Um estudo acerca da potencialidade significativa de um material de ensino sobre circunferência e círculo

A study about the meaningful potentiality of a teaching material on circumference and circle

Maria Aparecida da Silva Rufino
Universidade de Pernambuco – UPE, Campus Mata Norte – Brasil; Secretaria Estadual de Educação–PE – Brasil

José Roberto da Silva
Universidade de Pernambuco – UPE, Campus Mata Norte – Brasil

RESUMO

Apesar das reformulações por que passou o ensino de matemática, ainda há diversas barreiras a serem superadas, a exemplo do que ocorre na difusão das ideias de circunferência e de círculo, explorando-se excessivamente o manuseio mecânico das fórmulas, sem considerar o raciocínio matemático que lhes dão sustentação. Dessa forma, investe-se na aplicação de um material de ensino, sobre a forma de oficina, na qual se reconstrói algumas ideias da base histórica desses objetos e seus cálculos, estimulando os processos cognitivos ausubelianos da diferenciação progressiva e da reconciliação integradora. A fim de caracterizar a potencialidade significativa desse material, a oficina foi aplicada em uma turma de 42 alunos do 9º ano do EF, de uma escola do município de Lagoa de Itaenga – PE/Br. Trata-se de um estudo de caso educativo, cujas respostas a um questionário diagnóstico, reaplicado como questionário avaliativo, dão conta de que parte dos alunos evoluíram conceitualmente sobre as ideias de círculo e de circunferência e sobre o processo de aquisição e aplicação das fórmulas do comprimento da circunferência e da área do círculo. Isso foi possível a partir da aplicação da oficina quando vivenciaram algumas tentativas históricas para a obtenção desses modelos, como o uso do método da exaustão arquimediano. Mediante estes dados caracteriza-se o material como potencialmente significativo.
Palavras-chave: Aprendizagem Significativa. História da Matemática. Circunferência e Círculo.

ABSTRACT

Despite the reformulations that the teaching of mathematics went through, there are still difficulties to be overcome, such as the teaching of concepts of circle and circumference. Teachers explore mechanically formulas without meaning or supported by mathematical reasoning. To this study, we developed teaching materials in which some historical ideas of circle, circumference, and calculus (such as Archimedes' exhaustion method) were discussed in a workshop in order to stimulate the Ausubelian cognitive processes of progressive differentiation and integrative reconciliation. To characterize the meaningful potentiality of these materials, we offered a workshop to a class of 42 students in the 9th grade at a public middle school, in Lagoa de Itaenga, Pernambuco, Brazil. This is a case study whose answers to a diagnostic questionnaire reapplied as an evaluative questionnaire showed that some students developed conceptually their ideas of circle and circumference as well as their process of acquiring and applying formulas related to circumference length and circle area.
Keywords: Potentially meaningful material. History of mathematics. Circle and circumference.

Submetido em: 14 de setembro de 2020

Aprovado em: 21 de novembro de 2020

DOI: http://dx.doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2020.n15.p100-121.id288

Introdução

Algumas reformulações pela qual vem passando o ensino de matemática, tanto no âmbito dos conteúdos quanto na forma de ensinar, é proposta como tentativa de tentar responder às dificuldades daqueles que lidam com o ensino, como também referentes às dificuldades de aprendizagem por parte daqueles que aprendem. Basta observar alguns documentos oficiais (estadual e nacional), a exemplo do que propôs os Parâmetros Curriculares de Matemática – PCN (BRASIL, 1997) e o que está publicado na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017).

Entretanto, ainda é bastante comum escutar-se dos professores comentários acerca de suas dificuldades em ensinar matemática, assim como da insatisfação dos seus alunos, que seguem encarando a matemática como uma grande "vilã" do seu fracasso escolar. Também adiciona-se a isso um formato de gestão escolar conduzido por uma política de resultados, que desconsidera, dentre muitos aspectos, a incompatibilidade temporal entre o tempo didático e o tempo de aprendizagem.

Ao que parece, esse é um tipo de impasse cuja explicação continua aberta com certos pontos que permanecem provocando controvérsias e com diversas barreiras ainda por serem superadas pelos professores, pois são eles quem de fato fazem educação matemática na sala de aula. Além disso, questões básicas como o grau de presença da formalização e do rigor matemáticos nos conteúdos curriculares e a maneira mais adequada de apresentar e aplicar os seus métodos provocam longas e desgastantes discussões.

Assim, práticas docentes que exploram excessivamente o manuseio mecânico das fórmulas, restringindo-se a substituição de valores com preocupação exclusiva no resultado final, sem considerar o raciocínio matemático que há por trás dessas fórmulas, acabam ocultando, por conseguinte, as origens práticas e informais desse conhecimento, especialmente no âmbito do ensino da geometria.

Esses aspectos por si só justificam o interesse de vários pesquisadores, dentre eles Fonseca (2005), Sena e Dorneles (2013), Silva, Souza e Rufino (2018), Medeiros e Basso (2020), apenas para citar alguns, com o ensino de geometria, considerando que práticas como as que foram destacadas seguem sendo bastante utilizadas pelos professores.

No caso específico dos conceitos de circunferência e de círculo, ao invés de explorar adequadamente seus aspectos sensoriais, continuam insistindo na memorização das fórmulas e no seu manuseio mecânico, ainda que, as bases de construção histórica desses objetos encontrem-se fortemente influenciadas pelas questões práticas, na busca de satisfazer algumas necessidades humanas ou pelas observações das inúmeras formas e figuras que se assemelham a eles, presentes na natureza.

Ressalta-se que este fato não chega a ser algo novo, nem tão pouco exclusivo desses objetos geométricos, pois desde o início da década de noventa pesquisadores como Peres (1991) e Pavanelo (1993) já indicavam que mesmo boa parte da geometria básica, estando presente no mundo sensorial, esses aspectos não têm tido a relevância merecida no ensino.

Sobre isso, Martinez e Novello (2013, p. 9) afirmam que "a partir da representação das formas geométricas e vivenciando-as na prática, o estudante desenvolve a compreensão do mundo em que se vive, aprendendo a descrevê-lo e a localizar-se nele.", ou seja, é necessário criar uma ponte de via dupla entre os conceitos geométricos e suas respectivas representações no mundo sensorial, para assim melhorar o processo de ensino-aprendizagem.

No que se refere ao uso da história da matemática nas aulas de matemática Pereira e Pereira (2015), destacam as duas maneiras trazidas por Esteve *et al.* (2011), ou seja, como um recurso educacional integral e/ou como um recurso didático para a compreensão matemática. Nesta ordem a primeira intenta proporcionar aos estudantes uma visão da matemática enquanto instrumento útil e dinâmico a ser empregado nas ciências humana, interdisciplinar e heurística; na segunda opção há o propósito de fornecer um instrumental teórico com potencialidade para viabilizar aos estudantes a compreensão de conceitos matemáticos na expectativa de que os estudantes alcancem um melhor desempenho na aprendizagem matemática.

Sobre isso, os achados de Quartieri e Rehfeldt (2007) de que estudantes do Ensino Fundamental (anos finais) apresentam dificuldades para conceituar circunferência, uma vez que muitos deles não reconhecerem suas diferenças com o círculo aponta necessidade de mudança. Neste estudo a compreensão de círculos e seus elementos vai investir epistemologicamente no uso da história da matemática no âmbito dessa segunda maneira apresentada anteriormente.

Por outro lado, os alunos chegam à escola com os seus conhecimentos prévios, no sentido tratado por Ausubel (2002), ou seja, conceitos previamente formados pelas crianças em sua vida cotidiana, os quais dificilmente encontram significado em discursos demasiadamente formais semelhantes ao que geralmente ocorre no Ensino Fundamental (EF), quando abordam os conceitos de circunferência, de círculo e seus respectivos cálculos.

Para embasar a caracterização anterior basta trazer o comentário de Masini e Moreira (2017) sobre a escola contemporânea ainda se focar na aprendizagem mecânica, portanto, na perspectiva de um contínuo, situa-se em um extremo oposto a aprendizagem significativa, pois os conhecimentos adquiridos são decorados e servem a curto prazo, em situações conhecidas.

Em acréscimo, assinalam que para essa escola o significado não entra em questão, o que importa é preparar (treinar) os alunos para dar respostas corretas. As respostas apresentadas são aprendidas mecanicamente para as provas locais, nacionais e internacionais, pois as "melhores escolas" são as que mais aprovam nessas provas.

Além disso, apesar dos documentos oficiais que prescrevem o currículo de matemática descreverem referenciais didáticos, defende-se a ideia de que os professores precisam conhecer as teorias de aprendizagem para assim planejarem sequencias didáticas adequadas com intenções de aprendizagem pretendidas.

No caso em pauta, optou-se pela Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) como norte estruturante para organizar as atividades de ensino propostas. Tal escolha tem várias razões, mas, principalmente, por ser uma teoria bastante abrangente e, consequentemente, conseguir atender a muitas inquietudes por falar diretamente para professores.

Mediante o que foi colocado e seguindo na contramão desse ensino "treinador", considera-se o argumento de Moreira (2006) de que certos materiais podem ter maior valor significativo e, dependendo de como são usados em situação de ensino, podem promover a aprendizagem significativa.

Desta forma, busca-se investigar a potencialidade significativa de uma oficina sobre circunferência e círculo e seus cálculos, aplicada a uma turma de 9º ano do EF de uma escola pública do **município de Lagoa de Itaenga-PE/BR**, explorando-se alguns aspectos históricos, com o uso de materiais manipuláveis, cujas atividades foram intencionalmente propostas numa perspectiva de promover os dois processos cognitivos ausubelianos da diferenciação progressiva e da reconciliação integradora entre antigos e novos conceitos.

Enfoques da Teoria da Aprendizagem Significativa que embasam este estudo

Tem sido uma questão bastante antiga, porém de grande importância, a preocupação em discutir os processos de aquisição, de desenvolvimento e de armazenamento de informações na mente humana, e, no âmbito pedagógico, entender como se dá a aprendizagem dos estudantes. Isso de certa forma explica o fato de existirem tantas abordagens teóricas, na busca de explicar tais processos. Como exemplo de algumas Teorias Cognitivistas-Constutivistas mais famosas, citam-se a Teoria Desenvolvimentista de Piaget, a Teoria da Mediação de Vygotsky e a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) de Ausubel.

Para Pozo (1998), dentre as teorias cognitivistas elaboradas a partir de posições organicistas, a TAS é interessante por estar centrada na aprendizagem produzida num contexto educativo. Reportando-se a terminologia de Vygotsky, acrescenta que Ausubel desenvolve uma teoria a respeito da interiorização ou assimilação, através da instrução, dos conceitos verdadeiros, que são construídos a partir de conceitos previamente formados ou "descobertos" pela criança em seu meio, ou seja, os seus "conhecimentos prévios".

Assim, para Ausubel (2002), podemos inter-relacionar uma nova informação com um conhecimento prévio, existente na estrutura cognitiva, chamado de subsunçor, sendo esse o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem significativa. Daí porque ele aconselha que os professores devem criar situações didáticas para descobrir esses conhecimentos e, ao identificá-los, organizar seus ensinamentos e utilizar recursos e princípios que possibilite acioná-los com vistas a facilitar a aprendizagem significativa.

Para caracterizar melhor o que vem a ser um subsunçor, Moreira (2011), esclarece que não é qualquer ideia prévia, mas algum conhecimento especificamente relevante à nova aprendizagem, já existente na estrutura cognitiva do sujeito e que permite dar significado a um novo conhecimento. Explica ainda que os subsunçores podem ser proposições, modelos mentais, construtos pessoais, concepções, ideias, invariantes operatórios, representações sociais e, é claro, conceitos já existentes na estrutura cognitiva de quem aprende.

Isso significa que a nova informação se integra à estrutura cognitiva de maneira não arbitrária e não literal, contribuindo para a diferenciação, elaboração e estabilidade dos subsunçores e, consequentemente, da própria estrutura cognitiva. Sobre isso, Novak (1981,

p. 56) coloca que "uma nova aprendizagem significativa resulta em crescimento e modificação adicionais de um subsunçor já existente". E "dependendo da experiência prévia do indivíduo, os subsunçores podem ser relativamente grandes e bem desenvolvidos, ou podem ser limitados na variedade e quantidade de elementos (conjuntos celulares) que contêm".

Conforme se observa, essa teoria procura explicar, de uma forma científica e objetiva, a importância e a influência dos conhecimentos prévios para a aprendizagem significativa e, embora essa seja uma ideia bastante defensável, Moreira (2011) alerta que não se trata de uma tarefa simples, porque requer esforço e disponibilidade tanto do ensinante quanto do aprendiz.

Esse aspecto fica bem caracterizado quando Ausubel conforme (MASINI e MOREIRA, 2017, p. 22) argumenta que além da existência prévia de subsunçores na estrutura cognitiva a "aprendizagem significativa como um processo pressupõe tanto que o aprendiz apresente uma atitude de aprendizagem significativa como que o material a ser aprendido seja potencialmente significativo para ele/ela".

Adverte ainda que não importa o quanto um material possa ser potencialmente significativo, se a intenção do aprendiz é memoriza-lo literalmente, como uma serie de palavras arbitrariamente relacionadas, tanto o processo de aprendizagem quanto o seu resultado são mecânicos, sem significado.

Isso significa que, apesar dos seres humanos serem capazes de aprender de forma significativa, a aprendizagem mecânica ocorre ou porque não existem elementos relevantes na área da nova informação ou porque esses estejam pouco elaborados na estrutura cognitiva e possam servir de subsunçores ou porque não há disponibilidade (predisposição) por parte do aprendiz em aprender de forma significativa.

Por outro lado, Moreira (2011) tem feito referência a uma zona cinza intermediária localizada entre o contínuo, "aprendizagem significativa x aprendizagem mecânica", sugerindo que, na prática, grande parte da aprendizagem ocorre nessa zona e um ensino potencialmente significativo poderá facilitar "a caminhada do aluno nessa zona cinza".

Adverte, também, que a passagem da aprendizagem mecânica para a aprendizagem significativa não é natural, nem automática, sendo uma ilusão pensar que o aluno pode inicialmente aprender de forma mecânica, e depois, ao final do processo, a aprendizagem acabar sendo significativa, isto pode até ocorrer, mas depende dos três condicionantes ausubelianos: a existência de subsunçores, a potencialidade do material de aprendizagem e a disponibilidade para aprendizagem significativa, além da mediação do professor.

Sobre essa mediação, faz-se necessário que o professor compreenda na perspectiva ausubeliana segundo Moreira e Massini (2012), que cada componente curricular possui uma estrutura articulada e hierarquicamente organizada de conceitos que constitui seu sistema de informação, devendo ser identificado pelos professores e ensinado aos alunos.

Entretanto, no âmbito escolar, o que se observa é que os conteúdos são abordados seguindo uma perspectiva, por vezes linear, onde todos os conteúdos são vistos perante o mesmo nível de importância, sem o estabelecimento de idas e voltas, conexões, interligações conceituais a outros conhecimentos, culminado, em algumas situações, a promover uma aprendizagem mecânica, que de forma sucinta, pode ser compreendida como uma aprendizagem meramente, memorística.

No que se refere à potencialidade significativa do material, visto que esse é o foco do trabalho em tela, Moreira (2006) explica que esse deve ter “significado lógico”, ou seja, deve ser suficientemente não arbitrário e não aleatório, sendo, portanto relacionável à estrutura cognitiva de forma substantiva e não literal. Assim, o que se pretende é que o aluno atribua aos novos conhecimentos, veiculados pelos materiais de aprendizagem, os significados aceitos no contexto da matéria de ensino, a partir dos subsunçores que possuem.

Nesse contexto, vale destacar que para Ausubel (2002) a estrutura cognitiva é considerada uma estrutura dinâmica de subçuncores iter-relacionados e hierarquicamente organizados, caracterizada por dois processos principais: a *diferenciação progressiva* e *reconciliação integradora*.

A diferenciação progressiva é um processo de interação em um subsunçor, que também se modifica, adquirindo novos significados, ou seja, vão progressivamente sendo diferenciado em termos de detalhe e especificidade. Por usa vez, a reconciliação integradora significa que no curso de novas aprendizagens, antigas ideias podem se relacionar, se reorganizar e adquirir novos significados, explorando-se relações de similaridades, diferenças e reconciliando discrepâncias reais ou aparentes.

Isso significa, conforme Moreira (2011), que à proporção que aprendemos de forma significativa, temos de progressivamente diferenciar significados dos novos adquiridos a fim de reconhecer diferenças entre eles, mas é preciso também se proceder à reconciliação, pois, se apenas diferenciamos, acabamos por perceber tudo diferente e se apenas reconciliamos, terminamos por perceber tudo igual.

Assim, Moreira (*op. cit.*) argumenta que sendo esses dois processos fundamentais na aprendizagem, nada mais óbvio do que usá-los como princípios programáticos no ensino, iniciando com um mapeamento conceitual, de maneira a identificar as ideias mais gerais, mais inclusivas, os conceitos estruturantes, as proposições-chave do que vai ser ensinado, de maneira a identificar o que é secundário, supérfluo do conteúdo e ao longo do ensino, e intencionalmente, trabalha-los numa perspectiva de diferenciação e integração, ou seja, descer e subir várias vezes , nas hierarquias conceituais.

Aspectos histórico sobre o cálculo da área do círculo e do comprimento da circunferência

Algumas considerações históricas sobre circunferência e círculo apontam que o grande número de objetos existentes na natureza, com formas circulares como, por exemplo, o contorno do sol, da lua, o arco-íris, as ondas formadas na superfície da água ao atira-se uma pedra, podem ter despertado no homem, um interesse especial por essas formas.

Segundo Goldstein (1998) o círculo é uma figura singular e perfeita na sua simplicidade e, por ser idêntico a si mesmo, têm inspirado ao longo dos tempos vários artistas, poetas, místicos, além de ter despertado o interesse de astrônomos, filósofos, geógrafos, que o estudaram, mediram e descreveram. Neste contexto, ele cita o matemático

Euclides que há vinte e três séculos atrás já descrevia vinte e três definições no Livro I, sobre o círculo como uma figura plana e não como uma simples linha de maneira que para conhecê-lo e calcular sua área era preciso definir seus elementos de base: o centro, a circunferência e o diâmetro:

> [...] 15. Círculo es una figura plana delimitada por una línea – llamada circunferencia – respecto de la cual, a partir de un punto entre los situados en el interior de la figura, todas las rectas que la inciden son – hasta la circunferencia del círculo – iguales entre sí.
> 16. Se llama a este punto centro del círculo.
> 17. Diámetro del círculo es cualquier recta que atraviesa el centro que esté limitada por la circunferencia del círculo en sus dos extremos, y que divida el círculo en dos. (GOLDSTEIN, 1998, p. 157)

Por outro lado, Vázquez e Ramos (1972, p. 40) apresentam o conceito de círculo a partir de ideias mais gerais, mas não menos corretas, expressando que *"*a união da circunferência e dos pontos de seu interior é uma região circular fechada que chamamos círculo.*"*(Tradução do autor)[1]. Entretanto, registra-se que por trás dessa enganosa simplicidade o círculo e o cálculo de sua área ocultam uma complexidade que marca contextualmente a própria história da matemática.

Para entender melhor esse percurso histórico, chama-se a atenção para um aspecto trazido por Eves (1997) e outros historiadores, sobre a passagem de uma geometria subconsciente, vinculada a inúmeras circunstâncias da vida, para a chamada geometria científica, ao extraírem-se, a partir de um certo número de observações relativas a forma, tamanho e relações espaciais de objetos físicos específicos, propriedades gerais e relações necessárias até que se chega a obtenção de generalizações (fórmulas).

Mediante esse contexto, Goldstein (*op. cit.*) explica que alguns métodos e resultados para obtenção do cálculo da área do círculo em algumas civilizações antigas, era proposto a partir do quadrado de seu raio. O interesse era, então, determinar a relação entre a superfície do círculo e o quadrado de seu raio que é também a mesma relação entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro, a qual recebe o nome específico de π (pi).

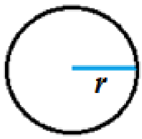
Com efeito, frente aos milênios anos de aventura do círculo o número π, pode-se por assim dizer, é o mais evidenciado dos números da história da matemática. De acordo com Lima (2011, p. 54) "Euclides determinou a relação entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro como uma razão constante, independente da circunferência tomada, mas não tratou nos Elementos de estimar esse valor".

Como não existe um numérico exato que corresponde ao valor da medida de π e que independentemente do tamanho da circunferência essa relação permanece constante, pode-se chegar a uma expressão para representar o cálculo da circunferência. Sobre essa expressão, Vázquez e Ramos (1972) explicam que se trata de uma comparação, por

[1] "La unión de la circunferencia y de los puntos de su interior es una región circular cerrada que llamamos círculo."

divisão, entre o comprimento da circunferência (C) e do seu diâmetro (d). Conforme ilustra a figura 01.

Figura 01 – obtenção da expressão para o cálculo do comprimento da circunferência



$$\frac{C}{d}=\pi$$
$$C=d\times\pi\ ,\ d=2r$$
$$C=2\pi r$$

Fonte: os autores

Contudo, foi somente quando se começou a suspeitar que π poderia ser um número irracional que os cálculos para a obtenção da área do círculo mudam de direção, no aspecto matemático. Sobre esse fato, Bagazgoitia et al., (1997, p. 3) lembra que "Em 1882, F. Lindemann demonstrou que *p* não é solução de nenhum polinômio de coeficientes inteiros, provando assim a impossibilidade da quadratura do círculo." [2]. (Tradução do autor).

Sobre esse problema, Joseph (1996, p. 261) coloca que "Somente no século dezenove demonstrou-se que, posto que quadrar um círculo equivale a construir um segmento linear cujo comprimento seja igual ao produto da raiz quadrada de *p* (que não é uma quantidade construível) e o raio do círculo dado, isso não se pode fazer." [3] (Tradução do autor).

Os fatos e aspectos levantados até aqui vêm a corroborar com o que foi trazido anteriormente sobre a grande dificuldade de compreensão que esta subjacente aos conceitos de circunferência e de círculo e consequentemente ao entendimento do cálculo de seu comprimento e da sua área devido dentre outras coisas à incomensurabilidade do número *pi*.

Destaca-se, que ainda que a solução do problema da quadratura do círculo é a prova de sua impossibilidade, os métodos empregados em sua investigação foram importantes para a idealização e desenvolvimento de técnicas de procedimentos de demonstrações que têm servido até hoje para compreender melhor diversas outras estruturas matemáticas.

Vale registrar, que muitas das estratégias que predominaram nas civilizações antigas para o cálculo da área do círculo resultaram em tentativas de transformá-la em áreas retilíneas. Esse aspecto parece ser bastante compreensível, pois estando diante de uma figura de padrões tão específicos sem que houvesse referência anterior para o cálculo de sua área, era natural que se buscassem aproximações com modelos matemáticos de áreas que lhes eram familiares.

Um exemplo disso fica bem demarcado por Sirera (2000) sobre os trabalhos de Arquimedes, referindo-se ao seu intento em determinar a área de superfícies curvas e volumes de sólidos, obtidas através da comparação com áreas e volumes de triângulos, retângulos e cubos. Nessa busca a técnica demonstrativa mais poderosa é a combinação de

[2] "En 1882 F. Lindemann demostró que π no es solución de ningún polinomio de coeficientes enteros, probando así la imposibilidad de la cuadratura del círculo".

[3] "Sólo en el siglo diecinueve se demostró que, puesto que cuadrar un círculo equivale a construir un segmento lineal cuya longitud sea igual al producto de la raíz cuadrada de p (que no es una cantidad construible) y el radio de l círculo dado, esto no podía hacerse".

um procedimento de demonstração por redução ao absurdo com o chamado método de exaustão.

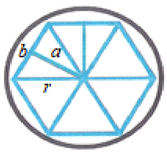
Uma dessas aproximações, conforme explica Sirera (*op. cit.*) é obter a área do círculo inscrevendo-se uma sucessão de polígonos regulares numa dada região circular, onde se estabelece que a diferença de áreas entre a figura curva e os polígonos é menor que a quantidade dada para um número suficientemente grande de lados do polígono regular. Normalmente cada polígono se obtém do anterior dobrando o número de seus lados.

Inspirados por essa estratégia, Vázquez e Ramos (1972) sugerem que com para calcular a área de um polígono regular qualquer basta utilizar a fórmula $A_{pr} = (n)\dfrac{(b)(a)}{2}$, se o polígono regular inscrito aumenta seu número de lados (n), pode acontecer duas ocorrências:

I- O apótema (a), se aproxima cada vez mais do valor do raio (r).

II- O produto (nb) se aproxima cada vez mais do valor do comprimento ($2\pi r$).

Figura 02 – aproximações entre os elementos do polígono regular e os elementos do círculo



$$a \rightarrow r \qquad nb \rightarrow 2\pi r$$

$$A_c = \frac{2\pi r \times r}{2}$$

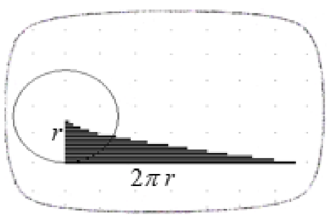
$$A_c = \pi r^2$$

Fonte: os autores

Então, diante da importante produção científica arquimediana na tentativa de calcular a área de uma região circular, pode-se ainda registrar como coloca Goldstein (1998) que segundo Eutocio de Ascalón, autor de um comentário sobre os trabalhos de Arquimedes no século V d. C., Arquimedes queria demonstrar a que área retilínea equivale o círculo, problema que desde longo tempo os célebres filósofos anteriores tentavam resolver.

Em complemento a isso, acrescenta que dentre essas tentativas Arquimedes mostra que todo círculo é equivalente a um triângulo retângulo, em que um dos lados do ângulo reto é igual ao semidiâmetro do círculo, ou seja, a medida do seu raio e, a base é igual ao perímetro do círculo. Algo próximo ao que se tentou ilustrar na figura 03, abaixo.

Figura 03 – Cálculo da área do círculo com equivalência à área do triângulo retângulo



$$b \rightarrow 2\pi r$$

$$h \rightarrow r$$

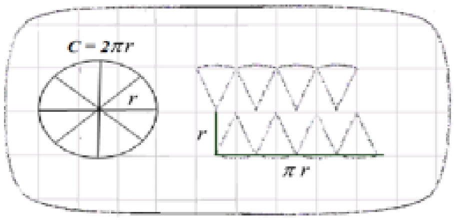
$$A_t = \frac{b \times h}{2} \rightarrow A_c = \frac{2\pi r \times r}{2}$$

$$A_c = \pi r^2$$

Fonte: os autores

Utilizando um raciocínio análogo ao anterior, Lima (2011) sugere decompor o círculo em um número par, suficiente de setores, de maneira que ao rearranjar esses setores se aproxime de um paralelogramo, cuja base equivale ao semiperímetro do círculo e a altura ao seu raio, conforme se ilustra na figura 04.

Figura 04: Cálculo da área do círculo com equivalência à área do paralelogramo



$$b \rightarrow \frac{2\pi r}{2} = \pi r$$
$$h \rightarrow r$$
$$A_p = b \times h \rightarrow A_c = \pi r \times r$$
$$A_c = \pi r^2$$

Fonte: os autores

Metodologia

A pesquisa em pauta tem enfoque qualitativo com características de um estudo de caso educativo, nos moldes proposto por André (2005). A aplicação da oficina elaborada para esse estudo foi realizada em uma turma de 42 alunos do 9º ano do EF, de uma escola pública, situada em Lagoa de Itaenga, município de Pernambuco-Brasil, cujo objetivo visa avaliar a potencialidade significativa desse material de aprendizagem.

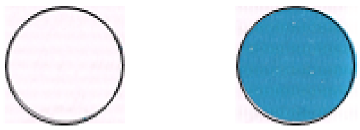
Como instrumento de coleta de dados foi elaborado um questionário diagnóstico, apresentado na sequência, o qual foi reaplicado como questionário avaliativo, no intento de identificar as evoluções conceituais dos participantes, acerca dos temas abordados, cujas perguntas foram organizadas a partir dos objetivos que se almeja atingir com cada uma delas.

Questionário Diagnóstico/Avaliativo

1- Você saberia dizer o que é um círculo?

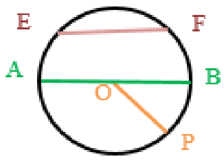
2- Na sua opinião existe alguma diferença entre círculo e circunferência. Justifique.

3- Nomeie as figuras abaixo:



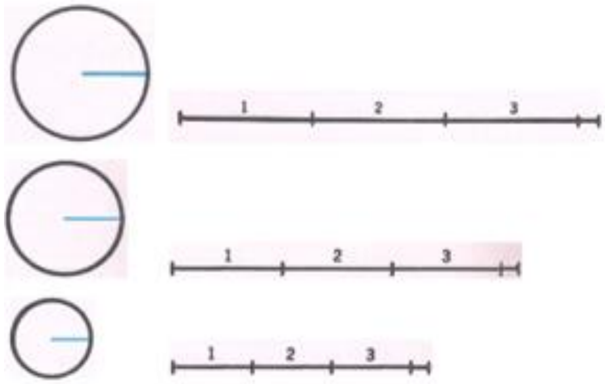
....

4- Determine quais relações se pode estabelecer entre os segmentos abaixo e os nomeie:



5- Para medir o contorno das figuras que seguem foi utilizada a seguinte estratégia: se colocou um fio coincidindo com cada um dos contornos e depois os estendendo para medir os segmentos que os representam, em seguida se utilizou como unidades padrão de medida os seus respectivos diâmetros. Com relação a estratégia utilizada responda:

a) o que se pode observar?
b) que expressão se pode estabelecer entre o contorno e o diâmetro dessas figuras?
c) identifique qual é a grandeza geométrica que se determina a partir dessa relação?



6- Sabe-se que dividindo a figura 1 em vários setores pode-se montar a figura 2 que se aproxima de um “paralelogramo” (conforme ilustração abaixo). Dessa informação determine:

a) Quais expressões correspondem ao comprimento e a altura do paralelogramo?
b) Se a figura 1 tivesse um diâmetro de 2 cm qual seria a área da figura 2? (admita π=3,14)

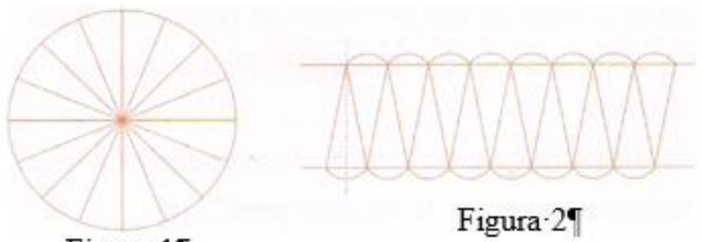


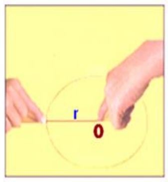
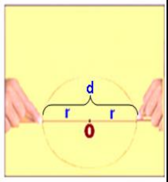
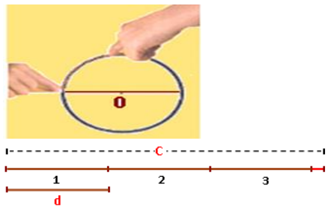
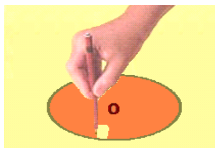
Figura 1¶ Figura 2¶

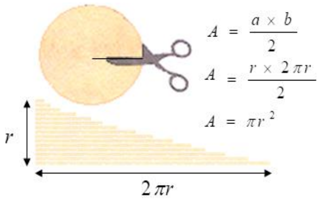
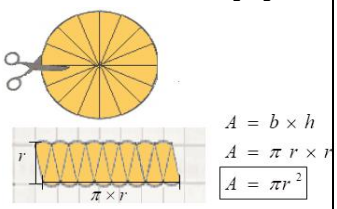
Acredita-se que vivenciando com os alunos alguns aspectos da base de construção histórica sobre circunferência e círculo, com o uso de materiais manipuláveis, podemos ajuda-los a atribuir sentido para a aplicação dos modelos geométricos das fórmulas do comprimento da circunferência e da área do círculo e potencializar a aprendizagem significativa.

A organização das atividades de ensino, na forma de uma oficina, expressa no quadro 01, foram estruturadas no viés da TAS, considerando os subsunçores dos alunos e adotando como princípios programáticos a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora.

Quadro 01: Caracterização Sintética das Atividades propostas na Oficina

Etapas	**Objetivos**	**Atividades**	**Recursos/Procedimentos**
I	Levantar os subsunçores dos alunos sobre as ideias de circunferência e de	Aplicação do Questionário Diagnóstico.	Questionário impresso contendo seis questões.

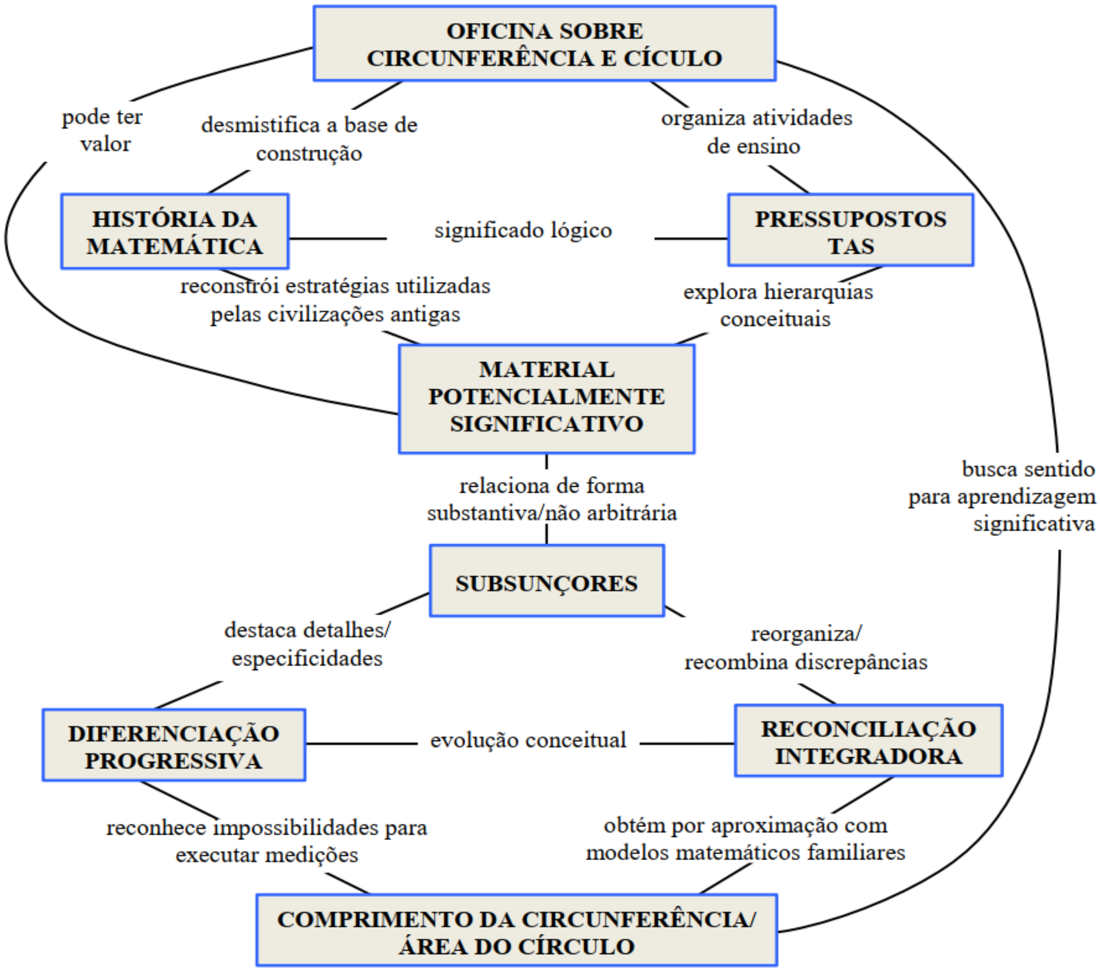
	círculo.		
II	Compreender o conceito de circunferência a partir da ideia geral de uma curva fechada simples, na qual todos os seus pontos se mantêm a mesma distância de um ponto central.	Traçar uma curva fechada usando um compasso construído com um lápis e barbante, em volta de um ponto O (chamado centro da circunferência) definido na cartolina.	Cartolina, lápis, barbante e tesoura. 
III	Conceituar os elementos da circunferência (raio, diâmetro e corda), chamando a atenção para as suas diferenças, mas ao mesmo tempo para certas semelhanças de forma a obter algumas relações, dentre as quais que $d = 2r$.	Através de algumas medições usando o barbante, constatar que a distância entre qualquer ponto da circunferência e o centro é a mesma que corresponde ao raio (r). Esticando este barbante, na mesma proporção até atingir um ponto do lado oposto, obtém-se uma corda, chamada de diâmetro (d).	Circunferência construída na Etapa anterior e barbante.  
IV	Obter a fórmula para o cálculo do comprimento da circunferência, compreendendo a relação de incomensurabilidade entre as medidas do comprimento da circunferência e seu diâmetro, de forma a chegar na expressão: $C = 2\pi r$	Sobrepor com o barbante o comprimento da circunferência e comparar (por divisão) com a medida do seu diâmetro. Observar que esta comparação resulta em três medidas do diâmetro mais uma pequena sobra, conhecida por π, independente do comprimento do raio da circunferência.	Circunferência da Etapa I e barbante. 
V	Construir o conceito de círculo como uma figura completa, formada pela união do conjunto de pontos da circunferência e todos os outros pontos interiores a ela.	Pintar o interior da figura, de forma a visualizar que a região colorida, incluindo o seu contorno, é chamada de região circular ou simplesmente de círculo.	Circunferência construída na Etapa II, lápis de cera. 
VI	Obter a fórmula da área do círculo ($A = \pi r^2$), vivenciando uma das	Cobrir o disco circular com barbante e ao cortá-lo até o centro, reorganizar os	Cartolina, lápis, barbante e tesoura.

	aplicações do método da exaustão arquimediano fazendo-se uma aproximação com a área do triângulo retângulo ($A = \frac{a \times b}{2}$).	pedaços de forma a obter uma área triangular. Perceber que o cateto menor corresponde à medida do raio e o maior, à medida do comprimento da circunferência. Adotar essas medidas na fórmula da área do triângulo de maneira a obter a fórmula da área do círculo.	
VII	Obter a fórmula da área do círculo ($A = \pi r^2$), a partir da aproximação com a área do paralelogramo ($A = b \times h$).	Dividir a região circular em um número par de setores iguais. Recortá-los e remontá-los de forma que se aproxime de um paralelogramo, cujos lados paralelos equivalem às medidas do raio e do semiperímetro. Aplicar essas medidas na fórmula da área do paralelogramo e obter a fórmula da área do círculo.	Círculo obtido na Etapa V, tesoura, cola e papel. 
VIII	Identificar as evoluções dos alunos sobre as ideias e cálculos da circunferência e do círculo.	Aplicação do Questionário Avaliativo.	Reaplicar o questionário diagnóstico, como questionário avaliativo.

Fonte: os autores

Para explicitar uma visão panorâmica integrando, por um lado os aspectos epistemológicos aportados na história da matemática como recurso educacional integral e/ou como um recurso didático segundo o destaque apontado por Pereira e Pereira (2015), apresenta-se em um mapa conceitual, conforme figura 05, que caracterizou as atividades da oficina realizada sobre circunferência e círculo, na perspectiva da aprendizagem significativa.

Figura 05 – O uso da História da Matemática alinhada aos pressupostos da TAS como caracterização de um material potencialmente significativo sobre o cálculo da circunferência e da área do círculo

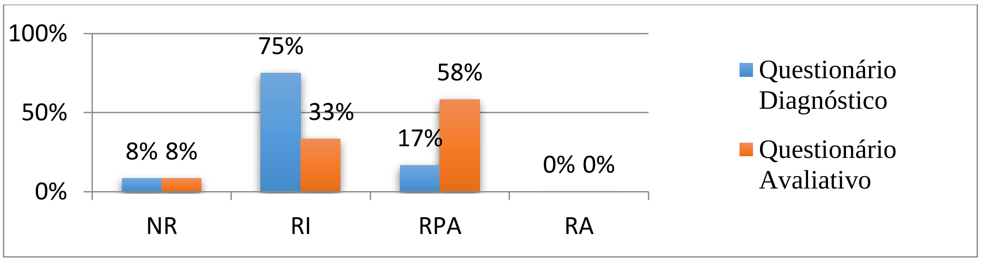


Fonte: os autores

Apresentação e Discussão dos Dados

Para análise das respostas obtidas com a aplicação dos questionários, estabeleceram-se critérios, relacionados com os objetivos almejados. As respostas foram agrupadas em categorias, considerando a base teórica desse estudo, na perspectiva da aprendizagem significativa. Os dados encontram-se organizados em forma de gráficos.

Gráfico 01 – Compreensão sobre o conceito de Círculo (Questão 1)



Legenda: Não Respondeu (NR), Resposta Inadequada (RI), Resposta Parcialmente Adequada (RPA) e Resposta Adequada (RA).

Fonte: os autores

Embora os alunos não tenham estabelecido relações com os elementos de base (centro, circunferência e diâmetro) ao conceituarem o círculo, parte deles passa a reconhecê-lo como uma figura completa, composta por uma região que compreende os pontos da circunferência e os pontos internos. Assim, pode-se dizer que houve evolução conceitual considerando os subsunçores exibidos antes da Oficina.

Protocolos de respostas do Aluno (A_6)

Questionário Diagnóstico:


1- Você saberia dizer o que é um círculo? Em caso afirmativo, expresse sua conceituação.
CiRCUlO Tem o fundo

Questionário Avaliativo:

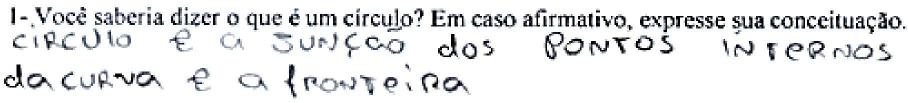
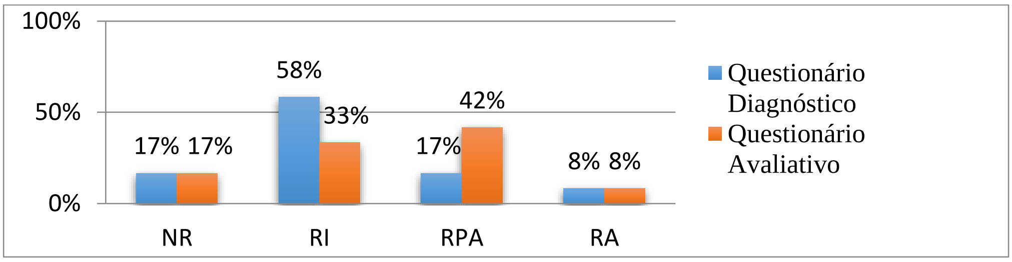

1- Você saberia dizer o que é um círculo? Em caso afirmativo, expresse sua conceituação.
ciRCUlo é a junção dos pontos internos dacurva é a fronteira

Gráfico 02 – Distinção entre Círculo e Circunferência (Questão 2)



Legenda: Não Respondeu (NR), Resposta Inadequada (RI), Resposta Parcialmente Adequada (RPA) e Resposta Adequada (RA).

Fonte: os autores

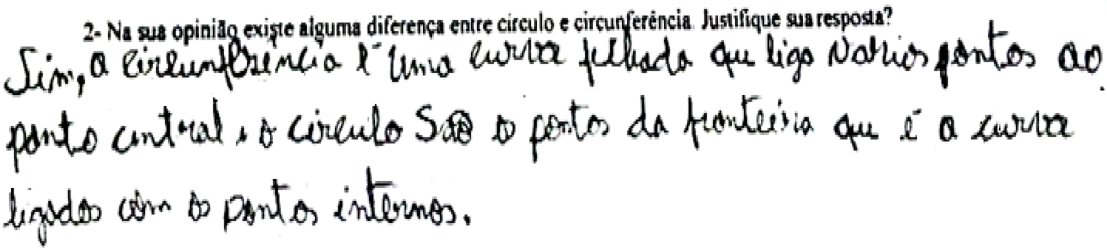
Metade dos alunos passou a reconhecer distinções que figuram entre a ideia de curva e de região; pontos de fronteira e pontos internos e de fronteira, aludindo respectivamente ao conceito de circunferência e de círculo. A mais citada foi a que os caracteriza a partir do conjunto de pontos, elaborando o processo cognitivo da diferenciação progressiva

Protocolos de respostas do Aluno (A_{17})

Questionário Diagnóstico:

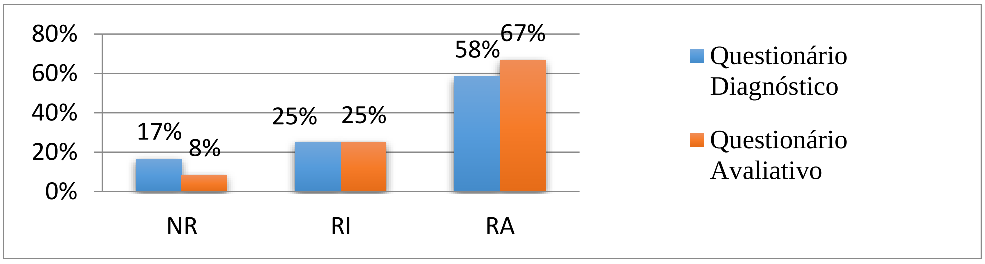
Não respondeu.

Questionário Avaliativo:


2- Na sua opinião existe alguma diferença entre circulo e circunferência. Justifique sua resposta?

Sim, a circunferência é uma curva fechada que liga vários pontos ao ponto central, o círculo são os pontos da fronteira que é a curva ligados com os pontos internos.

Gráfico 03 – Compreensão visual acerca do Círculo e Circunferência (Questão 3)



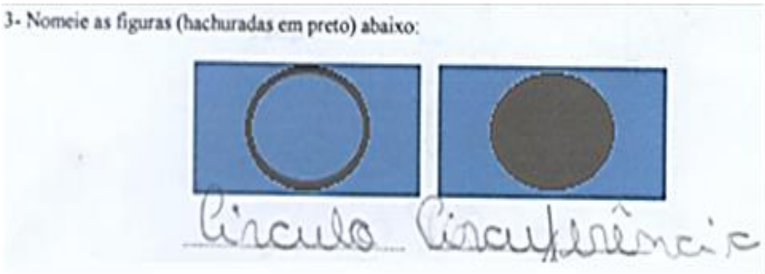
Legenda: Não Respondeu (NR), Resposta Inadequada (RI) e Resposta Adequada (RA).

Fonte: os autores

Com essa questão, foi possível observar que os participantes tiveram mais facilidade em visualizar qual das figuras representava o círculo e qual representava a circunferência do que a conceituar, considerando os dados apresentados nas questões anteriores. Porém, um erro habitual foi trocar o nome das figuras ou mesmo nomeá-las como se fossem a mesma forma.

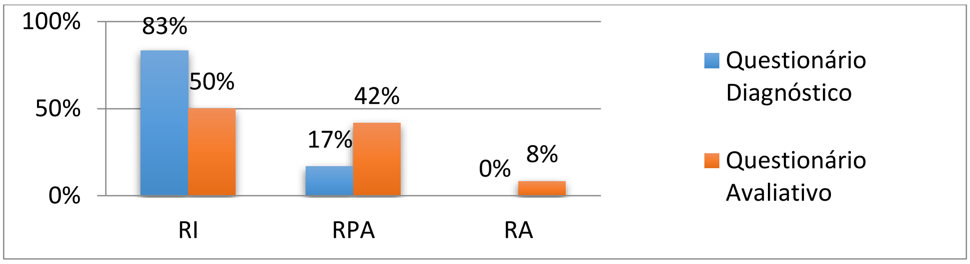
Protocolos de respostas do Aluno (A_{12})

Questionário Diagnóstico:



Questionário Avaliativo:

Gráfico 04 – Nomeação e Relação entre raio, corda e diâmetro (Questão 4)



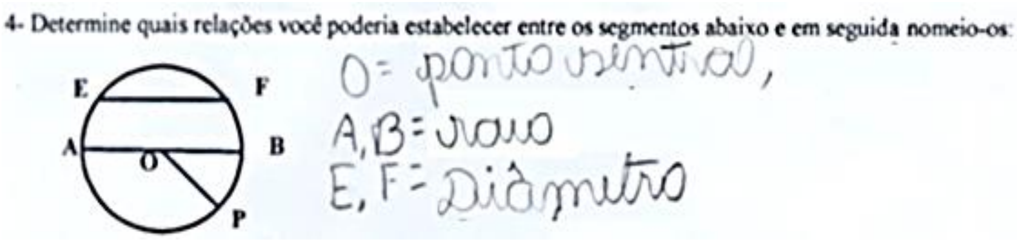
Legenda: Resposta Inadequada (RI), Resposta Parcialmente Adequada (RPA) e Resposta Adequada (RA).

Fonte: os autores

Pode-se considerar que metade da turma passou a nomear e/ou estabelecer relações entre os seguimentos traçados na circunferência (raio, corda e diâmetro), principalmente na direção da nomeação, sinalizando um reconhecimento de suas características, fato que inicialmente quase não existiu, indicando que houve uma evolução conceitual sobre esses segmentos.

Protocolos de respostas do Aluno (A_{25})

Questionário Diagnóstico:



Questionário Avaliativo:

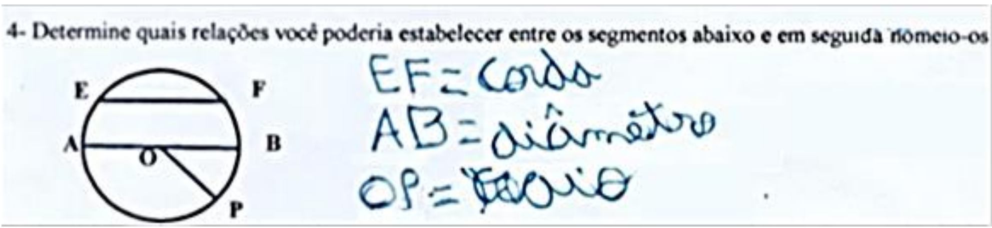
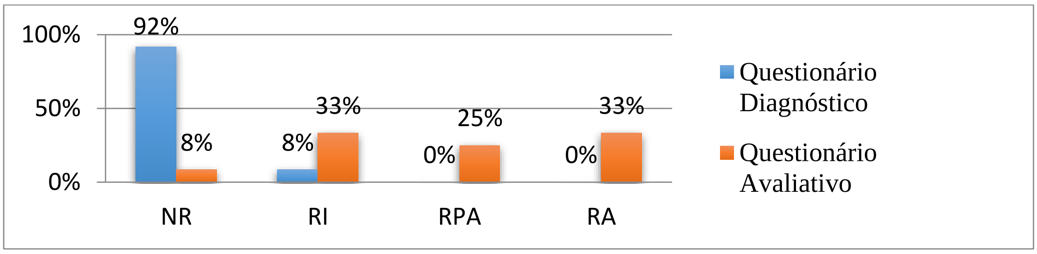


Gráfico 05 – Obtenção da expressão da circunferência (Questão 5)



Legenda: Não Respondeu (NR), Resposta Inadequada (RI), Resposta Parcialmente Adequada (RPA) e Resposta Adequada (RA).

Fonte: os autores

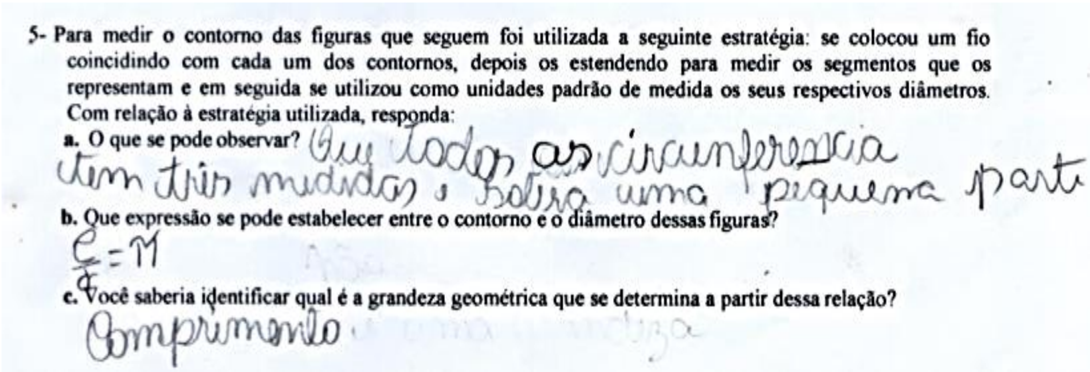
Um grupo considerável dos alunos obteve a expressão para o cálculo da circunferência, a partir da relação entre as medidas do comprimento da circunferência e seu diâmetro, reconstruindo o caminho que os antigos matemáticos fizeram. Percebeu-se que, conforme esperado, a não compreensão da incomensurabilidade entre essas medidas, e consequentemente do significado de π, foi um obstáculo para a obtenção dessa fórmula.

Protocolos de respostas do Aluno (A15)

Questionário Diagnóstico:

Não respondeu.

Questionário Avaliativo:



5- Para medir o contorno das figuras que seguem foi utilizada a seguinte estratégia: se colocou um fio coincidindo com cada um dos contornos, depois os estendendo para medir os segmentos que os representam e em seguida se utilizou como unidades padrão de medida os seus respectivos diâmetros. Com relação à estratégia utilizada, responda:

a. O que se pode observar? Que todos as circunferência tem três medidas, sobra uma pequena parte

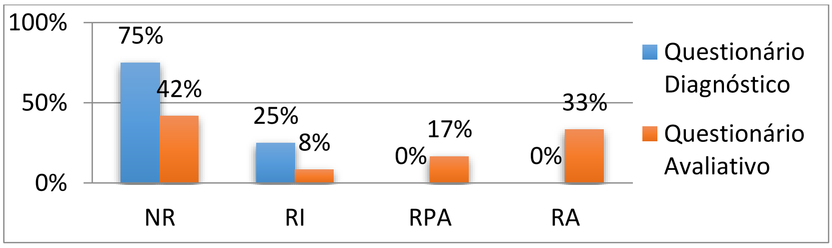
b. Que expressão se pode estabelecer entre o contorno e o diâmetro dessas figuras?

$\frac{C}{d} = \pi$

c. Você saberia identificar qual é a grandeza geométrica que se determina a partir dessa relação?

Comprimento

Gráfico 06 – Relação entre a área do círculo e a do paralelogramo (Questão 6)



Legenda: Não Respondeu (NR), Resposta Inadequada (RI), Resposta Parcialmente Adequada (RPA) e Resposta Adequada (RA).

Fonte: os autores

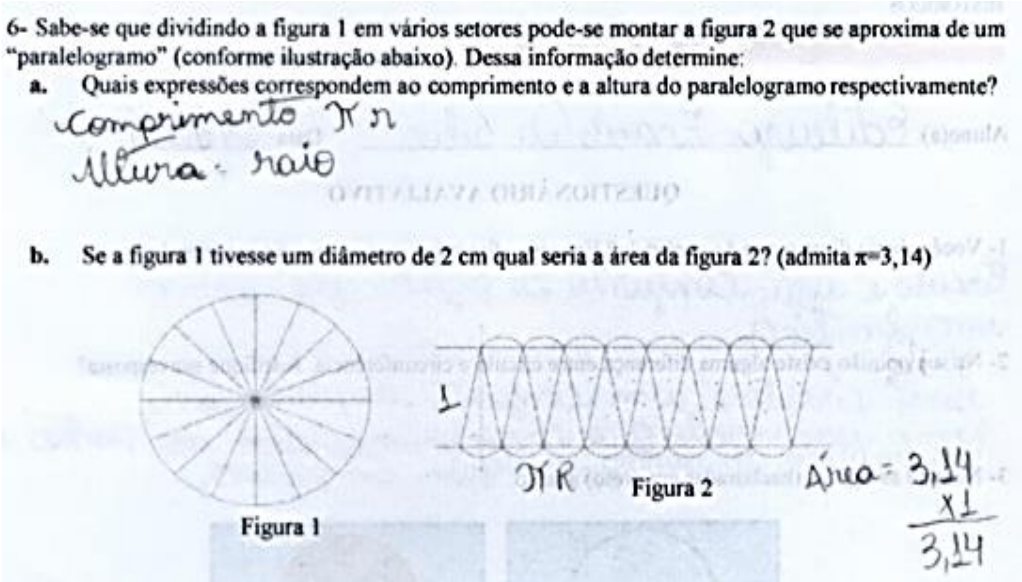
De acordo com os dados apresentados, registra-se que após a intervenção, houve uma evolução conceitual considerável por parte dos alunos, ao conseguirem entender que para solucionar a questão proposta seria necessário relacionar, por aproximação, a área do círculo e a do paralelogramo, elaborando o processo cognitivo da reconciliação integradora.

Protocolos de respostas do Aluno (A15)

Questionário Diagnóstico:

Não respondeu.

Questionário Avaliativo:



6- Sabe-se que dividindo a figura 1 em vários setores pode-se montar a figura 2 que se aproxima de um "paralelogramo" (conforme ilustração abaixo). Dessa informação determine:

a. Quais expressões correspondem ao comprimento e a altura do paralelogramo respectivamente?

Comprimento πr
Altura: raio

b. Se a figura 1 tivesse um diâmetro de 2 cm qual seria a área da figura 2? (admita π=3,14)

Figura 1

Figura 2

Considerações Finais

Conforme colocado, as preocupações que impulsionaram o interesse em propor uma prática diferente das que usualmente são aplicadas no cálculo do comprimento da circunferência e da área do círculo, levou-nos a apostar num material de ensino, no formato de uma oficina, cuja organização lógica foi estruturada em alguns aspectos históricos da base de construção desses objetos e de seus cálculos e os princípios programáticos da diferenciação progressiva e da reconciliação integradora, na perspectiva de que esse material possa se configurar em um material potencialmente significativo.

Nesse sentido, buscou-se caracterizar o fazer matemático a partir da generalização para obtenção e aplicação dos modelos geométricos das fórmulas do comprimento da circunferência e da área do círculo, reconstruindo estratégias que predominaram nas civilizações antigas, a exemplo da aplicação do método da exaustão arquimediano, para aquisição da área do círculo por aproximações com áreas de figuras retilíneas.

Inicialmente exploraram-se conceitos mais gerais sobre esses objetos tais como as ideias de curva fechada, região circular, conjunto de pontos de fronteira, conjunto de pontos internos, dentro outras, na perspectiva de possibilitar diferenciações e reconciliações ao interagirem com conceitos específicos, como os conceitos de raio, diâmetro e circunferência.

A partir das evoluções conceituais identificadas, comparando-se as respostas obtidas antes e após a intervenção, com a aplicação dos questionários, foi possível encontrar indícios de aprendizagem significativa, tanto no que concerne o conceito de círculo, quanto a estabelecer distinções importantes entre as ideias de círculo e de circunferência.

Destaca-se ainda, a evolução ocorrida na compreensão dos significados de raio, corda e diâmetro, assim como na obtenção da fórmula do cálculo da circunferência, a partir da comparação, por divisão, entre as medidas do comprimento da circunferência e do seu diâmetro ser constante e medir três quantidades do diâmetro mais uma parte sobrante.

Registra-se também que houve uma melhora na compreensão dos alunos sobre a obtenção e aplicação da fórmula da área do círculo, ao conseguirem fazer uma equivalência entre essa área e a do paralelogramo, de forma a solucionar a questão proposta. Isso foi bastante interessante, pois perceberam a relação desse procedimento com o método da exaustão arquimediano, trabalhado na oficina.

Por tudo que foi registrado, pode-se responder a pergunta geradora desse estudo, colocando que o material tem potencialidade significativa importante. Contudo, há necessidade de realizar outras aplicações que possam corroborar ou não com esta potencialidade.

Referências

ANDRÉ, M. E. D. A. **Estudo de Caso em Pesquisa e avaliação educacional**. Brasília: Líber Livro Editora, 2005.

AUSUBEL, D. P. **Adquisición y retención del conocimiento:** Una perspectiva cognitiva. Barcelona: Paidós, 2002.

BAGAZGOITIA, A., CASTAÑEDA, F., FERNÁNDEZ S. & PERAL, J. C. **La Resolución de Problemas en las Matemáticas del Nuevo Bachillerato: Libro del Profesor**. País Vasco: Universidad del País Vasco, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF, 2016. Disponível em:** < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site /inicio>**. Acesso em: jan. 2019**.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática (1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental). Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

EVES, H. **Geometria**: Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. Geometria Tradução Higino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997.

FONSECA, M da C F. R. *et al*. **O ensino da geometria na escola fundamental**: três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005

GOLDSTEIN, C. El uno es el outro: una historia del círculo. Em: SERRES, S. **Historia de las Ciencias**. 2. ed. Madrid: Editora Catedra, 1998. p. 151-173.

JOSEPH, G. **La Cresta Del Pavo Real**: Las Matemáticas y sus Raíces no Europeas. Madrid: Pirámide, 1996.

LIMA, E. **Medidas e Formas em Geometria, comprimento, Área, volume e semelhança**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

MARTINEZ, M. L. S.; NOVELLO, T. P. Uma proposta para o ensino de geometria na educação básica. 2013. In: Congresso Internacional de Ensino da Matemática, 6., 2013, Canoas, Rio Grande do Sul/Brasil. **Anais ...**. Canoas: ULBRA, 2013 Disponível em:

<http://www. conferencias.ulbra.br/index.php/ ciem/vi/paper/viewFile/710/166>. **Acesso em: set. 2019.**

MASINI, E. F. S., MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa na escola**. 1. ed. Curitiba, PR: CVR, 2017.
MEDEIROS, M. F.; BASSO, M. V. A. A tecnologia digital como estruturadora do pensamento geométrico, **Educ. Matem. Pesq.**, v. 22, n. 1, p. 444-461, 2020. **Disponível em:** <https:// revistas.pucsp.br/emp/article/view/44122/pdf>. **Acesso em: dez. 2019.**

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa**: a teoria e textos complementares. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

MOREIRA, M. A. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2006.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. F. S. **Aprendizagem significativa**: a teoria de David Ausubel. 3ª reimpressão. São Paulo: Centauro, 2011.

NOVAK, J. **Uma teoria de educação**. São Paulo: Pioneira, 1981.

PAVANELO, R. M. O abandono do ensino da geometria no brasil: causas e consequências, **Zetetiké**, v.1, n. 1, p. 7-17, 1993. **Disponível em:** <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index. php/zetetike/article/view/8646822/13724>. **Acesso em: out. 2019.**

PEREIRA, A. C. C.; PEREIRA, D. E. Ensaio sobre o uso de fontes históricas no ensino de matemática, **REMATEC**, v. 10, n. 18, p. 65-78, 2015. Disponível em: < http://www.rematec .net.br/index.php/rematec/issue/view/19>. **Acesso em: jul. 2019.**

PERES, G. **Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicas da pesquisa participante no ensino da geometria para as camadas populares**. 1991. 374 f. Tese (Doutorado). Universidade Estadual de Campinas – Faculdade de Educação/Campinas, 1991. Disponível em: <http://www. repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/252275>. Acesso em: ago. 2019.

POZO, J. I. (1998). Aprendizagem e o ensino de conceitos. In: COLL, C.; POZO, J. I; SARABIA, B.; VALLS, E. **Os conteúdos na Reforma. Ensino e aprendizagem de conceitos, procedimentos e atitudes**. (Neves, B. A., Trad.). (pp. 17-72). Porto Alegre: Artes Médicas.

QUARTIERI, M. T.; REHFELDT, M. J. H. Investigando conceitos no ensino de geometria. 2007. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte. **Anais eletrônicos.** Disponível em: <http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/ix_enem/Html /comunicacaoCientifica.html>. Acesso em: 17 abr. 2019.

SENA, R. M.; DORNELES, B. V. Ensino de Geometria: Rumos da Pesquisa (1991-2011), **REVEMAT**, v. 08, n. 1, p. 138-155, 2013. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index. php/revemat/article/view/1981-1322.2013v8n1p138/25095> Acesso em: jul. 2019.

SILVA, J. R.; SOUZA, E. C.; RUFINO, M. A. S. O ritual do toré como organizador prévio para o conceito de círculo, **Zetetiké**, v.1, n.1, p.75-93, 2018. Disponível em: <https://periodicos. sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8650471/17984>. Acesso em: dez. 2019.

SIRERA, J. **Historia de las Matemáticas em la Enseñanza Secundaria**. Madrid: Editorial Síntesis S.A., 2000.

VAZQUEZ, R. & CRUZ, R. **Matemática Moderna**. México: Trillas, 1972.

Maria Aparecida da Silva Rufino
Universidade de Pernambuco – UPE, Campus Mata Norte; Secretaria Estadual de Educação – PE
E-mail: aparecida.rufino@upe.br
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4850-7228

José Roberto da Silva
Universidade de Pernambuco – UPE, Campus Mata Norte
E-mail: jroberto.silva@upe.br
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-2970-9702