido del vector). Tait afirma además que en un triángulo ABC , $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$ y para un polígono, se procede del mismo modo, afirmando que $\overline{AB} + \overline{BC} + \dots + \overline{YZ} + \overline{ZA} = 0$. Finalmente, concluye que $\overline{AB} + \overline{BC} + \dots + \overline{YZ} = \overline{AZ}$. Estas relaciones aparecen si se apoya en las reglas del movimiento establecidas en los Principios de Newton, como la regla de la composición de las fuerzas. Tait (1882) presenta un ejemplo para la adición de tres vectores, $\overline{AL} + \overline{BM} + \overline{CN}$ (Figura 22a) afirmando que sus orígenes deben estar en un determinado punto O (Figura 22b).

Figura 22 – Representación de la adición de vectores según Tait en la GS



Fuente: Tait (1882, p. 12)

Tait presenta la solución en tres pasos: 1) hacer coincidir el punto A con el punto O y construir \overline{OL} con la misma longitud y paralelo a \overline{AL} ; 2) hacer coincidir B con L' y construir $\overline{L'M'}$ con la misma longitud y paralelo a \overline{BM} y 3) hacer coincidir C con M' y construir $\overline{M'N'}$ con la misma longitud y paralelo a \overline{CN} , concluyendo que representa la suma $\overline{AL} + \overline{BM} + \overline{CN}$. Con eso podemos determinar un tipo de tarea más en la GS:

T_{GS9} : representar la adición de vectores en la Geometría Sintética

La técnica es por el método del paralelogramo, identificando los segmentos orientados que estén con origen en un mismo punto. Entonces la adición es el segmento que forma parte del paralelogramo que tiene el mismo inicio que los vectores.

De acuerdo con Dorier (1997), la representación de números complejos por vectores en el plano ya era conocida, pero extender los “números” bidimensionales para tridimensionales preservando las propiedades algebraicas básicas de los números reales y complejos, intentada por muchos matemáticos, fue conseguida por Hamilton en su obra *Elements of Quaternions*. De acuerdo con Sánchez (2011), Hamilton consideró las ternas $a + bi + cj$ en que a, b y c representan números reales y que $i^2 = j^2 = -1$, lo que, por analogía con los números

complejos, permitía la adición y la sustracción sin problemas. Sin embargo, Hamilton tuvo dificultad para definir el producto de la terna $a + bi + cj$ pues cuando lo eleva al cuadrado obtuvo:

$$(a + bi + cj)^2 = a^2 - b^2 - c^2 + 2abi + 2acj + 2bcij...(*)$$

$$\text{cuyo cuadrado del módulo es: } (a^2 - b^2 - c^2 + 2abi + 2acj + 2bcij)^2...(**)$$

$$= (a^2 - b^2 - c^2)^2 + (2ab)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 + (2bc)^2,$$

de hecho, la propiedad de los módulos solo sería satisfecha si el término fuese simplificado en (**), estableciendo que $ij = 0$, lo que no estaría correcto. Y esto lleva Hamilton a afirmar que:

Por momentos me he visto tentado en considerar $ij = 0$. Pero me resulta extraño e incómodo, y me percaté que la supervisión del término no deseado podría, obtenerse asumiendo algo que me parecía menos violento, es decir que $ji = -ij$. De este modo consideré $j = k, ji = -k$ reservando-me la consideración de si k era nulo o no (SÁNCHEZ, 2011, p. 16).

La solución de Hamilton muestra que la orden del producto es rigurosamente respetada cuando los términos i y j están involucrados, esto es, que $2bcij$ debería ser escrito como $bc(ij + ji)$ y, así, la propiedad de módulos sería satisfecha asumiendo que $ij + ji = 0$ desde que ij y ji no sean nulos. Para generalizar, Hamilton considero $ij = -ji = k$ y presentó la siguiente expresión:

$(a + bi + cj)(x + yi + zj) = (ax - by - cz) + (ay + bx)i + (az + cx)j + (bz - cy)k$ (***) y así se verifica que para la propiedad de los módulos es satisfecha con:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax - by - cz)^2 + (ay + bx)^2 + (az + cx)^2$$

Sin embargo, sucede que Hamilton así obtiene un primer miembro de la igualdad mayor en $(bz - cy)^2$, y que representa el coeficiente de k en (***) en el desarrollo del producto. Por ello consideró que no era posible $k = 0$, pero considerar $k \neq 0$ también no satisfacía porque el producto de ternas debería ser otra terna y lo que el encontró fue un cuarto termino. Este problema tomó a Hamilton 10 años de investigación y, en 1843, repiensa su propuesta y considera cuatro términos en lugar de tres, tomando k como una tercera unidad imaginaria adicional a i y j . Así, pondera que $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ y denomina esas nuevas expresiones *cuaterniones*, o números *cuaterniones*. Los cuaterniones son números hipercomplejos de la forma $q = a + bi + cj + dk$ en que a, b, c, d son números reales y i, j, k , que satisfacen la relación $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. Además, Hamilton consideró $i^2 = j^2 = -1$ y $ij = -ji = -1$, y así queda evidente que $k^2 = -(ji)(ij) = -j^2 j = -j(-1)j = j^2 = -1$.

Para comprobar a propiedad de módulos, era preciso conocer los valores de i y j y Hamilton concluye que "probablemente $ik = -j$, porque $ik = iij = i^2 j = -1j = -j$; de modo similar, $kj = ijj = -i$ " que es proporcionado por la propiedad asociativa. Entonces, $ki = (-ji)i = -ji^2 = (-j)(-1) = j$. En resumen, las "suposición" del producto (como Hamilton las llamaba) para los cuaterniones resultan en:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$$

Luego del estudio de Hamilton, otros matemáticos como Wessel, Gauss y Argand buscaron, por muchos años, un sistema numérico que describe puntos del espacio de forma similar a los números complejos como puntos del plano.

Los números definidos por Hamilton constituye una nueva álgebra que cumple las propiedades fundamentales de la aritmética tradicional, pero el producto de dos números cuaterniones no es conmutativo, lo que contradecía a todos los algebristas de la época. Según Sánchez (2011), Hamilton estaba absolutamente convencido de que los cuaterniones se convertirían en una herramienta precisa para describir la realidad del espacio físico y del tiempo, considerando el tiempo como un escalar y los puntos del espacio definidos por tres coordenadas reales. De esa forma, para especificar la operación necesaria para convertir un vector en otro en el espacio, era necesario conocer cuatro números – la relación entre la distancia de un vector a otro, o ángulo entre ellos, los módulos y la inclinación del plano en que estos vectores se encuentran. En el siglo XIX y durante veinte años, Hamilton encaminó el estudio de los cuaterniones en el álgebra de una manera equivalente a los Elementos de Euclides.

En *Lectures on Quaternions* (1853), en el momento de definir el producto de los elementos de ese nuevo conjunto, Hamilton considera:

$$H = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$$

y denominó el número como la parte escalar y $bi + cj + dk$ como la parte vectorial, o cuaterniones puro. Además, el producto de los cuaterniones puros, esto es, $p = xi + yj + zk$ e $q = bi + cj + dk$ tiene como resultado:

$$\begin{aligned} pq &= (xi + yj + zk)(bi + cj + dk) \\ &= -xb + xck - xdj - ybk - yc + ydi + zbj - zci - zd \\ &= -(xb + yc + zd) + (yd - zc)i + (-xd + zb)j + (xc - yb)k \end{aligned}$$

Esto quiere decir, entonces, el termino $xb + yc + zd$ es un escalar, lo que en la actualidad es conocido como la definición de un producto escalar, y denotado por

$$xb + yc + zd = \langle p, q \rangle \text{ e } (yd - zc)i + (-xd + zb)j + (xc - yb)k = p \times q$$

y, por lo tanto, $pq = -\langle p, q \rangle + p \times q$.

Actualmente, $\langle p, q \rangle$ es conocido como el producto escalar de dos vectores y es definido por $\langle p, q \rangle^6 = xb + yc + zd$

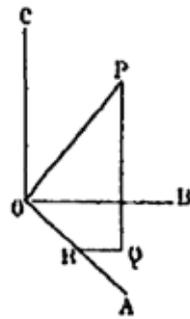
Para la representación de un vector en el espacio tenemos la siguiente tarea:

T_{GS10} : representar vectores en el espacio en la Geometría Sintética

Podemos encontrar en Tait (1882, p. 13) una tarea cuando se establece una proposición que considera tres vectores fijos \overline{OA} , \overline{OB} e \overline{OC} (Vea Figura 23), y un vector cualquiera \overline{OP} , determinando el vector \overline{PQ} paralelo a \overline{CO} de tal forma que el punto Q pertenezca al plano definido por BOA , y determinar el plano, el vector \overline{QR} , paralelo a \overline{BO} , de forma que R pertenezca a \overline{OA} . Por esa construcción, se tiene que $\overline{OP} = \overline{OR} + \overline{RQ} + \overline{QP}$.

6 El producto escalar, que algunos autores denominan producto interno, denotado por •

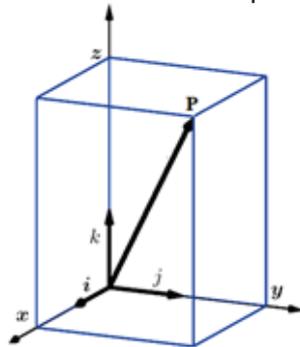
Figura 23 – Descomposición de un vector



Fuente: Tait (1882, p. 13)

Luego de la descomposición, el autor escribe, de forma general, que $P = x\alpha + y\beta + z\gamma$ donde α, β e γ representan vectores no paralelos dos a dos y no paralelos a un plano común, y en que x, y y z son tres valores numéricos que dependen del vector. Podemos observar que los tres vectores dados, \overline{OA} , \overline{OB} e \overline{OC} en la actualidad son los ejes coordenados del referencial cartesiano en espacio. Tait (1882) afirma que, en el caso de que los tres vectores son unitarios y perpendiculares entre si, Hamilton utiliza las letras i, j, k para designar un sistema unitario-vectorial en que $P = xi + yj + zk$ (Figura 24), además, los valores x, y, z representan las medidas de tres aristas consecutivas de un paralelepípedo rectangular en que P representa el extremo de su vector-diagonal cuya longitud es dada por $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Figura 24 – Representación de un vector en el espacio en un referencial ortonormal



Fuente: Valenzuela (2021, p. 92)

El proceso presentado por Tait, esto es, la descomposición de un vector que está en tres dimensiones, considerando el referencial ortonormal, permite considerar tres tipos de tarea en la GA:

T_{GA8} : representar vectores en el espacio en la Geometría Analítica.

T_{GA9} : representar graficamente la descomposición de un vector en el espacio.

T_{GA10} : determinar el producto escalar de dos vectores

La técnica utilizada para resolver es la identificada en la investigación realizada por Hamilton, es decir:

Dados los vectores $u = (a, b, c)$ y $v = (x, y, z)$, entonces $u \cdot v = ax + by + cz$

T_{GA11} : Hallar la ecuación de la recta, en el espacio \mathbb{R}^3 que pasa por los puntos A y B.

Encontramos la técnica: la ecuación vectorial de la recta está representada por la igualdad de vectores, entonces, $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$ donde P_0 es un punto de la recta y \vec{a} es la dirección de la recta. Tomamos un punto genérico $P(x, y, z)$ y, como punto P_0 los puntos A o B. De este modo, tenemos $\overrightarrow{P_0P}$, por ejemplo, si consideramos \overrightarrow{AP} . Ahora, para obtener el vector dirección, \vec{a} , consideramos $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Así la ecuación de la recta quedaría $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$, $t \in \mathbb{R}$. Note que también es posible tomar como punto P_0 el punto B y, como el vector dirección, $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$. Así, obtenemos otra forma de representar la ecuación de la recta.

Seguidamente, se muestra la razón de ser de resolver tareas con elementos del álgebra lineal.

Modelo Epistemológico de Referencia del estudio de vectores en la geometría analítica

Después del origen de los cuaterniones atrajo el interés de muchos matemáticos, nuevos teoremas fueron demostrados por medio del análisis vectorial, utilizando la parte vectorial de los cuaterniones de Hamilton para representar cantidades físicas, esto es, $v = bi + cj + dk$. Pero fue el desarrollo del álgebra y la teoría de los determinantes de Josiah Willian Gibbs (1901) y Oliver Heaviside (1893) que permitió definir el producto vectorial como conocemos en la actualidad, esto es, para los vectores $A = (x, y, z)$ y $B = (b, c, d)$ se tiene:

$$A \times B = (x, y, z) \times (b, c, d) = (xi + yj + zk) \times (bi + cj + dk)$$

$$= (yd - zc)i + (-xd + zb)j + (xc - yb)k.$$

El producto $A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ b & c & d \end{vmatrix}$, o sea, $A \times B = (yd - zc, -xd + zb, xc - yb)$ ⁷

De esa técnica podemos proponer el primer tipo de tarea del álgebra lineal, o sea, considerar procesos para calcular el determinante de una matriz.

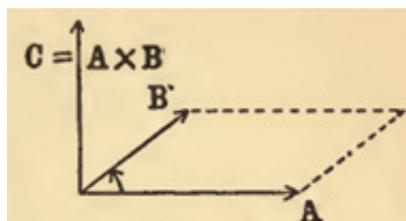
T_{AL1} : determinar el producto vectorial de dos vectores.

Consideramos la definición de producto vectorial en la GA, tenemos la tarea

T_{GA12} : determinar el producto vectorial de dos vectores

Gibbs (1901) utiliza el producto vectorial para calcular la medida del área del paralelogramo determinado por dos vectores (Figura 25) en la GS considerando que ella es igual al módulo del vector resultante de ese producto, o sea, $M_{AP} = |A \times B|$.

Figura 25 – Producto vectorial por Gibbs



Fuente: Gibbs (1901, p. 61)

⁷ Algunos autores utilizan el símbolo \times para indicar el producto escalar.

T_{AL2} : calcular la medida del área de un paralelogramo determinado por dos vectores.

La primera técnica que se presenta dice que los vectores \vec{u} y \vec{v} son los lados que conforman un paralelogramo, entonces, la medida del área es el módulo del producto vectorial $|\vec{u} \times \vec{v}|$. Mientras que la segunda técnica utiliza el módulo de los vectores, ángulo entre los vectores, razones trigonométricas y proyección ortogonal para determinar $|\vec{u}||\vec{v}|\text{sen}\theta$. Esta propiedad para vectores permite enunciar y demostrar nuevos teoremas en análisis vectorial.

Luego de definir producto escalar y producto vectorial, Gibbs, en su libro *Vector Analysis* de 1901, definió producto mixto para tres vectores en el espacio, que consiste: dados los vectores A, B e C e el producto mixto se define como el producto escalar del primer vector por el producto vectorial de los otros dos vectores, y denotó: $[A, B, C] = A(B \times C)$.

Si los vectores estuvieran representados en función de los vectores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, tenemos:

$$[A, B, C] = A \wedge \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = A \cdot \left(\begin{vmatrix} B_2 & B_3 \\ C_2 & C_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} B_1 & B_3 \\ C_1 & C_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right)$$

Pero, como $A \cdot \vec{i} = A_1$, $A \cdot \vec{j} = A_2$, $A \cdot \vec{k} = A_3$ entonces

$$[A, B, C] = \left(\begin{vmatrix} B_2 & B_3 \\ C_2 & C_3 \end{vmatrix} A_1 - \begin{vmatrix} B_1 & B_3 \\ C_1 & C_3 \end{vmatrix} A_2 + \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix} A_3 \right) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

Tal definición nos conduce a un nuevo tipo de tarea en el álgebra lineal.

T_{AL3} : determinar la ecuación del plano en el espacio que contiene los puntos no colineales A, B y C.

En la técnica del AL, consideramos en \mathbb{R}^3 un plano determinado por un punto P_0 fijo, P un punto genérico del plano y su inclinación, que es especificada por su vector normal \vec{n} , y cumple que $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$. En este caso, utilizaremos esta ecuación, llamada Ecuación normal del plano. Para ello, tomamos un punto genérico P(x, y, z) y, como punto P_0 , cualquiera de los tres puntos A, B y C. De este modo, tenemos $\overrightarrow{P_0P}$, que podemos considerar, por ejemplo, como \overrightarrow{AP} . Ahora, para obtener un vector normal \vec{n} tenemos que tener los vectores del plano que después multiplicaremos vectorialmente. En este caso, podemos tener los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} por ejemplo, podemos considerar $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Finalmente, la ecuación del plano es $\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = 0$. Así, existirán diversas formas de solución, considerando que podemos asumir tanto el punto como los vectores para la obtención del vector normal.

En la GA se tiene también el tipo de tarea:

T_{GA13} : determinar la ecuación del plano en el espacio que contiene los puntos no colineales A, B y C.

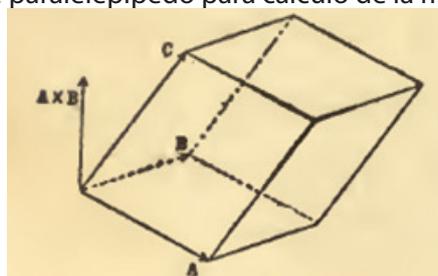
En la GA, la técnica de solución, si consideramos la Ecuación Vectorial del plano con P_0 siendo un punto y \vec{a} y \vec{b} , dos vectores contenidos en el plano, dependerá de los parámetros r y t, tal que, $\overrightarrow{P_0P} = r\vec{a} + t\vec{b}$, con $r, t \in \mathbb{R}$. Luego, tomamos un punto genérico

$P(x, y, z)$ y, como punto P_0 , cualquiera de los tres puntos A, B y C . De este modo, tenemos el vector $\overrightarrow{P_0P}$, por ejemplo, al considerar $P_0 = A$ e, así, tenemos $\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{AP}$. Ahora, para los vectores \vec{a} y \vec{b} podemos considerar $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. De este modo, la ecuación del plano será $\overrightarrow{AP} = r\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$, con $r, t \in \mathbb{R}$. Y eso muestra la existencia de diversas formas de solución.

T_{AL4} : determinar el producto mixto.

A partir de la definición del producto mixto, Gibbs (1901) presenta su interpretación geométrica (Geometría Sintética) considerando y como tres vectores con el mismo origen, y que determinan un paralelepípedo (Figura 26) en que el módulo del producto escalar del vector C por el vector $A \times B$ representa la medida del paralelepípedo. Sin embargo, Gibbs no presenta su demostración.

Figura 26 – Representación de paralelepípedo para cálculo de la medida de su volumen por Gibbs



Fuente: Gibbs (1901, p. 68)

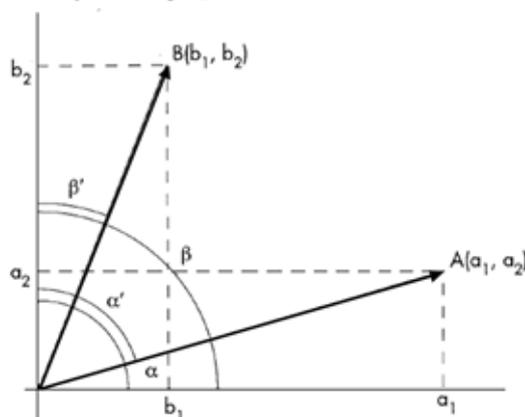
Esa definición nos permite identificar un nuevo tipo de tarea para el álgebra lineal.

T_{AL5} : calcular la medida del volumen de un paralelepípedo determinado por tres vectores del mismo origen en el espacio.

El desarrollo del producto escalar, según Arezana (1997), permite determinar la medida de un ángulo entre dos vectores en el plano o espacio. El autor considera un referencial cartesiano en el plano (Figura 27) para representar los vectores $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$ y $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2)$. El vector \overrightarrow{OA} forma con los ejes ángulos de medidas α y α' y de modo que $\alpha + \alpha' = \pi/2$, y el vector \overrightarrow{OB} forma ángulos de medidas β y β' y de modo que $\beta + \beta' = \pi/2$. Podemos entonces deducir que

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|\overrightarrow{OA}|}, \cos \alpha' = \frac{a_2}{|\overrightarrow{OA}|} = \text{sen} \alpha \text{ y } \cos \beta = \frac{b_1}{|\overrightarrow{OB}|} \text{ y } \cos \beta' = \frac{b_2}{|\overrightarrow{OB}|} = \text{sen} \beta.$$

Figura 27 – Representación de ángulo entre dos vectores en el plano cartesiano



Fuente: adaptado de Arezana (1997, p. 63)

Considerando que el ángulo formado por los dos vectores tienen medida $\beta - \alpha$, podemos utilizar la fórmula trigonométrica $\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \text{sen}\beta\text{sen}\alpha$ lo que es equivalente a $\cos(\beta - \alpha) = \frac{a_2b_2 + a_1b_1}{|\vec{OB}||\vec{OA}|}$ que representa el producto escalar de los dos vectores y que permite concluir que $(\beta - \alpha) = \arccos\left(\frac{a_2b_2 + a_1b_1}{|\vec{OB}||\vec{OA}|}\right)$.

Así, como indica Arenzana (1997), la determinación de la medida del ángulo formado por dos vectores en el plano puede ser hecha mediante una fórmula algebraica que representa el producto escalar de dos vectores.

Tal resultado nos permite enunciar otro tipo de tarea para la geometría analítica:

T_{GA14} : calcular la medida del ángulo determinado por dos vectores

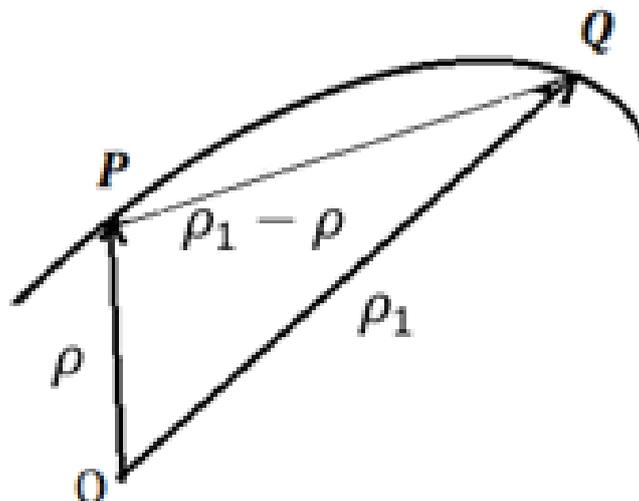
Las tareas para resolver ese tipo de tarea con el vector representado por coordenadas cartesianas pueden modelar fenómenos físicos en la Geometría Analítica, lo que nos permite formular el siguiente tipo de tarea en la GA.

T_{GA15} : determinar una expresión matemática para describir el movimiento de un cuerpo en el espacio.

Tait (1882, p. 36) usó, como herramienta para describir el movimiento, el cálculo vectorial asociado a algunas cuestiones de cálculo diferencial, y la noción de curva y los lineamientos de flujos de Newton basados en el cálculo diferencial y en la dinámica según las propiedades del movimiento.

Para la definición geométrica de algunas curvas, el autor usó el cálculo diferencial en el estilo de Newton, empleando combinaciones de vectores y funciones escalares que, modernamente, corresponden las funciones paramétricas de una curva, y esto es escrito como: $\vec{OP} = \rho = \varphi(t)$ que, si estuviese en el espacio, es interpretada como $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$, en que t representa el tiempo y $\varphi(t)$ es la posición de una partícula. Para otro punto Q de la curva (Figura 28) considerando un tiempo t_1 transcurrido, tenemos: $\vec{OQ} = \rho_1 = \varphi(t_1) = \varphi(t + \partial t)$, en que ∂t representa un número cualquier y el desplazamiento es $\partial\rho = \rho_1 - \rho = \varphi(t + \partial t) - \varphi(t)$.

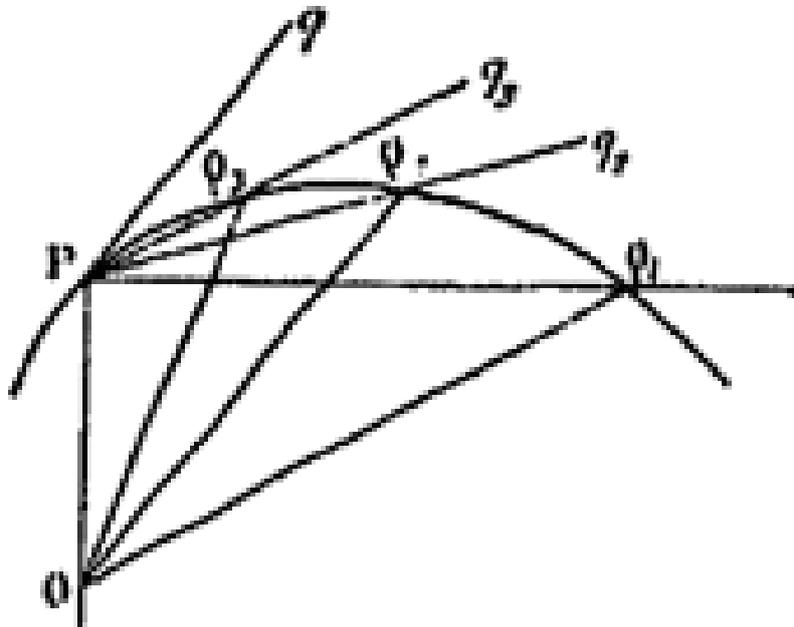
Figura 28 – El vector desplazamiento



Fuente: adaptado de Tait (1882, p. 37)

Tait (1882) indica que, en ese caso, los vectores de la función φ son constantes y los factores que los multiplican son variables en función de t . Además, indica que desarrollar cada uno de esos factores, de acuerdo con la fórmula de Taylor (reservando el caso de discontinuidad de uno o más valores en el intervalo de t para t_1), implica que la función $\varphi(t+\partial t)$ debe ser, por tanto, desarrollado de la siguiente forma: $\partial \rho = \frac{d\varphi(t)}{dt} \partial t + \frac{1}{2} \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} (\partial t)^2 + \dots$ y que, al aplicar el límite, conduce a: $\lim_{\partial t \rightarrow 0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{\partial t=0} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \varphi'(t)$. La derivada $\varphi'(t)$ de la función vectorial $\varphi(t)$ se define como la derivada de una función real, o sea, $\varphi'(t) = \lim_{\partial t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t+\partial t) - \varphi(t)}{\partial t} = \lim_{\partial t \rightarrow 0} \frac{\partial \rho(t)}{\partial t}$. Si el límite existe, entonces $\varphi'(t)$ será la pendiente a la curva recorrida por φ y la velocidad instantánea, representada por Tait, como se muestra en la Figura 29.

Figura 29 – Representación de la velocidad instantánea por Tait



Fuente: Tait (1882, p. 40)

Antes del siglo XIX, para algunos matemáticos como George Peacock (1830), Augustus De Morgan (1837) entre otros, existían dos tipos de álgebras: la Álgebra Aritmética, que utilizaba símbolos para representar números enteros positivos y definir sus operaciones que cumplían la propiedad de clausura, y la Álgebra Simbólica, que utilizaba las reglas del álgebra aritmética, pero sin cualquier restricción como las que debían ser cumplidas por cualquier otro tipo de álgebra. Un álgebra que se relaciona con vectores presenta la particularidad de no estar en conformidad con las reglas básicas dadas y en que los elementos son muy específicos, porque esos elementos describen no apenas números, sino también magnitudes no escalares.

Como síntesis de lo que encontramos en nuestro estudio histórico, construimos el esquema (Figura 27), para mostrar las conexiones y el desarrollo praxeológico del estudio de vectores donde resumimos las tareas identificadas en las Geometrías Sintética (T_{GS}), Analítica (T_{GA}) y en el Álgebra Linear (T_{GL}). En color rojo se indican los contextos, amarillo estas los fenómenos en la física y matemáticas y en verde la técnica para solución.

Figura 27 – Razón de ser de los vectores



Fuente: Adaptado de Valenzuela (2021, p. 102)

El modelo epistemológico de referencia, representado por la Figura 27, explicita la razón de ser del objeto matemático vector en la geometría sintética, en la geometría analítica y en el álgebra lineal y permitió explicitar tres modelos. El primero es el modelo de la geometría sintética en que los vectores son estudiados con base en elementos de los cinco postulados de Euclides y el método del paralelogramo. El segundo modelo viene de la geometría analítica que, con base en un referencial cartesiano, en el plano o en el espacio, permite representar un vector por sus coordenadas y su descomposición. Además de ello, sus propiedades y los productos escalar y vectorial ayudan a resolver problemas, como encontrar medidas de ángulos, de áreas y de volúmenes. Por último, el modelo del álgebra lineal, que considera como elementos propiedades como la combinación lineal, las matrices y sus propiedades.

CONSIDERACIONES FINALES

La razón de ser de los vectores en cada tipo de tareas presentadas hasta ahora permite la solución de los problemas de movimiento, caída libre y fuerza que, en principio, aún no eran trabajados con coordenadas en tiempo antiguo, pero también presentamos como esas mismas tareas pueden ser hechas en la Geometría Analítica. Además, no había en esa época la notación existente en la actualidad, pero ya eran evidentes los segmentos orientados, como puede ser observado en los tipos de tareas. Y, hoy en día, los problemas pueden ser trabajados en la Geometría Analítica con las técnicas que fueron desarrolladas intuitivamente y formalizadas, por ejemplo, por Stevin y Newton.

Los tipos de tareas descritos permiten inferir la razón de ser de los vectores en el modelo de Álgebra Lineal, y es la formalización de vectores y axiomatización. Los estudios de Tait contienen los principios fundamentales para la construcción del Análisis Vectorial en la Geometría Sintética y, en esencia, los conceptos primitivos para el Álgebra Lineal moderno. Además, la noción de espacio vectorial fue presentada en los trabajos de Peano (1891), en su libro *Gli Elementos de Cálculo Geométrico*, presenta la axiomatización de la teoría contenida en *Ausdehnungslehre* de Grassmann (1844) como estudiamos en la actualidad.

En conclusión, presentamos aquí los vectores siendo utilizados en la solución de algunos tipos de tareas por técnicas y discursos tecnológicos-teóricos utilizados por investigadores y estudiosos que muestran el desarrollo del objeto matemático vector iniciando con la Geometría Sintética, pasando por la Geometría Analítica hasta llegar al Álgebra Lineal. Los problemas de docentes con el MER dan el primer paso para tornarse en problema didáctico. Por último, se cuenta con elementos para la formulación de una cuestión que inicie dispositivos de los recorridos de estudio e investigación.

REFERENCIAS

- ANTUNEZ, C.; GALHARDI, V.; HERNASKI, C. As leis de Newton e a estrutura Espaço-temporal da Mecânica Clássica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol. 40, nº 3. 2018.
- ARENZANA, V. El lenguaje vectorial en geometría. Los pioneros William Rowan Hamilton y Hermann Günther Grassmann. **Revista Suma** v. 25, 61-70. 1997.
- ARGAND, R. **Essai sur une manière de représenter des quantités imaginaires dans les constructions géométriques**, 2e édition, Gauthier Villars, París. 1874.
- ARISTÓTELES. **Acerca del cielo**. 350 a.C. Biblioteca Clásica Gredos. Miguel Candel (traducción). Madrid: Gredos. 1996.
- CROWE, M, **History of Vector Analysis**, segunda edição. New York. 1985.
- CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble, La Pensée Sauvage, v. 19, n. 2, p. 221-265, 1999.
- CROMBIE, C. A. (1974), **Historia de la Ciencia de San Agustín a Galileo /2 Siglos XIII-XVII**. Alianza Universidad. 1974.
- BELLAVITIS, G. **Calcolo dele Equipollente**, 1832.
- BURALI-FORTI, C.; MARCOLONGO, R. **Èlèments de Calcul Vectoriel**. Avec de Nombreuses Applications a la Géométrie, a la Mecanique et a la Physique Mathematque. Paris. 1910.
- DE MORGAN, A. The Elements of Algebra. London: Taylor & Walton. 1837.
- DESCARTE, R. **La Geometrie. Livre Troisième**. 1937. Traducción inglesa de David Eugene Smith y Marcia L. Latham, The Geometry of René Descartes. Dover Publications, Inc, Nova York 1954.

DORIER, J.L. L'enseignement de l'algèbre linéaire en question. França: **La Pensé Sauvage éditions**. Grenoble 1997. p. 291-297.

DUHEM, P. **La Théorie Physique. Son objet et sa structure**. Bibliothèque de Philosophie Experimentale. Paris. 1914.

FONSECA, C.; GASCÓN, J.; LUCAS, K. Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, vol. 17, núm. 3, pp. 289-318, 2014.

GALILEI, G. **Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze**. In Leida. 1638.

GARCIA, F. J.; SIERRA, T. A. **Modelos epistemológicos de referencia en el análisis de la actividad matemática en libros de texto: el caso del número en la escuela infantil**. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), **Investigación en Educación Matemática XIX (pp. 299-307)**. Alicante: SEIEM. 2015.

GASCÓN, J. Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, 14(2), 203-231. 2011.

GAUSS, C. F. **Theorie Residuorum Biquadraticorum**. Societati Regiar Tradita. 1831.

GIBBS, W. **Análisis vectorial**, un libro de texto para estudiantes de matemáticas y física, basado en las conferencias de J. Willard Gibbs. 1901.

GRASSMANN, H. **Die Lineale Ausdehnungslehre** (en alemán). Leipzig: Otto Wigand. 1844.

HAMILTON, W. R. **Elements of Quaternions**. University of Dublin Press. Edited by William Edwin Hamilton. 1866.

HEAVISIDE, O. **Electromagnetic theory** vol I (Primera edición ed., Vol. 1). Londres. London publication. 1893.

JEANS, J. **Historia de la Física**. Primeira edição em espanhol. México. 1953.

NEWTON, I. **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica**. Imprimatur S. Pepys 1867. (traducción) University of Cambridge. Disponible en: <https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/PR-ADV-B-00039-00001/21>. . Acceso en 02 de mayo de 2021.

ORESME, N. **Tractatus de Latitudinis Formarum**. Original University of the California. 1486.

PEANO, G. **Elementi di calcolo geométrico**. Tonino. Tipografia G. Candeletti. 1891.

PEACOCK, G. **A treatise on algebra**. London. 1830.

PROENÇA, C. A. **História da ciência da Antiguidade ao Renascimento Científico**. V. 1. 2da. Edição. Brasília. 2012.

ROQUE, T. **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

SÁNCHEZ, J. M. Histórias de Matemáticas Hamilton y el Descubrimiento de los Cuaterniones. **Revista de Investigación Pensamiento Matemático**- Número 1. 2011.

SERRANO, H. G. La cadena de stevin. *Boletín División de Ciencias Exactas*. Universidad Autónoma de México. 2010.

STEVIN, S. **Les Oeuvres Mathematique de Simon Stevin de Bruges: Ou sont inserées les memoires mathematiques, esuelles s'est exercé le tres-haut & tres illustre prince**, Maurice de Nassau. 1634.

TAIT, P. G. **Traité des Quaternions**. Traduit sur la seconde editon anglaise. 1882.

TARRÉS, J. Historia de las Matemáticas. Matemáticas y Movimientos en el siglo XIV. **Revista de Investigación Pensamiento Matemático**. Volumen VII, Número 2, pp. 087-100. 2017.

TRUESDELL, C. **Essays in the History of Mechanics**. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg, 1975.

VALENZUELA, M. **Um percurso de estudo e pesquisa para a formação de professores em cursos de ciências e engenharia: introdução ao estudo de vetores** Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Faculdade de Ciências e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil, 2021. Disponível em: <https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/24230>. Acesso em: 20 jan. 2022.

VARIGNON, P. **Nouvelle Mécanique ou Statique**. Académies Royales des Sciences de France 1687.

WESSEL, C. **Om directionens analytiske Betegning, et Forsøg, anvendt fornemmelig til plane og sphæriske Polygoners Opløsning**. Nye Samling af det Kongelige Danske Videnskaber(ne)s Skrifter–1799

WINTERLE, P. **Vetores e geometria analítica**, 2.ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014.

MUSEO Galileo. **“Working Level of Folio 116v”**. (Biblioteca Nazionale Centrale, Florence Istituto e Museo di Storia della Scienza). Florencia. Disponible em: http://www.imss.fi.it/ms72/HTML/F116_V/M116_V.HTM. Acesso em 02 de maio de 2020.

Histórico

Recebido: 15 de outubro de 2023.

Aceito: 12 de janeiro de 2024.

Publicado: 09 de fevereiro de 2024.

Como citar – ABNT

VALENZUELA, Maritza Luna; ALMOULOUD, Saddo Ag; SILVA, Maria Jose Ferreira da; GUERRA, Francisco Javier Ugarte. Modelo Epistemológico de referencia en torno al estudio de los vectores en la geometría. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 48, e2024009, 2024. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n48.e2024009.id596>

Como citar – APA

VALENZUELA, M. L.; ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F.; GUERRA, F. J. U. (2024). Modelo Epistemológico de referencia en torno al estudio de los vectores en la geometría. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC*, (48), e2024009. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n48.e2024009.id596>

Número temático organizado por

Saddo Ag Almouloud  

José Messildo Viana Nunes  

Afonso Henriques  