REMATEC
Revista de Matemática, Ensino e Cultura

Conceptions des enseignants du fondamental[1] I dans le traitement des Situations-problèmes de proportionnalité

Ousmane Alpha[2]
École Normale Supérieure de Bamako

Saddo Ag Almouloud[3]
Universidade Federal do Pará

RÉSUMÉ

Le présent article est tiré de nos travaux de thèse portant sur l'écologie et la proportionnalité dans l'enseignement fondamental au Mali de 1960 à nos jours. Notre problématique est centrée d'une part sur la persistance de la technique de la règle de trois malgré les différentes évolutions du curriculum prescrit de 1960 à nos jours au Mali et d'autre part sur les conceptions que les enseignants entretiennent avec la notion. À travers l'analyse des productions des enseignants soumis à un questionnaire, nous constatons que la règle de trois reste le modèle dominant dans le traitement de la proportionnalité et que les conceptions des enseignants influent beaucoup sur les comportements des élèves face à un problème de proportionnalité. En effet de 1960 à nos jours, nos résultats révèlent que la règle de trois a joué un rôle prépondérant dans le traitement des problèmes de proportions et de proportionnalité. Notre étude a révélé que cette restriction de la vie de la proportionnalité au détriment des règles qui rattachent les situations de proportionnalité au concept de référence la fonction linéaire est en grande partie liée à la conception que les enseignants de terrain (aussi acteurs de la noosphère) se font de la proportionnalité.
Mots-clés: Proportion; Proportionnalité; Praxéologies Mathématiques; Praxéologies Didactiques; Règle De Trois.

Teachers' conceptions in the treatment of situations-problems of proportionality at the primary level

ABSTRACT

This article is taken from our thesis work on ecology and proportionality in basic education in Mali from 1960 to the present day. Our problematic is centered on the one hand on the persistence of the rule of three technique despite the various evolutions of the prescribed curriculum from 1960 to the present day in Mali and on the other hand on the conceptions that teachers have of the concept. Through the analysis of the productions of teachers submitted to a questionnaire, we find that the rule of three remains the dominant model in the treatment of proportionality and that teachers' conceptions greatly influence the behavior of students when faced with a problem of proportionality. Indeed, from 1960 to the present day, our results reveal that the rule of three has played a preponderant role in the treatment of problems of proportions and proportionality. Our study revealed that this restriction of the life of proportionality to the detriment of the rule of three is largely linked to the conception that field teachers have of proportionality (also actors of the noosphere).
Keywords: Proportion; Proportionality; Mathematical Praxeologies; Didactic Praxeologies; Rule of three.

[1] L'enseignement fondamental est un bloc unique de 10 ans, composé de deux cycles : le fondamental I (ou premier cycle) et e fondamental II (ou second cycle). Le fondamental 1, d'une durée de 6, correspond au primaire, il concerne les enfants de 6 à 11 ans.

[2] Docteur en Didactique des Mathématiques de l´Université des Sciences, des Techniques et des Technologies de Bamako (USTTB), Mali. Professeur au département de mathématiques de l´École Normale Supérieure (ENSup) de Bamako-Mali. Rue du 22 octobre 1946 B.P. 241, District de Bamako, Mali. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4368-4986. E-mail: oalphaoumar@yahoo.fr.

[3] Doutorado em Matemática e Aplicações pela Universidade de Rennes I, Rennes, França, Professor colaborador da Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Pará. Rua Antonio Turati, 78, Vila Celeste, São Paulo -SP, Brasil, cep. 02464-050. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8391-7054 . E-mail: saddoag@gmail.com.

Las concepciones de los docentes en el tratamiento de situaciones-problemas de proporcionalidad en el nivel primario

RESUMEN

Este artículo está extraído de nuestro trabajo de tesis sobre ecología y proporcionalidad en la educación básica en Malí desde 1960 hasta la actualidad. Nuestra problemática se centra por un lado en la persistencia de la técnica de la regla de tres a pesar de las diversas evoluciones del currículo prescrito desde 1960 hasta la actualidad en Mali y por otro lado en las concepciones que los profesores tienen del concepto. A través del análisis de las producciones de los docentes sometidos a un cuestionario, encontramos que la regla de tres sigue siendo el modelo dominante en el tratamiento de la proporcionalidad y que las concepciones de los docentes tienen una gran influencia en el comportamiento de los estudiantes ante un problema de proporcionalidad. De hecho, desde 1960 hasta la actualidad, nuestros resultados revelan que la regla de tres ha jugado un papel preponderante en el tratamiento de los problemas de proporcionalidad y proporcionalidad. Nuestro estudio reveló que esta restricción de la vida de la proporcionalidad en detrimento de la regla de tres está ligada en gran medida a la concepción que tienen los profesores de campo de la proporcionalidad (también actores de la noosfera).

Palabras clave: Proporción; Proporcionalidad; Praxeologías matemáticas; Praxeologías didácticas; Regla de tres.

INTRODUCTION

Malgré la place importante occupée par la notion de proportionnalité dans l'enseignement et dans la vie de tous les jours, malgré la formation reçue durant tout le cursus scolaire, malgré l'expérience acquise au cours du métier d'enseignant, les maitres d'école au Mali font souvent montre d'une maîtrise insuffisante de cette notion. Cette insuffisance de la notion de la proportionnalité chez les enseignants influe beaucoup sur leurs pratiques.

En s'intéressant à la proportionnalité, nous avons choisi la démarche originale en s'interrogeant sur les liens et liants qui permettent de réaliser une articulation idoine entre les situations de proportionnalité et le savoir de référence, la fonction linéaire.

Dans cette étude nous tenterons de mettre en exergue, à travers un questionnaire adressé à des enseignants du premier cycle de l'enseignement fondamental, suivant les différents changements de programmes, les conceptions de ces enseignants dans les traitements de problèmes de proportionnalité.

La proportionnalité, une notion centrale dans la vie de tous les jours et aussi dans l'enseignement des mathématiques, est pourtant bien difficile à construire pour un besoin d'enseignement. Une bonne maîtrise par les enseignants du concept de grandeurs, mesure et proportion est fondamentale pour appréhender la notion de proportionnalité, aussi bien pour son usage dans la vie courante, son utilisation dans diverses disciplines ou dans le cadre professionnel que pour son importance dans divers domaines des mathématiques. La proportionnalité est partout présente dans la vie quotidienne, faisant d'elle une notion familière ; *et pourtant son apprentissage ne va pas de soi*.

Suivant BOISNARD,

> Ce n'est un mystère pour personne, la proportionnalité est pour bien des élèves une notion qui pose un problème. Or sa maîtrise est indispensable non seulement pour les mathématiques mais aussi pour la plupart des disciplines scolaires et autres formations professionnelles (BOISNARD et al., 1994, p. 02)

Suivant SOKONA,

> La proportionnalité est sans doute l'une des notions mathématiques les plus importantes que nous rencontrions du primaire au collège. Ses nombreuses applications dans différents domaines (mathématique, physique, biologie,

> chimie, économie, ...) lui font jouer un rôle essentiel dans l'enseignement. Il faut souligner, aussi, son utilisation dans la vie courante (SOKONA, 1989, p. 05)

A la revue des travaux déjà effectués sur la proportionnalité (ALPHA, 2020), on peut dire sans risque de nous tromper que cette notion est fortement liée aux grandeurs, aux rapports et aux proportions, c'est pourquoi nous nous sommes posé les questions suivantes :

- Peut-on enseigner la proportionnalité au primaire sans faire allusion aux grandeurs et aux notions de rapport et de proportion ?
- Quelle compréhension élèves et enseignants du Mali ont-ils actuellement de la notion de proportion.
- Quel vocabulaire pour la proportionnalité au premier cycle de l'enseignement fondamental
- Quelles sont les différentes procédures (ou techniques) engagées ?
  - Nos hypothèses se fondent sur l'approche écologique (CHEVALLARD, 2002, ARTAUD, 1998) qui préconise, d´une part, d'étudier le rapport institutionnel à un objet : étude de l'ensemble des praxéologies (CHEVALLARD, 1999) dans lesquelles l'objet est impliqué dans cette institution (ici l'institution est le premier cycle de l'enseignement fondamental). Et d´autre part, de repérer les habitats et à l'intérieur de ces habitats, les niches des objets : un objet ne peut pas vivre de façon isolée, il est nécessaire qu'il prenne place au sein d'une organisation mathématique et entrer en interrelation avec d'autres objets. Ce qui lui permet de vivre et d'exister dans l'enseignement.

Nous nous intéressons aux connaissances et compétences des enseignants pour savoir la façon dont ils gèrent l'avancée de leur programme dans la classe et contrôlent l'avancée des connaissances des élèves par rapport à l'enseignement de la proportionnalité. En particulier, une des questions que nous nous posons est de savoir comment le professeur procède au niveau de l'institutionnalisation. Nous poserons à ce sujet des questions du point de vue épistémologique aux professeurs telles que : qu'est-ce qu'une proportion et quel concept mathématique est relatif à la notion de proportion ? Peut-on enseigner la proportionnalité sans le concept de proportion ? Les professeurs proposent-ils la notion de non-proportionnalité ? S'intéressent-ils au langage lié à la proportionnalité et aux aspects géométriques ?

En conformité avec nos questions de recherche et nos hypothèses, nous nous sommes fixé les objectifs suivants sous trois ordres :

Du point de vue institutionnel, il s'agit pour nous d'interroger les différents écosystèmes (didactique et noosphérien) de l'enseignement de la proportionnalité, c'est-à-dire vérifier si les transpositions didactiques anciennes ont engendré la transposition didactique actuelle.

Par rapport à l´enseignement, il s'agit pour nous de vérifier si les pratiques des enseignants sont satisfaisantes. En effet pour permettre aux élèves d'atteindre les objectifs d'apprentissage, l'enseignant doit gérer la classe de manière à :

• éviter d'imposer une démarche (ou stratégie) unique de résolution de problème,

• confronter les différentes résolutions des élèves,

• travailler et comparer les différentes procédures,

• faire des traitements inter registre, c'est à dire opérer constamment des allers-retours entre concret et abstrait, entre numérique et géométrique, etc.

• adapter les variables didactiques (varier les nombres en jeu, les registres utilisables).

• apprendre le langage de la proportionnalité à travers des situations bien déterminées.

METHODOLOGIE GENERALE ET PLAN D'ETUDE

Notre méthodologie s'inscrira dans une approche écologique : il s'agira, après analyse des textes officiels anciens et nouveaux, d'élucider les aspects de la proportionnalité qui sont en cours dans l'enseignement actuel et les raisons pour lesquelles tel aspect a résisté aux différents changements et tel autre a disparu. Mais aussi, il s'agira de mettre en exergue le modèle épistémologique de référence en cours actuellement.

Pour répondre à ces questions, en plus de l´analyse institutionnelle et écologique, nous envisageons une enquête sur l'épistémologie de la proportionnalité auprès des enseignants du premier cycle de l'enseignement fondamental. En nous fondant sur cette même enquête, nous chercherons à étudier la manière dont ils font vivre en classes le modèle épistémologique de référence partagé les enseignants ; mais aussi de savoir quelles compréhensions ont-ils des proportions et de son utilité.

Le questionnaire de l'enquête se rapportera à cet effet aux programmes en particulier, aux pratiques enseignantes, aux compétences disciplinaires attendues des enseignants, aux analyses des situations proposées aux élèves et enfin aux réponses des élèves apportées aux situation.

ETUDE EPISTEMOLOGIQUE DE LA PROPORTIONNALITE

L'étude épistémologique de la proportionnalité a pour but de comprendre comment la notion a été développée et de savoir quels sont les outils qui ont favorisés ou non son développement.

Nous n'allons pas dans cet article donner tous les types de problèmes de proportionnalités et les techniques (développés dans ALPHA; ALMOULOUD, 2021) qui permettent de les résoudre, mais nous insistons à faire un éclairage sur la règle de trois, qui selon nos études a été le modèle dominant parmi les différentes procédures du traitement de la proportionnalité. En plus nous montrerons l'importance du raisonnement proportionnel dans certaines situations de géométrie plane mais aussi l'influence du langage dans le traitement des situations de proportionnalité

La règle de trois

La règle de trois est une technique très ancienne dans la résolution des situations problèmes proposées aux élèves du primaire. Ces problèmes de l'époque faisant généralement appel à des situations de la vie courante ne demandaient pas d'étudier s'ils relèvent ou non d'une situation de proportionnalité. La proportionnalité est admise d'avance, il s'agit simplement d'appliquer une méthode ou une technique, en occurrence la règle de trois, pour déterminer l'inconnue. Autrement dit, cette règle est tout juste une technique, un outil d'un usage mécanique pour résoudre un problème de proportionnalité ; elle ne s'intéresse pas à la nature des relations entre les grandeurs.

En ce sens, BOISNARD et all assure que

> le simple apprentissage mécanique de la règle de trois et de toutes les règles qui en découlent n'est pas suffisant pour donner une véritable connaissance de la proportionnalité, c'est-à-dire une bonne représentation du concept sous-jacent à tous les problèmes composant cet objet d'apprentissage particulier que l'on désigne désormais sous le nom de proportionnalité. » (BOISNARD et al., 1994, p. 12)

REMATEC, Belém (PA), v. 16, Fluxo Contínuo, p. 197-231, Jan.-Dez., e-ISSN: 2675-1909, 2021
DO I: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n.p197-230.id357

Exemple : *Si 3 ouvriers ont fait 24 mètres d'ouvrages, combien 11 ouvriers en feront-ils dans le même temps*.

L'usage de la règle de trois commande l'exécution stricte d'une instruction rédigée en trois lignes qui conduit au résultat recherché :

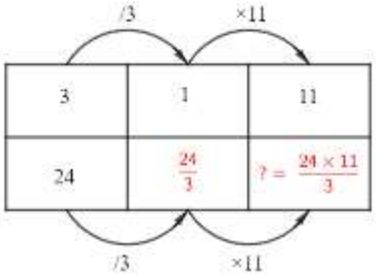
3 ouvriers font 24 mètres d'ouvrage ;

1 ouvrier fait 3 fois moins d'ouvrage : $\mathbf{\frac{24}{3}}$

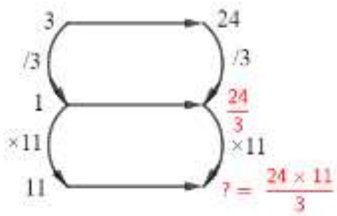
11 ouvriers font 11 fois plus : $\mathbf{\frac{11\times 24}{3}}$

Le passage à l'unité est explicite dans la pratique de la règle de trois, cependant cette réalité ne fait pas d'elle dans la pratique scolaire une technique qui va servir à la mise en place d'une méthode attachée à l'usage du coefficient de proportionnalité. La ritualisation (ou l'utilisation mécanique) de la technique va jouer un rôle fondamental dans le blocage de cette mise en relation.

L'organisation sous forme de tableau ou schématisée, ramenant le problème au cadre numérique, permet de mettre en exergue la proximité manifeste de la règle de trois et le coefficient de proportionnalité :



ou



Dans la pratique les enseignants résument la règle de trois à la première et à la dernière ligne. Ce qui conduit à occulter le passage à l'unité :

$$3 \longrightarrow 24$$
$$11 \longrightarrow x = \frac{24\times 11}{3}$$

Cette opération a son origine à l'égalité des produits de moyens et des extrêmes dans la recherche de la quatrième proportionnelle : 11 et 24 étant les moyens et 3 et *x*, les extrêmes :

Les moyens

$3 : 24$ et $11 : x$ donne $24\times 11 = 3\times x$ Produit des moyens égal produit des extrêmes

Les extrêmes

En référence à l'écriture sous la forme de rapports, la technique se traduit par une écriture d'une proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et la résolution par un produit en croix qui se justifie par la technologie relative au travail sur les proportions : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow$ ad = bc

REMATEC, Belém (PA), v. 16, Fluxo Contínuo, p. 197-231, Jan.-Dez., e-ISSN: 2675-1909, 2021
DO I: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n.p197-230.id357

Registre géométrique des proportions et de la proportionnalité

La proportionnalité est un concept très utilisé en géométrie et beaucoup de problèmes de géométrie sont résolus en appliquant des techniques relevant de la proportionnalité (théorèmes de Thalès, les similitudes, la division d'un segment en parties égales, etc.). Nous en donnons quelques un.

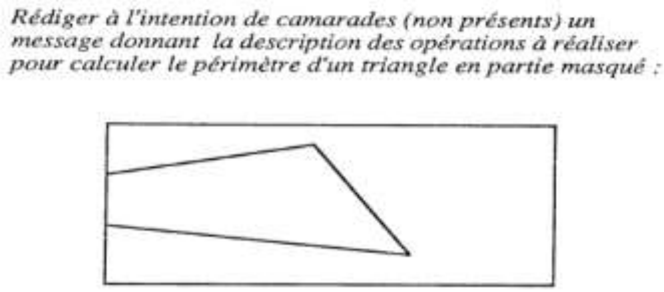
Par exemple on donne les problèmes ci-dessous qui nous semblent intéressants dans la formation des enseignants et on demande d'exécuter les tâches suivantes :

T_1 : résoudre les problèmes

T_2 : ces problèmes relèvent–ils des situations de proportionnalité. Si oui justifier votre réponse.

Problème 1 : Ce problème est inspiré de la thèse de BALACHEFF (1988) dont voici le texte intégral en image

Figure 1 - Exemple de triangle tronqué, le morceau manquant est un secteur angulaire



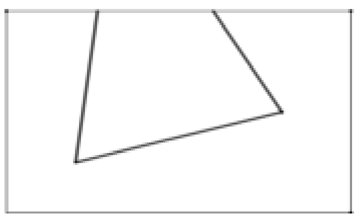
Source: Balacheff (1988, p.323)

Nous l'avons modifié en cet énoncé suivant

Enoncé :

Voici un triangle dont on ne voit pas l'autre sommet. Peut-on trouver le périmètre de ce triangle tronqué ? Si oui trouver le en justifiant la méthode ?

Figure 2 - triangle tronqué



Source : Les auteurs

Pour la résolution de ce problème le type de troncature du triangle est une variable très importante. Plusieurs cas peuvent se présenter :

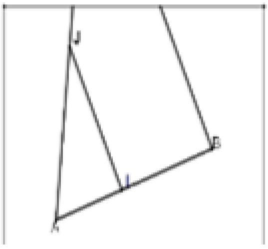
– Le cas où aucun sommet n'est visible mais seulement des parties des côtés ;

– Le cas où un côté est entièrement invisible ;

– Le cas où c'est un sommet qui n'est pas visible, notre exemple : il y a une solution avec plusieurs procédures possibles : translation, rotation, homothétie, symétries. Mais ces procédures peuvent être réfutées si la figure est très grande pour la feuille de manière qu'aucun triangle entier homothétique ne peut être construit.

Nous nous sommes inspirés de la solution de BALACHEFF pour donner la solution suivante.

Figure 3 - Cas où un sommet n´est pas visible



Source: Les auteurs

La seule procédure qui donne la solution est la configuration de Thales. Il s'agit de tracer un segment parallèle à un des côtés incomplets de manière qu'il coupe les deux autres côtés (figure ci-dessus). Ainsi on mesure AB, AI, AJ, IJ et on applique les proportions de Thales pour trouver les longueurs des deux autres côtés.

Pour trouver le périmètre du triangle tronqué on a deux possibilités : Si on nomme C le sommet caché, P le périmètre du triangle tronqué et p le périmètre du triangle AIJ.

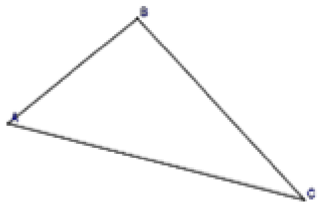
1^{er} cas : on aura d'après Thales $\frac{JA}{AC} = \frac{AI}{AB} = \frac{JI}{BC}$ et on détermine AB, AC, BC et $P = AC + AB + BC$.

2^e cas : on calcule p = AJ+AI+IJ et puisque que le triangle ABC est l'image de AIJ par l'homothétie de centre A et de rapport k =.$\frac{AB}{AI}$. Ce 2^e cas est très important surtout pour la formation des enseignants car il permet de trouver le périmètre d'un triangle sans connaitre les mesures des côtés ; l'autre avantage est qu'il permet de faire le bon choix de l''unité, ici k au lieu de 1/k

Problème 2

Soit ABC un triangle quelconque. Peut-on le partager en 2 ; en 3 puis en 7 triangles de même aire. Si oui faites le partage. Justifier la procédure.

Figure 4 - Triangle à partager en d'autres triangles de même aire

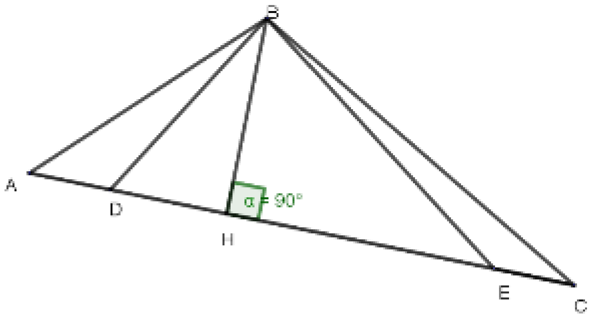


Source: construction de l'auteur

On sait que l'aire a d'un triangle est $a = \frac{base \times hauteur}{2}$ et que deux triangles de même hauteur ont des aires proportionnelles.

Donc pour partager l'aire du triangle ABC en n triangles de même aire il suffit de partager le segment AB en n parties égales (configurations de Thalès) et de tracer tous les triangles obtenus, ils ont tous la même hauteur donc ils sont proportionnels et de bases de même mesure. Donc leurs aires sont égales

Figure 5 - Triangle partagé en d'autres triangles



Source: Construction de l´auteur

REMATEC, Belém (PA), v. 16, Fluxo Contínuo, p. 197-231, Jan.-Dez., e-ISSN: 2675-1909, 2021
DO I: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n.p197-230.id357

Aspects langagiers et aspects numériques

Pour bien comprendre la proportionnalité, il y a des concepts langagiers qu'il faut maitriser tels que k fois plus, fois plus grand ou plus petit que, k unités de plus que. Parce que la compréhension de ces concepts permet de reconnaitre ou non une situation de proportionnalité

Problème :

Un marchand vend des poupées de tailles différentes

Une grande poupée coûte deux fois plus qu'une petite poupée. Une directrice de jardin d'enfants vient en acheter pour les enfants. Elle hésite entre : Acheter six grandes et dix petites et Acheter dix grandes et six petites. Elle calcule que l'un des choix lui fait économiser 1600 f CFA. Lequel ? Et combien coûte chacune des poupées

Pour la résolution de ce problème il y a deux méthodes : la méthode algébrique que l'on va écarter pour question de niveau et la méthode numérique où on peut avoir deux possibilités :

1er cas : considérons le prix d'une petite poupée comme unité : on a

– 6 grandes poupées dont le prix vaut celui de 12 petites poupées et 10 petites poupées. Soit donc 22 petites poupées

– 10 grandes poupées dont le prix vaut celui de 20 petites poupées et 6 petites poupées. Soit donc 26 petites poupées

En faisant une comparaison, on voit qu'avec 22 petites poupées on économisera 1600 f et pour trouver le prix des poupées 26-22=4 poupées coûtent 1600f, donc une petite poupée coûte $\frac{1600}{4} = 400$ f et une grande poupée va coûter 2 fois plus soit 800 f.

2e cas : considérons le prix d'une grande poupée comme unité : on a :

– 6 grandes poupées + $\frac{10}{2}$ grandes poupées = 6+5 grandes poupées = 11 grandes poupées

– 10 grandes poupées + $\frac{6}{2}$ grandes poupées = 10+3 grandes poupées = 13 grandes poupées.

En faisant une comparaison, on voit qu'avec 11 grandes poupées on économisera 1600 f et pour trouver le prix des poupées 13-11 = 2 grandes poupées coûtent 1600 f, donc une grande poupée coûte $\frac{1600}{2} = 800$f et une petite poupée va coûter 1/2 fois moins soit 400 f.

Ces deux cas sont équivalents mais le deuxième est coûteux en calcul, donc une fois de plus le choix de l'unité est très important pour la formation des enseignants. En plus ici on utilise k fois plus qui montre que c'est une situation de proportionnalité. Donc il est nécessaire que les enseignants travaillent sur ces concepts.

REMATEC, Belém (PA), v. 16, Fluxo Contínuo, p. 197-231, Jan.-Dez., e-ISSN: 2675-1909, 2021
DO I: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n.p197-230.id357

Modèle épistémologique de référence (MER)

À travers les études historiques et épistémologiques décrites dans nos travaux de thèse nous pouvons affirmer que la notion de proportionnalité est étudiée suivant deux modèles : la théorie des proportions et la théorie de l'application linéaire.

Ces deux théories, ont été signalées par OLIVEIRA (2008) et HERSANT (2001) dans leurs thèses. En effet HERSANT, dans son étude sur l'enseignement de la proportionnalité, dans laquelle elle fait une analyse mathématique du concept de proportionnalité, met en évidence que

> La proportionnalité est d'abord une relation particulière entre des grandeurs que l'on peut traduire par une relation entre les valeurs de ces grandeurs, puis par une relation entre deux suites numériques via les mesures de ces grandeurs. La proportionnalité entre deux grandeurs peut s'appréhender en utilisant le modèle des proportions ou celui de l'application linéaire (HERSANT, 2001, p. 28)

L'auteure définit le premier modèle de la façon suivante :

> Une proportion est l'égalité de deux rapports (de nombres). Les quatre nombres non nuls a, b, c, d sont en proportion lorsque a/b = *c/d.* a, b, c, d sont les quatre *termes* de la proportion. a et d correspondent aux *extrêmes,* b et c aux *moyens.* La *quatrième proportionnelle* désigne le quatrième terme inconnu d'une proportion dont trois termes sont donnés. Cette terminologie est justifiée par une ancienne notation sémiotique des proportions : *a:b : : c:d* qui se lit *'a* est à *b* comme c'est à *d'* (HERSANT, 2001, p. 21)

Pour le deuxième modèle, celui de la linéarité et des propriétés de l'application linéaire, l'auteure met en évidence que

> Deux suites numériques sont proportionnelles si et seulement si les termes d'une suite sont les images des termes de l'autre par une application linéaire de coefficient non nul. Lorsque deux suites numériques U et V sont proportionnelles, il existe donc deux applications linéaires (une de coefficient a et l'autre de coefficient 1*la),* associées à ces suites et deux coefficients de proportionnalité (HERSANT, 2001, p. 27)

On peut donc mobiliser l'un ou l'autre de ces modèles dans l'enseignement de la proportionnalité ou un mélange des deux.

HERSANT (2001) a fait une analyse comparative de ces deux modèles où elle met en évidence que

> Le coefficient de proportionnalité est commun aux deux modèles et sert de pont entre les deux théories. De même, la propriété de linéarité, bien qu'exprimée avec des objectifs différents (rapport, proportion/combinaison linéaire), apparaît comme un point commun aux deux théories. Toutefois, les objets de base de ces modèles sont différents (rapport, proportion, extrêmes et moyens pour la théorie des proportions et application linéaire, fonction linéaire, image et antécédent pour le modèle de l'application linéaire) (p. 28)

Ainsi on peut donc, à travers des situations adaptées, mettre en évidence le modèle mathématique privilégié dans l'enseignement de la proportionnalité, mais à conditions que ces situations proposées suscitent un raisonnement proportionnel chez les élèves.

REMATEC, Belém (PA), v. 16, Fluxo Contínuo, p. 197-231, Jan.-Dez., e-ISSN: 2675-1909, 2021
DO I: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n.p197-230.id357

Un autre aspect que notre étude met en évidence est le raisonnement proportionnel, c'est-à-dire nous avons fait ressortir dans les réponses des enseignants qu'il manque un raisonnement proportionnel :

Qu'est-ce qu'un raisonnement proportionnel ? Par rapport à cette question, Oliveira (2001) affirme que

> …nous pouvons dire que le raisonnement mathématique est une activité qui permet aux individus d'organiser leurs connaissances, en suivant une certaine logique qui leur permet d'arriver à une conclusion, et par là de produire de nouvelles connaissances. On trouve plusieurs types de raisonnements en mathématiques, dont le raisonnement inductif et le raisonnement déductif. Le premier est fondé sur des observations, des faits. II produit des généralisations. Les conclusions sont plus générales que les prémisses. C'est un raisonnement orienté vers la construction de lois, de propriétés. Le deuxième est fondé quant à lui sur des prémisses explicites. Il produit des particularisations. Les conclusions sont donc plus spécifiques que les prémisses. C'est un raisonnement orienté vers l'application des connaissances existantes à des contenus particuliers, vers la production de connaissances à partir d'autres connaissances. » (p. 62)

En général, quand on évoque le raisonnement proportionnel, beaucoup pensent à la méthode utilisée pour résoudre les problèmes, comme par exemple, le « produit en croix » ou « la règle de trois » et non au raisonnement lui-même. Or avoir recours à un raisonnement proportionnel pour résoudre des situations proportionnelles demande à l'élève en plus de la méthode utilisée, de pouvoir reconnaître que la situation relève d'une situation proportionnelle, d'être capable de manipuler les grandeurs du problème et de comprendre le contexte dans lequel le problème a été proposé ; c'est-à-dire toutes les variables pouvant influencer la procédure.

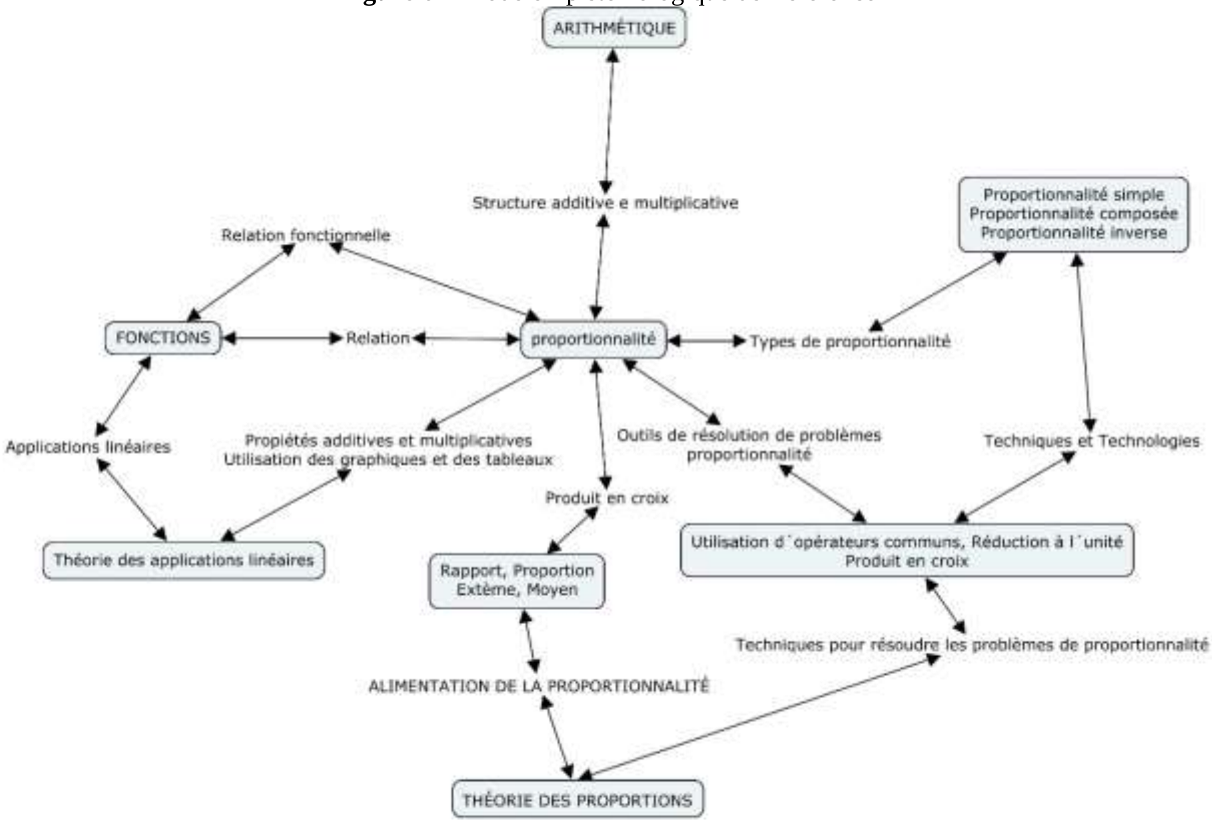
Concernant l'influence et l'utilité des variables didactiques du problème sur les procédures des élèves, nous citons OLIVEIRA (2008, p. 62) qui cite aussi HERSANT (2010 apud SOKONA (1989)) en ces termes : *« L'ordre des données, les variables numériques et le domaine de référence du problème sont des sources de difficulté qui interviennent dans la majeure partie des problèmes de l'enseignement.* » (HERSANT, 2001, apud OLIVEIRA, 2008, p.62)

SOKONA (1989) cité par OLIVEIRA (2008, p. 62) affirme que « *Le choix de la stratégie à être utilisée est très lié aux variables du problème, car, dépendant de la variable mise en place dans le problème, une certaine stratégie peut être plus ou moins efficace*. »

Nous avons déjà annoncé depuis le début de nos travaux dans nos hypothèses de recherche que l'étude de la proportionnalité devrait être introduite par les proportions. C'est pourquoi nous avons envisagé de choisir le « produit en croix » comme faisant partie de notre modèle épistémologique de référence – MER (Figure 6). C'est un principe simple et fondamental pour résoudre des problèmes qui s'inscrivent dans une situation de proportionnalité.

REMATEC, Belém (PA), v. 16, Fluxo Contínuo, p. 197-231, Jan.-Dez., e-ISSN: 2675-1909, 2021
DO I: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n.p197-230.id357

Figure 6 – Modèle Epistémologique de Reference



Source: Adaptation de Alpha e Almouloud (2021, p.787)

L´analyse des **manuels anciens** (cités dans les programmes du Mali) montre que la proportionnalité n'est pas explicitement étudiée, en revanche on étudie la règle de trois, les agrandissements et les réductions, les pourcentages, etc. Il est fait aussi mention de fraction d'une grandeur, de grandeurs proportionnelles. Les types de tâches et techniques sont essentiellement autour de la règle de trois.

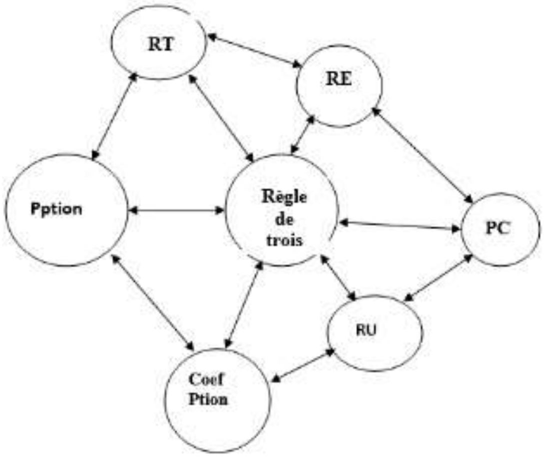
C'est dans les **Manuels actuels (CONFEMEN)**, principalement le manuel de cinquième année qu'il est définit pour la première fois les notions de situation de proportionnalité, de coefficient de proportionnalité, de règle de trois et de pourcentage. Le manuel aborde également la proportionnalité inverse et de la linéarité, mais de façon implicite.

À la lecture des programmes et des manuels (anciens et nouveaux), le modèle dominant de résolution des situations relevant de la proportionnalité ***est la règle de trois***. C'est-à-dire, dans tous les programmes de tous les niveaux scolaires et tous les manuels il y'a au moins un paragraphe consacré à la règle de trois et qui permet de résoudre les problèmes de partage et de proportionnalité.

Par conséquent entre les savoirs à enseigner (les programmes) et les savoirs apprêtés (le guide et le manuel), c'est à l'enseignant de savoir mobiliser ses propres compétences pour faire un choix d'enseignement adéquat (savoir à enseigner). Mais nous pensons que l'accent devrait être mis sur une mise en relation entre proportions et proportionnalité et ses applications puis sur une participation active et effective de l'élève dans la résolution des tâches qui lui sont proposées dans les exercices et les problèmes. Pour atteindre ce résultat, il faut non seulement que l'élève comprenne ce qu'il cherche, mais qu'il dispose d'un milieu pour déployer sa réflexion et son action.

De nos analyses voici la carte conceptuelle qui se dégage pour représenter le modèle épistémologique dominant : *la règle de trois.*

Figure 7- Modèle épistémologique dominant de la règle de trois



Source: Alpha (2020, p.140)

Nous notons les modèles avec lesquels la règle de trois interagit par leur cigle : Relation de type multiplicatif (RTM), Rapport externe (REX), produit en croix (PC), Réduction à l'unité (RU), Coefficient de proportionnalité (coef Ption), technique des Proportions.

En règle générale, on peut parler de modèle de référence dominant lorsqu'on peut faire émerger un courant récurrent de pratique. Ce modèle aide à problématiser une situation et à élaborer les orientations du travail à exécuter. Il y a cependant une complémentarité des modèles, des cadres conceptuels et des schèmes de référence. Après l'étude des quatre opérations d'arithmétique, la proportionnalité est le concept mathématique le plus utilisé à travers la procédure dite **de règle de trois** dans la résolution des problèmes de quatrième proportionnelle.

Dans la plupart des recherches sur la proportionnalité, les travaux se sont limités à l'étude de la nature des problèmes (qu'est ce qui fait qu'une situation relève de la proportionnalité ou non), de la structure des problèmes de proportionnalité, des techniques de résolution et du mode de raisonnement des élèves, etc. En effet nous avons montré que l'évolution des organisations mathématiques et des organisations didactiques assignées à la proportionnalité de 1960 à 2020 au Mali, est sous influence de la perception des enseignants (voire de la noosphère à travers l'étude des programmes et des instructions officiels) sur cette notion.

Nous mettons ainsi en évidence que de 1960 à nos jours, la règle de trois a joué un rôle prépondérant dans le traitement des problèmes de proportions et de proportionnalité. Tandis que les notions de proportion et de proportionnalité sont utilisées pour prouver qu'une situation relève de la proportionnalité, la règle de trois apparait comme un outil essentiel pour résoudre ces problèmes (baptisés d'ailleurs dans les textes officiels et les manuels de « ***problèmes de règle de trois*** »). Elle s'approprie ainsi le milieu qui permet de faire vivre ces deux notions.

REMATEC, Belém (PA), v. 16, Fluxo Contínuo, p. 197-231, Jan.-Dez., e-ISSN: 2675-1909, 2021
DO I: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n.p197-230.id357

Ceci a eu pour conséquence de réduire le champ d'intervention des proportions et ensuite de la proportionnalité. Ces notions sont réduites à tester la proportionnalité d'une situation, alors que tous les outils sont disponibles pour se passer de la règle de trois. Cette restriction apparait comme un isolement plus ou moins important des deux notions qui n'arrivent à prendre la place qui leurs revient dans l'organisation mathématique dédiée.

ENQUETE EPISTEMOLOGIQUE : ETUDE DES CONCEPTIONS D´ENSEIGNANTS SUR LE CONCEPT DE RAPPORT ET DE PROPORTION

Nous proposons un questionnaire à des enseignants dans le cadre de l'épistémologie des proportions et de la proportionnalité pour connaitre leurs principales difficultés et leur compréhension sur l'enseignement de la proportionnalité dans notre pays.

Notre expérimentation a été effectuée en trois grandes phases :

– la phase de pré-expérimentation où il s'agit d'analyser la pertinence des situations préconisées. Elle a concerné 43 étudiants professionnels[4] qui viennent de passer au concours d'entrée à l'Ecole Normale Supérieure de Bamako (ils sont au semestre 1 de licence et ils ont déjà enseigné au fondamental premier ou second cycle, donc ils étaient confrontés déjà à ces notions).

– la phase de l'expérimentation avec des enseignants en classe.

– et enfin la phase de post-expérimentation avec des élèves-maîtres généralistes[5] en fin de formation de l'Institut de Formation des maîtres de Kati où il s'agit de valider nos conclusions de l'analyse des productions de la phase de l'expérimentation.

Nous allons expressément reproduire les analyses assorties des productions des enseignants en classe.

Construction et analyse a priori d´un questionnaire adressé à des enseignants du premier cycle de l'enseignement fondamental

Ce questionnaire avait pour objectif d'identifier les conceptions des enseignants de terrain sur la notion de proportionnalité. Il s'agissait au sujet de ces enseignants, de comprendre sur le plan épistémologique le sens qu'ils donnent (à travers les situations proposées) à la notion de proportionnalité et des notions qui lui sont liées (grandeurs, rapports, proportions, coefficient de proportionnalité, règle de trois, etc.). Autrement dit, il revenait de vérifier :

– La maîtrise du savoir disciplinaire, c'est-à-dire la capacité à savoir reconnaitre une situation de proportionnalité et une situation de non-proportionnalité dans différents cadres au sens de DOUADY (1986) (cadre des grandeurs, cadre numérique et cadre graphique), la capacité à connaître et utiliser les principales propriétés de la proportionnalité, la capacité à choisir et à résoudre des problèmes relatifs à la proportionnalité et à savoir appliquer la proportionnalité aux pourcentage, vitesse, moyenne, échelle, débit, etc.

4 Cette appellation « professionnel » est de cours à l'ENSup pour distinguer les étudiants qui viennent des universités avec une licence des enseignants qui rentrent à l'ENSup après exercé quelques années d'enseignement dans le fondamental.

5 Les élèves-maîtres généralistes sont formés dans les Institut de Formation des maîtres pour enseigner au fondamental I. Ce sont des futurs enseignants qui seront confrontés à ces notions (proportionnalité et autres).

REMATEC, Belém (PA), v. 16, Fluxo Contínuo, p. 197-231, Jan.-Dez., e-ISSN: 2675-1909, 2021
DO I: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n.p197-230.id357

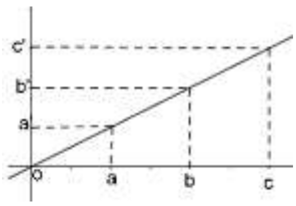
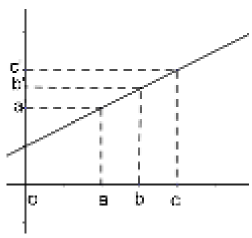
– La maîtrise de l’enseignement de la proportionnalité. C’est-à-dire quelles sont dans les programmes et les pratiques de classe les compétences attendues sur la notion de proportionnalité à la fin de l’école primaire et comment ces compétences vont-elles évoluer.

Tout maître à ce niveau doit pouvoir résoudre de plusieurs manières les problèmes de proportionnalité et parmi ces manières lesquelles peuvent être utilisées par un élève d’un niveau donné. Il doit savoir à quel niveau peut-on proposer une telle situation-problème, savoir repérer les variables didactiques et analyser les valeurs des variables qui peuvent influencer les procédures des élèves, décrire les démarches des élèves et relever les erreurs possibles des élèves et enfin faire des hypothèses sur les causes possibles de ces erreurs et en trouver des pistes de remédiassions.

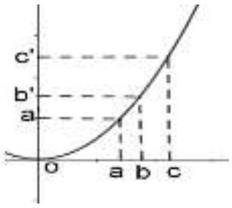
Énoncés du questionnaire

a) Situations relatives à l’approche de la proportionnalité par les élèves

Les affirmations suivantes ont été données par des élèves. Pour chacune d´elles, faites une étude et dites celles qui sont vraies et celles qui sont fausses. Justifiez votre réponse. Quelles connaissances sont mises en jeu ? Quelle(s) activité(s) proposeriez-vous aux élèves qui ont données des affirmations fausses pour qu´ils prennent conscience de ce fait ?

Affirmations	
1. La taille d’une personne varie proportionnellement à son poids	
2. Pour une marchandise, le prix à payer est proportionnel à la quantité achetée	
3. 5 et 7 sont proportionnels à 8 et 10	
4. 4 et 6 sont proportionnels à 5 et 7,5	
5. Les nombres 4, 7, et 11 sont proportionnels respectivement à 12, 28 et 33.	
6. 3 et 5 sont proportionnels à 9 et 25	
7. Le périmètre d’un cercle est proportionnel à son rayon.	
8. Le prix d’un objet qui fait une augmentation de 10% puis une baisse de 10% n’implique aucune modification dans le prix	
9. D’après ce graphique, les nombres a, b, et c sont proportionnels aux nombres a’, b’, et c’	
10. D’après ce graphique, les nombres a, b, et c sont proportionnels aux a’, b’, et c’.	

REMATEC, Belém (PA), v. 16, Fluxo Contínuo, p. 197-231, Jan.-Dez., e-ISSN: 2675-1909, 2021
DO I: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n.p197-230.id357

11. D’après ce graphique, les nombres a, b, et c sont proportionnels aux nombres a’, b’, et c’	

b) Situations portant sur les modes de résolution des enseignants

Un enseignant a proposé à ces élèves les situations ci-dessous. Quelles connaissances ces élèves doivent mobiliser pour la résolution de chacune de ces situations ? Quelles stratégies de résolution peuvent être mobilisées pour la résolution de chacune des situations ?

Situation 1

Compléter ce tableau pour que ce soit un tableau de proportionnalité.

14	28	70	98	25
21	X	Y	Z	T

Situation 2

Résoudre le problème suivant en utilisant le plus de méthodes possibles. 6 mètres de tissu coûtent 4000 f CFA. Quel est le prix de 9 mètres du même tissu ?

Situation 3

Résoudre le problème suivant, en utilisant différentes méthodes. Avec une peinture blanche et une peinture verte, on réalise deux mélanges :

– Le mélange A est obtenu avec 5 litres de peinture blanche et 3 litres de peinture verte ;

– Le mélange B est obtenu avec 7 litres de peinture blanche et 4 litres de peinture verte.

Quel est le mélange le plus vert ?

Situation 4 :

Six vaches produisent en moyenne 4000 litres de lait en 30 jours. Combien de jours faut-il à 18 vaches pour produire 72000 litres de lait ?

c) Situations portant sur les réponses simulées d’élèves

Le problème ci-dessous a été proposé à des élèves :

Une photo est tirée dans un rectangle de 4 cm sur 6 cm, on veut en réaliser un agrandissement : la largeur de la photo agrandie doit mesurer 9 cm. Quelle sera sa longueur ?

Les six solutions ci-dessous ont été proposées par des élèves. Quelles sont celles qui correspondent à un raisonnement proportionnel correct ? Justifiez votre réponse pour chaque solution. Quelle explication feriez-vous des solutions que vous jugerez fausses ?

Solution A : On a ajouté 5 cm à la largeur ; il faut donc aussi ajouter 5 cm à la longueur : celle-ci mesurera donc 11 cm.

Solution B : 9 c’est$(4 \times 2) + 1$. On a donc doublé la largeur, puis ajouté 1 cm. Si on fait la même chose avec la longueur, on obtient :$(6 \times 2) + 1$. La longueur mesurera donc 13 cm.

REMATEC, Belém (PA), v. 16, Fluxo Contínuo, p. 197-231, Jan.-Dez., e-ISSN: 2675-1909, 2021
DO I: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n.p197-230.id357

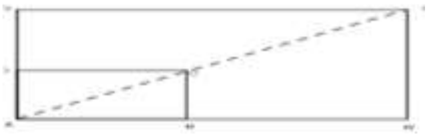
Solution C : Faisons un tableau, puis un produit en croix :

Dimensions en cm du rectangle initial	Dimensions en cm du rectangle agrandi
4	9
6	X

$4x = 6 \times 9$, donc $x = \frac{54}{4} = 13{,}5$. La longueur mesurera donc 13,5 cm.

Solution D : 6 cm, c'est 4 cm + 2 cm ; si pour 4 cm, on agrandit à 9 cm, alors pour 1 cm, on agrandit donc à 2,25 cm (9/4= 2,25) et pour 2 cm, on agrandit à 4,5 cm. Donc pour 6 cm, l'agrandissement sera de 13,5 cm.

Solution E : On construit un rectangle (A, B, C, D) de 4 cm sur 6 cm. On prolonge deux côtés consécutifs [AB] et [AD] comme sur la figure suivante. On place D'à 9 cm de A sur la droite (AD) et on complète le rectangle (A, B', C', D'), puis on mesure le segment [AB'].



Solution F : On regroupe les mesures dans le tableau suivant et on en déduit la mesure correspondante à 9 cm

	Mesure des largeurs	Mesure des longueurs
	4	6
	4	6
	1	6/4=1,5
TOTAL	9	13,5

La mesure de la longueur de la figure agrandie est 13,5 cm

Analyse a priori des situations

Cette expérimentation s'est déroulée au Groupe Scolaire de Daoudabougou de Bamako où il y a cinq écoles fondamentales du premier cycle comprenant chacune 6 classes de la 1$^{\text{ère}}$ à la 6$^{\text{ème}}$ année. Elle s'adresse aux enseignants de la première année jusqu'à la sixième année de ce cycle.

Les situations ont été examinées de façon individuelle par les enseignants, et ont été analysées pour tirer une conclusion sur leurs pratiques. Les Directeurs du groupe scolaire ont été consultés afin que chacun propose quatre enseignants pour l'expérimentation, soit au total 20 enseignants.

L'expérimentation s'est déroulée en deux phases (sur 2 journées) :

– Au cours de la 1$^{\text{ère}}$ journée, une partie des questionnaires (I, II et III) a été distribuée vers 9 heures pour récupérer les réponses à 17 heures.

– À la 2$^{\text{ème}}$ journée, la passation du reste des questionnaires (IV et V) a été réalisée de 9 heures à 12 heures.

Il faudra préciser que les maîtres ont travaillé dans un contexte peu contraignant pour eux en ce sens qu'ils pouvaient aller en pause avec leurs copies.

REMATEC, Belém (PA), v. 16, Fluxo Contínuo, p. 197-231, Jan.-Dez., e-ISSN: 2675-1909, 2021
DO I: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n.p197-230.id357

Variables didactiques

Nous avons privilégié un certain nombre de variables pouvant avoir une influence sur le rendement des enseignants dans l´analyse des problèmes sur les proportions. Ces variables se divisent en trois types distincts : les variables relatives aux thèmes, les variables associées à la forme de l'énoncé des problèmes et celles associées aux données numériques. Nous les présentons ci-dessous, mais en mettant un accent particulier sur le dernier type qui nous semble le plus influent pour notre expérimentation

a) Variables relatives aux thèmes

Nous avons retenu comme variables reliées aux choix des thèmes, la nature des grandeurs (grandeurs semblables ou grandeurs non semblables), la familiarité des sujets avec le thème (l'expérience, le caractère discret/continu du problème)

▪ **La nature des grandeurs :** la nature des grandeurs (de même nature ou nature différente) peut influencer le choix de la stratégie privilégiée par les enseignants. Nous savons que les problèmes représentés par des grandeurs de nature différente sont fréquemment résolus à partir d'un opérateur multiplicatif fonction.

Nous donnons comme exemple les deux situations de RENÉ de COTRET (2006) afin d'évoquer la différence entre les deux types de nature de grandeurs :

Exemple 1 : *Problème référant à des grandeurs de même nature (homogènes)*

« Une petite entreprise fabrique du ruban très fin. Pour fabriquer "x_1" mètres de ruban, il faut 'y$_1$" mètres de fil. Combien faudra-t-il de fil pour faire "x" mètres de ruban ? » (RENÉ de COTRET, 2006, p.21)

Exemple 2 : *Problème référant à des grandeurs de nature différente (non homogène)*

« Un marchand vend "x_1" kilos de pommes pour "y_1"$. Combien me coûteront "x" kilos de pommes ? » (Ibid., p.21)

Dans l'exemple 1, seule la longueur du ruban et de fil, exprimée en mètres, doit être considérée dans la mise en œuvre d'une stratégie de résolution du problème, alors que dans le second exemple, les élèves doivent travailler à partir de deux grandeurs de natures différentes.

▪ **Familiarité avec le thème** (variable cognitive)

Les enseignants sont familiers aux problèmes impliquant des grandeurs de natures différentes (par exemple, le prix en fonction du poids) et cela favorisera une procédure qui consiste à dégager une valeur unitaire (règle de trois). Par exemple, dans l´énoncé «*3 kilos de riz coûtent 300 f CFA. Combien coûtent 5 kilos de riz ?*», notre sujet doit être amené à calculer le coût d'un kilo de riz et à multiplier le résultat par 5.

Selon ROUCHE (2001), le caractère discret/continu d'un problème influencerait la mise en œuvre d'un raisonnement de résolution de problèmes chez l'élève. À cet effet, il affirme que

> le caractère continu réfère à tout objet qui peut être indéfiniment divisé sans qu'il y ait perte d'identité, tels un segment de droite ou une boule de pâte à modeler. Par ailleurs, le terme discret signifie qu'il est impossible de diviser **1** élément sans qu'il y ait perte d'identité. Ce caractère se rapporte à différents éléments, tels : l'être humain, une bille ou une voiture. Cette variable exercerait une influence sur le rendement de l'enfant à résoudre des problèmes sur les proportions.

REMATEC, Belém (PA), v. 16, Fluxo Contínuo, p. 197-231, Jan.-Dez., e-ISSN: 2675-1909, 2021
DO I: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n.p197-230.id357

b) Variables associées à la forme de l'énoncé des problèmes

Une variable qui nous parait importante ici est le registre dans lequel l'énoncé est formulé. En plus, on peut donner des détails superflus ou des consignes pour contrôler les capacités des élèves.

c) Variables relatives aux données numériques

Nous distinguons comme variables associées aux données numériques la taille et la nature des nombres, le rapport entre les nombres et le nombre de couples en jeu dans la situation.

Nous présentons les principales catégories de variables didactiques et leurs valeurs comme suit :

V_1 : le registre de la situation : les registres suivants peuvent influencer sur les procédures des élèves.

V_{11} : le registre de la langue naturelle

V_{12} : le registre des tableaux

V_{13} : le registre graphique

Le registre de représentation sémiotique (DUVAL, 1995) est très important et influence beaucoup le comportement des élèves. La présentation des données (tableau, texte, graphique) peut jouer sur les procédures. Le registre des tableaux est le plus approprié pour un raisonnement proportionnel pour les élèves, car ils utilisent juste un produit en croix à la recherche de la 4^e proportionnelle. Pour le registre de la langue naturelle, il est plus complexe car il y a des difficultés à traduire l'énoncé, à savoir si c'est une situation ou non de proportionnalité, puis à choisir une procédure. Le registre graphique est aussi complexe, car met en jeu la propriété d'alignement ou non des données. Ces points sont-ils alignés à l'origine du repère suivant une droite ou suivant une courbe quelconque.

Nous avons considéré le registre comme variable didactique car le tableau et la représentation graphique influencent sur la procédure. La situation 1 de IV, par exemple, est généralement réussi par les élèves en raison de l´usage d´un tableau de valeurs.

V_2 : La nature des nombres donnés dont les valeurs sont : V_{21} : naturel, V_{22} : décimaux et V_{23} : fraction

La nature des nombres peut jouer un rôle important sur l´échec et le succès des élèves par rapport aux calculs des rapports : Si les nombres sont des entiers naturels, cela peut favoriser le calcul mental et la recherche des rapports interne et externe, le coefficient de proportionnalité ; alors que les décimaux et les fractions demandent plus d'efforts dans les calculs.

V_3 : le nombre de couples et la relation entre les nombres formant le couple (x_i, y_i).

V_{31} : Relation d'addition : $y_i = x_i + k, k \in R$

V_{32} : Relation de multiplication : $y_i = kx_i, k \in R$

V_{33} : Relation de puissance : $y_i = (x_i)^k, k \in R$

Le nombre de couples donnés et la relation qu'il y a entre ces nombres permet ou non de faciliter la mise en évidence du coefficient de proportionnalité ou du rapport de linéarité.

Les relations entre les nombres peuvent aussi influencer le comportement des élèves en ce qui concerne la résolution de certaines tâches. Les élèves font une conjecture de la relation entre les x et les y et tirent une conclusion.

REMATEC, Belém (PA), v. 16, Fluxo Contínuo, p. 197-231, Jan.-Dez., e-ISSN: 2675-1909, 2021
DO I: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n.p197-230.id357

V_4 : Position des points sur un graphique dont les valeurs sont : V_{41} : Points situés sur une droite d'origine O (fonction linéaire), V_{42} : Points situés sur une droite ne passant pas par l'origine O (fonction affine) et V_{43} : Points situés sur une courbe quelconque.

Cette variable permet de justifier le rapport entre proportionnalité et la fonction linéaire. Il s'agit de voir si les points sont situés sur une droite et qui passe par l'origine du repère, dans le cas contraire, nous n´avons pas une situation de proportionnalité.

V_5 : Le type de situation dont les valeurs sont : V_{51} : situation où la proportionnalité intervient par convention sociale (problèmes de nature économique de la vie courante), V_{52} : situation où la proportionnalité permet une modélisation d'un phénomène (physique, géométrique) et V_{53} : situation où la proportionnalité intervient comme outil pour définir de nouveaux concepts (échelle, pourcentage).

Une situation familière peut favoriser la mise en œuvre de raisonnements adaptés et le contrôle des résultats.

V_6 : La typologie des problèmes qui a cinq valeurs : V_{61} : Problèmes de recherche d'une 4ème proportionnelle : trois données sont connues, et on recherche la quatrième ; V_{62} : Problèmes de comparaison : deux grandeurs sont en présence mais impliquées dans deux situations différentes. La question porte sur la comparaison des deux situations ; V_{63} : Problèmes de double proportionnalité : cas d'une variable proportionnelle à deux autres variables qui peuvent être modifiées de manière indépendante, V_{64} : Problèmes de reconnaissance ou non de la proportionnalité dans les différents cadres et V_{65} : Les problèmes qui utilisent la proportionnalité : Problèmes de pourcentages, d'échelle, d'agrandissement et de réduction

Nous avons proposé des situations utilisant les différentes variables pour voir toutes les composantes de la proportionnalité et mettant en jeu les différents cadres, les différents types ; voir les différentes procédures et le modèle de référence C'est la raison pour laquelle nous nous sommes abstenus de donner les décimaux et les fractions pour jouer sur le temps de recherche.

Les difficultés que peuvent rencontrer les sujets sont multiples, en voici quelques-unes : difficulté à identifier les grandeurs en relation dans la situation proposée ; la présentation des données peut jouer (tableau, texte, graphique) sur leur « mise en relation » ; la difficulté à savoir si la situation est proportionnelle ou non.

La plupart des problèmes ne précisent pas explicitement si la situation est une situation de proportionnalité ou non. C'est à l'élève de faire appel à ses savoirs appris ou à deviner l'intention du maître qui a proposé l'exercice. Beaucoup pensent, par exemple, que toute situation où les données numériques sont portées dans un tableau relève toujours de la proportionnalité.

Nous avons aussi les difficultés liées aux situations de proportionnalité du type « augmentation » ou « diminution ». Certains élèves commettent toujours des erreurs dans les exercices d'agrandissement et de réduction : la confusion pour eux relève du fait que selon eux : augmentation et diminution signifient respectivement addition et soustraction.

Le choix d´une procédure de résolution et à la mettre en œuvre peut être source de difficultés liées aux questions suivantes : Comment déterminer le coefficient de proportionnalité ? le rapport de linéarité ? Problèmes dans l'exécution des calculs. Il n'existait pas une procédure unique menant à la résolution d'un problème de proportionnalité. L'élève devra donc faire un choix.

REMATEC, Belém (PA), v. 16, Fluxo Contínuo, p. 197-231, Jan.-Dez., e-ISSN: 2675-1909, 2021
DO I: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n.p197-230.id357

Enfin, la mise en œuvre de la procédure choisie peut être aussi une source de difficulté, comme par exemple, l´exécution des calculs mettant en jeu des décimaux et des fractions.

Procédures de résolution

Questionnaire a) : Situations relatives à l'approche de la proportionnalité par les élèves
<u>Item</u> 1 : Taille et poids sont des grandeurs liées mais pas proportionnelles. Le poids peut changer sans que la taille ne change. Quand le poids double la taille ne double pas forcément.
<u>Item</u> 2 : Vrai (au moins dans le même service et au même moment). Si on achète k fois plus, on paie k fois plus cher. Si l'essence coûte 600 F le litre alors le prix à payer pour une quantité Q est 600×Q F. Mais si on achète une très grande quantité, on peut faire un rabais, donc la proportionnalité relève de la convention sociale.
<u>Item</u> 3 : Il s'agit d'un opérateur additif et non multiplicatif qui permet de passer de (5 ;7) à (8 ;10).

Tableau 1: tableau de relation additive

$\xrightarrow{(+3)}$

5	**8**
7	**10**

Source : Les auteurs

<u>Item</u> 4 : Il s'agit d'un opérateur multiplicatif

Tableau 2 - tableau de proportion géométrique

$\xrightarrow{(\times 1{,}25)}$

5	**8**
7	**10**

Source : Les auteurs

<u>Item</u> 5 : Faux

- Méthode additive : 11 =4 + 7 mais 33 $\neq$ 12 + 28
- Méthode des proportions : $\frac{12}{4} = \frac{33}{11} = 3 \neq \frac{28}{7} = 4$

<u>Item</u> 6 : Il n´y a pas d'opérateur multiplicatif associant les deux suites ; la fonction carrée permet de passer de la première à la suite de la deuxième.
<u>Item</u> 7 : Il s'agit de modéliser mathématiquement la relation entre rayon et périmètre. Ce n'est pas une convention sociale. C'est l'opérateur multiplicatif 2π qui permet de passer du rayon au périmètre.
<u>Item</u> 8 : Beaucoup pensent que 10% d'augmentation puis une baisse de 10% n'implique aucune modification dans les prix. Ce qui est faux : confusion entre la modèle additif (+10 –10 = 0) et le modèle multiplicatif (×1 ; 1×0,9 = 0,99, donc une baisse de 1%). De nombreuses conceptions fausses sur les pourcentages proviennent de cette confusion.

REMATEC, Belém (PA), v. 16, Fluxo Contínuo, p. 197-231, Jan.-Dez., e-ISSN: 2675-1909, 2021
DO I: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n.p197-230.id357

Les items 9, 10 et 11 relèvent du même registre graphique. Le 8 est vrai mais le 9 et 10 sont faux car nous avons une fonction affine définie par $y = ax + b$ et fonction quelconque. Le 8 est une fonction linéaire qui respecte la proportion.

Questionnaire b) : Situations portant sur les modes de résolution des enseignants

Face à une situation de proportionnalité, il s'agit de voir quelles sont les procédures de résolution possible des enseignants. Quelles sont les connaissances utilisées ? Les situations peuvent être données dans les différents registres de représentation sémiotique et typologie : quatrième proportionnalité, comparaison proportionnalité multiple. Tous ceux-ci peuvent être considérés comme des variables didactiques.

Item 1 :

Les connaissances mobilisables sont : utilisation d'un tableau de proportionnalité (produit en croix, règle de trois, rapport de linéarité, coefficient de proportionnalité, linéarité (multiplication, addition))

Procédures

P_1 : Rapport de linéarité

$28 = 2 \times 14 \Rightarrow x = 2 \times 21 = 42$

$70 = 5 \times 14 \Rightarrow y = 5 \times 21 = 105$

$98 = 7 \times 14 \Rightarrow z = 7 \times 21 = 147$

$25 = k \times 14 \Rightarrow t = k \times 21$.

Les résultats sont consignés dans le tableau suivant

14	**28**	**70**	**98**	**25**
21	**42**	**105**	**147**	**37,5**

P_2 : Coefficient de proportionnalité-Réduction à l'unité.

L'opérateur qui permet de passer de 14 à 21 est l'opérateur multiplicatif (×5). Cet opérateur permet de passer de chaque nombre de la première ligne à la deuxième ligne. En particulier $t = \ 5 \times 1{,}5 = 37{,}5$

P_3 : Produit en croix: $14 \times x = 21 \times 28 \Rightarrow x = \frac{28\times21}{14} = 42$

Cette méthode peut être utilisée pour tous les éléments du tableau.

P_4 : linéarité (additivité).

$14 + 14 = 28 \Rightarrow 21 + 21 = 42 = x$

$28 + 28 + 14 = 70 \Rightarrow 42 + 42 + 21 = 105 = y$

$98 = 28 + 70 \Rightarrow z = \mathrm{x} + \mathrm{y} = 42 + 105 = 147$

Pour T, cet opérateur est difficile à trouver.

REMATEC, Belém (PA), v. 16, Fluxo Contínuo, p. 197-231, Jan.-Dez., e-ISSN: 2675-1909, 2021
DO I: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n.p197-230.id357

Item 2 : Recherche de la quatrième proportionnelle

Procédures

P₁ : Linéarité

6 mètres coûtent 4000 F

3 mètres vont coûter 2000 F (moitié du prix).

9=6+3 couteront alors 4000 F+2000 F=6000 F.

P₂ : Rapports égaux et produit en croix

$\frac{4000}{6} = \frac{X}{9} \Rightarrow 6\mathrm{X} = 4000 \times 9 \Rightarrow X = \frac{4000 \times 9}{6} = 6000f$

P₄ : Utilisation du coefficient de proportionnalité

. $6k = 4000 \Rightarrow k = \frac{4000}{6} = \frac{2000}{3}$

6	9
4000	X

$\downarrow \frac{2000}{3} \Rightarrow X = 9 \times \frac{2000}{3} = 6000\,\mathrm{F}$

P₃ : Passage par l'unité et règle de trois

6 mètres coûtent 4000 F

1 mètre coûte $4000 \times \frac{1}{6} = \frac{4000}{6}$ F

9 mètres coûtent alors $9 \times \frac{4000}{6} = 6000\,\mathrm{F}$.

P₅ : Utilisation d'un graphique (fonction linéaire)

Par lecture graphique de la fonction :

$f : N \rightarrow N$

$x \rightarrow ax$

$6 \rightarrow 4000$

Le point $M(9; y)$ à trouver est situé sur la droite (OA) avec $O(0; 0)$ et $A(6; 400)$ et par lecture graphique on trouve l'image de 9 par f

P₆ : Rapport de linéarité ou rapport scalaire

$$6 \xrightarrow{\times\frac{3}{2}} 9$$

6	9
4 000	x

$$4000 \xrightarrow{\times\frac{3}{2}} x$$

$$X = 4000 \times \frac{3}{2} = 6000f$$

Cette situation est traitée en choisissant un moyen adapté : utilisation d'un rapport de linéarité, utilisation du coefficient de proportionnalité, passage par l'image de l'unité (ou « règle de trois »), utilisation d'un rapport de linéarité ou d'un coefficient de proportionnalité

Item3 : Comparaison des proportions

Cet item est différent des autres, car il n'y a pas de terme inconnu, mais il reste quand même un problème de proportionnalité, car il s'agit d'examiner les proportions des peintures dans les deux mélanges. La difficulté réside dans le fait que les proportions ne sont pas directement comparables

Procédures de résolution

P_1 : Il s'agit de ramener les deux mélanges à la même quantité de peinture blanche. Pour cela il s'agit déterminer le PPCM de 5 et 7 qui est 35.

Ainsi on a :

Mélange *A*

Peinture blanche (en litres)	5	35
Peinture verte (en litres)	3	X

Mélange *B*

Peinture blanche (en litres)	7	35
Peinture verte (en litres)	4	Y

La recherche de X et Y revient à un problème de recherche d'une quatrième proportionnelle. On trouve $X = 21$ et $Y = 20$. Donc le mélange A est le plus vert.

P_2 : C'est aussi la recherche d'une quatrième proportionnelle. Il s'agit de ramener la proportion à un litre de peinture blanche et avec la même procédure que ci-dessus on trouve $X = \frac{3}{5}$ et $Y = \frac{4}{7}$ deux fractions qu'il faut alors comparer. P_3 : Il s'agit de trouver la proportion de peinture verte pour un litre du mélange A et pour un litre du mélange B .

Mélange *A*			Mélange *B*		
Peinture blanche (en litres)	5	$\frac{5}{8}$	Peinture blanche (en litres)	7	$\frac{7}{11}$
Peinture verte (en litres)	3	$\frac{3}{8}$	Peinture verte (en litres)	4	$\frac{4}{11}$
Mélange (en litre)	8	1	Mélange (en litre)	11	1

Puis on compare $\frac{3}{8}$ et $\frac{4}{11}$ pour avoir le mélange le plus vert :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{8} = \frac{33}{88} \\ \frac{4}{11} = \frac{32}{88} \end{array}\right\} \frac{33}{88} > \frac{32}{88}.$$ Donc le mélange A est le plus vert.

Item 4 : Proportionnalité multiple

Ici chaque grandeur est fonction des autres. Dans notre cas, le volume de lait est proportionnel d'une part, au nombre de vaches si le nombre de jours est fixé et, d'autre part, au nombre de jours si le nombre de vaches est fixé. On dit ici qu'on a une double proportionnalité.

REMATEC, Belém (PA), v. 16, Fluxo Contínuo, p. 197-231, Jan.-Dez., e-ISSN: 2675-1909, 2021
DO I: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n.p197-230.id357

(× 3)

Nombre de vaches		6	18	18
Nombre de jours		30	30	180
Volume de lait (en litres)		400	1200	7200

(× 6)

(× 3)

Nombre de vaches	**6**	**18**	**18**
Nombre de jours	**30**	**30**	**180**
Volume de lait (en litres)	**400**	**1 200**	**7 200**

(× 6)

On a deux phases. D'abord on procède à la proportionnalité entre nombre de vaches et volume de lait puis proportionnalité entre nombre de jours et volume de lait. On trouve qu'il faut 180 jours pour que les 6 vaches produisent 72000 litres de lait.

Cette situation est une pure convention sociale, car tous les jours toutes les vaches ne peuvent pas produire la même quantité de lait. Il y a beaucoup de facteurs qui peuvent intervenir dans la productivité en lait des vaches.

Questionnaire c) : Situations portant sur les réponses simulées d'élèves

Il s'agit d'un agrandissement/réduction de figure. Nous voulons faire ressortir le lien ou non entre des notions relatives à la proportionnalité (comme agrandir et ajouter, réduire et soustraire ou proportion et homothétie etc.) dans le cas de l'agrandissement ou réduction d'une figure.

Analyse des procédures :

Il faut mentionner qu'en géométrie les dimensions d'une figure agrandie doivent être proportionnelles à celles de la figure à agrandir.

➢ Les solutions A et B ne vérifient pas cette propriété. Les élèves confondent cette propriété avec augmenter en ajoutant

➢ La solution C est juste. On a regroupé les données dans un tableau et on a procédé par le produit en croix pour trouver le coefficient de proportionnalité $k = \frac{9}{4} = 2{,}25$

➢ Les solutions D et F sont juste. Les élèves ont utilisé les propriétés de linéarité

➢ La solution E est correcte. Elle peut être justifiée par deux procédés : la première utilise l'homothétie de centre A et rapport 2,25 (les deux figures sont homothétiques) ou Thalès (égalité des rapports), la deuxième utilise l'alignement des points dans un système d'axes suivant une droite passant par l'origine du repère. Cette procédure montre la relation entre la proportionnalité et Thalès, Homothétie et fonction linéaire.

Analyse des résultats

Nous avons récupéré 17 productions sur 20 que nous avons analysées (trois enseignants n'ont pas voulu rendre leurs copies).

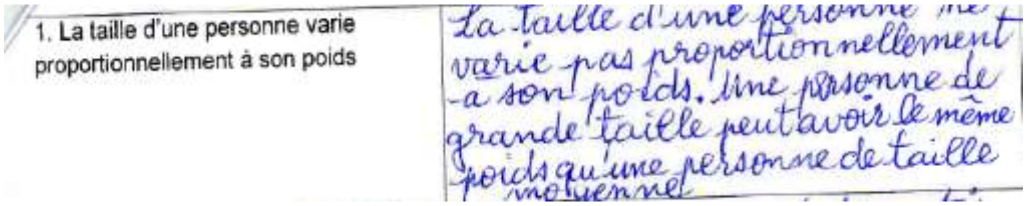
Nous avons jugé nécessaire de ne pas analyser les questionnaires I et II car leurs interprétations permettent seulement de situer les enseignants par rapport à leur connaissance de la notion et de leur ancienneté dans l'enseignement.

Questionnaire a) : Analyses des pratiques d'élèves

Item 1 : Sur les 17 :

– 8 enseignants donnent la bonne réponse comme *«la taille c'est la correspondance en longueur qui s'arrête pour un temps déterminé »* ou *« Une personne de grande taille peut avoir le même poids qu'une personne de petite taille »* (Figure 8)

Figure 8 - Un extrait de la réponse du maître BA

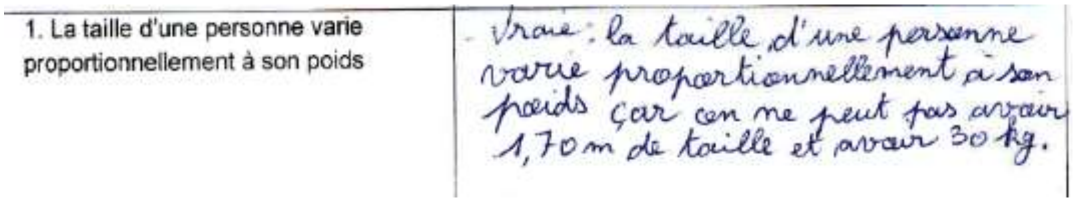


1. La taille d'une personne varie proportionnellement à son poids	La taille d'une personne ne varie pas proportionnellement à son poids. Une personne de grande taille peut avoir le même poids qu'une personne de taille moyenne

Source : Extrait du maître BA tenant la 6e et sorti de l'IFM (*Institut de Formation des Maîtres)*

– 7 donnent une réponse erronée. Ceux-ci n'ont pas selon leur réponse compris la proportion dévoilée comme *« Oui car on ne peut pas avoir 2 m de taille et peser 2 Kg »*, comme on peut le voir sur la figure 9.

Figure 9 - Extrait de la réponse du maître MS



1. La taille d'une personne varie proportionnellement à son poids	Vrai : la taille d'une personne varie proportionnellement à son poids car on ne peut pas avoir 1,70 m de taille et avoir 30 kg.

Source : Réponse du *maître MS tenant la 5e et sorti de l'IFM*

– 2 autres n'ont pas répondu à la question.

Item 2 : Nous recensons 9 bonnes réponses, 6 erronées et 2 abstentions.

Les justifications avancées dans les réponses erronées sont fondées dans la plupart des cas sur la prise en compte du contexte social du pays. Comme certains l'expliquent, le marché des mangues, dans le contexte social, ne produit pas une situation de proportionnalité. Cette situation est en générale une situation de non proportionnalité ; ***car on négocie***. Nous identifions deux cas :

– **Premier cas** : « *non car dans nos marchés les prix sont discutés avec les clients* »

Dans ce premier cas, le raisonnement des enseignants fait référence au contexte social. D'où la difficulté d'admettre la proportionnalité.

– **Deuxième cas** : « *non car dix mangues coûtent 500 F à Bamako, ces mêmes mangues coûteront 200 F à Sikasso* »

Dans ce deuxième cas, les enseignants ont du mal à centrer leur raisonnement sur l'évolution du prix suivant la quantité d'une même marchandise chez un marchand. Ces

REMATEC, Belém (PA), v. 16, Fluxo Contínuo, p. 197-231, Jan.-Dez., e-ISSN: 2675-1909, 2021
DO I: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n.p197-230.id357

enseignants pensent que pour que la proportionnalité existe, il faut le rapport prix soit partout pareil (uniformisation des prix). La diversité des prix d'une même marchandise est traduite ici par la considération d'une situation non proportionnelle.

Le paradoxe est que ces genres de problème portant sur le marché (marchandises, articles, fruits et légumes, etc.) sont considérés dans nos institutions scolaires comme des problèmes qui permettent d'illustrer avec évidence une situation de proportionnalité. Si les enseignants eux-mêmes butent sur ces questions que penser des élèves ?

La mise en situation de la notion de proportionnalité ne demande-t-il pas un choix judicieux du contexte qui ne met pas en opposition modèle de proportionnalité et contexte social ?

Item 3 : Il y a eu 8 bonnes réponses, 5 erronées et 4 abstentions. Les bonnes utilisent la proportion ou le produit en croix.

Les 5 réponses erronées se répartissent entre deux catégories : la catégorie qui lie la proportionnalité à la parité entre couples en jeu et celle qui la lie à la notion de multiple :

– **Parité entre couples** : « *non car 5 et 7 sont des nombres impairs et 8 et 10 sont des nombres pairs* »

– **Multiple et proportionnalité** : « *faux car aucun chiffre multiplié par 5 et 7 n'est pas proportionnel avec 8 et 10* » ou « *5 et 7 ne sont pas des multiples de 8 et 10* »

Si la première catégorie (la parité des couples en jeu) se définit sans ambiguïté, la deuxième par contre est assez problématique.

En effet, la première catégorie exprime le fait que lorsque les couples n'ont pas la même parité, ils ne peuvent pas être proportionnels. Par exemple (5 ; 7) et (15 ; 21) peuvent être proportionnels alors que (5 ; 7) et (20 ; 28) vont être systématiquement rejetés. Une condition nécessaire semble apparaître ici : les composantes d'un même couple doivent avoir la même parité (que dire lorsque ce n'est pas le cas dans un couple ?).

Cependant les énoncés relatifs à la deuxième catégorie ne sont pas clairement formulés. En effet, l'énoncé « *faux car aucun chiffre multiplié par 5 et 7 n'est pas proportionnel avec 8 et 10* » pourrait être interprété de deux façons différentes :

<u>1ère interprétation</u> : (a ; b) et (c ; d) sont proportionnels si c = p×a et d = q×b (p et q n'étant pas nécessairement égaux). Dans ce cas, il n'y a pas proportionnalité entre les couples.

<u>2ème interprétation</u> : (a ; b) et (c ; d) sont proportionnels si c = p×a et d = p×b. Dans ce second cas il y a proportionnalité.

En raison de la double interprétation de l'énoncé, nous avons classé cette réponse parmi les réponses erronées.

Item 4 : Nous avons répertorié 4 bonnes réponses, 10 erronées et 3 abstentions.

Les bonnes se justifient par le produit en croix ou la proportion. Les réponses erronées se justifient de façon identique ou « par le coefficient fixe »

Item 5 : Nous avons recensé 2 bonnes réponses, 11 erronées et 4 abstentions.

Les réponses erronées à cet item édifient davantage les résultats obtenus à l'item 3 ; elles consolident nos conclusions au sujet de la « ***Parité entre couples*** » et de « ***Multiple et proportionnalité*** ». En effet, les deux conceptions apparaissent nettement dans les réponses erronées des enseignants :

REMATEC, Belém (PA), v. 16, Fluxo Contínuo, p. 197-231, Jan.-Dez., e-ISSN: 2675-1909, 2021
DO I: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n.p197-230.id357

– **Parité entre couples** : « *non 7 et 11 sont impairs et 4, 12, 28, 33 sont pairs* »

– **Multiple et proportionnalité** : « *oui car* $3 \times 4 = 12$ *;* $7 \times 4 = 28$ *;* $11 \times 3 = 33$ »

Dans « Multiple et proportionnalité », il n'est pas obligatoire d'obtenir le même multiplicateur.

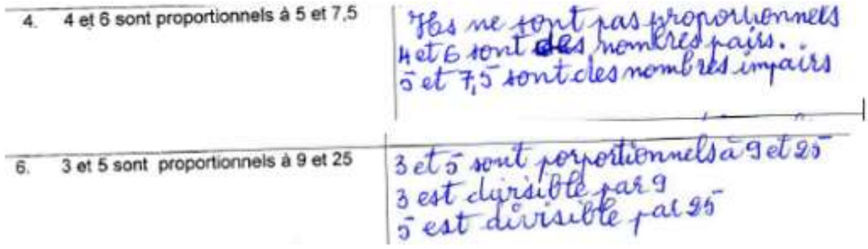
Item 6 : Nous recensons 1 bonne, 13 mauvaises et 3 abstentions.

La bonne est justifiée par la comparaison des produits en croix : $3 \times 25 \neq 9 \times 5$.

Parmi les réponses erronées nous recensons les justifications suivantes *« oui car 3×3=9 et 5×5=25 »* ou « *Oui car 3 est divisible par 9 et 5 est divisible par 25* ». *(Cf. Figure 45)*

Ces réponses relèvent également de la conception « Multiple et proportionnalité » déjà mise dans les items 3 et 5. Ceci montre une certaine importance de l'existence de la conception chez les enseignants dans l'interprétation d'une situation de proportionnalité.

Figure 10 - Extrait de la réponse du maître BA

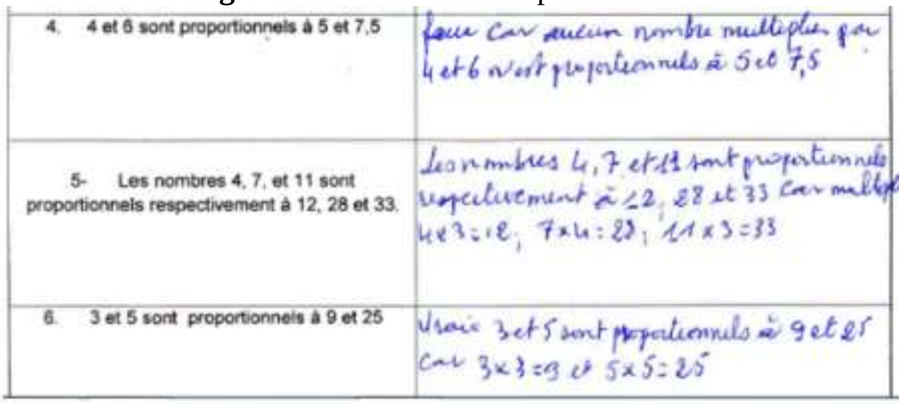


4. 4 et 6 sont proportionnels à 5 et 7,5	Ils ne sont pas proportionnels 4 et 6 sont des nombres pairs. 5 et 7,5 sont des nombres impairs
6. 3 et 5 sont proportionnels à 9 et 25	3 et 5 sont porportionnels à 9 et 25 3 est divisible par 9 5 est divisible par 25

Source: Extrait de la réponse du maître BA tenant la 6e et sorti de l'IFM

Visualisons par exemple la production suivante et voir comment elle interprète la notion de proportion malgré qu'elle soit sorti le produit d'un enseignant issu de l'IPEG (Institut Pédagogique d'Enseignement Général (ancienne désignation des Instituts formation des maîtres)) et détient la classe de 5e Année. Il trouve que l'Item 6 est vraie et l'Item 4 est faux alors que c'est plutôt l'inverse (voir Figure 11 portant sur les items 4 ; 5 et 6).

Figure 11 - Extrait de la réponse de Leo



4. 4 et 6 sont proportionnels à 5 et 7,5	faux car aucun nombre multiplier par 4 et 6 n'est proportionnels à 5 et 7,5
5- Les nombres 4, 7, et 11 sont proportionnels respectivement à 12, 28 et 33.	Les nombres 4, 7 et 11 sont proportionnels respectivement à 12, 28 et 33 car multip 4×3=12, 7×4=28, 11×3=33
6. 3 et 5 sont proportionnels à 9 et 25	Vrai 3 et 5 sont proportionnels à 9 et 25 car 3×3=9 et 5×5=25

Source: Extrait de la réponse du maître Léo tenant la 5e et sorti de l'IPEG

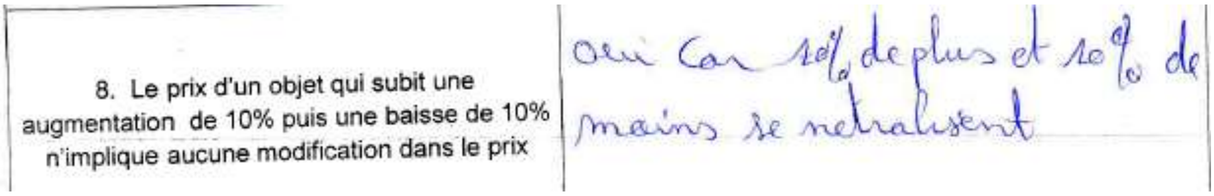
Item 7 : Nous recensons 12 bonnes, 1 erronée et 4 abstentions

Parmi les 12 bonnes il y a 9 qui sont données avec une erreur sur la formule du périmètre (2R étant interprété R×R) : *« Vraie car* $P = 2R \times 3{,}14$ *ou* $P = R \times R \times 3{,}14$ » ou *« Vraie car plus le rayon varie, plus le périmètre varie ».*

Item 8 : 3 bonnes réponses sans justification ont été recensées, 10 erronées et 4 abstentions.

Parmi les mauvaises on a les réponses suivantes : « *Oui car 10% de plus et 10% de moins se neutralisent* » ou *« Faux car le prix augmente et baisse ça dépend de la valeur de l'objet »*. (Figure 47)

Figure 12 - Extrait de la réponse de KC

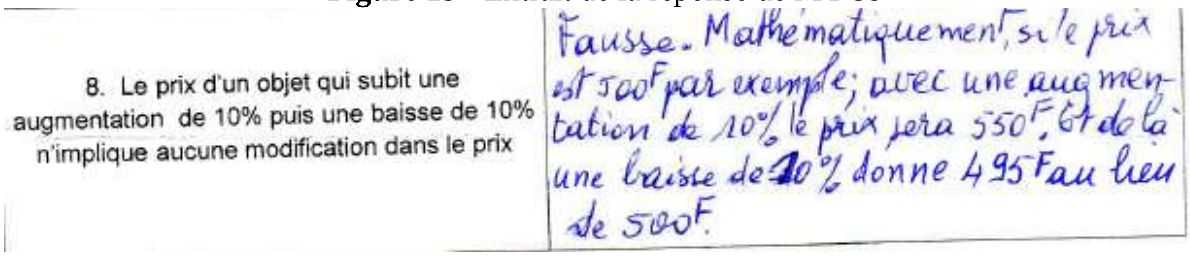

8. Le prix d'un objet qui subit une augmentation de 10% puis une baisse de 10% n'implique aucune modification dans le prix

Oui Car 10% de plus et 10% de moins se netralisent

Source: Extrait de la réponse du maître KC tenant la 1er et sorti de l'IFM

Nous tenons à visualiser la production d'un étudiant de l'IFM de Kati, niveau bac[6] qui a été le seul a justifié correctement cet item pendant les phases de l'expérimentation et de post-expérimentation (Figure 13), dans la phase de pré-expérimentation deux élèves maîtres ont procédé de la même manière.

Figure 13 - Extrait de la réponse de MYC5


8. Le prix d'un objet qui subit une augmentation de 10% puis une baisse de 10% n'implique aucune modification dans le prix

Fausse. Mathématiquement, si le prix est 500F par exemple; avec une augmentation de 10% le prix sera 550F, et de là une baisse de 10% donne 495F au lieu de 500F.

Source: Extrait d la réponse

Item 9 : 13 bonnes ont été obtenus, 1 erronée et 3 abstentions. Les bonnes réponses se justifient par : « *la courbe est linéaire* », « *alignée avec le point O* », la mauvaise n'est pas justifiée.

Item 10 : 12 bonnes ont été recueillies, 2 erronées et 3 abstentions.

Les 2 réponses erronées se justifient par « *Oui car la courbe est linéaire* ».

Ceci exprime une confusion entre fonction affine et fonction linéaire. À ce niveau, on pourrait affirmer sans risque de se tromper que certaines réussites à l'**Item 2** relèveraient de cette confusion interprétant toute fonction affine comme linéaire.

Item 11 : 11 bonnes ont été obtenus, 3 erronées et 3 abstentions. Les bonnes réponses se justifient par le non-alignement des points.

Une réponse erronée a été justifiée par « *oui car les points sont alignés* ». On constate à ce niveau une confusion avec des points situés sur une même courbe même s'ils ne forment pas une ligne droite.

Nous résumons les résultats par les nombres de bonnes réponses, de réponses erronées et d'abstention dans le tableau 1.

[6] Dans les IFM, il y a deux voies d'entrée : le baccalauréat (d'un cycle de 2 ans) et le DEF équivalent du Brevet (d'un cycle de 3 ans)

Tableau 1 : Résumé des résultats

Items	Bonne réponse	Réponse éronnée	Abstention
Item 1	8	7	2
Item 2	9	6	2
Item 3	8	5	4
Item 4	4	10	3
Item 5	2	11	4
Item 6	1	13	3
Item 7	12	1	4
Item 8	3	10	4
Item 9	13	1	3
Item 10	12	2	3
Item 11	11	3	3

Source: Les auteures

Nous constatons dans ce tableau que les **items 8** ; **9** et **10** qui constituent des représentations graphiques sont les mieux réussis et cela se justifie simplement par la vision géométrique de l'alignement des points. Aussi à l'**Item 7** le nombre de réussite est très élevé par rapport aux autres ; ceci se justifierait par la maîtrise de la formule du calcul du périmètre du cercle.

En revanche, l'**Item 6** est la moins réussi (avec un très faible taux réussite : 1 sur 17). Ce résultat serait certainement impacté par le rapport entre les nombres qui fut une variable didactique très importante ayant influencé les résultats des enseignants (3 et 5 sont respectivement les racines carrées de 9 et 25).

C'est cette même variable qui serait à la base des résultats erronés dans l'**Item 5** (4 ; 7 et 11 sont des diviseurs respectifs de 12 ; 28 et 33)

Questionnaire b)

Situation 1 et 2 : Pour ces deux situations, il y a autant de productions que de réponses justes et cela se justifie par l'application habituelle du produit en croix dans un tableau de proportionnalité et de la règle de trois qui est la technique la plus utilisée pour la recherche d'une quatrième proportionnelle.

Situation 3 :

Mélange A : 5 litres de peinture blanche et 3 litres de peinture verte

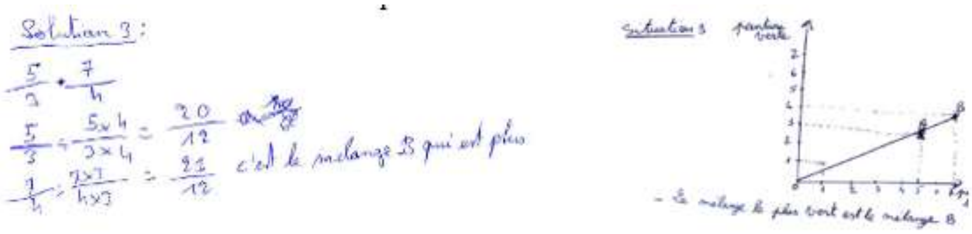
Mélange B : 7 litres de peinture blanche et 4 litres de peinture verte.

Quel est le mélange le plus vert ?

11 bonnes réponses ont été données, 4 erronées et 2 abstentions.

Dans les bonnes réponses il n'y a que 2 bonnes justifications. Parmi les réponses erronées, il y en a une qui réalise tous les calculs nécessaires à la comparaison des quantités de vert et de blanc dans les deux mélanges. La comparaison des mélanges revient à comparer deux fractions de même dénominateur : ici, $\frac{20}{12}$ et $\frac{21}{12}$ où 20 et 21 représentent les quantités de blanc pour la même quantité de vert, 12. L'enseignant, comparant les deux fractions, conclut que c'est dans B qu'il y a plus de vert car la fraction $\frac{21}{12}$ est supérieure $\frac{20}{12}$. L'enseignant se serait certainement détaché du contexte concret du problème pour raisonner uniquement dans le registre numérique. D'où son interprétation. (voir figure 14)

Figure 14 - Extrait de réponse d´un maître

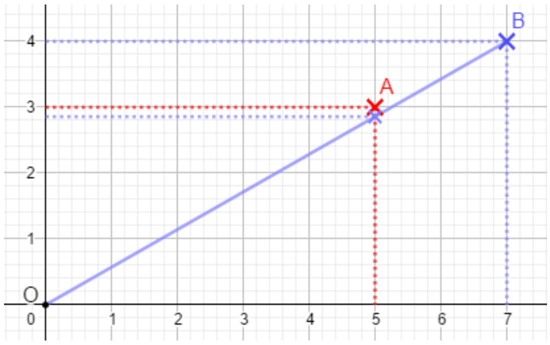


Source: Extrait des réponses

Les deux solutions numérique et graphique sont erronées, car pour une même quantité de vert (12 litres), on a 20 litres de blanc en A contre 21 litres en B.

Pour le graphique, A est au-dessus du segment [OB]. Ce qui justifie que A contient plus de vert que B :

Figure 15 – Représentation de la situation 3



Source: Extrait des données de la recherche

Situation 4 : 2 bonnes réponses ont été obtenues, 12 erronées et 3 abstentions.

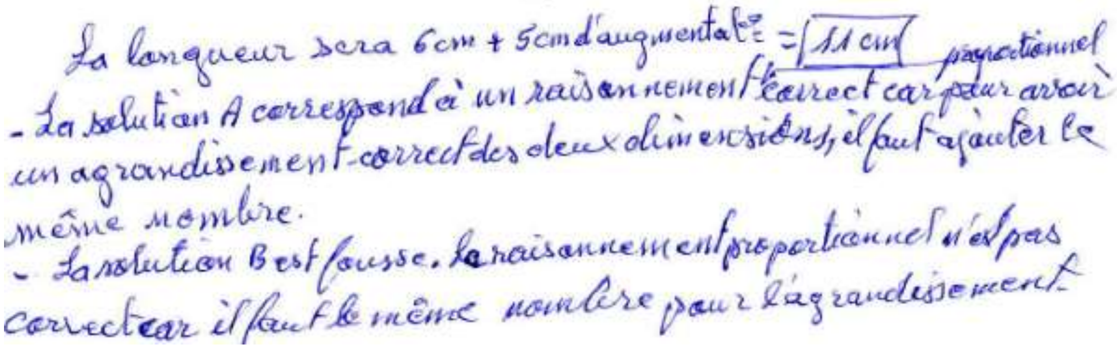
La proportionnalité multiple n'est pas maîtrisée. Ici il s'agit de trouver une inconnue en rapport avec 4 nombres donnés dont 3 n'appartiennent pas au même type de grandeurs (litre, jour et vache). L'action de fixer deux grandeurs et de trouver la 3^{e} a été la véritable difficulté pour les maîtres.

Questionnaire c) :

Sur les 6 situations, les deux premières sont fausses, car elles se fondent sur la structure additive (Figure 16) qui n'est pas correcte (produit en croix, alignement, linéarité des points avec l'origine, règle de trois etc., sont les procédures qui justifient cette situation).

REMATEC, Belém (PA), v. 16, Fluxo Contínuo, p. 197-231, Jan.-Dez., e-ISSN: 2675-1909, 2021
DO I: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n.p197-230.id357

Figure 16 - Extrait de la réponse de MS


La longueur sera 6cm + 5cm d'augmentat° = 11 cm proportionnel
- La solution A correspond à un raisonnement correct car pour avoir
un agrandissement correct des deux dimensions, il faut ajouter le
même nombre.
- La solution B est fausse. Le raisonnement proportionnel n'est pas
correct car il faut le même nombre pour l'agrandissement

Source: Réponse du maître MS 2e IPEG

Il faut aussi souligner que les solutions ne sont pas analysées par les enseignants, c'est-à-dire qu´ils ne disent pas pourquoi cette solution n'est pas bonne, telle autre est juste. Un seul enseignant parmi les 17 a prouvé que les solutions C, D, E et F correspondent toutes à des raisonnements proportionnels sans justification.

Tableau 1 - Résumé des résultats

	A	B	C	D	E	F
Vraie	2	1	6	4	4	4

Source: Les auteurs

Les résultats consignés dans le tableau 2 prouve que la procédure qui utilise le tableau de proportionnalité et le produit en croix est la mieux comprise et la mieux utilisée (réussie) par les enseignants (solution C). Ensuite, la procédure de l'alignement des points avec l'origine d'un repère et celle de la linéarité sont les mieux utilisées et réussies

Conclusion sur l´enquête épistémologique

Nous avons identifié ainsi une diversité de conceptions relativement à la proportionnalité. En effet, l´analyse des productions des enseignants met en évidence que la proportionnalité apparaît comme seulement un calcul (utilisation des propriétés dans le numérique) et surtout lorsque les données sont mentionnées dans un tableau ; la relation entre proportionnalité et fonction linéaire (l'alignement des points avec l'origine du repère) est maîtrisée par une grande majorité malgré qu'une minorité pense qu'il suffit que les points soient sur une ligne quelconque passant par l'origine pour que leurs coordonnées soient proportionnelles.

Nous avons ainsi mis en évidence que :

1) les enseignants eux-mêmes ont une connaissance étriquée de la proportionnalité, car nous identifions une :

- confusion entre croissance dans le même sens et situation de proportionnalité ;
- confusion entre multiple et proportionnalité ;
- confusion entre nombres pairs, impairs et proportionnalité ;
- difficultés d'articulation de différents registres et de développer un raisonnement de proportionnalité dans un même registre.

REMATEC, Belém (PA), v. 16, Fluxo Contínuo, p. 197-231, Jan.-Dez., e-ISSN: 2675-1909, 2021
DO I: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n.p197-230.id357

2) de 1960 à nos jours, la règle de trois a joué un rôle prépondérant dans le traitement des problèmes de proportions et de proportionnalité au Mali. Tandis que les notions de proportion et de proportionnalité ne sont utilisées que pour prouver qu'une situation relève de la proportionnalité.

La règle de trois apparait comme un outil essentiel pour résoudre ces problèmes (baptisés d'ailleurs dans les textes officiels et les manuels de « *problèmes de règle de trois* »). Elle s'approprie ainsi le milieu qui permet de faire vivre ces deux notions.

Ceci a eu pour conséquence de réduire le champ d'intervention des proportions et ensuite de la proportionnalité. Ces notions sont réduites à tester la proportionnalité d'une situation, alors que tous les outils sont disponibles pour se passer de la règle de trois. Cette restriction apparait comme un isolement plus ou moins important des deux notions qui n'arrivent à prendre la place qui leurs revient dans l'organisation mathématique dédiée.
La règle de trois est consacrée uniquement au calcul d'un nombre manquant et jamais pour analyser si une situation relève de la proportionnalité ou non. Les situations que nous avons proposées aux enseignants ont aussi révélé que les enseignants ne fonctionnant qu'avec la règle de trois sont démunis lorsqu'il s'agit de prouver que la situation est une situation de proportionnalité. Les outils indispensables à ce travail ayant été occultés par l'usage systématique de la règle de trois. Ce qui expliquerait les conséquences négatives de l'usage abusive de cette règle qui se voit dans les textes officiels, dans les manuels et dans les pratiques de classe.

CONCLUSION

Du point de vue théorique, cette recherche nous a permis de mettre en évidence la pertinence de la théorie anthropologique du didactique développée par Chevallard (1999) pour étudier les contraintes et les conditions qui pèsent sur les pratiques d'enseignement. Les praxéologies mathématiques et didactiques sont dépendantes des contraintes institutionnelles qui pèsent sur les enseignants à travers les programmes et manuels scolaires.

Il existe plusieurs procédures de résolution d'un problème de proportionnalité. Il nous paraît important de laisser les élèves exprimer les différentes procédures utilisées et de les laisser conclure sur le choix de la plus appropriée (la " règle de 3 " ne permet pas l'apprentissage de la proportionnalité pourtant elle est la plus utilisée). Parallèlement à l'apprentissage des techniques, le rôle de l'enseignant est de faire acquérir le sens de la proportionnalité aux élèves ; c'est-à-dire, qu'est-ce qu'une proportion et quelle est son utilité. Pour cela, il doit confronter ses élèves à des situations de proportionnalité et à des situations de non-proportionnalité. Et il doit savoir gérer les débats entre élèves pour justifier si telle ou telle situation relève ou non du modèle proportionnel.

La résolution de certaines situations de proportionnalité n'est pas évidente pour les élèves et pour les enseignants en raison de certaines difficultés opératoires. Par exemple, pour la vitesse et l'échelle, les problèmes de conversions d'unités posent énormément de problème.

Dans nos analyses, nous avons répertorié trois périodes pour l'enseignement de la proportionnalité, mais au-delà de la caractérisation de trois périodes, nous avons cherché à montrer comment la transposition didactique de la proportionnalité a évolué progressivement.

REMATEC, Belém (PA), v. 16, Fluxo Contínuo, p. 197-231, Jan.-Dez., e-ISSN: 2675-1909, 2021
DO I: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n.p197-230.id357

Dans nos analyses nous avons aussi constaté une évolution positive de l'enseignement de la proportionnalité. En effet aujourd'hui, il n'y a pas vraiment de technique institutionnelle imposée, mais plutôt on privilégie les raisonnements personnels des élèves ; cela nous apparaît a priori favorable à l'apprentissage d'une notion et de son application. Cependant nous avons constaté que l'utilisation d'un tableau devient l'outil institutionnel de résolution des problèmes de proportionnalité.

Nous avons aussi constaté que les difficultés rencontrées dans les productions des enseignants ne dépendent pas du niveau ou du moment de formation de l'enseignant (parmi les enseignants il y a des sortants de l'IPEG, de l'IFM, des détenteurs de CAP ou BT et aussi de tous venants). Cependant, en général, les productions les plus réussies sont celles des détenteurs de CAP ou BT (ceux-ci sont en général des diplômés en comptabilité, donc qui ont beaucoup étudier les partages et les proportions)

En résumé nous pensons que la notion de proportion ou de situation de proportionnalité ne peut être comprise et maîtrisée que par l'étude de la situation, c'est à dire seule sa modélisation physique par exemple, doit conduire à comprendre que cette situation est vraiment proportionnelle, mais pas la donnée des nombres souvent dans un tableau, qui ne donnent qu'un indice sur la direction dans laquelle on cherche comment comprendre ce qui se passe. Beaucoup d´élèves (ou même d´enseignants) pensent qu'une situation est proportionnelle puisque les nombres sont dans un tableau ; seule la physique (expérimentation) peut montrer qu'une situation est de proportionnalité ou non mais pas la donnée des nombres ; c'est-à-dire la proportionnalité est un outil mathématique qui ne doit pas être coupé de sa base physique (le contexte d'utilisation)

On dit que *deux grandeurs liées sont dites proportionnelles si la multiplication d'une valeur par un nombre dans une des deux grandeurs entraîne une multiplication de la valeur liée par le même nombre dans l'autre.* Une fois cette définition maîtrisée, après beaucoup de pratique et d'exercices simples, qu'on peut s'intéresser aux tableaux, coefficients, additivité et aspects linéaires. Ces tableaux sont des artefacts qui sont introduits à l'avènement des mathématiques modernes pour permettre aux élèves de voir l'aspect linéaire de la relation de proportionnalité.

Dans ses recherches Piaget a montré que le raisonnement proportionnel dépend du stade de développement cognitif du sujet, Levain lui pense que ce raisonnement est perceptible de l'âge précoce. Nous avons constaté que même à l'âge adulte le raisonnement proportionnel n'est pas acquis. Mais tout dépend de la formation reçue par le sujet. L'acquisition du raisonnement proportionnel ne découle pas spécifiquement d'une maturation cognitive universelle, mais plutôt des acquis scolaires du sujet.

Nous avons aussi constaté que la proportionnalité est un contenu d'enseignement dans lequel il y a peu de savoirs décontextualisés à transmettre, mais plutôt beaucoup d'exercices à faire faire aux élèves avec répétition de certaines techniques. Le professeur institutionnalise seulement des méthodes plus que des savoirs. Après analyse des résultats de l'expérimentation et aux constats faits, nous pensons qu'il y a un fort besoin de formation des enseignants : il semble intéressant d'amener les enseignants à réfléchir sur les difficultés épistémologiques et didactiques relatives aux grandeurs et aux proportions. Nous espérons que notre étude a montré la nécessité de placer les contenus mathématiques relatifs à ces notions au cœur de la formation des enseignants.

En perspectives, d’autres recherches sur la proportionnalité peuvent être envisagées dont, entre autres, l’approche ergonomique des pratiques de classe ou l’influence du registre dans l’apprentissage des proportions comme le registre géométrique et le registre langagier. Par exemple : Que veut dire doubler l’aire d’une figure ? Que veut dire diviser un triangle en n triangles de même aire ? Que veut dire au plus, k fois plus etc.

REFERENCES

ALPHA O. Écologie de la proportionnalité au premier cycle de l’enseignement fondamental: évolution des organisations mathématiques et des organisations didactiques de 1960 à 2019. Thèse (Docteur en Didactique des Mathématique). l’Université des Sciences des techniques et des Technologies de Bamako, Mali, 2020

ALPHA O.; ALMOULOUD S. A. Das proporções à proporcionalidade: o impacto crucial ou hegemonia da regra de três. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 23, n. 1, p. 769-809, 2021. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i1p769-809

ARTAUD, M.. **Introduction à l’approche écologique du didactique. L’écologie des organisations mathématiques et didactiques**. Dans Bailleul M. et al (eds.) ; Actes de la IX[e] école d’été de didactique des mathématiques, ARDM et Crédit Agricole de Bruz, 101-139, 1998

BALACHEFF, N. Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves de collège ; Thèse de doctorat, Université Joseph Fourrier de Grenoble, France, 1988

BOISNARD, O. ; HOUDEBINE, J.; JULO, J. ; KERBOEUF, P.; MERRI, M. La proportionnalité et ses problèmes, Ed. Hachette Education, 1994

CHEVALLARD, Y. L’analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999

CHEVALLARD, Y. Organiser l’étude – 3. Écologie et régulation. Actes de la XIe école d’été de didactique des mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage éditions. pp.41-56, 2002

DOUADY, R. Jeux de cadres et dialectique outil-objet, Recherches en Didactique des Mathématiques Vol. 7.2, pp. 5-31, Ed. La Pensée Sauvage, 1986

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages Intellectuels**, Ed. Peter Lang, 1995

HERSANT, M. Interactions didactiques et pratiques d’enseignement, le cas de la proportionnalité au collège. Thèse de doctorat de l’Université Paris 7 - Denis Diderot, 2001

OLIVEIRA, I. Exploration de pratiques d'enseignement de la proportionnalité au secondaire en lien avec l'activité mathématique induite chez les élèves dans les problèmes de proportion. Thèse de doctorat de l’Université du Québec à Montréal, Doctorat en éducation, 2008

RENÉ de COTRET, S. L'élève et le modèle proportionnel, une histoire de confitures. Montréal : Éditions Bande Didactique, coll. «mathèse », 273 p., 2006

ROUCHE, N. Le sens de la mesure. Collection Formation ; Édition Didier Hatier, 1992

ROUCHE, N. Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique, Repères-IREM, N°15. pp. 25-36. TOPIQUES éditions Metz, 1994

SOKONA, S. B. Aspects analytiques et aspects analogiques de la proportionnalité dans une situation de formulation. Petit *x*, n°19 pp. 5-27 ; IREM de Grenoble-France, 1989

Submetido em**:** 20 de abril de 2021.

Aprovado em**:** 18 de julho de 2021.

Publicado em**:** 03 de agosto de 2021.

Como citar o artigo:
ALPHA, O; ALMOULOUD, S. A. Conceptions des enseignants du fondamental I dans le traitement des Situations-problèmes de proportionnalité. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, Belém/PA, v. 16, Fluxo Contínuo, p. 197-231, Jan.-Dez., 2021. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n.p197-230.id357