

Raciocínio multiplicativo discutido a partir da resolução e formulação de problemas¹

Multiplicative reasoning discussed from problem solving and formulation

Sandra Maria Pinto Magina

Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC

Alina Galvão Spinillo

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

Sintria Labres Lautert

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

RESUMO

O presente artigo ilustra as contribuições que a Psicologia tem trazido para o campo da Educação Matemática. Para isso, dados de pesquisas e discussões teóricas acerca da resolução e formulação de problemas são apresentados. Inicialmente discute-se o que vem a ser um problema, de modo geral e um problema de matemática, de maneira específica. Em seguida, dois estudos são apresentados, voltados para problemas de estrutura multiplicativa. O primeiro versa sobre a formulação de problema por parte de professores do Ensino Fundamental, e o segundo sobre a resolução de problemas por parte de estudantes do Ensino Fundamental. Com base nos dados obtidos em ambos os estudos, são discutidas implicações educacionais, enfatizando-se a necessidade de os professores ampliarem seus conhecimentos sobre problemas de estrutura multiplicativa e de proporem em sala de aula uma maior variedade de situações com o objetivo de auxiliar os estudantes a superar as dificuldades na resolução de problemas deste tipo.

Palavras-chave: Resolução de Problema. Formulação de Problema. Estrutura Multiplicativa. Professor. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

This article illustrates the contributions Psychology has brought to the field of Mathematics Education. For this, research data and theoretical discussions about problem solving and problem posing are presented. Initially, we discuss what comes to be a problem, in general; and what comes to be a mathematical problem, specifically. Then, two studies are presented, focused on problems of multiplicative structure. The first one is about problem posing by Elementary School teachers, and the second about problem solving by Elementary School students. Based on the data obtained in both studies, educational implications are discussed, emphasizing the need for teachers to expand their knowledge about problems of multiplicative structure and to propose in the classroom a larger variety of situations in order to help students overcome the difficulties they had when solving this type of problem.

Keywords: Problem Solving. Problem Formulation. Multiplicative Structure. Teacher. Elementary and Secondary Schools

¹ Esse artigo apresenta uma síntese das três apresentações que constituíram a mesa redonda *Processos cognitivos e Psicologia da Educação Matemática* apresentada no 5º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEMAT) realizado em junho de 2018 em Belém, Pará.

Introdução

Este artigo tem por objetivo discutir acerca das contribuições que a Psicologia tem trazido para o campo da Educação Matemática. Uma das contribuições se refere ao conhecimento acerca das concepções e formas de raciocinar sobre problemas matemáticos. Para isso, dois aspectos relativos a problemas matemáticos de estrutura multiplicativa são considerados: o conhecimento de professores e o conhecimento de estudantes do Ensino Fundamental. Por meio de dois estudos, o conhecimento dos professores foi considerado a partir da formulação de problemas e o conhecimento dos estudantes a partir da resolução de problemas. Antes, porém, de apresentar os estudos e seus resultados, é conduzida uma reflexão sobre o que vem a ser um problema, de modo geral e um problema de matemática, de maneira específica. Na sequência, é apresentada a pesquisa realizada com professores em que se analisam os problemas por eles formulados, e, em seguida, a investigação feita com estudantes em que se analisa o desempenho na resolução de problemas pertencentes ao campo conceitual multiplicativo.

A resolução de problemas do ponto de vista da Psicologia

As relações entre a Psicologia Cognitiva e a Educação Matemática se caracterizam como um exemplo particular das possíveis relações existentes entre a Psicologia e a Educação, de maneira geral (SPINILLO; LAUTERT, 2006). Esta perspectiva contribuiu para o surgimento de áreas interdisciplinares do conhecimento, como é o caso da Psicologia da Educação Matemática que pode ser definida como um campo de investigação que versa sobre questões de ensino e aprendizagem da Matemática em uma perspectiva psicológica (e.g., SCHLIEMANN et al., 1997; DA ROCHA FALCÃO, 2003; LAUTERT; SANTOS; MAGINA, 2016). Este campo de estudo busca descrever e explicar, por exemplo, os modos de raciocinar dos indivíduos em situações formais e informais em que a matemática está presente, as dificuldades que enfrentam ao lidar com essas situações e com os conceitos nelas envolvidos, compreender como conceitos matemáticos se desenvolvem e como podem ser desenvolvidos. Dentre os inúmeros temas de interesse da Psicologia da Educação Matemática um surge como de particular importância: a resolução de problemas. Isso ocorre porque a resolução de problemas, em termos gerais e não apenas matemáticos, é entendida um processo cognitivo básico, uma habilidade que precisa ser desenvolvida (e.g., FISHER, 1987; POLYA, 1995; VERGNAUD, 1996). Do ponto de vista educacional, a resolução de problemas é considerada uma estratégia de ensino que tanto favorece a formação de conceitos matemáticos como desenvolve o raciocínio matemático de maneira mais ampla, como afirmam Pais (2006). Esta dupla faceta da resolução de problemas é aceita por diversos autores (e.g., CHARNAY, 2001), como ressaltam Onuchic e Avellato (2004) ao afirmarem que o estudante aprende matemática resolvendo problemas, como também aprende matemática com o objetivo de resolver problemas. Documentos internacionais, como o Relatório Cockcroft (COCKCROFT, 1982), afirmam, há muito, que a habilidade de resolver problemas consiste na essência da matemática. No Brasil, documentos como os PCN (BRASIL, 1997) e a BNCC (BRASIL, 2020) reiteram a importância da resolução de problemas no ensino e na aprendizagem da matemática.

Ao considerar os problemas matemáticos, a primeira ideia que surge é a resolução pelos alunos, conferindo-se especial ênfase às estratégias que adotam (corretas ou incorretas), como discutido por Gitirana, Campos, Magina e Spinillo (2014). Essa é a abordagem mais clássica acerca deste tema e será tratada adiante, quando se analisa o desempenho e as estratégias de resolução usadas por estudantes do Ensino Fundamental. Contudo, além dessa, há outra perspectiva, que consiste na formulação de problemas por professores que, apesar de ser menos conhecida, tem despertado o interesse de pesquisadores no Brasil e no exterior (e.g., CUNHA, 2015, CRESPO, 2003, LEE; CAPRARO; CAPRARO, 2018; RIBEIRO; AMARAL, 2015; SENÜL; KATRANCI, 2014; SOUZA; MAGINA, 2017; SPINILLO et al, 2017). Antes, porém, de discutir essas duas facetas dos problemas matemáticos (resolução por parte de alunos e formulação por parte de professores), cabe definir, ainda que de forma breve, o que vem a ser um problema e discutir, também de forma introdutória, acerca da resolução e da formulação de problemas matemáticos.

De modo geral, um problema pode ser definido como uma situação que envolve um impedimento ou obstáculo a vencer, que promove a busca, no âmbito das informações e condições disponíveis, de alternativas de resolução (FISHER, 1987, MORENO, 2006, POLYA, 1995). Esta definição se aplica tanto a problemas não matemáticos como matemáticos; e dentre esses últimos se aplica tanto a problemas tipicamente escolares como extraescolares.

O processo de resolução de problemas requer considerar as seguintes questões: (i) Qual é o problema? (o que se deseja e o que é um impedimento); (ii) O que posso fazer para solucioná-lo? (estratégias e procedimentos a adotar); (iii) Que informações são relevantes e quais não são? (o que realmente interessa para sua resolução); (iv) Qual solução é a melhor? (avaliação para a tomada de decisão); e (v) Deu certo? (avaliação do resultado).

No caso dos problemas matemáticos tipicamente escolares, o problema se caracteriza como uma situação que envolve um elemento desconhecido que é algo análogo ao que seria o impedimento ou obstáculo a ser superado nos problemas extraescolares. Este elemento desconhecido tem relação com a pergunta do problema. Contudo, nem todo enunciado verbal pode ser considerado um problema matemático. Por exemplo, a pergunta “Quanto é $2 + 2$?” não se constitui em um problema, uma vez que é possível se obter o resultado sem que haja qualquer obstáculo. Este exemplo remete à importante distinção feita por Dante (2009) entre exercícios e problemas matemáticos. No contexto escolar, um problema verbal se caracteriza como uma atividade que fornece um contexto para o raciocínio matemático, criando a necessidade de descobrir algo a partir da busca de informações e do estabelecimento de relações entre elementos diversos que são necessários para sua resolução.

Por outro lado, a formulação de problemas requer modos de raciocinar diferentes daqueles que estão envolvidos na resolução. Na formulação de um problema é necessário elaborar um texto: (i) com uma estrutura particular (enunciado do problema) que se caracteriza por informações numéricas e seus referentes que estão explicitadas, e por uma pergunta; (ii) que contenha todas as informações necessárias para sua resolução; (iii) que a

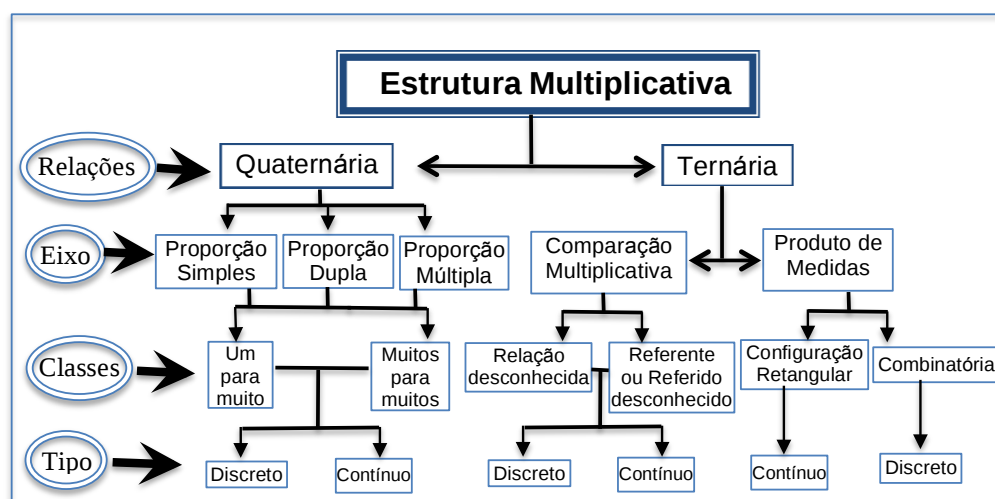
pergunta tenha relação com as informações que vieram antes dela; e (iv) que possa ser compreendido por outra pessoa e resolvido por ela.

No presente artigo, a resolução de problemas pelos estudantes expressa a compreensão que possuem sobre determinado conceito matemático, e a formulação de problemas pelo professor pode ser também considerada um indicador de sua concepção acerca do que entende por uma situação-problema.

Formulação de problemas de estrutura multiplicativa por professores do Ensino Fundamental

Quando o tema *problemas de estrutura multiplicativa* é tratado, de imediato uma teoria é trazida para esse cenário de reflexão: a Teoria dos Campos Conceituais proposta por Gérard Vergnaud (1983, 1988, 1994, 1996). De acordo com esta teoria, o campo conceitual das estruturas multiplicativas se constitui por situações que requerem regras operatórias que implicam no uso de relações complexas um para muitos que envolvem a divisão e a multiplicação. O foco deste artigo reside no campo conceitual das estruturas multiplicativas, considerando-se a proposta de Magina, Merlini e Santos (2016) que se trata de uma releitura da classificação dos problemas multiplicativos originalmente proposta por Vergnaud como apresentado na Figura 1.

Figura 1:Esquema referente à Estrutura Multiplicativa



Fonte: Magina, Merlini e Santos (2016, p. 69)

O esquema acima agrupa as situações-problema a partir de duas relações: ternária e quaternária. A relação quaternária se caracteriza por relações estabelecidas entre quatro quantidades de duas grandezas distintas, consideradas duas a duas. A relação ternária, por sua vez, envolve relações entre três quantidades, sendo uma o produto de outras duas, tanto no plano numérico como dimensional. Na relação quaternária são observados três eixos: 'proporção simples, proporção dupla e proporção múltipla. Esses eixos evocam duas classes de problemas: problemas que envolvem a correspondência um para muitos e a correspondência muitos para muitos.

A seguir apresenta-se um exemplo de cada um dos eixos da relação quaternária, considerando a classe a que pertence.

Eixo Proporção Simples, classe um para muitos: Joana sabe que em um pacote há seis biscoitos. Ela tem cinco pacotes. Quantos biscoitos Joana têm?

Neste tipo de problema, a relação entre as quantidades das grandezas está explícita: há um pacote associado a seis biscoitos; assim como seis pacotes estão relacionados a uma dada quantidade de biscoitos que precisa ser encontrada.

Eixo Proporção Simples, classe muitos para muitos: Na gincana da corrida na escola, a cada 3 voltas o corredor ganhava 4 pontos. Ana correu 15 voltas. Quantos pontos ela ganhou?

Identificamos no exemplo que a relação proporcional entre as grandezas (quantidade de voltas e pontos por volta) está implícita. Será necessário dividir 4 por 3 para achá-la. Porém não faz qualquer sentido proceder com essa divisão, pois o que descobriríamos seria uma dízima como resposta (1,33333,...). Neste problema não está explícito a relação de um para muitos e tampouco faz sentido descobri-la. Ele traz ainda a impossibilidade de se reduzir a correspondência entre o número de voltas e o número de pontos a uma relação de um para muitos, considerando o conjunto dos naturais. Contudo, é possível estabelecer uma relação escalar em que é possível descobrir a relação multiplicativa entre as quantidades da grandeza quantidade de voltas ($15 = 3 \times 5$) e aplicá-la à grandeza quantidade de pontos ($4 \times 5 = ?$).

Eixo Proporção Dupla, Classe um para muitos: Ana bebe um litro de leite a cada 4 dias. Sua irmã também bebe o mesmo tanto que Ana. Assim, quantos litros de leite as duas beberão em 12 dias?

Note que temos como grandezas: quantidade (de pessoas), capacidade (em litros de leite) e tempo (em dias). Tanto a pessoa quanto o litro partem da unidade, isto é, partem do 1. Note ainda que a quantidade de pessoas não tem relação proporcional com o tempo, mas ambos (pessoa e dias) têm relação com a capacidade (litros). Em outras palavras, se aumentar o número de pessoas e/ou o número de dias, aumentará proporcionalmente os litros de leite.

Eixo Proporção Dupla, Classe muitos para muitos: duas pessoas devem beber, no mínimo, 5 litros d'água em 2 dias. Quantos litros 5 pessoas devem beber, no mínimo, em uma semana (7 dias)?

Neste exemplo seguimos a mesma lógica e condições do exemplo anterior, só que agora partindo de dois (2 pessoas) e por isso a classe do problema é muitos para muitos.

Na relação ternária são observados dois eixos: comparação multiplicativa e produto de medidas, como ilustrado nos problemas a seguir:

Comparação multiplicativa com relação desconhecida: João tem 15 figurinhas e Ana tem 60. Quem tem mais figurinhas? Quantas vezes mais?

Comparação multiplicativa com referido desconhecido: João tem 15 figurinhas e Ana tem 3 vezes mais figurinhas que ele. Quantas figurinhas Ana têm?

Comparação multiplicativa com referente desconhecido: João e Ana têm figurinhas. Ana, tem 45 figurinhas e essa quantidade é 3 vezes mais que a quantidade de figurinhas de João. Quantas figurinhas têm João?

Já o eixo produto de medidas é composto pelas classes de problemas configuração retangular e combinatória, cujos exemplos são apresentados a seguir.

Eixo Produto de medida, configuração retangular: Caio comprou um terreno medindo 8m por 12m. Qual a área do terreno que Caio comprou?

Eixo Produto de medida, combinação: O parque de diversão da cidade tem 3 catracas para entrar e 6 portas para sair dele. De quantas maneiras diferentes alguém pode entrar e sair desse parque de diversão?

O que este referencial teórico evidencia é que existe uma grande variedade de tipos de problemas que precisa ser considerada pelos professores em suas atividades em sala de aula em relação às operações de multiplicação e divisão. Em vista disso, Spinillo e cols. (2017) investigaram o conhecimento de professores do Ensino Fundamental da cidade de Recife acerca de situações-problema inseridas no campo conceitual multiplicativo por meio da formulação de problemas. Os participantes foram solicitados a elaborar, por escrito, oito problemas que envolvessem as operações de multiplicação e/ou divisão. Dos 39 professores entrevistados, 13 ministravam aulas no 1º e 2º anos, 15 no 3º e 4º anos e 11 ministravam aulas do 5º ao 9º ano.

Uma primeira análise mostrou que 89% dos problemas formulados remetiam a uma situação multiplicativa e apenas 11% a uma situação não multiplicativa que requeria adição e/ou subtração para sua resolução. Exemplos:

Situação não multiplicativa: Numa eleição para prefeito de uma cidade, concorreram dois candidatos: O vencedor obteve 156.275 votos. O outro obteve 109.698 votos. Entre brancos e nulos foram 23.746 votos. Quantos eleitores votaram nessa eleição?

Situação multiplicativa: Para cada Copa do Mundo de Futebol são selecionados 32 países, distribuídos em 8 grupos. Quantos países estão presentes em cada grupo?

Em seguida, examinou-se se as situações multiplicativas formuladas eram adequadas ou se apresentavam um enunciado que não continha as informações necessárias para a resolução do problema. Em 94% das situações formuladas havia uma contextualização das informações numéricas, o uso de uma linguagem sem ambiguidades que permitisse compreender o que deveria ser encontrado no problema.

A natureza das situações multiplicativas foi analisada a partir da classificação proposta por Magina e cols. (2016). A Tabela 1 ilustra que nos três grupos de participantes, a maioria das situações formuladas era de relações quaternárias, envolvendo o eixo de proporção simples.

Tabela 1: Percentual de tipos de problemas formulados pelos professores considerando os anos escolares.

Relações	Eixos	Professores 1º e 2º anos (n=81)	Professores 3º e 4º anos (n=100)	Professores 5º ao 9º ano (n=80)
Quaternárias	Proporção simples	80	87	82.5
	Proporção dupla	0	0	0
	Proporção múltipla	0	2	0
Terciárias	Comparação multiplicativa	20	8	7.5
	Produto de medidas	0	3	10

Fonte: as autoras

Verificou-se que os professores dos 3º e 4º anos foram os únicos a formular problemas de proporção múltipla, enquanto os professores dos 1º e 2º anos formularam mais situações-problema de comparação multiplicativa do que os professores dos demais anos. Essas diferenças entre os grupos foram estatisticamente significativas, como detectado pelo *Test t* ($p < .05$). Observou-se, ainda, que a maioria das situações-problema formuladas pelos os professores de todos os anos evocava apenas o uso de uma ou de outra operação, sendo raros os problemas que requeriam o uso das duas operações de forma combinada. Constatou-se, também, que mesmo os professores dos anos finais do Ensino Fundamental não apresentavam um repertório variado de situações-problema.

Esses resultados apontam que para os professores as situações-problema de natureza multiplicativa se limitam a problemas de proporção simples. Esse resultado corrobora os dados obtidos por Souza e Magina (2017).

Desempenho dos estudantes do Ensino Fundamental em problemas de estrutura multiplicativa

Nesta seção são apresentados os resultados oriundos de dois projetos de pesquisa², no qual se analisa o desempenho de estudantes baianos ao resolverem 13 situações-problema de natureza multiplicativa. Essas situações constavam em um instrumento aplicado a 4.063 estudantes que residiam em diferentes localidades da Bahia (Ilhéus, Itabuna, Amargosa, Jequié, Vitória da Conquista, Feira de Santana, Salvador e Senhor do Bonfim). Os participantes foram assim divididos: 407 estudantes do 1º ano, 371 do 2º ano, 628 do 3º ano, 532 do 4º ano, 686 do 5º ano, 411 do 6º ano, 433 do 7º ano, 328 do 8º ano e 267 do 9º ano.

Os problemas que compunham o instrumento diagnóstico seguiram a classificação proposta por Magina, Merlini e Santos (2016), sendo dividido em cinco partes, como pode ser visto na Figura 2. Os eixos proporção dupla³ e proporção múltiplas não foram inseridos no instrumento.

2 Pesquisas financiadas pela FAPESB (PES0019/2013) e pela CAPES (Nº15727)

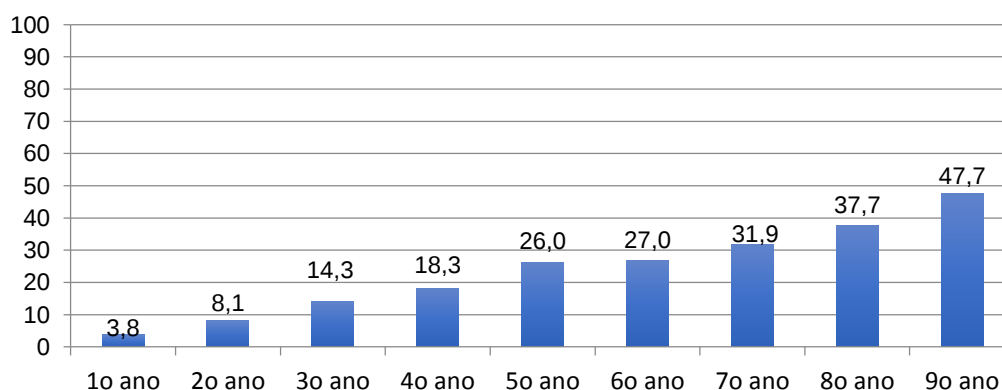
³ Informações adicionais sobre o raciocínio proporcional, especificamente envolvendo problemas de proporção dupla e múltipla podem ser obtidos em Lautert e Schliemann (2020).

Figura 2: As situações-problema do instrumento diagnóstico.

- Parte 1: RELAÇÃO QUATERNÁRIA – Eixo: PROPORÇÃO SIMPLES, Classe: 1 PARA MUITOS**
- 1) JOANA SABE QUE EM UM PACOTE HÁ 6 BISCOITOS. ELA TEM 5 PACOTES. QUANTOS BISCOITOS JOANA TEM?
- 4) A ESCOLA RECANTO FARÁ UMA FESTA PARA 36 CONVIDADOS. EM CADA MESA FICARÃO 4 CONVIDADOS. QUANTAS MESAS A ESCOLA PRECISARÁ ALUGAR?
- 8) UM SUPERMERCADO FEZ UMA PROMOÇÃO: “LEVE 4 LITROS DE SUCO POR APENAS 12 REAIS”. QUANTO VAI CUSTAR CADA LITRO DE SUCO?
- Parte 2: RELAÇÃO QUATERNÁRIA – Eixo: PROPORÇÃO SIMPLES, Classe: MUITOS PARA MUITOS**
- 3) PARA FAZER 3 FANTASIAS SÃO NECESSÁRIOS 5M DE TECIDO. ANA TEM 35M DE TECIDO. QUANTAS FANTASIAS ELA PODE FAZER?
- 6) CAIO COMPROU 9 CAIXAS DE SUCO E PAGOU 15 REAIS. SE ELE COMPRASSE 3 CAIXAS DE SUCO QUANTO PRECISARIA PAGAR?
- 12) EM UMA GINCANA NA ESCOLA SABER, A CADA 3 VOLTAS CORRENDO NA QUADRA O ALUNO GANHA 4 PONTOS. ALEX DEU 15 VOLTAS CORRENDO NA QUADRA. QUANTOS PONTOS ELE MARCOU?
- Parte 3: RELAÇÃO TERNÁRIA – Eixo: COMPARAÇÃO MULTIPLICATIVA, Classe: RELAÇÃO e REFERIDO DESCONHECIDOS**
- 2) A DISTÂNCIA ENTRE A CASA DE LUÍS E A ESCOLA É DE 5 QUILOMETROS E A CASA DE JOSÉ É 4 VEZES MAIS DISTANTE. QUAL A DISTÂNCIA ENTRE A CASA DE JOSÉ E A ESCOLA?
- 10) CIDO TEM UMA COLEÇÃO DE 6 CARRINHOS E JOSÉ TEM UMA COLEÇÃO DE 24 CARRINHOS. QUANTAS VEZES A COLEÇÃO DE CIDO É MENOR DO QUE A DE JOSÉ?
- 13) ONTEM TONHO TINHA 18 FIGURINHAS. E HOJE ELE TEM 3 VEZES MENOS. QUANTAS FIGURINHAS ELE TEM HOJE?
- Parte 4: RELAÇÃO TERNÁRIA – Eixo: PRODUTO DE MEDIDA, Classe: CONFIGURAÇÃO RETANGULAR (ÁREA)**
- 5) RUTE QUER MUDAR O PISO DO QUARTO DELA. ESTE QUARTO TEM 3M DE LARGURA E 6M DE COMPRIMENTO. QUANTOS METROS QUADRADOS, DE PISO, RUTE PRECISA COMPRAR?
- 7) A ÁREA DO JARDIM DA CASA DE VERA É RETANGULAR E TEM $24m^2$. A LARGURA É 4M. QUAL É COMPRIMENTO EM METROS DESSE JARDIM?
- Parte 5: RELAÇÃO TERNÁRIA – Eixo: PRODUTO DE MEDIDA, Classe: COMBINATÓRIA**
- 9) A LANCHONETE DO ERNANI VENDE 15 TIPOS DE SANDUÍCHES. PARA CADA SANDUÍCHE É USADO APENAS UM TIPO DE PÃO E UM TIPO DE RECHEIO. TEM 3 TIPOS DE PÃO (LEITE, INTEGRAL E FRANCÊS). QUANTOS TIPOS DE RECHEIO SÃO NECESSÁRIOS PARA FAZER TODOS OS TIPOS DE SANDUÍCHES?
- 11) NA AULA DE DANÇA DE FORRÓ TINHA 6 RAPAZES (ALEX, BETO, CAIO, DAVI, EDU, IVO) E 4 MOÇAS (MARI, FABI, LARA, SUZI). TODAS AS MOÇAS DANÇARAM COM TODOS OS RAPAZES. QUANTOS CASAIS DIFERENTES FORAM FORMADOS?

Fonte: Instrumento utilizado nos projetos de pesquisa PEM E-Mult, desenvolvidos no âmbito da FAPESB (termo de outorga PES 0019/2013) e do OBEDUC, Capes (Nº15727)

O Gráfico 1 apresenta o desempenho geral dos estudantes em função do ano escolar, mostrando que o aumento no percentual de acertos de um ano para outro foi pouco expressivo (menor que 15%). Isso indica que o desempenho dos estudantes não melhorou com o avanço da escolaridade.

Gráfico 1: Porcentagem de acertos em cada ano escolar.

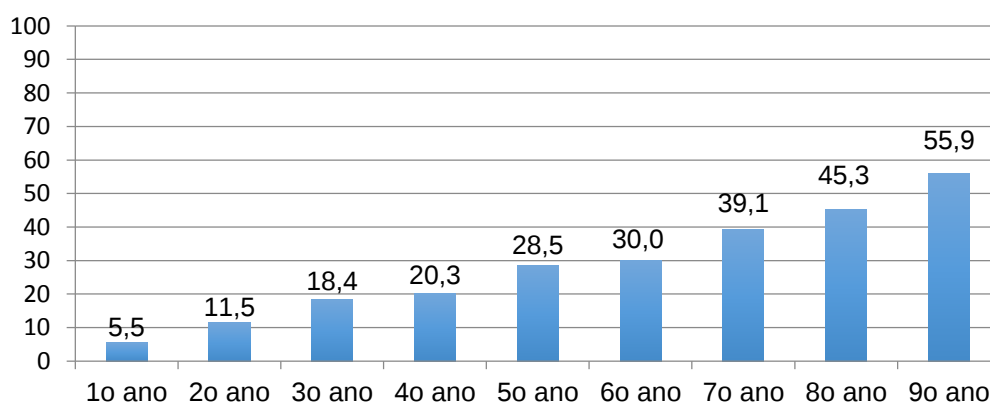
Fonte: As autoras

Como pode ser visto, o melhor desempenho observado foi de apenas 47,7% de acertos, percentual este alcançado pelos estudantes que estavam concluindo o Ensino Fundamental (9º ano). A maioria dos estudantes do 7º e 8º ano tinha dificuldades, uma vez que o percentual de acertos foi de apenas 31,9% e 37,7%, respectivamente. O percentual de acertos nos demais anos escolares não alcançou 30%, sendo extremamente baixo entre os estudantes do 1º ao 4º ano.

Apesar da grande dificuldade dos estudantes, optou-se por analisar o desempenho que apresentaram em relação aos tipos de problemas em que eles demonstraram algum conhecimento, no caso, os problemas de proporção simples. Assim, os dados apresentados a seguir se referem apenas aos problemas deste tipo, relativos à Parte 1 (problemas 1, 4 e 8) e à Parte 2 (problemas 3, 6 e 12) do instrumento (ver Figura 2), tomados de forma conjunta.

Como pode ser observado no Gráfico 2, os estudantes apresentaram um percentual de acertos nos problemas de proporção simples maior do que aquele obtido no geral (ver Gráfico 1).

Gráfico 2: Porcentagem de acertos nos problemas de proporção simples por ano escolar

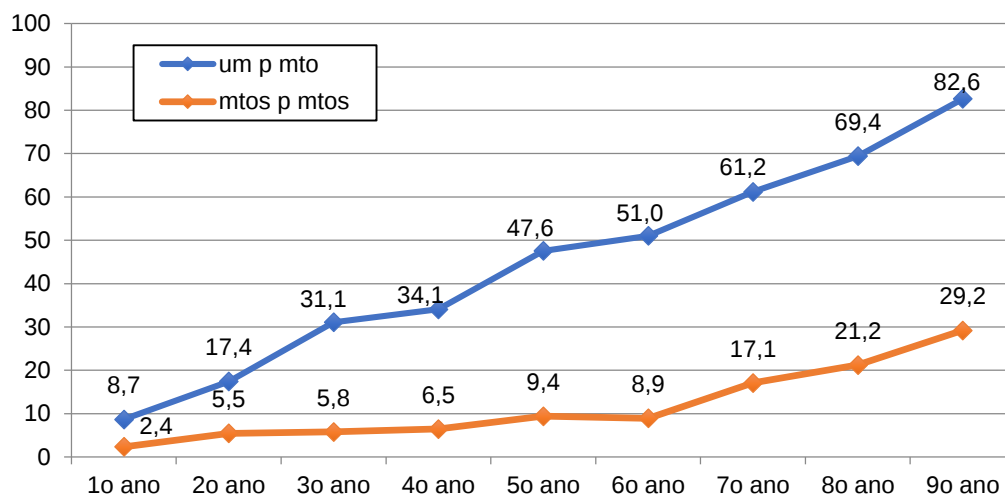


Fonte: As autoras

Os problemas de proporção simples são os mais conhecidos dos estudantes, em especial aqueles que envolvem a classe de um para muitos, pois, apesar de ser uma relação quaternária (são informados três valores e pergunta-se sobre o quarto) ela é resolvida por meio de uma única operação e, neste sentido, assemelha-se a uma relação ternária. Para os estudantes dos anos finais, a proporção simples passa a ser trabalhada dentro da classe muitos para muitos, quando do ensino de razão e da proporção vem muito associado à técnica de resolução da regra de três. Os dados no Gráfico 2 referem-se aos acertos dos estudantes nos seis problemas de proporção simples (três da classe um para muitos e os três da classe muitos para muitos). Assim, verifica-se que os estudantes sistematicamente apresentam melhor desempenho nas situações que envolvem o eixo da proporção simples, que dos demais eixos.

Considerando apenas a proporção simples, o Gráfico 3 apresenta os desempenhos dos estudantes nos problemas referentes à classe de um para muitos (problemas 1, 4 e 8) e nos problemas muitos para muitos (problemas 3, 6 e 12).

Gráfico 3: Percentual de acertos nos problemas um para muitos e muitos para muitos em cada ano escolar



Fonte: As autoras

Nota-se diferenças no desempenho dos estudantes ao se comparar as duas classes de problemas em cada ano escolar e ao se comparar uma mesma classe de problema ao longo da escolaridade. Enquanto observa-se progressão no percentual de acertos de um ano para outro quando se trata de proporção simples um para muitos, o mesmo não ocorre em relação à classe de problemas muitos para muitos. Comparando-se os resultados do Gráfico 3 com os do Gráfico 1, identifica-se que o percentual de acertos nos problemas da classe um para muitos no 4º ano foi o mesmo que o percentual geral obtido pelos estudantes do 9º ano.

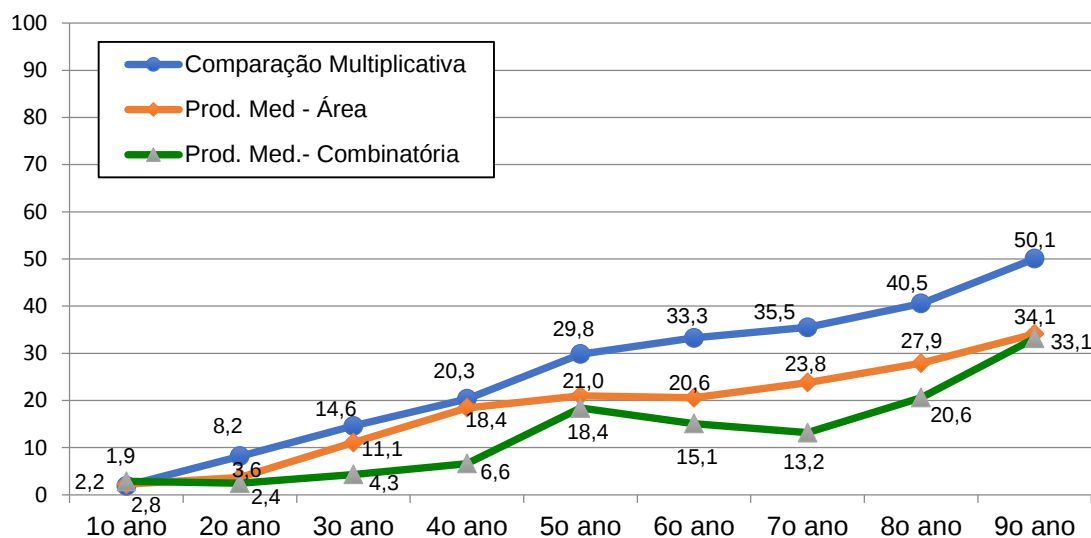
Os resultados obtidos estão em concordância com aqueles documentados na literatura sob a denominação de problemas proporcionais diretos, envolvendo a relação que aqui nos referimos como de “um para muitos” (e.g., SPINILLO, 1994; NUNES, BRYANT, 1997; NUNES, CAMPOS, MAGINA, BRYANT, 2005; MAGINA, SANTOS, MERLINI, 2014; GITIRANA, CAMPOS, MAGINA, SPINILLO, 2014). Contudo, o que gera grande preocupação, é o pífio desempenho observado em todos os anos investigados na resolução dos problemas denominados *quarta proporcional*, que são aqueles que requerem a realização de ambas as operações de multiplicação e divisão. Mesmo considerando que os números envolvidos nos problemas foram de pequena magnitude, não passando da casa da dezena e, portanto, o que permitia que os alunos lançassem mão da estimativa e do cálculo mental, ainda assim, foi expressiva a dificuldade dos estudantes.

Desta forma, fica evidenciado que a maioria dos estudantes concluiu os anos iniciais do Ensino Fundamental sem saber resolver problemas de proporção simples, mesmo envolvendo a classe mais simples de problemas, qual seja, a classe um para muitos. Isso foi observado em todos os anos escolares, inclusive naqueles em que as aulas de

Matemática são ministradas por professor especialista, como ocorre a partir do 6º ano. Importante comentar que a dificuldade encontrada não é relativa apenas aos estudantes baianos, havendo sido observada também entre os alunos pernambucanos e cearenses (CASTRO-FILHO, SANTANA, LAUTERT, 2017).

Análise semelhante foi realizada em relação à resolução de problemas que envolviam a relação terciária (Partes 3, 4 e 5 do instrumento apresentado na Figura 1).

Gráfico 4: Percentual de acertos nos problemas de relação ternária em cada ano escolar.



Fonte: As autoras

O Gráfico 4 mostra que o desempenho nas três classes de problemas. Contudo, o eixo comparação multiplicativa (problemas 2, 10 e 13 do instrumento diagnóstico) foi aquele em que os estudantes, de todos os anos escolares, tiveram menos dificuldade. Nesse eixo havia três problemas, sendo os percentuais de acerto tomados de forma. Enquanto acertos dos estudantes nos problemas 10 e 13 não atingiram os 37%, nem sequer entre os estudantes do 9º ano, observou-se 46% de acertos entre os estudantes do 4º ano no problema 2, sendo observado 85% de acertos entre os estudantes do 9º ano.

Comentários adicionais podem ser feitos acerca do problema 10 (Comparação multiplicativa) em que a pergunta era: “quantas vezes a coleção é menor”. A palavra “vezes” remete à operação de multiplicação e essa, certamente, não era a operação apropriada. Da mesma forma, o problema 13 tinha a informação: “tem 3 vezes menos”, o que provavelmente levou o estudante a empregar a operação de multiplicação e/ou usar a operação de subtração (“menos”). Os termos presentes no enunciado do problema podem corresponder ou não à operação a ser empregada para sua resolução, e esta não correspondência pode dificultar a resolução apropriada, sobretudo por estudantes que têm uma compreensão limitada do conhecimento matemático (DUVAL, 2003, 2011, FIGUEIREDO, 1985, MAGINA; SANTANA; MERLINI, 2015).

Os problemas de produto de medida (área: problemas 5 e 7; e combinatória: problemas 9 e 11) tiveram um percentual de acerto muito baixo em todos os anos escolares, Ressalta-se que o desempenho nesses problemas precisam ser mais compreendidos no sentido de identificar as razões para o insucesso dos estudantes, afinal a

operação envolvida na resolução desses problemas é simples e conhecida dos estudantes a partir do 4º ano.

Os resultados obtidos evidenciam a necessidade de que os estudantes precisam avançar na compreensão dos conceitos inseridos no campo conceitual multiplicativo. Mesmo considerando que eles tenham expressado uma menor dificuldade frente a alguns problemas, o desempenho apresentado em todos os anos escolares investigados foi, sem dúvida, preocupante, revelando o conhecimento limitado dos estudantes.

Considerações Finais

Para finalizar, chama-se a atenção para a necessidade de o professor do Ensino Fundamental ampliar suas concepções acerca de situações-problema no campo das estruturas multiplicativas, passando a considerar a variedade de problemas que podem ser propostos a seus alunos em sala de aula. Os dados obtidos no estudo com professores mostram que os problemas que mais frequentemente formulam são os problemas de proporção simples que parecem ser um modelo prototípico de problema de multiplicação e de divisão. Na realidade, os professores tendem a desconsiderar outras situações-problema relacionadas a outros eixos e classes de problemas no campo das estruturas multiplicativas.

Por sua vez, os dados derivados do instrumento diagnóstico aplicado aos estudantes do Ensino Fundamental evidenciam a dificuldade que experimentam com problemas do campo conceitual multiplicativo e, ao mesmo tempo, indicam que os problemas de proporção simples são aqueles em que apresentam menos dificuldades.

Colocando esses dois resultados em perspectiva, é possível supor que exista uma relação entre as concepções dos professores e o desempenho dos estudantes, uma vez que os tipos de problemas em que tiveram menos dificuldade foram exatamente aqueles que os professores mais frequentemente elaboraram. O que fica evidente, é que tanto professores como alunos precisam ampliar seus conhecimentos acerca da diversidade de situações multiplicativas. Isso é de particular relevância ao se adotar uma perspectiva como aquela proposta na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1994, 1996) que coloca as situações-problema no cerne da formação dos conceitos matemáticos. O professor precisa conhecer e explorar, no âmbito do contexto escolar, um conjunto amplo e variado de situações envolvendo esse campo conceitual. Tal postura é que poderá contribuir para que os alunos superem as dificuldades que enfrentam.

Agradecimentos: Gostaríamos de agradecer à CAPES pelo apoio financeiro ao projeto N°15727, cujos resultados parciais estão aqui discutidos e igualmente à FAPESB, por seu apoio ao projeto (PES/0019/2013), sendo o financiador de parte da coleta na Bahia. Por fim agradecemos ao CNPq por seu apoio por meio das bolsas de produtividade de pesquisa.

Referências

Brasil. (1997). **Parâmetros Curriculares Nacionais terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC/SEF. <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ttransversais.pdf>

Brasil. (2020). **Base Nacional Comum Curricular**. Educação é a Base. Brasil: MEC.
http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

CASTRO-FILHO, José Aires; SANTANA, Eurivalda Ribeiro dos Santos; LAUTERT, Sintria Labres. **Ensinando Multiplicação e Divisão do 6º ao 9º ano**. Itabuna: Via Literarum, 2017. https://www.ufpe.br/nuppem/destaques/-/asset_publisher/Oppfbxpxozjq/content/coletanea-cadernos-e-mult/956358

CHARNAY, Roland. Aprendendo (com) a resolução de problemas. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (Orgs.). **Didática da matemática: reflexões pedagógicas**. Porto Alegre: Artmed, 2001, p. 36-47

COCKCROFT, W. H. **The Cockcroft Report: Mathematics Counts**. London, 1982.
<http://www.educationengland.org.uk/documents/cockcroft/cockcroft1982.html>

CRESPO, Sandra. Learning to pose mathematical problems: exploring changes in preservice teachers' practices. **Educational Studies in Mathematics**. Netherlands: Springer. v. 52, 2003, 243-270. <https://msu.edu/~crespo/ESMPosing.pdf>

CUNHA, Maria de Jesus Gomes da. **Elaboração de problemas combinatórios por professores de matemática do ensino médio**. 2015. 137 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Educação, Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Recife, 2015.
<https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/14918>

DA ROCHA FALCÃO, Jorge Tarcísio. **Psicologia da Educação Matemática: uma introdução**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

DANTE, Luiz Roberto. **Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática**. 1a ed. São Paulo: Ática, 2009.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas, SP: Papirus, 2003

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar– os registros de representação semiótica**. São Paulo: PROEM, 2011.

FIGUEIREDO, Ana Maria Cruz. **A resolução de problemas de matemática no primeiro grau e o uso de palavras-chave como método de ensino**. Dissertação (Mestrado) –

Universidade Federal de Pernambuco. Centro de filosofia e Ciências Humanas, Programa de Pós-graduação em Psicologia, Recife, 1985.

FISHER, Robert. **Problem solving in primary school**. 1a. ed. Oxford: Basil Blackwell, 1987.

GITIRANA, Verônica; CAMPOS, Tânia; MAGINA, Sandra; SPINILLO, Alina. **Repensando multiplicação e divisão: contribuições da teoria dos campos conceituais**. São Paulo: Editora PROEM, 2014.

LAUTERT, Sintria Labres; SCHLIEMANN, Analúcia Dias. Using and Understanding Algorithms to Solve Double and Multiple Proportionality Problems. **International Journal of Science and mathematics Education**, 2020. <https://doi.org/10.1007/s10763-020-10123-4>

LAUTERT, Sintria Labres; SANTOS, Ernani Martins dos; MAGINA, Sandra Maria Pinto. Psicologia da Educação Matemática: a contribuição de um campo a partir da ANPEPP. In: SANTOS, Ernani Martins dos; LAUTERT, Sintria Labres (Orgs.). **Diálogos sobre o ensino, a aprendizagem e a formação de professores: contribuições da Psicologia da Educação Matemática**. Rio de Janeiro: Autografia, 2016, p. 11-33.

LEE, Y.; CAPRARO, R. M.; CAPRARO, M. M. Mathematics Teachers' Subject Matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge in Problem Posing. **International Electronic Journal of Mathematics**, v.13, n. 2, p. 75-90. 2018.

MAGINA, Sandra Maria Pinto. As estruturas multiplicativas e a formação de professores que ensinam Matemática na Bahia - PEM. **Projeto de Pesquisa FAPESB (PES 0019/2013): Edital Inovação em Práticas Educacionais nas Escolas Públicas da Bahia**, 2013.

MAGINA, Sandra Maria Pinto; SANTOS, Aparecido; MERLINI, Vera Lucia. O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência & Educação**, Bauru v. 20, 2014, 517 – 533. <https://doi.org/10.1590/1516-73132014000200016>.

MAGINA, Sandra Maria Pinto; MERLINI, Vera Lucia; SANTOS, Aparecido. A Estrutura Multiplicativa à luz da Teoria dos Campos Conceituais: Uma visão com foco na aprendizagem. In: CASTRO-FILHO, José Aires; BARRETO, Marcília Chagas; BARGUIL, Paulo Meireles; MAIA, Dennys leite; PINHEIRO, Joserlene Lima (Orgs.) **Matemática, Cultura e Tecnologia: perspectivas internacionais**. Curitiba: CRV, 2016, p. 66-82.

MAGINA, Sandra; SANTANA, Eurivalda Ribeiro; MERLINI, Vera Lucia. A

incongruência entre as palavras do enunciado do problema e a operação usada para resolvê-lo: uma contribuição para o debate. In: **XIV Conferência Interamericana de Educação Matemática - CIAEM**, México, 2015 http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/%20viewFile/120/91.

MORENO, B. R. O ensino do número e do sistema de numeração na educação infantil e na 1ª. série. In: PANIZZA, Mabel (Org.). **Ensinar matemática na educação infantil e nas séries iniciais: análise e propostas**. Porto Alegre: Artmed, 2006, p. 43-76.

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. **Criança Fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artmed, 1997.

NUNES, Terezinha; CAMPOS, Tânia; MAGINA, Sandra; BRYANT, Peter. **Educação Matemática: números e operações numéricas**. São Paulo: Cortez, 2005.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecido; BORBA, Marcelo de Carvalho (Orgs.). **Educação matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004. p. 213-231.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. 2a. ed. Rio de Janeiro: Interciências, 1995.

RIBEIRO, Miguel ; AMARAL, Rubia Early years prospective teachers" specialized knowledge on problem posing. In: **Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Hobart, Australia, 2015, p. 81-88.

SANTANA, Eurivalda. Um estudo sobre o domínio das estruturas multiplicativas no ensino fundamental – E-Mult. **Projeto de Pesquisa em Rede CAPES (Nº15727): Observatório da Educação**, 2013.

SCHLIEMANN, Analucia Dias.; CARRAHER, David; SPINILLO, Alina; MEIRA, Luciano; FALCÃO, Jorge; ACIOLY-REGNIER, Nadia (Orgs.) **Estudos em Psicologia da Educação Matemática**. Recife: Editora da Universidade Federal de Pernambuco, Série Estudos Universitários, 2ª edição ampliada, 1997.

SENGUL, S.; KATRANCI, Y. Structured problem posing cases of prospective mathematics teachers: experiences and suggestions. **International Journal on New Trends in Education and Their Implications**, v.5, n. 4, p. 190-204. 2014. <http://www.ijonte.org/FileUpload/ks63207/File/17..sengul.pdf>

SOUZA, Emília Isabel Rabelo de; MAGINA, Sandra Maria Pinto. Concepção de Professor do Ensino Fundamental sobre Estruturas Multiplicativas. **Perspectiva da Educação Matemática**, UFMT: Campo Grande, v.10, n. 24 2017, 797- 815. <https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/2930>

SPINILLO, Alina Galvão. Raciocínio proporcional em crianças: Considerações acerca de alternativas educacionais. **Revista Pro-Posições**, v.5, n.1, 1994,109-114. <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644341/11760>

SPINILLO, Alina Galvão; LAUTERT, Síntria Labres. O diálogo entre a psicologia do desenvolvimento cognitivo e a educação matemática. In: MEIRA, Luciano; SPINILLO, Alina Galvão (Orgs.), **Psicologia Cognitiva: Cultura, desenvolvimento e aprendizagem**. Recife: Editora Universitária da UFPE, 2006, p. 46-80.

SPINILLO, Alina Galvão; LAUTERT, Síntria Labres. BORBA, Rute Elizabete de Souza; SANTOS, Ernani Martins; SILVA, Juliana Ferreira Gomes. Formulação de Problemas Matemáticos de Estrutura Multiplicativa por professores do Ensino Fundamental. **Bolema** Rio Claro, v.31, n. 59, 2017, 928-946. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a04>

VERGNAUD, Gérard. Multiplicative Structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.). **Acquisitions of mathematics concepts and procedures**. New York: Academic Press, 1983, p. 127-174.

VERGNAUD, Gérard. Multiplicative Structures. In: HIEBERT, H; BEHR, M. (Eds.). **Research agenda in Mathematics education: number and operations in middle grades**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1988, p. 141-161.

VERGNAUD, Gérard. Multiplicative conceptual field: what and why? In. GUERSHON, H. e CONFREY, J. (Eds.). **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**. Albany, N.Y.: State University of New York Press, 1994. p. 41 - 59.

VERGNAUD, Gérard A Teoria dos Campos Conceituais. In BRUN, J. (Ed.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996., pp. 155-189

Sandra Maria Pinto Magina
Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC
E-mail: smpmagina@uesc.br
<https://orcid.org/0000-0003-0383-9744>

Alina Galvão Spinillo
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
E-mail: alinaspinillo@hotmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-6113-4454>

Sintria Labres Lautert
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
E-mail: sintria.lautert@ufpe.br
<https://orcid.org/0000-0002-7732-0999>