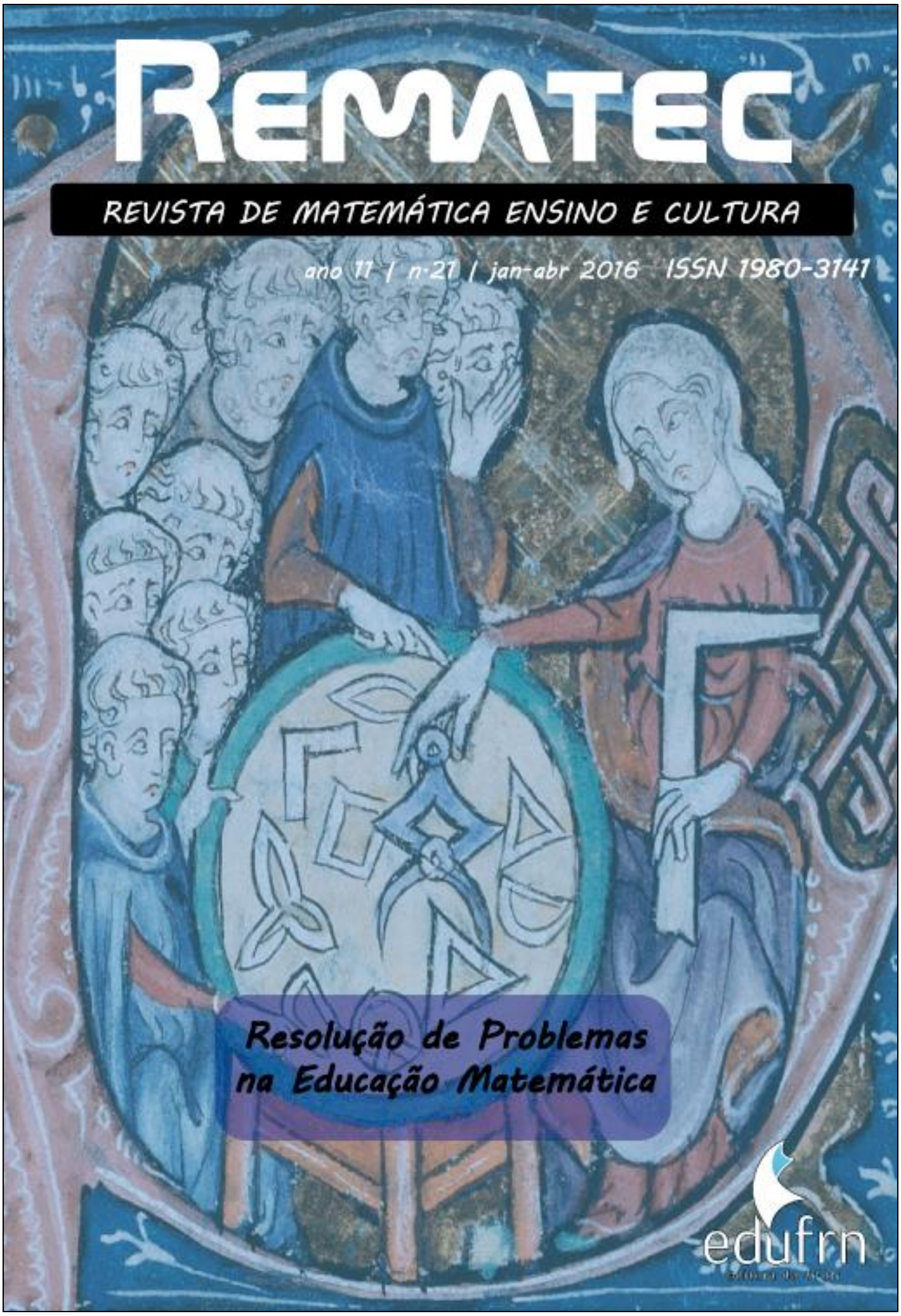

REMATEC
REVISTA DE MATEMÁTICA ENSINO E CULTURA
ano 11 | n.21 | jan-abr 2016 ISSN 1980-3141
Resolução de Problemas
na Educação Matemática
edufrn

Rematec

Revista de Matemática Ensino e Cultura

Resolução de Problemas na Educação Matemática

Revista de Matemática, Ensino e Cultura
Grupo de Estudos e Pesquisas sobre Cultura Matemática e suas Epistemologias na Educação Matemática
Ano 11 | n. 21 | jan. - abr. 2016
ISSN 1980-3141

Divisão de Serviços Técnicos

Catalogação da Publicação na Fonte. UFRN / Biblioteca Central Zila Mamede
REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura / Universidade Federal do Rio Grande do Norte. – Ano 1 n. 1 (jul./nov. 2006). – Natal, RN: EDUFRN – editora da UFRN, 2006. 140p. il.
Descrição baseada em ano 11, n. 21 (jan. - abr. 2016) Periodicidade quadrimestral.

ISSN: 1980-3141

1. Matemática – Ensino - Periódico. 2. Matemática – História – Periódicos. 3. Ensino e cultura – Periódicos. I. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. II. Título.

RN/UF/BCZM CDD 510.172
CDU 51:37(05)

Endereço para envio de artigos, resenhas, sugestões e críticas: contato@rematec.net.br e revistarematec@gmail.com

Índice

Editorial

Este número temático da Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC, do Grupo de Estudos e Pesquisas sobre Cultura Matemática e suas Epistemologias na Educação Matemática, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), intitulado Resolução de Problemas na Educação Matemática tem como propósito divulgar resultados de estudos e pesquisas de modo a promover reflexões sobre a Resolução de Problemas na formação de professores, no ensino e na aprendizagem da Matemática. Trata-se de oportunidade de revisitar a Resolução de Problemas, repensando-a e projetando-a no século XXI, para o trabalho com a Matemática Escolar. Também de considerar o papel que ela desempenha na aprendizagem matemática; na capacidade de pensar criticamente; no desenvolvimento da criatividade, de competências e habilidades; na relação com as tecnologias digitais ou na esfera dos afetos.

Os artigos apresentados neste número, tratados de diferentes formas, dão-nos um panorama de algumas pesquisas atuais sobre Resolução de Problemas desenvolvidas por pesquisadores renomados do Brasil e de alguns outros países, pesquisadores que têm uma vasta trajetória de pesquisas desenvolvidas sobre essa temática. São apresentados nesta edição temática nove artigos, três de autores internacionais e os demais de autores nacionais, resultantes de investigações em que a resolução de problemas é discutida e analisada em diferentes perspectivas, contribuindo de várias maneiras para as reflexões acerca dessa temática em contextos educacionais diversos.

As autoras portuguesas Isabel Vale e Tereza Pimentel, em seu artigo intitulado Resolver Problemas – Criando soluções, vendo, apresentam uma estratégia de resolução de problemas baseada na visualização, a qual as autoras designam por procurar ver como uma contribuição complementar para a abordagem e desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas nos alunos, sobretudo no desenvolvimento da criatividade. Com base nesses pressupostos são apresentados alguns exemplos de tarefas que foram trabalhadas com futuros professores de Matemática, no intuito de abordar a visualização como estratégia para a resolução de problemas.

Lourdes de la Rosa Onuchic e Luis Carlos Leal Junior, em A influência da leitura na resolução de problemas: questões de sentidos, significados, interesses e motivações, revelam possibilidades de lançar um novo olhar sobre a influência da leitura na resolução de problemas, discutindo questões relevantes que a leitura pode trazer para os contextos de ensino e de aprendizagem da Matemática: sentidos, significados, interesses e motivações, elementos que permeiam e são necessários à resolução de problemas. Após essa teorização, apresentam um estudo de caso que mostra as implicações e os desdobramentos da influência da leitura e da linguagem na produção de sentidos e significações no bojo da Resolução de Problemas.

O artigo intitulado O Raciocínio Proporcional e a Resolução de Problemas na Formação Inicial de (futuros) Professores de Matemática, de autoria de Célia Barros Nunes e Manoel dos Santos Costa, apresenta resultados de uma investigação que analisou aspectos do raciocínio proporcional e da resolução de problemas na formação inicial de (futuros) professores de Matemática. A pesquisa foi realizada com um grupo de licenciandos que buscavam novos recursos para desenvolver os conteúdos matemáticos com seus (futuros) alunos. Os resultados mostram que no decorrer das atividades eles foram mobilizando novas estratégias de resolução aos problemas propostos, empregando tanto o pensamento quantitativo (que envolve algoritmos numéricos) quanto o qualitativo (que analisa e explica as estratégias utilizadas na resolução), e puderam refletir sobre as possibilidades de implementação da resolução de problemas como metodologia de ensino em sua (futura) prática docente como professores de Matemática.

O artigo Resolução de Problemas nos anos iniciais do ensino fundamental: mitos, práticas e desafios, de autoria da pesquisadora Edda Curi, traz como contribuição à temática deste fascículo da REMATEC resultados de um conjunto de pesquisas desenvolvidas no período de 2011 a 2014, pelo Grupo de Pesquisa Conhecimentos, Crenças e Práticas de Professores que Ensinam Matemática – CCPPM, no âmbito do Programa Observatório da Educação - OBEDUC, liderado pela autora. A princípio focaliza resultados dessas pesquisas a respeito de resolução de problemas nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Em seguida, analisa o foco dado aos problemas do campo multiplicativo pelas três coleções de livros didáticos mais vendidas em 2013, segundo o PNLD, com base em uma pesquisa de mestrado desenvolvida, sob sua orientação, por um dos integrantes do Grupo.

O artigo do pesquisador peruano Uldarico Malaspina Jurado intitulado Creación de Problemas. Avances e Desafíos en la Educación Matematica traça um panorama das pesquisas, considerando os avanços e relatos de experimentos de ensino, que tratam da formulação de problemas (problem posing) no ensino de Matemática. O autor apresenta um resumo de importantes investigações nessa área, partido dos trabalhos de Kilpatrick (1987); passando pela edição especial do periódico Educational Studies in Mathematics (2013); os livros sobre essa temática editados por Singer, Ellerton e Cai (2015), até a recente publicação Posing and solving mathematical problems: advances and new perspectives, editada por Felmer, Pehkonen e Kilpatrick (2016); sem deixar de citar as pesquisas realizadas na América Latina Latina e os trabalhos de seu grupo de pesquisas na Pontifícia Universidade Católica do Peru. Tais pesquisas e as questões e pontos de vista destacados são considerados como estímulos e desafios para que se continue pesquisando e favorecendo o envolvimento com a formulação de problemas nos sistemas de ensino.

No artigo Entre o tudo e o nada: possíveis articulações, Rosilda dos Santos Morais e Andresa Maria Justulin divulgam resultados de uma pesquisa que se interessou por investigar a Resolução de Problemas nas frentes de pesquisa acadêmica, documentos oficiais, livros didáticos e professores de sala de aula, buscando possíveis articulações entre elas. Para tanto, recorreu-se à produção de pesquisa sobre o tema e buscou-se apreender como (e se) essa produção, que ganhou fôlego a partir da segunda metade do século XX, se articula com o que se encontra, atualmente, em livros didáticos, em documentos oficiais e na sala de aula de Matemática, sendo que para essa última foram considerados relatos de professores de Matemática da Educação Básica. Os resultados da pesquisa revelaram certa confluência da pesquisa acadêmica com os documentos oficiais, discreta articulação dessas frentes com os livros didáticos, pois essa articulação não faz referência à pesquisa atual sobre Resolução de Problemas, e fragilidade no que se refere às apropriações dessas frentes no trabalho do professor de Matemática em sala de aula.

No artigo intitulado Interfaces entre as Tecnologias Digitais e a Resolução de Problemas na perspectiva da Educação Matemática, Adriana Richit busca promover uma reflexão e entendimento sobre as relações entre as tecnologias digitais e a resolução de problemas, enfatizando as interfaces entre elas na perspectiva da educação matemática, evidenciando aspectos históricos, políticos e epistemológicos no que se refere ao processo de apropriação de conhecimentos em matemática e a formação matemática dos estudantes. Mediante as interfaces política, pedagógica, epistemológica, histórica e social e vislumbrando o desenvolvimento pleno dos estudantes, as autoras, por fim, ressaltam a necessidade de práticas educativas escolares em Matemática que sejam diversificadas, de modo a promover dinâmicas de aprendizagem no contexto das várias tendências no ensino, sobretudo a resolução de problemas e o uso de tecnologias nos processos de ensino e aprendizagem.

O estudo relatado no artigo The liecal Project and Its Investigation of Problem-Solving Strategies as a Measure of Longitudinal Curricular Effects on Students' Learning, de autoria de Jinfa Cai, Steven Silber, Stephen Hwang, Bikai Nie, John C. Moyer e Ning Wang se insere no grupo de pesquisas cujo foco está tanto na proposição de problemas como no seu uso como forma de avaliação da aprendizagem, deixando de ser apenas o produto e passando a ser considerado como processo. O artigo é baseado em uma pesquisa desenvolvida nos Estados Unidos, envolvendo o que seria, no Brasil, os ensinos Fundamental e Médio, como parte do projeto Lie Cal que foi desenhado para comparar os efeitos do currículo CMP (baseado em problemas) com os do currículo tradicional, chamado pelos autores de não-CMP. O objetivo do estudo foi, especialmente, o de utilizar a resolução de problemas como medida para analisar os efeitos longitudinais de um currículo desenvolvido à luz dos “problemas” na aprendizagem dos estudantes. As análises dos dados coletados sugerem que o currículo CMP está associado a um ganho significantemente maior, pelos alunos, no que se refere a compreensões conceituais e à resolução de problemas do que o observado com o currículo não-CMP.

Finalmente, Norma Suely Gomes Allevato e Gilberto Vieira, no artigo Em direção à generalização: contribuições de um problema com múltiplas estratégias de resolução, abordam a resolução de problemas como estratégia de ensino de Matemática, considerando-a como uma importante abordagem didática. Relatam uma pesquisa realizada com alunos de sexto ano do Ensino Fundamental em que foram desencadeadas atividades investigativas, a partir da proposição de um problema aberto envolvendo visualização espacial e análise de padrões. O problema proposto e a abordagem utilizada permitiram que os alunos empregassem diferentes estratégias e procedimentos. Os dados analisados indicam que as investigações desenvolvidas na resolução e a socialização das diversas resoluções por eles formuladas possibilitou o desenvolvimento do pensamento matemático, com destaque para o processo de generalização, característico do pensamento algébrico.

Este espectro de possibilidades retratado nos trabalhos apresentados nesta edição temática da REMATEC, mostra que a resolução de problemas matemáticos ainda é uma ponto central e elemento marcante nos currículos de Matemática e, consequentemente, o foco de muitas pesquisas em Educação Matemática. As pesquisas já discutiram variados aspectos e formas pelas quais a Resolução de Problemas pode se fazer presente na Matemática Escolar, abordando desde como os alunos aprendem Matemática, passando por como os professores ensinam e avaliam a aprendizagem em Matemática até como a Matemática é apresentada nos currículos. Mas ainda há muito a fazer, a entender e a pesquisar. Esperamos que o conjunto dos trabalhos aqui publicados orientem professores e pesquisadores a continuar na busca por mais e melhores compreensões acerca da Resolução de Problemas na Educação Matemática.

Não podemos deixar de registrar que sem o apoio e a parceria dos autores convidados não seria possível realizar esta publicação sobre Resolução de Problemas, tema que consideramos de significativa importância no âmbito das pesquisas em Educação Matemática. Expressamos, então, nossos sinceros agradecimentos aos autores dos artigos que integram este fascículo que, temos certeza, contribuirá significativamente para o fortalecimento das pesquisas em Resolução de Problemas.

Agradecemos, finalmente, também ao professor Iran Abreu Mendes pela confiança que despositou em nosso trabalho, possibilitando-nos organizar esta edição temática da Revista REMATEC.

Célia Barros Nunes
Norma Suely Gomes Allevato

Resolver Problemas - Criando Soluções, Vendo

Solving problems - creating solutions, seeing

Isabel Vale
Tereza Pimentel
Instituto Politécnico de Viana do Castelo – ESE-IPVC– Portugal

RESUMO

Neste texto discutem-se alguns pressupostos do ensino da resolução de problemas, nomeadamente a especial importância de uma estratégia de resolução de problemas baseada na visualização, que designamos por *procurar ver*, que pode constituir um contributo complementar para a abordagem e desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas nos alunos. Faz-se a articulação com o desenvolvimento da criatividade matemática, ligada à experiência Aha, procurando explicitar em que medida e através de que tipo de tarefas é possível desenvolver caraterísticas da criatividade. Apresentam-se alguns exemplos de tarefas, que ilustram os pressupostos discutidos, exploradas no âmbito da formação inicial de professores do ensino básico. A análise das produções indicia que as representações visuais não são as mais utilizadas pelos futuros professores, mesmo quando essa é a abordagem mais simples.

Palavras-chave: Resolução de problemas, visualização, representações visuais, criatividade.

ABSTRACT

This paper discusses some assumptions in the teaching of problem solving, including the special importance of a problem-solving strategy based on visualization, named *seeing*, which can be a complementary contribution to the approach and development of problem solving abilities in students. We make the connection with the development of mathematical creativity, linked to Aha experience, seeking to clarify to what extent and by what type of tasks creativity features can be developed. We present some examples of tasks, that illustrate the assumptions discussed, explored within the initial education of basic school teachers. The analysis of the productions indicates that visual representations are not the most used by future teachers, even when this is the simplest approach.

Keywords: Problem solving, visualization, visual representations, creativity.

Introdução

O ensino da matemática é uma tarefa complexa, pois há vários aspetos que devem ser considerados em simultâneo, dos quais destacamos os seguintes: exige que os professores possuam um conhecimento e compreensão profunda dos temas e conteúdos matemáticos que esperam vir a ensinar; e exige também que os professores tenham um bom entendimento do modo de ensinar, de forma a serem eficazes no desenvolvimento da aprendizagem matemática de todos os alunos.

Um ensino eficaz da matemática deve envolver os alunos na resolução e discussão de tarefas que promovam o raciocínio e a resolução de problemas, capacidades que devem ser enfatizadas nas salas de aula de matemática de todos os níveis. Um modo de os professores cumprirem este objetivo passa pela seleção de tarefas que requeiram dos alunos a aplicação do seu conhecimento matemático e o envolvimento em pensamento de nível superior. Estas tarefas devem incluir o uso de diferentes representações e ferramentas, e a sua manipulação de forma flexível, permitindo encontrar múltiplas maneiras de abordar um problema e de encontrar várias estratégias de resolução (NCTM, 2015). Já em 1980 o National Council of Teachers of Mathematics, na sua *Agenda for Action*, recomendou que a resolução de problemas fosse o foco da matemática escolar. Contudo, devido à complexidade do processo de resolução de problemas, muitas das questões relacionadas com uma maior eficiência no ensino da resolução de problemas continuam sem resposta. Que abordagens poderão contemplar-se no ensino da resolução de problemas? Será que o desempenho dos alunos em resolução de problemas pode ser afetado por um tipo específico de abordagem?

Acreditamos que a resolução de problemas continua atual como objetivo central da aprendizagem matemática no século XXI; será eventualmente necessário, no entanto, repensar a sua abordagem nas salas de aula. Uma estratégia promissora poderá passar pela valorização da visualização; e é certo que esta capacidade pode ser desenvolvida nos alunos desde que as práticas de ensino promovam esta abordagem. Embora as representações visuais tenham sido relegadas para as margens da matemática formal durante várias décadas, nos finais do século XX houve um renascimento do interesse pela visualização como ferramenta poderosa no raciocínio matemático.

A recente investigação na área da cognição, em particular nos processos de resolução de problemas, conclui que o uso de representações visuais, para certos tipos de tarefas, pode ter vantagens sobre o uso de outras representações, facilitando a resolução de problemas. Em linha com esta ideia, defendemos a estratégia *procurar ver* como estratégia complementar poderosa para resolver problemas, e ainda para impulsionar a criatividade, dando a todos os alunos a oportunidade de a experienciar numa aula de matemática.

O ensino da resolução de problemas

Alguns autores referem que a resolução de problemas é o processo de aplicar o conhecimento previamente adquirido a situações novas e que pode envolver exploração de questões, aplicação de estratégias e formulação, teste e prova de conjecturas. Trata-se de uma actividade muito absorvente, pois quem resolve um problema é desafiado a pensar para além do ponto de partida, a pensar de modo diferente, a ampliar o seu pensamento e, por estas vias, a raciocinar matematicamente. De modo geral há consenso em considerar que problemas são questões para as quais não é conhecido um procedimento ou caminho para chegar à solução e cuja resolução requer raciocínio crítico ou criativo. Caso contrário, isto é, se a situação pode ser resolvida utilizando processos conhecidos pela pessoa, rotineiros ou estandardizados, que conduzem directamente à solução, a questão classifica-se como um exercício. Deste modo, ser ou não ser problema não depende apenas da tarefa que é proposta, mas também do indivíduo a quem se propõe. Por exemplo, a questão *Calcula o produto* 8×6 pode ter várias interpretações conforme o nível de conhecimentos de quem a enfrenta: um facto específico se a resposta é automática e faz recurso à memória; um exercício se mobiliza treino ou mecanização; ou um problema se envolve a descoberta de um caminho.

É habitualmente reconhecido que a resolução de problemas depende de muitos fatores como um conjunto de conhecimentos organizado sobre o domínio do problema, técnicas de representação e processos metacognitivos. Algumas dificuldades situam-se ao nível da compreensão do enunciado, e outras podem advir da demasiada importância dada, desde os primeiros anos de escolaridade, aos cálculos e respostas rápidas mais do que à exploração, análise e interpretação.

Para facilitar a abordagem dos problemas têm surgido vários modelos de resolução, o mais importante dos quais é da autoria de Polya (1945). Apresentamos aqui um outro modelo proposto pelo educador matemático espanhol Miguel de Guzmán que, embora evidencie muitas semelhanças com o modelo de Polya, designadamente as suas 4 fases, propõe algumas abordagens de modo bastante detalhado e potencialmente enriquecedor para os estudantes a quem se dirige. Os passos do modelo de Guzmán (1990) são os seguintes: (a) Antes de fazer tenta entender; (b) À procura de estratégias; (c) Explora a tua estratégia; e (d) Extrai o sumo do jogo e da tua experiência. No item (a) aconselha o solucionador a certificar-se de que compreende a fundo as regras, os dados do problema e a maneira como as peças encaixam, mesmo que ache que é perda de tempo. Na segunda fase o autor aconselha ao acolhimento de muitas ideias para atacar o problema, mesmo que pareçam despropositadas. Para facilitar a emergência dessa grande quantidade de ideias dá as seguintes sugestões: procurar semelhanças com outros jogos e problemas; tentar simplificar o problema, resolvendo outros com menos elementos; experimentar e procurar regularidades, temas; fazer um esquema e, se for útil, pintá-lo; modificar o enunciado; escolher uma boa notação; explorar a simetria, se possível; pensar onde nos leva considerar “Suponhamos que não”; supor o problema resolvido para explorar as relações entre os elementos dados e os procurados; pensar em técnicas gerais usadas por grandes matemáticos: princípio de indução de Pascal, processo diagonal de Cantor, princípio do pombal de Dirichlet. No terceiro passo Guzmán sugere a exploração das melhores ideias sem as misturar a princípio. Aconselha a persistência até determinado ponto, em que se deve mudar de abordagem. A última fase engloba a reflexão sobre o processo, tentando perceber não só que as coisas de facto funcionam mas porque têm de funcionar assim. Nesse ponto o autor incentiva a verificar se não existe um caminho mais simples. Sugere também uma análise do processo utilizado de modo a poder vir a ser útil no futuro e ainda uma reflexão sobre o seu próprio processo de pensamento de modo a fazer um diagnóstico do seu estilo pessoal de conhecimento, analisando por exemplo se é mais visual ou analítico, se tem tendência para pensar em círculos, obsessivamente, se se fixa numa ideia única ou se tem flexibilidade para procurar outro caminho podendo desenvolver um fluxo de ideias variadas, novas, originais.

Este modelo é útil por explicitar com bastante pormenor algumas ações que poderão ser tomadas no sentido de avançar no ataque a um problema. Em particular, o esquema metacognitivo avançado na última fase poderá ajudar o solucionador a conhecer o seu estilo de pensamento e assim ser capaz de tomar decisões e refinar ações no futuro. O modelo é complementado com algumas notas que poderão ultrapassar alguns bloqueios culturais e afetivos e consequentemente permitir abordagens mais frutíferas. São exemplos disso as seguintes formulações: 1. *Procura a solução correta*. Muitas vezes, os problemas podem ter muitas soluções corretas, mas esta ideia faz com que a pessoa não queira progredir mais ao encontrar um modo de resolver, mesmo que não seja o mais adequado, elegante, original ou geral; 2. *Temos de ser práticos*. O pragmatismo não deixa dar asas à imaginação; 3. *É mau uma pessoa enganar-se*. Esta ideia é impeditiva de avançar correndo embora alguns riscos, porque nos leva a fazer apenas aquilo em que estamos seguros, que são poucas coisas; 4. *Não sejas infantil*. Jogos são coisas de crianças. E no entanto, é ao jogar, cultivando o pensamento ambíguo, fazendo algumas loucuras, que surgem por vezes as ideias geniais.

A fase (b) do modelo de Guzmán, bem como a do modelo de Polya, envolve a procura de estratégias, discriminando os autores algumas mais usuais. Aqui chegados temos de referir que há autores que consideram que estratégias muito genéricas, independentes dos tópicos matemáticos, não serão provavelmente eficazes na abordagem de um problema de álgebra ou de geometria (e.g. Cai & Lester, 2010). Estes autores preconizam que a resolução de problemas é uma parte integrante da aprendizagem da matemática, não sendo considerada como um tópico separado no currículo, mas como um meio para o ensino de conceitos e competências matemáticas. No entanto, outros autores mostram, com base em resultados de investigação, a importância do conhecimento de estratégias diversificadas no desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas em todos os níveis de dificuldade ou complexidade, desde a matemática elementar até à avançada (Schoenfeld, 1992). Vale e Pimentel (2004) definem estratégias como ferramentas que, a maior parte das vezes, se identificam com processos de raciocínio e que podem ser bastante úteis em vários momentos do processo de resolução de problemas, defendendo que o conhecimento matemático e as estratégias de raciocínio devem ser aprendidas e usadas em simultâneo e não isoladamente (e.g. fazer um desenho, fazer uma lista organizada, descobrir um padrão, proceder por tentativa e erro, trabalhar do fim para o princípio). Consideramos que a aquisição de um reportório de estratégias viáveis - e já anteriormente conhecidas e aplicadas - constitui um corpo de conhecimento em ação que: (a) ajuda os alunos a abordar o problema e a descobrir um caminho; (b) pode ser uma alternativa ao uso direto de conceitos que o aluno não possui ou não estão acessíveis; e (c) facilita muitas vezes a interpretação das situações. Além disso, o envolvimento dos alunos com problemas procurando vários modos de resolução permite-lhes compreender que um problema pode ser abordado de muitos modos diferentes e com a utilização de várias estratégias, conduzindo a soluções criativas.

O modelo de Guzmán também se refere aos aspetos afetivos, que sabemos que podem condicionar positiva ou negativamente a capacidade de resolução de problemas. Conceções sobre a natureza e utilidade da matemática e sobre os problemas e suas resoluções, bem como uma crença fatalista sobre as próprias capacidades, podem ser debilitantes.

Da resolução de problemas à criatividade

A criatividade em matemática é um tema muitas vezes negligenciado e considerado impossível de prosseguir nas aulas de matemática; mas, em vez disso, defendemos que envolve um conjunto de capacidades que podem ser ensinadas e aprendidas pelos alunos.

Um dos contextos em que o pensamento criativo tem um papel crucial é o da resolução de problemas. Pode assumir-se que as tarefas que possibilitam múltiplas resoluções, o recurso a diferentes representações e envolvem diferentes propriedades de um conceito matemático, são aquelas que têm um maior potencial criativo (e.g. Leikin, 2009; Vale, Barbosa & Pimentel, 2014).

A flexibilidade, uma das caraterísticas da criatividade, exige uma mudança no “olhar” para as situações, opondo-se à fixação. As intuições que conduzem a soluções de problemas curtas e elegantes são denominadas experiência *Aha*. O momento Aha, também designado por efeito Eureka, é a compreensão súbita de um problema ou conceito previamente incompreensível, com passagem da escuridão total a uma situação clara e óbvia.

> De repente tudo se ilumina. No tempo que demora a acender uma luz a resposta surge e tudo passa a fazer sentido. Acaba de ser resolvido um problema, ou descoberta uma nova peça matemática, e isso aconteceu num flash de intuição, num momento de iluminação, numa experiência AHA! (LILJEDAHL, 2005, p. 219).

Ninguém sabe explicar exatamente o que acontece na mente da pessoa que tem uma intuição válida deste tipo. Sabe-se que estas acontecem inesperadamente, muitas vezes quando a pessoa não está a pensar no assunto mas a fazer outra coisa qualquer. Este processo é descrito (Gardner, 1990) como um salto criativo da mente, que “vê” a situação de uma forma muito mais simples, conseguindo assim resolver um problema que, usando métodos convencionais, se revela difícil. Esta capacidade desenvolve-se resolvendo problemas e habituando-se a olhar para eles de modo não convencional. A teoria Gestalt explica estes momentos de insight pela capacidade de pensamento produtivo: ser capaz de reestruturar a informação de modo a ver para além do que é dado, ultrapassando uma atitude cega de mera reprodução (Wertheimer, 1959). Para Wertheimer, a compreensão da estrutura de um problema não é um processo cognitivo mas percetual; *ver* a estrutura de um problema significa também ver a sua resolução, isto é, as operações que é preciso percorrer para o resolver.

Gardner (1990) apresenta um modelo que pode servir de guia para desenvolver o pensamento Aha: (a) O problema pode ser resolvido de um modo mais simples?; (b) O problema pode ser transformado num problema isomorfo mais fácil de resolver?; (c) Consegue inventar um algoritmo simples para resolver o problema?; (d) Pode aplicar um teorema de outro ramo da matemática?; (e) Pode verificar o resultado com bons exemplos ou contraexemplos?; (f) Há, no problema dado, aspetos irrelevantes para a sua solução que possam enganar o leitor?

Apresentamos de seguida dois exemplos clássicos de problemas deste género, embora não nos dediquemos à sua exploração com os alunos, pois são problemas de tipo puzzle que exigem um Aha que ultrapassa os objetivos e o âmbito do nosso estudo. Contudo, os exemplos 2 e 3 apresentados mais à frente e utilizados no nosso trabalho envolvem também claramente a experiência Aha.

Construir 6 quadrados com os 12 fósforos:

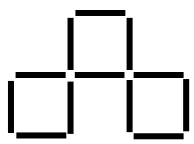


Figura 1
Problema de Aha 1

O pensamento Aha subjacente é que não se exige que a representação seja no plano. No espaço tridimensional os 12 fósforos podem constituir as 12 arestas dum cubo formando assim 6 quadrados.

Nadando debaixo de uma ponte vinham dois patos à frente de outros dois, dois patos atrás de outros dois, e dois patos no meio. Quantos patos havia no mínimo no total?

Figura 2
Problema de Aha 2

A maior parte das pessoas organiza espontaneamente os patos lado a lado horizontalmente vendo três filas de dois num total de 6 patos. O pensamento Aha, neste caso, consiste em libertar-se da organização horizontal habitual e ver 4 patos em fila.

Vários aspetos do modelo de Guzmán de resolução de problemas fornecem muitas pontes com a criatividade, designadamente quando o autor aconselha o acolhimento de muitas ideias, mesmo que absurdas, e quando aconselha a mudar de rumo ao fim de tentar persistentemente sem frutos um caminho.

O que faz com que uma resolução seja criativa é, conforme sugere Presmeg (2014), o facto de ser necessário quebrar o esquema mental usual, por exemplo, que sugere o uso de fórmulas quando a palavra «área» é apresentada, de modo a procurar um método de resolução visual mais frutífero e simples.Também a descrição da experiência Aha tem muitos pontos de contacto com a criatividade: Gardner refere-se a um salto criativo da mente ao procurar uma abordagem do problema diferente da tradicional; Wertheimer fala em pensamento produtivo ao invés de reprodutivo. E com efeito, as três vertentes mais importantes da criatividade são: a *fluência*, capacidade de produzir um grande número de resoluções para a mesma tarefa; a *flexibilidade*, capacidade para produzir modos diferentes de resoluções organizadas em diversas categorias; e a *originalidade*, capacidade de pensar de forma não usual, produzindo ideias novas e únicas.

A importância da estratégia *procurar ver*

É um facto conhecido que muitos matemáticos, quando imersos em pensamentos, muitas vezes evitam não só usar palavras, mas também símbolos algébricos ou outros, preferindo concentrar-se em imagens. George Pólya (1945) também escreveu sobre o importância dos aspectos visuais do pensamento matemático e da resolução de problemas. Pólya propõe um conjunto de estratégias para sucesso na resolução de problemas. Uma das mais proeminentes nesta lista de sugestões é *fazer um desenho,* que Pólya via como um bom conselho geral.

Na visão de Schoenfeld (1992) as heurísticas de Polya não produziram os resultados esperados como auxiliares da resolução de problemas por serem demasiado genéricas, preconizando este autor a necessidade de desenvolver nos alunos um maior número de estratégias mais específicas, mais ligadas a determinadas categorias de problemas. Ora existe um conjunto de problemas, normalmente de natureza ou contexto visual, que têm grande potencial para resoluções visuais. É para esses problemas que propomos, na linha de Schoenfeld, a utilização de uma estratégia complementar e específica, que denominamos *procurar ver*. Esta envolve uma actividade que pode associar-se ao leque mais tradicional de estratégias (e.g. fazer um desenho, reduzir a um problema mais simples, descobrir um padrão). A estratégia *procurar ver* não substitui nenhuma outra, é antes um modo de abordagem que nem sempre é incentivado e que pode ser muito produtivo. Com vista à sua apropriação pelos alunos, defendemos, não um ensino prescritivo de estratégias, mas a sua análise de modo natural em sala de aula, e sempre que se proporcione, quer pelo professor quer através da partilha de estratégias usadas pelos colegas. E neste domínio verifica-se que nem sempre se privilegia nas aulas de matemática o recurso a estratégias visuais (Stein & Lane, 1996; Vale & Pimentel, 2013).

Em que consiste esta atividade? Segundo Tünde (2005) a visualização é o tipo de atividade de raciocínio baseada no uso de elementos visuais ou espaciais, quer sejam mentais ou físicos, utilizados para resolver problemas ou provar propriedades, e compreende quatro elementos principais: imagens mentais; representações externas; processo de visualização; e habilidades de visualização. As imagens mentais são representações cognitivas de um conceito ou propriedade matemática através de elementos visuais ou espaciais. As representações externas são representações verbais ou gráficas de conceitos ou propriedades incluindo imagens, desenhos ou diagramas, etc., que ajudam a transformar imagens mentais em raciocínio visual. O processo de visualização é uma ação física ou mental em que as imagens mentais estão envolvidas. Finalmente as habilidades de visualização ajudam a executar os processos anteriores. Na mesma linha encontra-se Presmeg (2014) quando refere a utilidade de meios visuais de resolução de problemas, incluindo não só registos sob a forma de imagem, mas também representações espaciais mais abstractas, envolvendo gráficos e padrões.

Fujita e Jones (2002) defendem que é essencial ter *olho geométrico* – o poder de ver propriedades geométricas a separar-se de uma figura - ferramenta essencial para a construção da intuição geométrica. Este poder é desenvolvido com a realização de tarefas práticas tais como desenhar e fazer medições em figuras geométricas. Por outro lado, a intuição geométrica ou espacial é poderosa não só em temas geométricos mas noutros que o não são. O uso de imagens visuais pode ser uma ajuda importante para todos os tipos de problemas, incluindo problemas em que a componente visual não é evidente. Nestes casos, a visualização pode suscitar o desenvolvimento da intuição e a capacidade de estabelecer novas relações produzindo assim o corte em fixações mentais que possibilita o pensamento criativo.

Estudos em ciência cognitiva sobre os processos de resolução de problemas mostram que, embora uma representação visual possa conter a mesma quantidade de informação que uma outra representação, pode tornar-se por esse facto mais explícita. No entanto, é precisamente porque as representações visuais podem conter tanta informação que podem ser difíceis de interpretar, construir, ou usar, isto é, apresentam algumas dificuldades para os alunos envolvidos na resolução de problemas matemáticos. A dificuldade parece residir no facto de um diagrama poder ser muito complexo, o que pode não ser imediatamente compreensivel para alunos não iniciados no uso de representações visuais. Deste modo há necessidade de os alunos serem confrontados com um ensino explicito que coloque estas capacidades visuais em evidência.

As dificuldades associadas ao uso de representação visuais podem desempenhar um papel na aparente relutância de muitos alunos em usá-las.

Lowrie e Clements (2001) referem que os psicólogos e educadores matemáticos interessados nas estratégias de resolução de problema de matemática classificaram os solucionadores como pertencentes a uma de três categorias: 1) visuais, que têm preferência por uma abordagem holística envolvendo extensa utilização de métodos visuais; 2) não visuais ou verbais, que têm uma preferência por abordagens mais verbais; e 3) aqueles que tendem a usar os dois métodos, visuais e não visuais (Krutetskii, 1976; Presmeg, 1986).

Alguns estudos (e.g. Clements & Del Campo, 1989) mostram que os estudantes ensinados de uma forma visual tendem a aprender a usar métodos visuais. Dependendo dos problemas e dos esquemas de pensamento dos solucionadores, o raciocínio visual pode ser mais eficiente (ou menos eficiente) do que o raciocínio que emprega modos mais verbais/não visuais de pensamento. Neste sentido, a atividade de "ver" é algo que se pode criar, desenvolver, aprender.

Os alunos muitas vezes tendem a usar caminhos algébricos de processamento de informação em detrimento dos visuais, mesmo quando os primeiros são mais complicados - uma tendência que muitas vezes leva a resultados desastrosos, porque esses alunos não têm conhecimentos matemáticos para dar uma análise completa dos problemas (e.g. Eisenberg & Dreyfus, 1991).

Presmeg (1986) conclui, através de estudos de sala de aula, que os estudantes do ensino médio que têm melhor desempenho em matemática são quase sempre não visuais, enquanto que os alunos que mostram uma preferência pela visualização são muitas das vezes os que apresentam mais dificuldades em matemática. Como explicação, a autora sugere que no currículo tradicional e ênfase da instrução é colocada em métodos não visuais, deixando os alunos com tendência visual em posição de desvantagem.

Assim, a investigação confirma que a visualização pode desempenhar um papel de apoio no problema a resolver e também, por outro lado, que apresenta desafios para muitos estudantes. Torna-se assim necessária uma melhor compreensão do papel da visualização na resolução de problemas bem sucedida, especialmente como e quando são usadas representações visuais em resolução de problemas e como é que as dificuldades inerentes são superadas para alcançar o sucesso. Arcavi (2003) identifica três dos papéis que a visualização pode desempenhar no processo de aprendizagem da matemática: (a) apoio e ilustração de resultados de natureza simbólica (e eventualmente constituir prova de pleno direito): (b) um modo possível de resolver o conflito entre soluções simbólicas (corretas) e intuições (incorretas); e (c) uma maneira de destacar bases concetuais que poderiam ser facilmente ignoradas através de resoluções formais.

Chegamos assim à confluência dos três domínios – resolução de problemas, visualização e criatividade: a ação de procurar ver, adotada como estratégia de resolução de problemas, passível de ser ensinada e desenvolvida, a suscitar o raciocínio visual associado à intuição, à experiência Aha, à capacidade de inventar e ao pensamento divergente, características essenciais do pensamento criativo.

Concretizando algumas ideias

Apresentamos de seguida três exemplos de tarefas de resolução de problemas que foram trabalhados com futuros professores em formação, numa disciplina do âmbito da Didática da Matemática; esta experiência foi efetuada antes de trabalhar com a visualização de um modo mais formal.

O primeiro exemplo surge num contexto não visual, ajustando-se assim à ideia acima defendida de que o uso de imagens visuais pode ser uma ajuda importante para todos os tipos de problemas, incluindo aqueles em que a componente visual não é evidente. Os dois exemplos seguintes são do domínio da geometria, tendo assim uma componente visual mais notória, embora, como veremos, quase nunca os alunos a explorem de uma forma eficaz e produtiva.

Exemplo 1

Este é um exemplo de um problema clássico que normalmente surge no trabalho com álgebra e tradicionalmente só pode ser trabalhado quando os alunos dominam as ferramentas algébricas – resolução de equação ou sistema de equações. No entanto, ele poderá ser abordado com sucesso por alunos mais novos que não dominam a álgebra se lhe for sugerida ou por iniciativa própria seguirem uma abordagem visual.

Um agricultor tem na sua quinta vacas, cavalos e patos. O número de vacas é o dobro do número de cavalos. O número de patos é o quíntuplo do número de cavalos. No total os animais têm 44 patas. Descubra o número de vacas, cavalos e patos.

A abordagem tradicional consiste em estabelecer e resolver um sistema de três equações a três incógnitas, como se apresenta de seguida.

$$\begin{cases} V = 2C \\ P = 5C \\ 4V + 4C + 2P = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ 8C + 4C + 10C = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ 22C = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ C = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V = 4 \\ P = 10 \\ C = 2 \end{cases}$$

A resposta é então 4 vacas, 10 patos e 2 cavalos.

Contudo, o problema é facilmente resolvido por alunos de níveis iniciais que ainda não sabem resolver equações e sistemas uma vez que, recorrendo a um desenho e utilizando uma lista organizada em relação ao número de patas, facilmente se chega ao resultado. A álgebra é uma ferramenta poderosíssima na resolução de problemas, mas alunos dos primeiros anos de escolaridade podem recorrer a um processo visual como o que se apresenta a seguir, mais intuitivo mas igualmente válido.

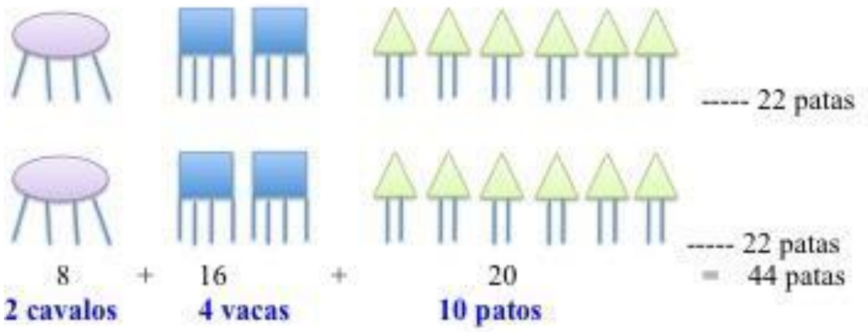


Figura 1. Resolução visual do problema dos animais

Com os alunos, futuros professores, com quem trabalhamos os resultados foram os expectáveis para este nível etário: a estratégia mais utilizada foi o recurso a um sistema de equações; contudo, 40% dos alunos utilizou tentativa e erro.

Exemplo 2

Um terreno quadrado tem construídas 4 torres de observação nos seus vértices. Os seus donos querem ampliar o terreno para um de área dupla, mas mantendo-lhe a forma quadrada. Como vão proceder?

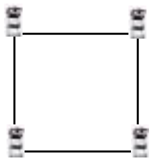


Figura 2. Problema da duplicação da área do quadrado

Este problema, que visa a obtenção de um quadrado de área dupla da dum quadrado inicial, pode ser abordado através de duas perspetivas diferentes: uma, mais algébrica, apoia-se na manipulação de fórmulas conhecidas; a outra recorre exclusivamente ao pensamento visual.

A resolução algébrica correta mais frequente utiliza fórmulas. Considerando ℓ o lado do quadrado inicial e y o do final:

$$A = \ell^2$$

$$A' = 2\,\ell^2$$

$$y = \sqrt{2}\,\ell$$

Alguns alunos seguem este caminho mas apenas para um caso particular, medindo o lado ou fazendo uma suposição do seu comprimento.

Há alunos que fazem apenas uma descrição dos passos a percorrer, como segue:

- Medir o lado do terreno
- Calcular a área do terreno
- Multiplicar por 2 a área para obter a área do novo terreno
- Fazer a raiz quadrada desse valor para determinar o lado do novo terreno

Vários alunos apresentam um desenho como o que se mostra na Figura 3:

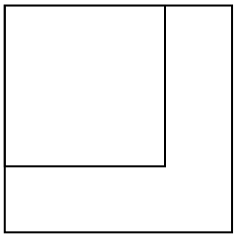


Figura 3. Desenho que acompanha a resolução

Os dados mostram que apenas uma pequena percentagem dos alunos apresentou uma resolução visual correta. Nalguns casos, aparece apenas o desenho, elucidativo, como se ilustra na Figura 4:

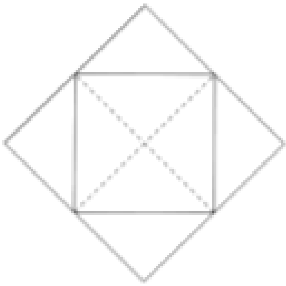


Figura 4. Resolução visual do problema da duplicação da área

Destes, alguns apresentaram os dois tipos de resolução. O trabalho evidencia que começaram pela resolução algébrica, e descobriram posteriormente a resolução visual. Na divisão do quadrado pelas duas diagonais fica explícita a sua decomposição em 4 triângulos; assim, para duplicar a área, o novo quadrado deverá ser composto por 8 desses triângulos.

Destaca-se um caso em que, não tendo sido apresentada a resolução visual anterior, há evidência de uma compreensão visual profunda. A aluna começa por obter, por um processo algébrico idêntico ao que se apresenta acima, o valor $\sqrt{2}$ x para o novo lado, a partir do lado inicial x, e, identificando este resultado, faz em seguida a associação com o Teorema de Pitágoras e consequente interpretação geométrica, como se ilustra na Figura 5 acrescentando a explicação: “A diagonal do quadrado inicial passa a ser o lado do quadrado final”.

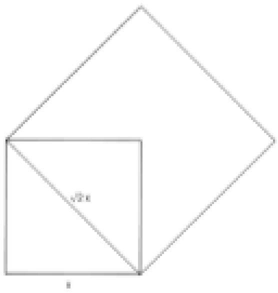


Figura 5. Resolução algébrica com complemento visual

O problema acabou por se revelar mais complexo do que pensávamos à partida. As resoluções foram separadas em várias categorias, como segue na Figura 6:

Não apresenta qualquer trabalho ou o trabalho apresentado não é relevante.	9%
Resolução incorreta (exemplo: duplica o lado; duplica a área e em seguida divide por 4 para obter o lado).	33%
Resolução correta para um caso particular (normalmente mede o lado; calcula a área; duplica o valor; e extrai a raiz quadrada).	16%
Resolução algébrica geral. Responde que o novo lado se obtém multiplicando o original pelo fator $\sqrt{2}$ (ou 1,4).	28%
Tentativa de resolução visual (p.e. traça as diagonais do quadrado original)	9%
Resolução visual correta	12% *

*A soma ultrapassa 100% porque alguns alunos apresentaram duas soluções.

Figura 6. Resultados do Exemplo 2

Do exposto podemos inferir que os alunos, de modo geral, preferem e optam por resoluções algébricas, muitas das vezes aplicadas cegamente, sem qualquer conexão ou indício de compreensão visual. Embora tenhamos de atender aos diferentes tipos de pensamento, mais analítico ou mais visual, no número de resoluções a balança pende demasiado para um lado, mostrando uma preponderância de abordagens analíticas na matemática escolar, em detrimento do pensamento visual, o que indicia uma valorização dos aspetos analíticos por parte dos professores e dos currículos.

Exemplo 3

Determine a área da figura sombreada, formada por um quarto de círculo e dois semicírculos. Explique como resolveu.

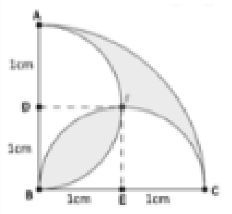


Figura 7. Problema da área sombreada

Uma resolução algébrica expectável é do tipo que se apresenta. Baseando-se nos dados da figura e decompondo-a em outras pode-se chegar à solução recorrendo a diferentes fórmulas da área de figuras, sejam círculos, quadrados ou triângulos.

A área da parte sombreada é dada pela soma das áreas X e de Y (Figura 8).

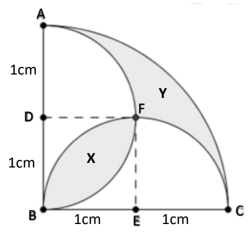


Figura 8. Resolução do problema da área sombreada (1)

A área de Y pode ser calculada retirando à área do quarto de círculo de raio 2cm as áreas dos dois quartos de círculo de raio 1cm e do quadrado de lado 1cm. Ou seja

$$A_Y = \frac{\pi.2^2}{4} - \left(\frac{\pi.1^2}{4} + \frac{\pi.1^2}{4} + 1^2\right) = \frac{\pi}{2} - 1$$

Para calcular a área de X podemos dividir X em dois segmentos Z e W iguais (Figura 9), em que a área de cada um se obtém retirando à área do quarto de círculo de raio 1 cm a área do triângulo retângulo isósceles de lado 1cm.

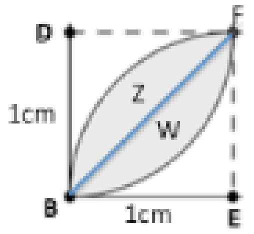


Figura 9. Resolução do problema da área sombreada (2)

Ou seja, $$A_X = A_Z + A_W = 2A_Z = 2\left(\frac{\pi.1^2}{4} + \frac{1\times 1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$$

Logo, $$A_Y + A_X = \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{\pi}{2} - 1 = \pi - 2$$

A área pedida é pois $(\pi - 2)$ cm^2.

E foi esta a estratégia utilizada por 72% dos alunos, de acordo com os resultados apresentados na Figura 10.

Resolução do cálculo da área não sombreada (erro o cálculo da área de X na aplicação do T- Pitágoras)	12%
Resolução correta do cálculo de área de partes da figura (p.e. área do quarto de círculo de centro D/E e centro B).	50%
Resolução visual correta (resolução dinâmica)	38%

Figura 10. Resultados do Exemplo 3

Pode-se constatar que apenas 38% utilizou uma resolução que, obviamente baseada nos dados da figura, vai mais além. Estes alunos apresentaram uma resolução que designamos por dinâmica, pois envolve deslocação de partes da figura obtendo uma visualização diferente do todo, de modo a que a resolução se tornou mais simples e mais elegante (Figura 11)

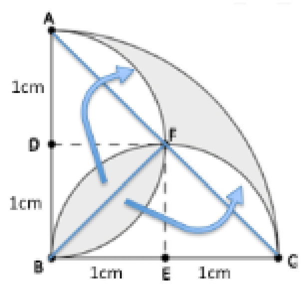


Figura 11. Resolução visual do problema da área sombreada

Deste modo, calcula-se de forma mais rápida e simples a parte sombreada retirando à área de um quarto de círculo de raio 2 cm a área do triângulo retângulo de catetos 2 cm.

$$A_{somb} = \frac{\pi.2^2}{4} - \frac{2\times 2}{2} = \pi - 2$$

Ou seja, a área pedida é ($\pi - 2$) cm^2.

Os resultados obtidos pelos alunos nestes três exemplos identificam-se com os processos mais utilizados pelos alunos e vão ao encontro do que é referido em diversos estudos (e.g. Eisenberg and Dreyfus, 1991; Presmeg, 2014), confirmando-se neste caso que a maioria dos alunos, quando tem hipótese de escolher o processo de resolução de uma tarefa, não opta pela via da visualização, preferindo os métodos algébricos, e encaixando-se assim na categoria dos *não visuais*.

Os exemplos 2 e 3 mostram que os problemas podem ser resolvidos por vias mais tradicionais – que são as que os alunos preferem; contudo, verifica-se a existência de algumas resoluções que envolvem a experiência Aha. Na verdade, tanto num como noutro caso a estratégia *procurar ver* permite uma abordagem flexível ao problema que conduz a uma solução muito mais concisa e elegante (LILJEDAHL, 2005).

Considerações finais

Embora alguns problemas possam ser resolvidos de forma eficiente usando tanto uma abordagem visual como uma não visual (e.g. Eisenberg & Dreyfus, 1989; Presmeg, 1986), teremos de ter em conta, em cada caso, o tipo de problema, a complexidade, a novidade, o conhecimento matemático envolvido, para compreender cabalmente a razão pela qual cada pessoa resolve um problema de uma forma particular.

Verificou-se que os alunos que usam estratégias visuais fazem-no normalmente depois de uma maior análise e reflexão sobre o problema, e até, nalguns casos, como segunda via de resolução que descobrem posteriormente, como experiência Aha, e consideram mais bonita ou elegante. Este motivo vem reforçar uma abordagem, já por nós utilizada, que consiste em solicitar aos alunos a apresentação de mais do que uma resolução.

Podemos inferir que as estratégias visuais, em certas ocasiões, são eficientes no sentido de que ajudam o solucionador na organização e compreensão mais profunda das questões que se colocam com a tarefa e da própria estrutura matemática subjacente ao problema. Em tais casos, o processamento visual torna-se uma componente importante do processo de resolução de problemas, particularmente quando o problema exige ou aconselha a identificação de componentes e a sua reformulação num todo diferente. O ser capaz de ver os dados de outro modo, reorganizando-os de maneira pessoal, manifesta pensamento flexível e original, caraterísticas da criatividade. Deste modo, podemos afirmar que as abordagens que recorrem a representações visuais suscitam o desenvolvimento do pensamento criativo (Presmeg, 2014).

O nosso trabalho tem incidido, numa primeira fase, sobretudo em alunos com um percurso escolar avançado, contribuindo para que não optem por processos visuais, uma vez que durante o seu percurso de aprendizagem este tipo de abordagem não era valorizado pelos professores. É nossa convicção que, com alunos mais novos sem esta marca de escolarização e com um ensino que recorra a tarefas em que sejam postas em evidência as potencialidades desta abordagem, os alunos poderão recorrer a estas estratégias de uma forma mais sistemática, colhendo frutos a nível do desenvolvimento do espírito crítico e da criatividade. Na verdade, os professores têm um papel determinante na influência das escolhas dos alunos em termos de abordagens de resolução de problemas.

Referências

ARCAVI, Abraham. The role of visual representations in the learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics, 52**, 215-241, 2003.

TÜNDE, Berta. Space perception abilities (and space geometrical problem solving) in a group of 3rd year university teacher students. **Promat 2005 Conference Proceedings**, 2005, pp. 1-16.

BRANCHINI, Erika; SAVARDI, Hugo; BIANCHI, Ivana. Productive Thinking: The Role of Perception and Perceiving Opposition. **Gestalt Theory, Vol. 37**, No.1, 7-24, 2015.

CAI, Jinfa & LESTER, Frank. Why is teaching with problem solving important to student learning **Research Brief, 14,** 1-6, 2010.

CLEMENTS, MA; DEL CAMPO, Gina. Linking verbal knowledge, visual images, and episodes for mathematical learning. **Focus on learning problems in mathematics, 11** (1-2), 25-33,1989.

EISENBERG, Ted; DREYFUS, Tommy. On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann and S. Cunningham (Eds.), **Visualization inTeaching and Learning Mathematics**. Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 1991, pp. 25-37.

FUJITA, Taro; JONES, Keith. The Bridge between Practical and Deductive Geometry: developing the "geometrical eye". In A. D. Cockburn and E. Nardi (Eds.), **Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, **Vol 2,** pp.384-391. UEA, UK, 2002.

GARDNER, Martin. **Ah, descobri!** Lisboa: Gradiva, 1990.

GARDNER, Martin. **Ah, apanhei-te!** Lisboa: Gradiva, 1993.

GUZMÁN, Miguel. **Aventuras matemáticas.** Lisboa: Gradiva, 1990.

KRUTETSKII, Vadim. **The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.** Chicago, University of Chicago Press, 1976.

LEIKIN, Rosa. Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman and B. Koichu (Eds.), **Creativity in mathematics and the education of gifted students** (pp. 129-145). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers, 2009.

LILJEDAHL, Peter. Mathematical discovery and affect: the effect of AHA! experiences on undergraduate mathematics students. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 36**, Nos. 2–3, 2005, 219–235.

LOWRIE, Tom; CLEMENTS, MA. Visual and nonvisual processes in Grade 6 students' mathematical problem solving. **Journal of Research in Childhood Education, 16(1),** 71-97, 2001.

NCTM. **Principles to actions: ensuring mathematical success for all.** Reston: NCTM, 2015.

POLYA, George. **How to solve it.** Princeton, NJ: Princeton University Press, 1945.

PRESMEG, Norma. Visualization in high school mathematics. **For the learning of mathematics, 6(3)**, 42-46, 1986.

PRESMEG, Norma. Creative advantages of visual solutions to some non-routine mathematical problems. In Carreira S., Amado, N., Jones, K., & Jacinto, H. (Eds.), **Proceedings of the Problem@Web International Conference: Technology, Creativity**

and Affect in mathematical problem solving (pp. 156-167). Faro, Portugal: Universidade do Algarve, 2014.

SCHOENFELD, Alan. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), **Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics** (pp. 334-370). New York, NY: Macmillan Publishing Co, 1992.

STEIN, Mary Key; LANE, Suzanne. Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. **Educational Research and Evaluation, 2(1)**, 50-80, 1996.

VALE, Isabel; PIMENTEL, Teresa. Resolução de Problemas. Em Pedro Palhares (Coord.), **Elementos de Matemática para professores do ensino básico** (pp.7-51). Lisboa: Lidel, 2004.

VALE, Isabel; PIMENTEL, Teresa. Raciocinar com padrões figurativos. In A. Domingos, I. Vale, M. Saraiva, M. Rodrigues, M.C. Costa & R. Ferreira (Eds.), **Investigação em Educação Matemática 2013: Raciocínio Matemático** (pp. 205-222). Penhas da Saúde: SPIEM, 2013.

VALE, Isabel; BARBOSA, Ana; PIMENTEL, Teresa. Teaching and learning mathematics for creativity through challenging tasks. In Carreira S., Amado, N., Jones, K., & Jacinto, H. (Eds.), **Proceedings of the Problem@Web International Conference: Technology, Creativity and Affect in mathematical problem solving** (pp. 335-336). Faro, Portugal: Universidade do Algarve, 2014.

WERTHEIMER, Max. **Productive thinking.** New York and Evanston: Harper & Row Publishers, 1959.

Isabel Vale & Teresa Pimentel
Educação e Formação de Professores – Escola Superior de Educação – IPVC–- Portugal

E-mail: isabel.vale@ese.ipvc.pt
terpimentel@gmail.com

A Influência da Leitura na Resolução de Problemas: Questões de sentidos, significados, interesses e motivações

The Influence of Reading on 'Problem Solving': Questions of meanings, meanings, interests and motivations

Lourdes de la Rosa Onuchic
Universidade Estadual Paulista - UNESP - Brasil

Luiz Carlos Leal Junior
Instituto Federal de São Paulo - IFSP - Brasil

RESUMO

Esta investigação tem por objetivo trabalhar questões a respeito de signos, de sentidos e de significados que perpassam as práticas de ensino e de aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. Trata-se de uma pesquisa qualitativa sobre uma proposta a respeito dos discursos nos processos de leitura de problemas. Discorreremos sobre o trabalho com os signos, a produção de sentido e as significações que emergem dessa prática, bem como a influência da leitura enquanto uma atividade constituinte.

Palavras-chave: Resolução de Problemas, Sentido, Significado, Leitura.

ABSTRACT

This research aims to address questions regarding signs, senses and meanings that underlie the practices of teaching and learning of mathematics through the 'Problem Solving'. This is a qualitative research on a proposal regarding the discourses in problems reading processes. Will discuss the work with the signs, the production of senses and the meanings that emerge from this practice as well as the influence of reading as a constituent activity.

Key-words: 'Problem Solving', Sense, Meaning, Reading.

Introdução

O termo Resolução de Problemas tem sido utilizado, no meio acadêmico, para caracterizar metodologias e práticas de ensino de Matemática. Os sentidos dessa terminologia, segundo Ernest (1992), baseiam-se nas crenças de professores de matemática sobre uma metodologia diferenciada. Há, no cenário nacional, três sentidos que se destacam, quais sejam metodologia para resolver problemas, teorizar sobre resolução de problemas e ensinar através da resolução de Problemas. Não nos estenderemos neste trabalho sobre os dois primeiros sentidos, mas informamos que nos dedicaremos a estudar este último sentido, ou seja, aquele em que a processualidade do ensino e da aprendizagem ocorra através da resolução de problemas. Para um leitor interessado nos outros sentidos desse termo aconselhamos a leitura de Leal Junior e Onuchic (2016). De partida, nos dedicaremos a questões de signo, sentido e significado, que podem ser trabalhados na Resolução de Problemas amparados por alguns teóricos como Vygotsky e Vergnaud.

Vygotsky (2008) trata a questão do sentido e do significado para poder trabalhar a relação extremamente estreita entre pensamento e linguagem. Outrossim, faz-se necessário nos atentarmos sobre o que os intercessores desse trabalho propõem e entendem por sentido e significado, palavras essas tão utilizadas popular e academicamente como sinônimas. Luria (1987), quando se dedicou a estudos linguísticos, acrescentou à obra do primeiro, que o significado está orientado historicamente no interior de um sistema de relações formado objetivamente (que corresponde e se relaciona com o signo) (VYGOTSKY, 2008; LURIA, 1987, p. 45).

Por sua vez, o termo sentido se submete ao contexto em que uma palavra ou expressão está sendo empregada. Vygotsky propõe que o sentido trata de uma atividade consciente na processualidade da significação e da cultura, uma vez que:

> o sentido de uma palavra é a soma de todos os fatos psicológicos que ela desperta em nossa consciência. Assim, o sentido é sempre uma formação dinâmica, fluida, complexa, que tem várias zonas de estabilidade variada. O significado é apenas uma dessas zonas do sentido que a palavra adquire no contexto de algum discurso e, ademais, uma zona mais estável, uniforme e exata. (VIGOTSKI, 2001, p. 465).

A significação, na perspectiva da Resolução de Problemas, integra as concepções de sentido, o qual é produzido por meio das práticas sociais (sociointeracionistas ou sócio-construtivistas), através da articulação dialética do contexto histórico e cultural, na composição do mundo e da experiência real do sujeito com os objetos. Segundo Smolka (2004),

> Nesse quadro conceitual, opera-se uma passagem da representação à significação, o que implica que a formação de imagens é afetada e permeada por signos e sentidos socialmente construídos, ou seja, que aquilo que se produziu nas relações, se estabilizou e foi acordado entre as pessoas, isto é, deixou marcas que podem persistir e perdurar, de alguma forma, não só nos indivíduos, mas também nas relações com e entre outras pessoas (Ibidem, p. 41).

Para este autor a diferença entre os termos sentido e significado é arcaica e dialógica, uma vez que o sentido se dá por processos psicológicos (processos mentais superiores) que são subjetivos e, que, tem forte influência na conceitualização de significado, a qual é a forma mais institucionalizada e   dentre as zonas do sentido. A significação é necessária, mas não suficiente, à representação. Esta, por sua vez, é percebida como uma possibilidade de visualização de conceitos, de ideias e de pensamentos, os quais são habilidades restritas a cada sujeito, quando de seu relacionamento com os signos e na prática da linguagem. Embora a produção de sentidos e a negociação de significados ocorram no nível social através de atividades e cunho interacionistas. Moysés (2009) propõe um exemplo, que achamos muito propício, e que vem corroborar com nossa teorização.

> Em casa a criança habitua-se desde pequena a vestir roupa. Se no início "roupa" se refere a umas poucas peças de vestuário, com o passar do tempo passa a abarcar peças antes nunca vistas. Assim, graças à possibilidade de generalização que oferece a palavra, a criança ao se defrontar, por exemplo, com um espartilho ou uma anágua de babados, ainda que seja pela primeira vez, provavelmente lhes atribuirá o significado de "roupa". [...] Essa mesma palavra, no entanto, poderá ser utilizada em diferentes sentidos. A jovem de classe média-alta quando reclama que "não tem roupa para ir à festa" quer dizer algo muito diferente do pobre que diz que "não tem roupa para vestir"; a lavadeira que diz que "ainda não entregou a roupa da semana" está pensando em algo muito diferente da madame que afirma: "vi logo que era gente fina pela roupa". Entretanto, o significado da palavra "roupa" continua inalterado. (MOYSÉS, 2009, p. 39-40, Grifos do autor).

Em qualquer contexto, de ensino e de aprendizagem, ressalta-se a importância da produção de sentidos e significação dos conceitos. Aqui, o foco dessa tessitura dar-se-á na Educação Matemática, que agencia o ensino de Matemática. Então, algumas perguntas são recorrentes: É a Matemática algo que requeira, de forma enfática, a produção de sentidos e significações de seus objetos? Qual o nosso olhar sobre a Matemática?

A esse respeito, quando tentamos olhar sob o prisma da ciência, pensamos, com Van de Walle (2001, p.16) ao tratar este tema, que afirma: "A Matemática é uma ciência de coisas que têm um padrão de regularidade e uma ordem lógica. Descobrir e explorar essa regularidade ou essa ordem e, então, dar sentido a ela é o que significa 'fazer matemática'". Então, para desenvolvermos nosso estudo, precisamos olhar para a Matemática como um movimento potencializador e agenciador da vida de professores e alunos. Isto é, precisamos olhá-la com as lentes da Educação matemática. Portanto, concordamos com Bicudo & Garnica (2011), quando dizem que a Matemática pode ser percebida como uma prática científica (p. 61) e uma linguagem (p. 63), por onde

> [...] possa adquirir significados cada vez mais profundos na medida em que também seja olhado – atenta, crítica e reflexivamente – sob várias perspectivas, sempre e cada vez mais sujeitos a novos pontos de vista. A multiplicidade de perspectivas enriquece significativamente o objeto evidenciado do mesmo modo como a multiplicidade e a variedade de temas a serem enfocados são necessárias para que um espectro mais global da Educação Matemática seja visualizado, dando-se à compreensão. (Ibidem, p. 59).

A Resolução de Problemas que, por sua vez, pode ser concebida como uma prática científica e estruturadora da linguagem matemática, opera transversalmente pelo Nível de Desenvolvimento Real -NDR, pela Zona de Desenvolvimento Proximal -ZDP e pelo Nível de Desenvolvimento Potencial -NDP e, também, implica em um trabalho mais assertivo no ensino, na aprendizagem e no desenvolvimento cognitivo. Haja vista que, o bom ensino

> [...] é aquele pautado pela transmissão do que o estudante não conseguirá descobrir sozinho e pela conceituação de imitação, que vem a ser o cerne dos conceitos vygotskyanos de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), Nível de Desenvolvimento Real (NDR) e Nível de Desenvolvimento Potencial (NDP). A Zona de Desenvolvimento Proximal, em termos da Resolução de Problemas, é o *locus* da cognição, onde as atividades encontram atuação e operação na promoção da aprendizagem matemática, sendo que essa aprendizagem advém das relações do ensino, do desenvolvimento cognitivo na idade escolar e da difusão do *conhecimento socialmente existente*. Assim, a ZDP, comumente definida pela diferença entre o NDP e o NDR, engloba tudo aquilo que o sujeito não consegue realizar sozinho, mas que terá êxito ao obter o auxílio de alguém que o saiba fazer. Portanto, quando num curso propõem-se problemas aos estudantes, deve-se refletir nos propósitos atribuídos aos mesmos e nos objetivos dos estudantes, dado que se busca atuar em suas ZDP's. (LEAL JUNIOR; ONUCHIC, 2015, p. 960-61, grifos dos autores).

Sentidos e Significados na Resolução de Problemas como um Campo Conceitual

Nesta seção, evocamos algumas considerações de G. Vergnaud, quando propõe estudos sobre a Teoria dos Campos Conceituais. Para Vergnaud,

> [...] o saber se forma a partir de problemas para resolver, quer dizer, de situações para dominar. [...] Por problema é preciso entender, no sentido amplo que lhe atribui o psicólogo, toda situação na qual é preciso descobrir relações, desenvolver atividades de exploração, de hipótese e de verificação, para produzir uma resolução (VERGNAUD, 1990, p. 52).

Vergnaud considera que um campo conceitual é composto por situações e atividades, onde seu matiz progressivo requer mais de um conceito, princípios ou procedimentos amplamente conectados e, que, o cerne dos processos cognitivos é o processo de conceitualização do real, que não pode ser trabalhado por modelos simplistas. Ele toma o conhecimento como algo composto por campos conceituais, que são acessíveis aos sujeitos por intermeio da experiência, vivência e aprendizagem (MOREIRA, 2002; VERGNAUD, 1998). Esse Campo Conceitual perpassa o estabelecimento e a potencialização da construção do conhecimento, em que a constituição da aprendizagem dá-se como "um conjunto heterogêneo e não-formal de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos operações de/em pensamento, interconectados e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição." (VERGNAUD, 1982, p. 40). Tal situação torna-se complexa, uma vez que, para Magina *et al.* (2001), ela nos aparece diante da multiplicidade das salas de aulas, pois "[...] os conceitos matemáticos traçam seus sentidos a partir de uma variedade de situações e que cada situação normalmente não pode ser analisada com a ajuda de um único conceito, mas, ao contrário, ela requer vários deles." (Ibdem, p. 4).

Sentido e Significado na Resolução de Problemas

Consoante Barros *et al*. (2009, p. 179), os processos que abordam signos, sentidos e significados são imprescindíveis para nossa vida em sociedade, pois "abrem-se vias para que se admita a polissemia da linguagem e, consequentemente, para que se pense em múltiplas construções de sentidos. [...] integram-se dimensões cognitivas e afetivas, bem como processos coletivos e individuais".

Na esteira dessas considerações, destaca-se Resolução de Problemas, enquanto uma Prática Sociointeracionista, que opera na análise e na produção de sentidos, ao passo que, pensando com Vygotsky (1987, p. 129), as palavras e enunciados, que compõem os problemas, não se correspondem recíproca e equivalentemente ao pensamento. Mas, o processo que caminha indiretamente do pensamento para a palavra passa pela produção de significado ou significação, o que se torna patente, nesta pesquisa, quando pensamos que os problemas, em sua composição, trazem signos, enunciados e discursos, que devem engendrar sentido e significado.

No campo de estudos da Resolução de Problemas que, segundo Leal Junior e Onuchic (2015), participa do pensar filosófico no movimento de ação/reflexão/ação, pode-se inferir que a reflexão é sempre crítica e a ação, reflexiva, o que implica em mudança de comportamento diante do problema, da percepção e da consciência que, sob um prisma mais geral, se traduz na constituição de um pensamento mais reflexivo e ativo com ampliação das atitudes e conscientização do sujeito em prol de sua aprendizagem.

Quando pensamos a Resolução de Problemas como algo efetivamente prático, temos que pensar em toda sua composição. Os problemas devem ser inventados de modo a chamar os alunos à sua resolução e a construir seu conhecimento através dele. Cabe ao professor, o exercício de conhecer o cenário onde atuará bem como seus atores. Com isso buscará subsídios para criar sentidos e conceder significações aos conceitos envolvidos nos problemas. Carraher, Carraher e Schliemann (1988) consideram que os conhecimentos curricular e extracurricular devam estar em consonância e que o professor deveria buscar meios de articular, nas aulas de Matemática, o conhecimento do cotidiano de seus alunos.

> O problema perde o significado porque a resolução de problemas na escola tem objetivos que diferem daqueles que nos movem para resolver problemas de matemática fora da sala de aula. Perde o significado também porque o que interessa à professora não é o esforço de resolução do problema por um aluno, mas a aplicação de uma fórmula, de um algoritmo, de uma operação, predeterminados pelo capítulo em que o problema se insere ou pela série escolar que a criança frequenta (Ibidem, p. 22).

Todavia trabalhos, como Carraher, Carraher e Schliemann (1988) e Leal Junior e Onuchic (2015), salientam que o contexto em que os alunos vivem, seus anseios, suas vivências e experiências, devem ser trazidos para sala de aula. Pois aí reside um grande potencializador da aprendizagem, posto que, os alunos conseguem perceber sentido e significar o conhecimento matemático e o ambiente escolar. Pois,

> Quando a experiência diária é combinada com a experiência escolar é que os melhores resultados são obtidos. Isso não significa que algoritmos, fórmulas e modelos simbólicos devam ser banidos da escola, mas que a educação matemática deve promover oportunidades para que esses modelos sejam relacionados com experiências funcionais que lhes propicie significado. (CARRAHER; CARRAHER, SCHLIEMANN, 1988, p. 99).

Leitura e Resolução de Problemas

Visando a um ensino pautado pela Resolução de Problemas, Onuchic *et al*. (2014) apresentaram um roteiro para auxiliar os professores na elaboração do planejamento de suas aulas. Tal roteiro consiste de dez passos e com eles não se pretende restringir a atividade em classe, mas fornecer subsídios para a atuação de professor e de estudantes. São eles: "(1) Proposição do problema, (2) leitura individual, (3) leitura em conjunto, (4) resolução do problema, (5) observar e incentivar, (6) registro das resoluções na lousa, (7) plenária, (8) busca do consenso, (9) formalização do conteúdo, (10) proposição e resolução de novos problemas." (Idem, Ibidem, p. 45).

No aporte deste trabalho, nos dedicaremos a discutir os passos[1] (2), (3) e (4), onde acreditamos que as questões relacionadas a signo, sentido e significado tomam destaque. Embora reconheçamos que tais questões estejam presentes em todos os dez passos, daremos destaque a esses três porque é neles e por meio deles que as ideias iniciais do problema são apreendidas através dos processos leitura e de resolução do problema. É, evidentemente,

1 Um estudo sobre o 1º passo, ou a invenção dos problemas, foi realizado por Leal Junior e Onuchic (2015), onde “A invenção, na perspectiva da Resolução de Problemas, tem seu início na concepção do problema, onde o professor o inventa com base no construto sócio-histórico-cultural para estimular a aprendizagem dos estudantes e subverter o modelo representacionalista e tradicional de ensino. ” (p. 959-60).

através da leitura (individual e/ou conjunta) que os alunos se tornam sujeitos leitores e deparam-se com os problemas de matemática. Onde entram em cena seus processos mentais, como propuseram Zuffi e Onuchic (2007):

> […] a prática da Resolução de Problemas, como uma tarefa intelectual exigente, facilita o acionamento da metacognição, dos processos de autorregulação das ações cognitivas e caracteriza-se como importante forma para o desenvolvimento dos processos mentais superiores. (Ibidem, p. 92).

De partida, citamos Biasioli (2007), buscando um deslocamento conceitual para as aulas de Matemática, que

> O leitor é um sujeito a quem se deve conduzir e convencer. [...] além de já não estarem habituados ao universo da leitura fora daquilo que lhe é imposto pela escola, hoje em dia são muito mais atraídos pelos jogos virtuais, pela internet e por tudo que estiver relacionado a entretenimento vinculado à tecnologia. (p. 95).

A leitura é uma atividade essencial quando se decide pela prática da Resolução de Problemas. É, através dela, que o aluno se envolve com o problema, ou não. Por isso tratamos da leitura reflexiva e sempre crítica, onde os alunos conseguem entender o que lhes fora proposto e inferir o que pode ser alcançado pela resolução do problema, associando seus conhecimentos prévios e visualizando os conceitos relacionados. Para Zilberman (2008), com quem concordamos, a leitura avança ao longo da decodificação, uma vez que está idiossincrática e intrinsecamente relacionada à produção de sentidos, pois "depende de se conceber a leitura não como resultado satisfatório do processo de letramento e decodificação de matéria escrita, mas como atividade propiciadora de uma experiência única com o texto." (p. 17). Trata-se de uma prática que depende de inferências, contexto, conhecimentos prévios e interação. Por isso a importância de o professor inventar os problemas considerando as ZDP criadas, ou seja, conhecendo o que os alunos já têm de conhecimentos *a priori* (ou prévios), nas potencialidades, seus contextos e a motivação para o problema, e isso porque se busca despertar o interesse dos alunos pelo problema.

Sendo a leitura algo relativo e subjetivo à concepção de mundo de alunos/leitores, quando realizada, com interesse ou de forma motivada, tornará a prática da Resolução de Problemas algo agradável e potencializador. Todavia, se a leitura, tanto individual quanto em grupo, for realizada de forma desmotivada, essa prática perderá seu efeito na construção do conhecimento e na constituição da aprendizagem. Contudo, pode-se destacar a estreita relação da leitura com os sentidos e significados no âmbito da Resolução de Problemas, pois ela é o fator essencial de percepção dos conceitos trazidos aos alunos através dos problemas. São percebidos, no meio acadêmico, trabalhos que indicam que os alunos, cada vez menos estão envolvidos com a leitura (CAMELO, 2009; ZILBERMAN, 2012; PAIVA; OLIVEIRA, 2010). Em Consequência disso, tem-se alunos cada vez menos envolvidos com uma construção ativa do conhecimento, onde deveriam ser coautores de sua aprendizagem, e que sua compreensão de mundo, por meio da leitura, ficaria à mercê de outras atividades menos participativas.

> O bom leitor é aquele que, envolvido numa relação de interação com a obra [...], encontra significado quando lê procura compreender o texto e relaciona com o mundo à sua volta, construindo e elaborando novos significados do que foi lido. Só assim a leitura pode contribuir de forma significativa numa sociedade letrada, no exercício da cidadania e no desenvolvimento intelectual. (PAIVA; OLIVEIRA, 2010, p. 22).

De acordo com Cabral (1986), o processo de leitura envolve quatro habilidades, as quais trazemos da visão psicolinguística para a Resolução de Problemas, quais sejam (1) decodificação; (2) Compreensão; (3) Interpretação; e (4) retenção. A seguir expomos como essas habilidades influenciam a Resolução de Problemas podendo contribuir, como critérios para os professores, quando da invenção dos problemas, buscando uma linguagem acessível aos alunos e que, através de suas leituras, possam ser compreendidos. Tais habilidades consistem de atividades metacognitivas e autorreguladoras que acontecem de forma interligada.

Com base em Cabral (1986), Menegassi (1995), Nantes (2009, 2015) e Schoenfeld (2014), propomos a seguinte tabela com habilidades desenvolvidas na e pela leitura.

Quadro 1: Habilidades de leitura na Resolução de Problemas

Habilidade	**Caracterização**
Decodificação	É a etapa em que o leitor decodifica o signo no problema. Para tanto, é preciso que o signo utilizado no problema seja devidamente ligado ao seu significado. Esta habilidade também está estritamente relacionada à produção de sentidos, o que implicará no estabelecimento da segunda habilidade, a compreensão. Ela prescinde de conhecimentos *a priori* para que possa acontecer. Caso contrário o aluno não conseguirá sequer reconhecer os signos dos problemas, quiçá produzir sentido ou (res)significá-los.
Compreensão	A compreensão está relacionada ao reconhecimento e à captação dos principais tópicos do problema; ao reconhecimento das regras das linguagens vernácula e matemática usadas no problema; o reconhecimento das regras de enunciação e sintáticas; a apreensão de significações envolvidas no problema; e à capacidade de inferenciar. Passa-se a construir conceitos e conhecimentos a partir de processamentos de informações e de conexões com as ideias que se tem *a priori*. “Usamos as ideias que já temos para a construção de uma nova ideia, desenvolvendo no processo uma rede de conexões entre as ideias, as quais são influenciadas pelos sentidos e pelas significações adjacentes. Quanto mais ideias sejam usadas e quanto mais conexões sejam feitas, melhor será a compreensão.” (VAN DE WALLE, 2001, p. 27). O que está idiossincraticamente relacionado com conceitos de construção do conhecimento e a relação que se estabelece com o problema. De acordo com Carraher (1991), a construção do conhecimento dependerá do envolvimento e da compreensão que o aluno terá do enunciado do problema, e que ele conheça todas as expressões verbais utilizadas no problema. Ainda nessa mesma prática, ele terá que interpretar os dados verbais apresentados, e passá-los para dados concretos do seu cotidiano. Enfim, o estudante carecerá de um entendimento das relações lógicas do problema, para então relacionar os constituintes do problema, de modo a operacionalizar e resolver o mesmo. O que corrobora o desenvolvimento de competências e capacidades de resolução de problemas de Matemática.
Interpretação	É imprescindível que uma compreensão do problema aconteça para que haja uma interpretação do mesmo. Isso porque a compreensão prescinde dos conhecimentos *a priori* do sujeito, os quais interagem e interligam-se aos conceitos e conteúdos constituintes dos problemas. Ao fazer as conexões desses conhecimentos já apreendidos com os significados do problema, o sujeito amplia seus conhecimentos, e torna-se capaz de reformular seus esquemas sobre a temática do problema. É na interpretação que o sujeito leitor torna-se crítico sobre o problema. A interpretação pode ser direcionada através do trabalho de mediação. Ela é uma habilidade subjetiva e cada leitor retirará, do problema, percepções

	diferenciadas, pois ela dependerá idiossincraticamente da experiência que este sujeito tem/teve no mundo. É algo que dependerá dos objetivos, tanto do problema (proposto pelo professor) quanto do aluno/leitor. O que fará com que este último acione as estratégias mais adequadas para a resolução do problema.
Retenção	Ela é a apreensão do conhecimento sobre determinados conceitos e que foi construído através de problemas relacionados. Esta habilidade advém após a interpretação de conceitos. A Retenção acontece em dois níveis: a partir da compreensão e após a interpretação. No primeiro caso, a compreensão dos problemas permite a retenção tanto da temática quanto dos conceitos mais significativos. No segundo, tem-se um processo mais complexo, uma vez que para interpretar um problema é necessário sua compreensão de forma mais profícua. Ela possibilita aos alunos a resolução dos problemas a partir do que conseguiram apreender na leitura sem ser preciso retornar ao texto.

Fonte: Os autores

Existe também uma outra habilidade essencial à leitura, mas que não a colocamos, na tabela, por considerar que a mesma não obedece a uma ordem hierárquica com as outras quatro, a **tradução**. A tradução é uma habilidade que opera transversalmente sobre as outras habilidades da tabela acima, uma vez que ela se dá na passagem da linguagem vernácula, na qual os problemas são propostos, para a linguagem matemática, que é aquela em que se dará a resolução do problema. Ela pode acontecer a qualquer momento do processo de leitura do problema matemático. Desde a decodificação até a retenção ela pode tomar forma, sendo necessária que ela ocorra para a resolução de problemas.

A leitura é o primeiro momento problematizador na vida do sujeito leitor. É onde o aluno consegue, ou não, envolver-se com o problema. Caso o problema esteja fora do contexto do aluno, o mesmo não conseguirá passar pelas quatro habilidades e, consequentemente, não logrará êxito na sua resolução. Se o aluno não possuir conhecimentos *a priori* sobre os conceitos evocados no problema, não conseguirá iniciar a decodificação, muito menos compreenderá, interpretará ou reterá o que se propôs no problema. A leitura é uma habilidade que se desenvolve com o hábito. Alunos que têm esse hábito desenvolvido, têm mais facilidade de entender as propostas que lhe são feitas através de problemas, e podem tornar-se bons *resolvedores de problemas*[2].

As leituras, individual e conjunta, consistem em processos de subjetivação, onde os alunos internalizam as ideias como entes potencializadores de uma aprendizagem matemática. Tais leituras dependem da prática científica e da linguagem em que esse problema é proposto, trabalhado ou inventado. As negociações de significado e produção de sentido se dão na leitura em grupo/conjunto, onde são discutidas por meio da interação entre os sujeitos que já conseguiram, através da leitura individual, identificar e reter os signos, os sentidos e os significados relacionados aos seus conceitos *a priori.*

Interesse e Motivação: Um sentido da Resolução de Problemas

Sendo os problemas os condutores aos conceitos matemáticos, concordamos com Onuchic e Allevato (2011, p. 81) que entendem por problema "tudo aquilo que não se sabe, mas que se está interessado em fazer". Concordamos também com Leal Junior e Onuchic

2 Cf Schoenfeld (2014) e Sweller (1988).

(2015) quando dizem que, no âmbito do trabalho docente na Resolução de Problemas[3],

> Cabe ao professor, motivar os estudantes a participarem das resoluções dos problemas e de entenderem os conceitos neles contidos e os que se quer alcançar. Caso contrário, não será possível a promoção da aprendizagem, por se partir do pressuposto de que os estudantes não o sabem fazer, mas precisam do fator motivacional para se interessarem em fazê-lo. (Ibidem, p. 963).

É necessário refletir-se sobre a questão dual: interesse *versus* motivação, onde há uma relação de causa e efeito entre essas palavras, mas que se diferenciam em suas definições, visto que interesse é algo subjetivo e que pode ser despertado em nós por motivos, causas, razões ou circunstâncias que não temos controle. Já, motivação é um ato de promoção de interesse, de fornecer razões justificadas para que algo seja interessante (HOUAISS; VILLAR; FRANCO, 2009). A diferenciação entre interesse e motivação reside nas coisas que interessam, que prendem a atenção, as quais nem sempre implicam em ação sobre o fenômeno ou o objeto desejado, a ponto de efetivar uma ação ou despertar alguma intencionalidade que reifique um movimento a favor de nossa vontade. O interesse está ligado à atenção, no sentido de alcançar algo que se deseja. O motivo, por sua vez, se faz dependendo da força para vencer as resistências que dificultam a execução do ato.

Segundo Bzuneck (2000) a questão de interesse e motivação torna-se mais relevante

> Quando se considera o contexto específico de sala de aula, as atividades do aluno, para cuja execução e persistência deve estar motivado, têm características peculiares que as diferenciam de outras atividades humanas igualmente dependentes de motivação, como esporte, lazer, brinquedo, ou trabalho profissional (BZUNECK, 2000, p. 10).

A percepção do interesse e a motivação, que o professor acredita trazer às suas aulas, tornam-se relativas do ponto de vista de outros atores do cenário educacional. Moraes e Varela (2007) nos trazem uma reflexão: Quantas vezes o professor prepara uma atividade que ele achou que prenderia a atenção de seus alunos, que os levaria adiante, que os faria buscar informações que eram necessárias, porém, ao executá-la, não conseguiu o envolvimento que esperava deles (p. 7).

Isso por que acredita-se que

> A motivação do aluno, portanto, está relacionada com trabalho mental situado no contexto específico das salas de aula. Surge daí a conclusão de que seu estudo não pode restringir-se à aplicação direta dos princípios gerais da motivação humana, mas deve contemplar e integrar os componentes próprios de seu contexto (BROPHY, 1983 apud BZUNECK, 2000, p. 11)

Conforme Pozo (2002), com relação à motivação dos alunos, “normalmente, não é que eles não estejam motivados, que não se movam em absoluto. Mas, sim, que se movam para

---

3 O termo Resolução de Problemas (iniciado por letras maiúsculas) refere-se à prática metodológica. Por outro lado, o termo resolução de problemas (iniciado por letras minúsculas) refere-se ao ato de resolver problemas.

coisas diferentes e em direções diferentes daquelas pretendidas por seus professores” (p. 139). Nesse sentido, Leal Junior e Onuchic (2015) propõem que

> [...] não cabe única e exclusivamente ao docente lutar contra esse gradiente, mas sim propor *atividades criadoras* que sejam, para os alunos, tão refratárias quanto aquelas que os afastam, não dos objetivos do professor, mas de sua participação ativa na construção de seu conhecimento, isso por que, essa problemática não diz respeito a somente um ator desse cenário, mas a todos que o compõe. (Ibidem, p. 971).

É comum os alunos não conseguirem, de início, perceber os valores das atividades propostas pelo docente e, geralmente, “não conseguem compreender a relação existente entre a aprendizagem e uma aspiração de valor para a sua vida. O que faz com que eles não se envolvam no trabalho” (MORAES; VARELA, 2007, p. 7). Tal envolvimento está relacionado tanto ao interesse quanto à motivação. É onde se percebe a necessidade e a influência da leitura dos problemas, bem como a inferência de suas ideias.

Tornar o ambiente escolar um ambiente participativo, colaborativo e cooperativo, pode trazer contribuições ao despertar do interesse dos estudantes, bem como motivar o desenvolvimento de outras oportunidades e de outros movimentos, diferentes daqueles tradicionais e desestimulantes, haja vista que, os alunos de hoje, não se movem mais como os alunos de outrora. Movimentos esses que colocam o aluno na linha de frente do processo de aprender, e o docente como agenciador pelo ensinar. Dessa forma, tanto a autorregulação quanto a metacognição começam a agir no senso de pertencimento do aluno com aquele grupo. É o que aponta para a motivação intrínseca, que “é compreendida como sendo uma propensão inata e natural dos seres humanos para envolver o interesse individual e exercitar suas capacidades, buscando e alcançando desafios ótimos” (BUROCHOVITCH; BZUNECK, 2004, p. 39).

Quando o professor se propõe a motivar os alunos, a buscar despertar neles, através do conhecimento que tem sobre o assunto e sobre a turma, seus interesses pela Resolução dos Problemas, deve antes de qualquer coisa, pensar em sua invenção do problema, pensar nas possibilidades de leitura de seus estudantes, pois é, a partir daí, que se dará todo o processo de ensino e de aprendizagem através dessa prática. Outrossim, não é algo que seja garantido para aquele espaço e para aquele tempo, mas que, em um outro momento, aqueles mesmos problemas possam vir a fazer sentido, despertando no aluno algum interesse. Então, o que acontece quando o aluno não está interessado na resolução de um determinado problema? O que pode o professor fazer a esse respeito?

Não pretendemos responder diretamente a essas perguntas, mas, fornecer uma reflexão sobre elas, de modo a repensarmos nossa atuação enquanto docentes na sala de aula e o que nos falta para potencializarmos a aprendizagem através dessa prática.

Linguagem, Sentido e Significado na Resolução de Problemas: Um estudo de caso

Uma atividade prática que vem corroborar com nossa teorização aconteceu em 2014, no Curso Superior de Tecnologia em Automação Industrial na disciplina de Matemática 2, em um Instituto de Ensino Superior no interior do estado de São Paulo, que se refere a conceitos de Álgebra Linear. Nessa prática, podem-se perceber as implicações e os desdobramentos da influência da leitura e da linguagem na produção de sentidos e significações no bojo da Resolução de Problemas. Naquele curso o professor quando de seu trabalho pautado pelo modelo tradicional e enciclopédico de ensino, percebeu na discussão da primeira avaliação que os alunos não conseguiram entender os conceitos trabalhados no conteúdo Espaços vetoriais. Na ocasião da discussão dos resultados da prova, os 32 alunos, que haviam frequentado a quase todas as aulas estavam presentes. Sucedeu-se o seguinte diálogo[4]:

Professor: - *Gostaria de conversar com vocês sobre a avaliação. A única nota que tivemos acima de seis foi 8,0, as trinta e uma demais ficaram abaixo de seis (a nossa média), sem contar que o número de notas 1,0 foi bastante alto (oito alunos). Trabalhei os conteúdos com vocês e sempre perguntei se havia dúvidas, e vocês nunca me passaram nenhum questionamento. Quando eu passei listas de exercícios para vocês fazerem e discutirmos posteriormente, vocês nunca me falaram de dúvidas. Então, o que houve?*
Simone *(representante da turma)***:** - *Pois bem Professor! Já que você perguntou vou falar em nome da classe. Ninguém entendeu nada, exceto o Giles que já é formado em engenharia. O restante, no qual me incluo, não tem a menor noção do que é, nem para que serve esse 'negócio' de Espaços Vetoriais.*
Professor: - *Mas então porque não me falaram isso no momento da aula? Esperaram que se passasse todo esse tempo, não apresentaram nenhuma dúvida, o que me levou a crer que estava tudo bem. Não apareceram nos horários de atendimento e, sempre que eu lhes indagava sobre o conteúdo, o silêncio imperava. E agora?*
Giles: - *Não é porque eu fiz engenharia que eu saiba a matéria. Na verdade não sei pra que serve esse conteúdo (Espaços Vetoriais). Me formei sem precisar disso pra nada. Mas, tentei estudar para essa prova, como tenho feito até o momento. Acho uma matéria extremamente abstrata e sem sentido para nosso curso. Mas, se está na grade, quem somo nós pra questionar?*
Félix: - *Eu, assim como muita gente nesta sala, não tem muito tempo para isso. A maioria aqui é casado e tem família. Trabalha o dia todo e vem pra cá a noite para estudar. Quando chegamos nessa sua aula e na de Matemática 1 (Cálculo 1) ' a gente' fica doido. Porque é só conteúdo abstrato e que não conseguimos ver uma finalidade para nossa formação. Além do mais não dá tempo pra nada.*
Professor: - *Como assim?*
Michel: - *O que ele quis dizer, pelo menos eu acho, é que, 'ao invés da gente' só copiar a matéria e tentar, muitas vezes sem sucesso, resolver a enorme lista de exercícios, poderíamos discutir e conversar mais, e procurar ter mais aplicações, que realmente importem para nossa profissão. E eu sei que você tentava conversar conosco. Nós não nos conhecíamos direito e as tarefas do dia a dia nos impediam de ter uma dedicação satisfatória aqui. Mas, nas aulas, você escreve muito na lousa, não sobre tempo, porque temos que copiar, e pouco tempo para processar a matéria e tirar as dúvidas aqui. Daí, a lista de exercício, por ser muito extensa, além de nos desanimar, era quase impossível de fazer, porque ninguém entendia nada.*
Professor: - *Eu gostaria de deixar claro uma coisa! A aula não depende só de mim. Não estou aqui sozinho. Se vocês não falam e, melhor dizendo, não respondem minhas perguntas e não querem falar, como obrigá-los? Outra coisa, sempre me pus aberto a dialogar com vocês e vocês nunca me informaram desses problemas. Inclusive quando marquei a prova vocês aceitaram passivamente. Se vocês não tomarem tempo para estudar e dedicarem-se aos estudos desse curso, eu não o poderei fazer por vocês. Somente estudando, isso para qualquer disciplina, vocês vão saber o que aprenderam e o que não aprenderam. Quando decidiram fazer o curso, acredito eu, sabiam que isso demandaria tempo e dedicação para estudar. Mas, em uma turma de adultos, esperar que as coisas sejam aprendidas de forma não-participativa é muita ingenuidade. Vou refazer a prova com vocês e para a semana que vem, irei pensar em uma proposta para revertermos essa situação.* (Relatos do professor, 12/04/2014).

Neste trabalho, não nos deteremos a analisar os discursos que ocorreram naquele curso, mas levantaremos questões-chave sobre a decisão de mudança no ensino e um problema que foi elaborado e trabalhado, para potencializar a aprendizagem do conteúdo Espaços Vetoriais. Trabalhamos em cima dos fatos que ocorreram, sem intervir nas percepções que emergiram. Com relação ao diálogo acima, percebemos, por exemplo, que o docente esperava uma postura proativa dos alunos, por acreditar que, estando eles em um curso superior deveriam ser mais autônomos. Por outro lado, a postura extremamente passiva

4 Os nomes que aqui mencionamos são fictícios para preservar a identidade dos alunos.

e pouco comprometida dos alunos é algo que aponta para os reflexos de uma educação deficitária. Quando os alunos disseram que não entendiam nada que estudavam, ficou evidente que suas leituras eram prejudicadas por muitos fatores, mas, dentre eles, destaca-se a falta de conhecimentos prévios para a construção de Espaços Vetoriais.

Esse diálogo aponta para alguns problemas como, por exemplo, a incessante busca por uma compreensão prática dos conceitos abstratos da Matemática por parte dos alunos. É algo que consideramos necessário, porém, para que, quase sempre, o professor não está preparado para fornecer tais aplicações. Isso também aponta para questões intrínsecas à formação do professor de Matemática que, por via de regra, participa de cursos extremamente conceituais e teóricos, como no caso daquele professor que não conseguia fornecer a seus estudantes um sentido para a Matemática em questão. Não nos cabe encontrar culpados diante dessa problemática. Mas, essa vivência suscitou discussões pertinentes e, que, levantamos neste trabalho.

Será que nossos professores de Matemática estão tendo uma boa formação? Será que a docência em cursos tecnológicos pressupõe a necessidade de o docente estar preparado para dar explicações práticas a conceitos abstratos? No caso do diálogo acima, quem tinha razão? É necessário alguém ter razão? E se o docente não souber fornecer aos alunos alguma aplicação prática dos conceitos? Qual a posição dos alunos frente a essa falta de entendimento? Sob nosso prisma, o problema por trás dessas questões é: Qual o sentido e o significado da Matemática que estamos construindo nas salas de aula?

Porém, o que emergiu do primeiro momento, aquele que antecedeu a prova, foi a falta de uma participação efetiva dos alunos e de uma falta de sensibilidade de percepção do docente para com os problemas que perpassavam as atuações de seus alunos. Pois, parece que, como foi relatado, eles não chegam à faculdade como *sacos vazios* em busca de serem preenchidos por conhecimento. Trazem consigo suas vivências e problemas do dia a dia. O que, inegavelmente, tem influência direta na forma como produzem sentido e (res)significam a Matemática que, para eles, deveria ter uma visualização maior e com aplicações que lhes possibilitasse uma associação entre os mundos da escola e o do trabalho. A Resolução de Problemas pôde possibilitar esse novo olhar à Matemática, uma vez que tem, como mote, a construção do conhecimento e a constituição da aprendizagem no seio de práticas sociais, históricas e culturais.

Conforme Vilela (2009)

> Parece que ao levar para a escola um problema do dia a dia, de uma situação vivenciada, portanto, que tem significado, ficaria garantido o significado conceitual correspondente. Essa relação entre os significados nos contextos escolares e da rua traz, portanto, o pressuposto de haver um significado comum nos dois contextos ou, dito de outra forma, um conceito da matemática escolar possuiria um significado único e seus diferentes usos, na rua inclusive, supostamente convergiriam para uma mesma essência. Neste sentido, a matemática da rua poderia acrescentar significado para a matemática escolar. (Ibidem, p. 88).

Ressalta-se que, após essa primeira semana de nossa participação, pudemos inferir que, sobretudo, um dos problemas residia na estruturação dessa disciplina, ou seja, ela estava configurada no primeiro ano desse curso e os alunos ingressantes tinham uma bagagem matemática bastante deficitária. Chegaram ao curso com muito pouco, ou quase nada, de conhecimento de geometria analítica ou, mais especificamente, de vetores. Ressaltamos que essa componente curricular não possui pré-requisitos e seus objetivos são conhecer, aplicar e interpretar conceitos básicos em álgebra linear aplicados à automação. Os conteúdos programáticos dispostos naquela ementa eram: Definição de espaço e subespaço vetorial; definição, construção e operações com matrizes; definições e operações com vetores no plano e no espaço; produto escalar, produto vetorial e vetores ortogonais; combinação linear, dependência e independência linear; transformações lineares; núcleo e imagem de uma transformação linear; definição, classificação e resolução de sistemas de equações lineares; estudo da reta e do plano; matriz de uma transformação linear; operadores lineares; autovalores e autovetores; bases no plano e no espaço; diagonalização de operadores de matrizes.

Não faremos aqui uma análise essencialmente crítica. Todavia, colocamos que, para alunos que têm dificuldade com conceitos básicos de Geometria Analítica e Vetores, ou sequer percebem tais conceitos em sua vida escolar, quando se deparam com conceitos de Espaços Vetoriais em um curso de graduação, o resultado pode ficar comprometido, como foi constatado. Daí, então, percebemos que, embora a situação fosse crítica, um grande problema residia na estruturação curricular dessa componente para esse curso. Chegar a Espaços Vetoriais de maneira abrupta, como foi tentado fazer, comprometeu o trabalho docente, a aprendizagem dos estudantes e a construção de quaisquer conceitos relacionados.

Trabalhar Espaços Vetoriais requer dos estudantes um conceito prévio de vetores, de suas aplicações e conceituações. Sem esses pré-requisitos a construção do conhecimento associado e relacionado não poderá consolidar-se. Pois, os alunos não sabiam o que era um vetor e, no âmbito da Álgebra Linear esse conceito é um campo conceitual. Balizado pelo PPC deste curso, o professor iniciou seu trabalho assumindo que o conceito de vetor já era *a priori* e, iniciou a construção de Espaços Vetoriais e a demonstração de alguns teoremas fundantes. Por outro lado, os alunos sem entender a linguagem usada, não conseguiam produzir sentido e significado para a estrutura em questão, não se manifestando, nem tomando uma postura ativa na construção desse conhecimento, porque a leitura de suas escritas não era eficiente. Pode-se dizer que o diálogo e a linguagem foram negligenciados por todos os atores desse cenário. Não há juízos de verdade a serem destacados aqui. Porém, o reconhecimento de que esse *status quo* carecia urgentemente de um novo rumo foi essencial para nos dedicarmos a este estudo. A postura do docente em reconhecer que algum obstáculo didático aconteceu e dispor-se a buscar, junto aos alunos, a *gênesis* do mesmo foi de vital importância para que uma nova prática tomasse forma.

Após o diálogo com seus alunos e dos resultados da prova terem ficado aquém do desejado, o professor decidiu trabalhar com esse curso através da prática da Resolução de Problemas. Pois acreditava que poderia tornar mais eficaz a construção do conhecimento de seus alunos, convidando-os a uma postura mais ativa, sendo coautores da mesma. Resultante daquele período tradicional de ensino, perceberam-se obstáculos como falha na compreensão dos conceitos, da não visualização dos resultados e do insucesso ao trabalhar com uma componente que requer, dos alunos, um poder de abstração. Isso porque, como relataram antes, precisavam que este campo problemático fosse trazido para perto de suas vivências profissionais, no mundo do trabalho. Na esteira dessas considerações, concluiu-se também que essa problemática foi resultado de falhas com as leituras de problemas. Os alunos não possuíam conhecimentos prévios necessários para que lhes fosse possível uma leitura efetiva, a qual lhes permitiria traçar um mapa do que deveriam e poderiam alcançar com os problemas.

De partida, para iniciar um trabalho diferenciado com os alunos, o professor decidiu por construir o conceito de vetores, que era extremamente necessário para prosseguimento naquele curso, uma vez que se tratava de um pré-requisito essencial. Esse trabalho durou em torno de duas semanas e, mesmo tendo decidido-se pela prática da Resolução de Problemas, esse início ocorreu ainda dentro do modelo de ensino tradicional vigente. Haja vista que, para uma mudança de perspectiva didática, como a que almejava o professor, seria necessário um momento de adaptação e, que não poderia acontecer de forma abrupta, até porque seria o primeiro contato de todos com a prática metodológica da Resolução de Problemas. Mesmo assim, o docente escolheu alguns problemas no livro didático utilizado, e iniciou as aulas com uma breve discussão sobre o que seriam vetores e seus desdobramentos. Nesse ínterim, trabalharam questões de direção, sentido, módulo, equipolência, soma, subtração, produtos e ângulos de vetores dentro dos problemas.

Um exemplo abordado pelo docente foi:

> - Para falarmos de vetor é necessário termos dois pontos, seja no espaço ou no plano. Vou tentar ser mais específico... Aqui, nessa sala temos um armário que está situado em um ponto determinado. Caso eu queira trocá-lo de lugar, ou seja, levá-lo para o outro lado da sala, naquele ponto [aponta com o dedo para uma posição diagonalmente oposta à inicial], eu agora terei dois pontos, e o que fará o movimento de levar o armário daqui para lá, respeitando um sentido, uma direção e uma medida desse deslocamento [referindo-se ao módulo do vetor] chama-se vetor. Se o armário tiver rodinhas embaixo, eu só empurro e o desloco linearmente. Mas, se ele não tiver rodinhas, eu tenho que ir deslocando-o por partes ou 'ziguezagueando', isto é, movo 'ele' até um determinado ponto, e note que aqui já se formou um vetor, depois daquele ponto a outro, e da mesma forma formo outro vetor, e assim sucessivamente até chegar onde eu quero. O que aconteceu nesse caso do zigue-zague? [o professor perguntou e ele mesmo respondeu] Tive vários vetores 'menorzinhos' que ao somar todos eles, eu terei o vetor do caso linear, ou melhor, aquele vetor que eu formei no caso do armário ter rodinhas (Material do professor, 12/04/2014).

Aquelas aulas foram trabalhadas da seguinte forma, o professor trouxe dois problemas para os alunos, os quais foram divididos em: um problema que envolvia soma, subtração e equipolência de vetores e, na outra aula, um problema que envolvia produto interno (escalar) e ângulos entre vetores. Após passar os problemas para os alunos, o professor tomou a frente da sala e conceituou as ideias principais do problema. Daí então, pediu aos alunos que sentassem em grupos para resolverem os problemas. Quando surgia alguma dúvida, o docente ia à frente da classe colocar a dúvida para todos e a respondia na lousa. Foi um movimento necessário para que tanto o docente quanto os alunos se preparassem para trabalhar através da Resolução de Problemas.

Após esse trabalho com o conceito de vetores, que acreditamos ter sido bom e produtivo para que os alunos aprendessem ou conhecessem o que seria esse ente matemático, o professor se propôs a trabalhar o próximo conceito, qual seja retas em uma perspectiva vetorial, visando à construção de espaços vetoriais, através da metodologia a que se dedica esse trabalho. Esse passo foi necessário para que o professor reconstruísse o que esses alunos deveriam ter construído em sua trajetória escolar. Isso aponta para uma reflexão sobre a mudança de posturas e paradigmas, que são sempre problemáticas e precisam de um período de adaptação. Até mesmo para que todos os atores desse cenários pudessem mudar suas concepções de ensino e de aprendizagem, bem como de suas posturas frente a essa processualidade, que a partir de então deveria ser ativa e participativa.

A partir do momento em que o docente iniciou seu trabalho, pautado pela Resolução de Problemas, pode-se perceber uma mudança na postura de seus estudantes. Tornaram-se mais comunicativos quando da divisão da classe em grupos, um ajudando o outro a compreender assuntos relacionados ou, até mesmo, compartilhando aplicações desses conceitos, auxiliando na visualização e na abstração. O primeiro assunto tratado foi o conceito de vetor, pois o docente buscava construir a estrutura dos Espaços Vetoriais e era de vital importância que todos os pré-requisitos fossem devidamente compreendidos, para lhes fornecer uma base sólida. Ressaltamos que todo o trabalho desse curso, após essa semana de discussões e adaptação, foi desenvolvida através da Resolução de Problemas, onde o professor se apoiava no roteiro de Onuchic *et al.* (2014) já mencionado.

Foi uma experiência bastante gratificante, onde pudemos constatar os benefícios dessa visão de ensino efetivamente prática. Faremos, a seguir, a exposição de um problema inventado pelo professor que trata de retas em uma perspectiva vetorial (paramétrica). A questão da proposição do problema, das leituras individuais e em conjunto, são o início dessa prática e é, nesse momento, que se levanta o interesse do aluno pela resolução do problema, motivando-o a construir seu conhecimento, ou não. Então, falaremos sobre esses passos dentro do que emergiu na proposição do problema. Enfatizamos que, caso o problema seja inventado a ponto de motivar os alunos ou de levá-los a construir determinado conhecimento, a leitura seguirá o fluxo da atividade, e o próprio aluno buscará, junto ao material didático e/ou ao professor a elucidação de sua dúvida.

Posto que a leitura individual é necessária para que o aluno recorra a processos metacognitivos e autorregulativos, buscando acionar seus conhecimentos e seus conceitos *a priori*, ele pode reconhecer e selecionar o que precisará para resolver o problema. Caso essa leitura seja insuficiente, ou não consiga produzir sentido para o leitor, a leitura em conjunto buscará, em meio a uma atividade interacionista, relacionar os discursos dos estudantes, por meio de relações intra e interlocutivas visando à elucidação de eventuais dúvidas a respeito do problema, que vem constituir o que Leal Junior e Onuchic (2015) chamam de *pensar-em-alta-voz*[5]. Se mesmo assim essas dúvidas persistirem, o professor poderá intervir para facilitar, de alguma forma, a compreensão do problema, através de indagações e questionamentos, mas nunca lhes fornecendo respostas diretas aos problemas trabalhados. Nesse âmbito, a leitura, dentro da linguagem que permeia o problema, tem uma relação estreita com os sentidos e

5 Trata-se de um movimento de metacognição e autorregulação, onde o estudante narra como aprendeu a aprender. Esse termo se diferencia do *pensar-em-voz-alta*, que se refere a uma atividade de leitura, recognição, simples percepção, atividade de introspecção ou expor o que se pensa de maneira audível, como muito se percebe em materiais de cunho psicológico que tratam do assunto (LEAL JUNIOR; ONUCHIC, 2015, p. 965).

significados trazidos ou evocados pelo mesmo. Tais questionamentos do docente permitem ao aluno uma nova leitura (releitura) do problema, cada vez mais reflexiva e crítica em busca de novas descobertas que vão além do enunciado.

Uma Atividade de Resolução de Problemas possui estrutura aberta (LEAL JUNIOR; ONUCHIC, 2015; ONUCHIC *et al.*, 2014; SCHOENFELD, 2014), pois ela sugere, aos alunos, algumas atitudes, nas quais suas implicações podem balizar conjecturas, reflexões e a concepção de conceitos matemáticos não esperados pelo professor. Apresenta-se aos alunos um problema, que deve ser explorado, compreendido e analisado. A própria leitura do problema e o entendimento da construção já são, por si só, estímulo ao raciocínio, favorecendo a construção de relações e conceitos.

O problema sobre o qual nos deteremos foi o seguinte:

Problema: *Dado um triângulo de vértices A(1,0,-1), B(-1,2,3) e C(0,2,-3). Qual a equação paramétrica da reta suporte da mediana do triângulo ABC relativa ao lado AC?* (Material do professor, 26/04/2014).

Note-se que, nesse momento, os alunos já haviam trabalhado as noções iniciais e as representações de vetores, tanto no plano quanto no espaço, ou seja, os conceitos *a priori* estavam latentes para os alunos. O professor inventou esse problema visando à construção de equações vetoriais, simétricas, reduzidas e paramétricas da reta, a definição de uma reta por dois pontos, as condições de paralelismo e perpendicularismo de duas retas, ângulos entre duas retas e interseção entre retas. Esse trabalho teve a duração de oito aulas, ou quatro semanas de aula. Adiantamos, ao leitor, que se teve sucesso nessa empreitada.

Quando o problema foi passado aos alunos, o professor lhes pediu que o lessem atenta e individualmente e, depois, que a leitura fosse feita coletivamente, onde o grupo discutiria a compreensão do problema. Após a leitura individual, alguns alunos não conseguiram entender o objetivo do problema, e manifestaram, ao professor suas dúvidas. Ele, então, pediu uma discussão em grupos. Nessa etapa, percebeu-se que os grupos discutiram o problema e tentaram relacionar com o que já tinham apreendido. O aluno Giles colocou a seguinte afirmação ao seu grupo: "- Parece o seguinte, quando temos uma reta ela segue sempre a direção de um vetor, ou melhor, existe um vetor que dá a direção e o sentido dela.". Outra aluna, Mary considerava: "- esse triângulo tem três vértices que são pontos do espaço. Então, como a gente viu, dois pontos determinam um vetor, isto é, esses lados dos triângulos estão em cima de três retas."

Percebemos com esses comentários que esses alunos haviam conseguido decodificar, através da leitura, os signos do problema. No entanto, o aluno Baruc disse: "- Entendi a ideia da Mary, mas não sei se entendi ao certo como vou encontrar essa mediana." Ao que o professor lhe perguntou: "- Baruc, o que é mediana?". E o aluno lhe responde: "- Não sei! Alguém aqui sabe?" E Frederico responde: "- Baruc, mediana tem a ver com o ponto médio de um vetor, então deve ser uma reta que intercepta o lado desse triângulo no ponto médio e que seja perpendicular a ela.". Conceitualmente essa resposta estava errada, mas nos dava indícios para perceber onde residia a falha na compreensão que havia feito pela leitura.

É certo que não se trata do ponto médio do vetor e sim do segmento determinado por dois pontos, que são vértices do triângulo. Mas o fato de o professor ter-lhes pedido que esboçassem o desenho da figura com base em suas conjecturas, auxiliou-os na compreensão do problema. Foi a partir daí que Frederico, após esboçar um triângulo em termos de vetores e colocar sobre eles um ponto médio e, em seguida, traçar uma reta ortogonal aos vetores passando pelos pontos médios, viu que se tratava das alturas relativas aos lados do triângulo. Antonio, de posse de seu notebook, interferiu: "- Frederico, vetor não tem ponto médio! O ponto médio que você tanto fala é pertencente aos lados do triângulo. O vetor apenas nos dá a direção e o sentido da reta que contém esses lados. Então, a mediana, como eu estou vendo aqui [aponta para sua pesquisa no Google] sua definição, diz que é uma reta que liga os vértices aos pontos médios dos lados opostos de um triângulo." Ao que Frederico acenou sua cabeça mostrando algum entendimento pela explicação do colega.

Percebe-se também que a decodificação do problema foi feita com sucesso, a compreensão demandou de tempo e bastante diálogo nos grupos e algumas interferências do docente que, mesmo não fornecendo respostas diretas, levantando apenas questionamentos, orientava os alunos por meio do *pensar-em-alta-voz*, a seguirem um caminho que lhes possibilitasse avançar na interpretação e posterior resolução do problema. Mesmo sem saberem todos os conceitos evocados para a resolução do problema, inferiam a necessidade da criação de outros conceitos, ou de um campo conceitual. Foi a partir daí que a interpretação tomou forma e, que, de modo efetivo e quase unânime, ocorreu a tradução da linguagem vernácula para a linguagem matemática.

Esse problema, muito embora estivesse redigido em uma linguagem vernácula, com forte influência matemática, precisava ser traduzido a ponto de fornecer, aos alunos, subsídios para o resolver. Não foi um problema que teve uma contextualização com o dia a dia dos estudantes, mas que os motivou pela forma em que foi proposto. A seguir, colocamos algumas leituras que os alunos fizeram do problema e que nos levaram a acreditar que essa atividade estava seguindo um fluxo de resolução. O professor, quando se aproximava o final da aula, perguntou-lhes: "- o que vocês conseguiram inferir desse problema? O que vocês acham que precisa ser feito para o resolvermos?" Alguns componentes de alguns grupos responderam:

Simone: - *Ainda não sabemos ao certo o que é uma equação paramétrica. Mas com esses pontos a gente vai encontrar os pontos médios dos seguimentos que estão sobre os lados do triângulo. Depois, temos que achar o vetor que liga esse ponto médio ao vértice que fica oposto a ele no outro lado do triângulo. Esse vetor será, como comentamos, o vetor diretor da reta que passa pelo ponto médio.*
Giles: - *A mediana está 'dentro' de uma reta. E essa reta é aquela que liga o ponto médio de um lado do triângulo ao vértice oposto a esse mesmo lado. Daí, pensamos que como conhecemos esses dois pontos, se fosse no plano poderíamos aplicar a fórmula da equação de uma reta que passa por dois pontos e acharíamos tal equação. E só nos restaria passar para a paramétrica. Mas como é no espaço ainda precisamos pensar como fazer essa reta.*
Michel: - *Não dá pra nós 'achar' o ponto médio pela intersecção de retas, até porque pra usar esse conceito, já teríamos que saber a equação da reta que a gente quer. Então temos que começar pelo ponto médio. É isso? Bom! Vou continuar... tendo esse ponto médio precisaremos da equação da reta que passe por ele. Mas ainda não sabemos como achar essa tal equação.*
Antonio: - *Pra começar pensei, ou melhor nós pensamos em criar uma equação de reta que ligue os dois pontos, o ponto médio de lado AC ao ponto B. Depois talvez fosse preciso encontrar o ângulo entre elas, 'péraí'... na verdade, podemos trabalhar com os vetores e achar os ângulos entre eles. Mas é só uma ideia inicial. Com esse ângulo... Não sei! Acho que temos que repensar, porque por esse caminho que estamos tentando e, que está diferente do que os outros disseram, talvez não consigamos nada.*(Material do professor, 10/05/2014).

Para uma proposta inicial, os discursos dos alunos pareceram bastante promissores, a leitura havia surtido seu efeito e, mesmo não conhecendo esse campo conceitual, mas percebendo a ideia que havia por trás dele, a decodificação, a compreensão e a interpretação surgiram de forma intencional e efetiva. Para alguns, como Simone e seu grupo, a tradução se operou de maneira transversal e a retenção estava patente. Para Antônio e seu grupo, a decodificação aconteceu, mas ainda não haviam conseguido compreender a ideia central do problema. Acredita-se que a necessidade de aplicar os conceitos aprendidos nas aulas anteriores sobre vetores, não estava possibilitando uma nova forma de se pensar sobre a resolução do problema. Para Giles e Michel e seus respectivos grupos, a decodificação e a compreensão estavam latentes, mas não haviam conseguido interpretar a leitura do problema. Para Michel houve uma falha pela necessidade de buscar a tradução para a linguagem matemática antes mesmo de compreender totalmente o problema. Giles por sua vez, bem como seu grupo, estavam procurando alguma fórmula ou algoritmo para aplicarem e, então, resolverem o problema. Certo é que, em todos esses casos, a motivação estava permeando a resolução do problema. Não houve óbices quanto ao interesse, até porque todos estavam preocupados com a situação anterior de seu curso, e estavam buscando uma forma de aprender e de recuperar suas notas naquela componente curricular.

A leitura, no que concerne aos estudantes, é o primeiro passo e também de considerável importância, uma vez que os mesmos não podem partir para a resolução do problema se não tiverem retido o que lhes pedia o problema. No cenário que analisamos, a leitura não se deu totalmente nas duas aulas do dia, ela se efetivou e consolidou-se em dois dias de aulas, quando todos conseguiram reter o que o problema pedia para prosseguirem juntos à sua resolução. Não nos estenderemos, neste trabalho, ao relato de todos os passos do roteiro da Resolução de Problemas que foi adotado. Mas, enfatizamos que foi um conteúdo construído totalmente nessa prática metodológica, onde a leitura esteve presente em todos os movimentos. Mesmo após terem resolvido os problemas de diferentes formas, as leituras eram refeitas a partir da compreensão, já que a decodificação foi consolidada, para que novos sentidos fossem produzidos e as significações dos conceitos fossem reificadas.

Procedeu-se com os passos (4) - resolução do Problema ao (10) - proposição e resolução de novos problemas, sem vicissitudes, uma vez que a leitura e a releitura das resoluções contribuíam para seus devidos entendimentos e aprendizagem. A plenária foi um momento rico em termos de discussões e esclarecimentos, e que, antes da formalização dos conceitos, possibilitavam construções de conhecimento cada vez mais necessários. Nesse momento, houve um caso que nos chamou a atenção. Baruc foi membro escolhido por seu grupo para ir a frente da classe propor a discussão de seus resultados. Esse aluno, no início da atividade, não havia conseguido compreender o problema e seu grupo estava tentando a tradução de maneira não espontânea.

Baruc: - *Quando lemos o problema, a primeira vez, não ficou muito claro onde estavam os vetores nem ao certo sabíamos como iniciar a resolução. Mas como o professor perguntou: 'como vocês querem iniciar a resolução do problema sem entendê-lo?', procuramos focar para entender o que ele estava pedindo. Ou seja, lemos e relemos, discutimos no grupo e o professor nos questionava, e isso 'ia' nos dando uma nova direção. Daí em diante, fomos pensando em construir os segmentos dos lados desse triângulo. O que nos possibilitou achar o ponto médio de cada lado. Daí, nós tínhamos dois pontos o vértice B e o ponto médio do lado AC, que chamamos de M. Até aí não precisamos de ângulos nem equação de retas. Daí, A Mary teve a brilhante ideia de encontrar o vetor que ligava estes pontos, porque a gente tinha visto que uma equação de reta precisava de um vetor, que daria sua direção e sentido e um ponto no espaço, podia ser no plano também. Então fizemos o seguinte, calculamos o ponto médio de AC [apontando para a lousa] menos [subtração vetorial] o ponto B e achamos o vetor* $\overrightarrow{BM}$ *que será o diretor da reta que queremos.*

Félix: - *Nossa! 'peraí' então quer dizer que não precisava nada de intersecção nem de ângulos? Acho que*

entendi. Então o que fizemos está errado!
Professor: - *Calma aí! Essa não é a única forma de se resolver esse problema. Até porque esse é o entendimento deles. Félix, você entendeu o que vocês fizeram? Sabe defender e explicar essa ideia?*
Félix: - *Não é a única, mas foi essa que me convenceu! A gente estava indo no problema meio sem direção. Tentamos usar tudo que sabíamos sobre vetores, porque, obviamente, deveria ser usado. Mas o Antonio estava mais me confundindo com as explicações dele do que outra coisa. Você entendeu agora 'Tonho'? Porque eu, agora sim, sei o que tenho que fazer.*
Professor: - *Releiam o problema. De posse desse novo entendimento tentem ver em que momento vocês se desviaram para o caminho que julgam 'errado'. Mas ressalto que é necessário saber onde se deu o erro e entendam o que o problema quer. Depois do Baruc é o grupo de vocês.*
Baruc: - *Bem, continuando de onde fui interrompido... uma equação de reta é assim [novamente aponta para a lousa]* $r: B + x\overrightarrow{BM}$*,onde esse B é o ponto, ou vértice do triângulo, x é uma variável, que como o Giles disse, vai ser um valor de número real, e é ele que vai construir essa reta, aumentando ou diminuindo o vetor diretor e, por fim* $\overrightarrow{BM}$*é o vetor que tanto quisemos. Bem, segundo o professor essa não é a tal equação paramétrica que o problema pede, então teremos mais trabalhos pra terminar logo esse problema. Mas estamos satisfeitos com isso.*(Material do professor, 10/05/2014).

Após essa plenária percebemos que esse grupo estava bem próximo de resolver o problema, faltava-lhes apenas a passagem da equação geral da reta no espaço para a forma paramétrica. Mas foi um grupo que conseguiu, através de todas as habilidades da leitura do problema alcançar esse nível de resolução. Com relação aos demais, alguns estavam se aproximando e pouco diferenciavam-se na forma de resolução. Como informou o professor, havia outras formas de resolvê-lo, até porque a subjetividade da leitura permite, em uma atividade aberta como a resolução de problemas, outras formas de entendimento, que enriquecem a proposta da Resolução de problemas. Discutir erros e desvios auxilia a aprendizagem no sentido de compreender o porquê daquilo não estar certo ou não servir para determinado fim.

O grupo de Félix, quando de seu momento na plenária fez o seguinte discurso:

Félix: - *Após lermos e relermos mais de mil vezes [exagerando], e nos 'trapalhar' com as mil e uma pergunta/ que o professor fazia 'ao invés de' responder nossas perguntas [falou com risos]. Mas isso nos ajudou a pensar por nossa conta. Chegamos à conclusão de que não deveríamos jogar tudo que fizemos fora. Até porque, senão o Antonio iria chorar [em tom de graça]. Então, decidimos que não seria preciso, nesse caso, encontrar os ângulos. O problema poderia ser simplificado. Se ele [referindo-se a Antonio] quiser, ele que calcule os ângulos depois. Esses vértices do triângulo são intersecções de duas retas, certo? Elas tem vetor diretor*$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{BC}$*e* $\overrightarrow{CA}$*,e elas passam pelos pontos que são vértices desse triângulo. Então como a mediana é uma reta que fica dentro do triângulo que passa pelos vértices e está ligada ao ponto médio, nós decidimos calcular as coordenadas e trabalhar em cima de todas essas coordenadas. Daí, ficou assim, se* M_1 *é o ponto médio do lado AB,* M_2 *o do lado BC e* M_3 *do lado AC, então* $x = 1 + \frac{-1+1}{2}, y = 0 + \frac{2+0}{2}$*e* $z = -1 + \frac{3-1}{2}$*. Olha só... fizemos em x, y e z porque são as coordenadas que vão entrar na reta. Daí, em cada uma delas são as coordenadas do ponto A mais uma fração que resulta no ponto médio. Foi isso que fizemos até agora.*
Professor: - *Félix, eu achei um tanto confusa sua explanação. Até porque, se entendi bem, vocês estão fazendo mais do que o problema está pedindo. No problema estou pedindo apenas a mediana com relação ao lado AC. Mas, acho que a ideia de trabalhar as coordenadas separadamente é um bom caminho. Para a próxima aula sugiro que vocês a explorem melhor. Mas não vi um sentido para o algoritmo das coordenadas que vocês trouxeram. Confesso que é um raciocínio interessante. Mas, por que somar as coordenadas do ponto A com as do ponto* AM_2*? Pensem nisso!*

É possível que esse grupo, talvez influenciado pela plenária do grupo anterior, interpretou o problema de uma maneira desorganizada. Mas estava evidente que conseguiram compreender e traduzir o problema. O fato de terem apelado para uma resolução através de coordenadas era um agenciamento para a determinação da equação paramétrica. O raciocínio para isso estava patente e, com as perguntas do professor poderiam ser obtidas. Foi um trabalho bastante promissor sobre o qual o professor conseguiu, como um mediador, proporcionar aos seus alunos um sentimento de pertencimento àquela construção do conhecimento.

Sobretudo, percebemos que os signos desta atividade eram conhecidos, a inserção problemática tinha significado para cada participante e, para a maioria, a atividade passou a fazer sentido. Não obstante, foram esses os sentidos diferentes que emergiram da atividade, mesmo que os significados conceituais permanecessem inalterados. Esse problema, bem como outros que foram trabalhados no referido programa, nos apontam que é imprescindível, em um trabalho pautado pela Resolução de Problemas, que o professor pense nos problemas apresentados de modo que os alunos reconheçam os signos envolvidos. Para que o engendramento entre pensamento e linguagem seja possível, a leitura seja potencializadora e que, para que a aprendizagem e a construção do conhecimento sejam efetivadas, é necessário que a linguagem dos problemas seja clara e compreensível, que os signos sejam reconhecíveis, que os significados sejam comumente definidos e estabelecidos e, por fim, que os sentidos sejam compartilhados e passíveis de discussão e apreensão.

Considerações Finais

Sendo a Resolução de Problemas uma Prática Sociointeracionista, ela opera na análise e na produção de sentidos, ao passo que, pensando com Vygotsky (2008), as palavras e enunciados não se correspondem recíproca e equivalentemente ao pensamento. Mas, o processo que caminha indiretamente do pensamento para a palavra passa pela produção de significado. O que se torna patente quando pensamos nas composições dos problemas, que trazem consigo signos, enunciados e discursos, que devem engendrar sentido e significado.

O que aqui foi apresentado é uma intervenção para o trabalho no âmbito educacional, como desafios e possibilidades na efetivação da prática da Resolução de Problemas no bojo da Educação Matemática na contemporaneidade. Quando falamos em signo, queremos enfatizar que eles permeiam e são necessários à Resolução de Problemas pois, como foi dito acima, são entes problematizadores, que implicam na construção de conhecimento e compõem os problemas e os conceitos a ele relacionados. Isso por que "os conceitos que serão construídos pelos problemas, dentro do processo de ensino-aprendizagem, são conceitos matemáticos que, por sua vez, são conhecimentos científicos ainda não apreendidos" (LEAL JUNIOR; ONUCHIC, 2015, p. 962).

Todavia, pensando na processualidade do ensino e da aprendizagem através da Resolução de Problemas, devem estar relacionados: as significações que são colocadas nos problemas, os sentidos que envolvem as atividades e, por fim, o relacionamento que essa prática permite aos estudantes com os signos, as quais serão internalizadas e processadas através da leitura. Ou seja, acreditamos que a aprendizagem seja potencializada em *relacionamentos sensíveis,* na linguagem e no pensamento dos estudantes com e a partir dos signos. Ao professor, na perspectiva da Resolução de Problemas, cabe o trabalho de agenciamento desses estudantes e o refletir criticamente sobre os sentidos e significados trazidos nos e pelos problemas.

Referências

BARROS, J. P. P.; PAULA, L. R. C. de; PASCUAL, J. G.; COLAÇO, V. F. R.; XIMENES, V. M.. **O conceito de "sentido" em Vygotsky: considerações epistemológicas e suas implicações para a investigação psicológica**. Psicologia & Sociedade. 21 (2). p. 174-181. 2009.

BIASIOLI, B. L. **As Interfaces da Literatura Infantojuvenil: Panorama entre o passado e o presente**. Terra Roxa e Outras Terras. Londrina. v. 9, p. 91-106. 2007.

BICUDO, M. A. V. **Filosofia da Educação Matemática: Fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas**. São Paulo: Ed. UNESP. 2010.

BICUDO, M. A. V.; GARNICA, A. V. M. **Filosofia da educação Matemática**. 4 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora. 2011.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília: MEC, 1998.

BORUCHOVITCH, E.; BZUNECK, J. A. (orgs.). **A motivação do aluno: contribuições da psicologia contemporânea**. 3. ed. Petrópolis: Vozes, 2004.

BZUNECK, J. A. As crenças de auto-eficácia dos professores. In: F.F. Sisto; G. de Oliveira; L. D. T. Fini (Orgs.). **Leituras de psicologia para formação de professores**. Petrópolis, Rio de Janeiro: Vozes, 2000.

CABRAL, L. S. **Processos Psicolinguísticos e a Leitura da Criança**. Letras de Hoje. Porto Alegre. v. 19. n. 1. p. 7-20. 1986.

CAMELO, M. A. C. A. **Literatura Infantil e Infantojuvenil em Sala de Aula e as Questões Curriculares**. Revista Cocar. v. 3. n. 6. p. 77-86. 2009.

CARRAHER, T. N. Aprender pensando: contribuições da psicologia cognitiva para a educação. 6. ed. Petrópolis: Vozes, 1991.

CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez. 1988.

ERNEST, P. PROBLEM SOLVING: Its Assimilation to the Teacher's Perspective. In: Ponte, J. P.; Matos, J. F.; Matos, J. M.; Fernandes, D. (Eds). **Mathematical Problem Solving and New Information Technologies**, Berlin: Springer-Verlag, 287-300. 1992.

HOUAISS, A. VILLAR, M. de S.; FRANCO, F. M. M. **Dicionário Houaiss da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

LEAL JUNIOR, L. C.; ONUCHIC, L. R. Resolução de Problemas: Signos, sentidos e significados. In: Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática – XII ENEM: **A Educação Matemática na Contemporaneidade: Desafios e possibilidades**. São Paulo: UNICSUL. 2016.

LEAL JUNIOR, L. C.; ONUCHIC, L. R.. **Ensino e Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas como Prática Sociointeracionista**. Rio Claro: Bolema, v. 29, n. 53. dez/ 2015.

LURIA, A. R. **Pensamento e linguagem: as últimas conferências de Luria**. Porto Alegre: Artes Médicas. 1987.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. M. M.; NUNES, T.; GITIRANA, V. **Repensando adição e subtração: contribuições da teoria dos campos conceituais**. São Paulo: PROEM. 2001.

MENEGASSI, R. J. **Compreensão e Interpretação no Processo de Leitura Noções Básicas ao Professor**. Revista UNIMAR. v. 17. n. 1. p. 85-94. 1995.

MORAES, C. R.; VARELA, S. **Motivação do Aluno Durante o Processo de Ensino-Aprendizagem**. Revista Eletrônica de Educação. Ano I, No. 01, ago. / dez. 2007.

MOREIRA, M. A. **A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área**. Investigações em ensino de ciências, 7(1), 7-29. 2002.

MOYSÉS, L. **Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática**. São Paulo: Papirus, 2009.

NANTES, E. A. S. **A Literatura Infantojuvenil e o Processo de Formação do Sujeito Leitor**. In: STEINLE, C. B. S.; NANTES, E. A. S.; SILVEIRA, A. P. P.; PAGNAN, C. S. (Orgs). **Literatura Infantojuvenil**. Londrina: Ed. e Distr. Educacional S.A. 2015.

NANTES, E. A. S. **Leitura e Produção de Texto em Língua Portuguesa II: Curso de graduação em letras vernáculas: 1**. São Paulo: Pearson. 2009.

ONUCHIC, L. R.; et al. (Orgs.). **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. Jundiaí: Paco Editorial. 2014.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. **Pesquisa Em Resolução de Problemas: Caminhos, Avanços e Novas Perspectivas.** BOLEMA, Rio Claro/ SP, v. 25, n. 41, p. 73-98. 2011.

ONUCHIC, L. R.. **A Resolução de Problemas na Educação Matemática: onde estamos? E para onde iremos?**. Espaço Pedagógico. v. 20. n. 1. Passo Fundo. p. 88-104. jan/jun. 2013.

PAIVA, S. C. F.; OLIVEIRA, A. A. **A Literatura Infantil no Processo de Formação do Leitor**. Cadernos da Pedagogia. São Carlos. Ano 4. v. 4. n. 7. p. 22-36. jan/jul. 2010.

POZO, J. I. **Aprendizes e Mestres: A nova cultura da aprendizagem**. Porto Alegre: Artmed. 2002.

SCHOENFELD, A. H. **What Makes for Powerful Classrooms, and How Can We Support Teachers in Creating Them? A Story of Research and Practice, Productively Intertwined**. Educational Researcher. American Educational Research Association. Vol. 43. No. 8, pp. 404–412. 2014.

SMOLKA, A. L. B. Sentido e significação. In: ROSSETTI-FERREIRA, M.C. et al. (orgs.) **Rede de Significações – e o estudo do desenvolvimento humano**. Porto Alegre: Artmed, p. 35-49. 2004.

SWELLER, J. **Cognitive Load During Problem Solving: Effects on learning**. Cognitive Sciense. v. 12. pp. 257-285. 1988.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics**. New York: Logman, 2001.

VERGNAUD, G. A Classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In: CARPENTER, T. P.; MOSER, J. M.; ROMBERG, T. A. (Eds.). **Addition and subtraction: a cognitive perspective**. Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaun. p. 39-59. 1982.

VERGNAUD, G. **A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education**. Journal of Mathematical Behaviour, v.17, n. 2, p.167-181.1998.

VERGNAUD, G. Epistemology and psychology of mathematics education. In: NESHER, P.; KILPATRICK, J. (Eds.). **Mathematics and cognition A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Cambridge: Cambridge University Press. p. 14-30. 1990.

VIGOTSKI, L. S. Pensamento e palavra. In: Vigotski; L. S. **A construção do Pensamento e da Linguagem**. São Paulo: Martins Fontes. 2001.(Original publicado em 1934).

VILELA, D. S. Reflexão Filosófica acerca dos Significados Matemáticos nos contextos da Escola e da Rua. In: KLUTH, V. S.; ANASTÁCIO, M. Q. A. **Filosofia da Educação Matemática: Debates e confluências**. São Paulo: Centauro. 2009.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. 6. ed., São Paulo: Livraria Martins Fontes. 2002.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem.** São Paulo: Martins Fontes. 2008.

VYGOTSKY, L. S. The genesis of higher mental functions. In: Wertsch, J. V. (ed.) T**he Concept of Activity in Soviet Psychology**. pp.144−188. Armonk, NY: M.E. Sharpe. 1981.

VYGOTSKY, L. S. Thinking and speech. In: R. W. Rieber & A. S. Carton (Eds.), T**he collected**

works of L. S. VYGOTSKY: Vol. 1. Problems of general psychology (pp. 39-285). New York: Plenum Press. (Original publicado em 1934). 1987.

ZILBERMAN, R. **A Leitura e o Ensino da Literatura**. Curitiba: Intersaberes. 2012.

ZILBERMAN, R. **O Papel da Literatura na Escola**. Via Atlântica. n. 14. p. 11-22. dez. 2008.

ZUFFI, E.M.; ONUCHIC, L.R. **O Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas e os Processos Cognitivos Superiores**. Revista Iberoamericana de Educacion Matemática, n. 11, p. 79-97. set. 2007.

Lourdes de la Rosa Onuchic
Departamento de Educação Matemática – UNESP – campus de Rio Claro - Brasil
E-mail: lronuchic@gmail.com

Luiz Carlos Leal Junior
Instituto Federal de São Paulos - IFSP - campus de Sertãozinho - Brasil
E-mail: jhcleal@gmail.com

O Raciocínio Proporcional e a Resolução de Problemas na Formação Inicial de (futuros) Professores de Matemática

Proportional Reasoning and Problem Solving in Initial Training of (Future) Mathematics Teachers

Célia Barros Nunes
Universidade do Estado da Bahia – UNEB – Brasil

Manoel dos Santos Costa
Universidade Ceuma – UNICEUMA – Brasil

RESUMO

A investigação que está registrada neste artigo tem por objetivo analisar aspectos relevantes a respeito do raciocínio proporcional e da resolução de problemas na formação inicial de (futuros)[6] professores de Matemática. A pesquisa foi realizada com um grupo de licenciandos de uma universidade pública do Estado do Maranhão, que buscavam novos recursos para desenvolver os conteúdos matemáticos com seus (futuros) alunos. Trata-se de uma pesquisa de natureza qualitativa, cujos dados foram coletados através das observações realizadas pelo primeiro autor deste texto, enquanto os licenciandos resolviam os problemas propostos. No presente trabalho são apresentados os problemas em que percebemos indícios do raciocínio proporcional revelado por parte dos (futuros) professores, durante sua resolução. Os resultados mostram que no decorrer das atividades eles foram mobilizando novas estratégias de resolução aos problemas propostos, empregando tanto o pensamento quantitativo (que envolve algoritmos numéricos) quanto o qualitativo (que analisa e explica as estratégias utilizadas na resolução). Também, saíram da condição de ouvintes mostrando-se questionadores, investigativos, participativos e passando à posição de co-construtores de seus próprios conhecimentos.

Palavras-chave: Formação de Professores, Resolução de Problemas, Raciocínio Proporcional.

ABSTRACT

The purpose of the present investigation is to analyse relevant aspects about proportional reasoning and problem solving in initial training of (future) Mathematics teachers. The research was conducted with a group of students from a public University in Maranhão state, who searched for new resources to develop mathematical contents with their (future) students. It is a qualitative approach research, and the data were collected through the researcher's observations while the students were solving the proposed problems. In the present work, we show problems in which we noticed some indications of proportional reasoning revealed by those (future) teachers during its resolution. The results show that along the development of the activities, they managed to mobilize new resolution strategies to the proposed problems by using both quantitative thinking (which involves numerical algorithms) and qualitative thinking (which analyses and explains the strategies used in the resolution). They also moved from listeners to questioners, investigative, participant and co-builders of their own knowledge.

Keywords: Teacher training, Proportional reasoning, Problem Solving.

[6] Será utilizada**,** neste trabalho**,** a expressão "(futuros) professores", pois alguns participantes já atuavam como professores, embora se encontrassem em formação inicial.

Considerações Iniciais

Este artigo foi desenvolvido a partir de uma pesquisa realizada com um grupo de (futuros) professores de Matemática, estudantes de uma universidade pública do Estado do Maranhão, que buscavam novos recursos para desenvolver conteúdos matemáticos com seus (futuros) alunos. Nessa investigação o objetivo era verificar como esses (futuros) professores, em formação inicial, percebiam a possibilidade de explorar o conceito de proporcionalidade através da resolução de problemas. A partir desse estudo, buscamos, então, analisar aspectos relevantes, a respeito do raciocínio proporcional e da resolução de problemas, que emergiam dessa experiência de formação inicial de (futuros) professores de Matemática.

O presente trabalho está organizado em quatro seções principais. Iniciamos pela fundamentação e revisão teórica caracterizando o raciocínio proporcional e a resolução de problemas, situando-os, em seguida, na formação de (futuros) professores. Prosseguindo, descrevemos os participantes e a metodologia empregada na pesquisa, assim como os instrumentos utilizados. E, por fim, apresentamos os problemas envolvendo a proporcionalidade, trabalhado com os licenciandos, em que utilizamos como recurso metodológico a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas. Das resoluções apresentadas, faremos as discussões e análises, seguidas das considerações finais.

Caracterizando o Raciocínio Proporcional

O fato de muitos aspectos relacionados ao mundo real envolverem relações de proporcionalidade tornam as capacidades de raciocínio proporcional extremamente úteis e importantes na interpretação desses aspectos e de vários fenômenos. Essa relação entre a proporcionalidade e o mundo real é destacada por muitos pesquisadores que têm investigado sobre esse tema, alguns dos quais serão apresentados a seguir.

Lamon (2005) salienta que raciocínio proporcional não é sinônimo de proporcionalidade, mas constitui-se na condição necessária para a compreensão de contextos e aplicações baseadas na proporcionalidade. A autora afirma que o conceito de raciocínio proporcional vai muito além da mecanização de estratégias formais de resolução de problemas, estando associado à capacidade de analisar de forma consciente as relações entre quantidades, evidenciada por argumentos e explicações sobre as relações proporcionais.

Então, o que se entende por raciocínio proporcional?

Segundo Lamon (2005), o raciocínio proporcional implica na compreensão de uma relação multiplicativa constante entre duas grandezas (invariância) e na noção de que essas duas grandezas variam em conjunto (covariância).

Lesh, Post e Behr (1988) consideram o raciocínio proporcional como uma forma de raciocínio matemático que envolve o sentido de covariância e múltiplas comparações, assim como a aptidão para reunir e processar mentalmente várias informações. O raciocínio proporcional está relacionado com inferência e predição, envolvendo pensamento qualitativo e quantitativo. Os autores afirmam que o raciocínio proporcional realiza um papel fundamental no desempenho matemático dos alunos, podendo ser considerado a “pedra fundamental” do currículo da Educação Básica e uma base do pensamento algébrico. Além disso, propicia a habilidade de compreensão das relações multiplicativas, enquanto a maioria dos conceitos da Aritmética é de natureza aditiva.

Cramer e Post (1993) acrescentam que o raciocínio proporcional permite a exploração de vários sistemas de representação como gráficos, tabelas e expressões para a mesma situação. Para os autores, um "pensador" proporcional, mais que aplicar algoritmos, tem a capacidade de resolver vários tipos de problemas, e as condições para isso são: (1) conhecer as características matemáticas de situações proporcionais; (2) compreender exemplos no contexto real e matemático de situações proporcionais; (3) perceber que podem ser usados vários métodos na resolução de atividades proporcionais e que esses métodos são relacionados; (4) saber como resolver atividades que envolvem raciocínio proporcional de natureza quantitativa e qualitativa; e (5) não ser afetado pelo contexto dos números nas atividades.

Tinoco (1996) salienta que, em alguns problemas, o raciocínio qualitativo não depende de valores específicos, sendo um importante meio para se esboçarem caminhos e respostas, bem como para verificar sua adequação ao problema.

Nesse sentido os *Curriculum Standards* - Padrões Curriculares (NCTM, 1989) já atribuíam lugar de destaque a esse tipo de raciocínio, que é de vital importância para o desempenho matemático dos alunos: o raciocínio proporcional "era de importância tão grande que merecia qualquer tempo e esforço gastos para assegurar o seu desenvolvimento cuidadoso" (NCTM, 1989, p. 82). Na realidade, ainda hoje, continua sendo de suma importância para o desempenho matemático dos alunos, de modo que essa ênfase ao raciocínio proporcional se mantém nos Padrões de Conteúdos, expressos nos *Standards* 2000 (NCTM, 2000), que destacam a necessidade de uma abordagem de integração entre "porcentagem, semelhança, escala, equações lineares, inclinação, histograma de frequência relativa e probabilidade" (NCTM, 2000, p. 212).

Ampliando essa ideia, Cyrino et al. (2014) dizem que o conceito de raciocínio proporcional é um pivô no processo de aprendizagem matemática, o ponto alto do aprendizado de Aritmética no Ensino Fundamental e, ainda, a base para futuros estudos de conceitos matemáticos mais complexos que envolvem proporcionalidade, como a Álgebra e as Medidas. Acrescenta os autores que

> O raciocínio proporcional é condição necessária para o entendimento do conceito de proporcionalidade e suas propriedades, e para a compreensão de contextos e aplicações que envolvem relações proporcionais tais como a Física e a Matemática mais avançada (CYRINO et al., 2014, p.35)

Encerrando tais reflexões, citamos Hoffer (1988), que destacou a existência de evidências de que não somente à época, o raciocínio proporcional na população em geral era insatisfatório, como de que grande segmento de nossa sociedade nunca as adquiriu. Nossa vivência pessoal e profissional, como professores e pesquisadores, nos leva a crer que essa realidade permanece. Sendo assim, consideramos que há necessidade de refletirmos sobre essa temática, na formação de (futuros) professores através da resolução de problemas.

Caracterizando a Resolução de Problemas

Educadores matemáticos do Brasil (ONUCHIC, 1999; ALLEVATO, 2005; NUNES, 2010; COSTA, 2012) e do Mundo (SCHROEDER; LESTER, 1989; VAN DE WALLE, 2009; SILVESTRE; PONTE, 2013) e documentos oficiais (BRASIL, 1998; NCTM, 2000) têm demonstrado preocupação em adequar o trabalho escolar a novas tendências que levem a melhores formas de ensinar, de aprender e de avaliar os conteúdos matemáticos. Portanto, ensinar Matemática não tem sido uma tarefa fácil. “As dificuldades intrínsecas somam-se às decorrentes de uma visão distorcida da disciplina, estabelecida, muitas vezes, desde os primeiros contatos do professor com o aluno” (MARANHÃO, 2000, p. 37).

Para Schroeder e Lester (1989) e Onuchic (1999), uma alternativa seria fortalecer e aprimorar o trabalho com resolução de problemas em sala de aula, conferindo-lhe sua principal função que é a de desenvolver a compreensão matemática dos alunos, sempre considerando que a compreensão ou não de determinadas ideias aparece quando se resolve um problema.

Os autores destacam três formas de abordar a resolução de problemas, que configuraram o trabalho do professor: ensinar **sobre** resolução de problemas, teorizando acerca da resolução de problemas, isto é, explicando estratégias e métodos para se obter a solução; ensinar Matemática **para** a resolução de problemas, em que o professor apresenta a Matemática formal para depois oferecer aos alunos o problema, como aplicação dessa Matemática - essa é a prática mais usual e fortemente impregnada da ideia de utilizar a resolução de problemas para fixar os conteúdos estudados; e ensinar Matemática **através** da resolução de problemas, em que o professor utiliza o problema como ponto de partida e orientação para o ensino, a aprendizagem e a avaliação ou seja, a construção do conhecimento pelos alunos far-se-á por meio da resolução do problema proposto.

Ainda hoje, apesar das alternativas para um trabalho diferenciado, há professores que ensinam Matemática considerando que os alunos aprendem unicamente pela repetição e memorização de ideias matemáticas. Para Allevato e Onuchic (2014), um bom caminho para o trabalho em sala de aula, seria o uso do que elas denominam de Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática **através** da Resolução de Problemas.

Com essa metodologia, o ensino e a aprendizagem de um tópico matemático começam com um problema, de modo que técnicas matemáticas e aspectos-chave desse tópico são evidenciados e desenvolvidos no percurso da busca da solução, e a avaliação é feita continuamente, durante a resolução do problema. Além disso, a metodologia contempla ações pedagógicas que promovem a busca por informação, a investigação, a experimentação, a renovação do interesse, a motivação dos alunos e a interação entre os alunos e o professor.

Nessa perspectiva, a resolução de problemas possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade de gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Eles têm oportunidade de ampliar tanto os conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos, como a visão que têm dos problemas da Matemática e do mundo em geral e, assim, desenvolver sua autoconfiança.

Essa abordagem apoia-se, especialmente, nas orientações dos *Standards 2000* (NCTM, 2000), em que a resolução de problemas é destacada como primeiro padrão de processo, e o ensino de Matemática através da resolução de problemas é fortemente recomendado. Também no Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998) apontam o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, explorar, generalizar e propor novos problemas a partir deles, como um dos propósitos do ensino de Matemática, indicando a resolução de problemas como ponto de partida das atividades matemáticas na sala de aula.

O Raciocínio Proporcional e a Resolução de Problemas na Formação Inicial de (Futuros) Professores de Matemática

O raciocínio proporcional é fundamental no ensino de Matemática, por isso é indicado que seja desenvolvido a partir dos anos finais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998). Nesse nível de ensino, o raciocínio proporcional envolve relações matemáticas multiplicativas, ao contrário das relações aditivas que são mais utilizadas pelas crianças que estão na fase inicial da vida escolar. É muito difícil para os alunos, nessa fase inicial, compreenderem essa relação multiplicativa das situações proporcionais, uma vez que é necessária certa maturidade matemática para compreender a diferença entre adicionar e multiplicar. Nessa perspectiva, uma possível indicação da causa das dificuldades apresentadas pelos alunos para compreender a relação multiplicativa das situações proporcionais pode estar na ênfase dada às relações aditivas nos primeiros anos da escolaridade (LAMON, 2005).

Pesquisas sobre o raciocínio proporcional (TINOCO, 1996; COSTA, 2012; SILVESTRE; PONTE, 2013) têm nos mostrado que há (futuros) professores que apresentam dificuldades quanto ao conteúdo proporcionalidade e à maneira que este deve ser ensinado nos Ensinos Fundamental e Médio. Geralmente, o conhecimento é limitado; por isso, ensinam de forma "mecânica" e desconectada de outros conteúdos matemáticos.

Cyrino et al (2014) propõem um estudo sobre o raciocínio proporcional na formação de professores de Matemática por também considerarem que eles não têm um conhecimento aprofundado dos conceitos e ideias relacionadas à proporcionalidade e ao raciocínio proporcional. Além disso, acreditam que esses conhecimentos podem subsidiar o trabalho docente e o desenvolvimento de propostas de ensino que promovam o desenvolvimento deste raciocínio em seus alunos.

A conclusão que essas pesquisas nos trazem é que, para melhorar essa situação, os cursos de formação inicial de (futuros) professores de Matemática deveriam apresentar os resultados dessas investigações, em tópicos e discussões, para que os licenciandos pudessem perceber sua importância no ensino de Matemática.

> A proporcionalidade é um tema indubitavelmente importante em Matemática e outras Ciências em âmbito escolar, e em diversas situações da atividade humana. Por isso, o pensamento proporcional tem sido objeto de estudo em Educação Matemática e em suas especialidades, a Psicologia da Educação Matemática, há várias décadas (MARANHÃO; MACHADO, 2011, p. 142).

Nesse sentido, Ponte (2002, p. 3) afirma que um curso de formação inicial de (futuros) professores de Matemática deve ser necessariamente diferente de um curso de Matemática que visa formar matemáticos. Do ponto de vista dos fatores que influenciam e caracterizam o processo educativo, dominar o conteúdo de ensino é condição necessária, mas não suficiente, ao professor, especialmente nos dias atuais. Adotando a premissa de que o pensar orienta o fazer docente, a prática educativa e as teorias educacionais devem caminhar juntas na formação inicial do (futuro) professor (MIZUKAMI, 1986; MARCELO GARCÍA, 1999).

Além disso, outros estudos (SILVESTRE; PONTE, 2009; COSTA, 2012) sistematizando as ideias de Behr, Lesh e Post (1995) e Lamon (2005) – indicam o raciocínio proporcional como um aspecto importante a ser discutido nesses cursos de formação, por envolver três condições: (1) a capacidade para distinguir situações que têm subjacentes relações de natureza proporcional das situações que não o têm; (2) a compreensão da natureza multiplicativa das relações proporcionais; e (3) a capacidade de resolução de vários tipos de problemas, revelando a flexibilidade mental para realizar diferentes abordagens, sem ser afetada pelos dados numéricos, pelo contexto, pela linguagem utilizada ou pela forma como os problemas são apresentados: textos, gráficos, tabelas, razões.

Concordando com essas ideias, Camejo, Maranhão e Miranda (2009) consideram alguns aspectos como manifestações de um raciocínio proporcional, dos quais destacamos aqueles que, do ponto de vista de Costa (2012), podem servir como fontes de discussão e aprimoramento nos cursos de formação de (futuros) professores de Matemática: (a) utilizar estratégias pessoais para a resolução de problemas envolvendo pensamento proporcional; (b) distinguir situações proporcionais e não proporcionais; e (c) representar razões por meio de gráficos, tabelas, símbolos, desenhos ou diagramas.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN (BRASIL, 1998), a proporcionalidade e o raciocínio proporcional estão presentes no currículo escolar em diferentes níveis de escolaridade e atrelados a diferentes estudos e discussões envolvendo temas especificamente matemáticos ou não. No quarto ciclo do Ensino Fundamental o documento indica que ideias relacionadas à proporcionalidade devem aparecer na “resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de [...] análise de tabelas, gráficos e funções” (BRASIL, 1998, p. 84).

Os Estados Unidos, no final da década de 1970 e início de 1980, já pensavam na resolução de problemas como sendo uma alternativa importante para o ensino de Matemática. No entanto, embora, nessa época, já existissem investigações produzidas e discutidas na Educação Matemática sobre o assunto, os professores ainda tinham dificuldades em discernir os diferentes processos utilizados na resolução de problemas e os fundamentos do seu ensino. Somente a partir dos trabalhos do NCTM (1980), que a Educação Básica (Ensinos Fundamental e Médio) começou a se preocupar mais em preparar seus alunos para resolver problemas.

Mas, foi a partir da década de 1990 que a resolução de problemas apareceu com destaque no cenário educacional. Ainda que o número de investigações fosse substancialmente pequeno, nesse período já se considerava que os cursos de formação inicial deveriam incluir atividades orientadas para a aprendizagem através da resolução de problemas.

Acompanhando esse movimento, no Brasil os PCN indicam a necessidade de mudanças nas formas de trabalho em sala de aula, pois a prática mais usual vinha sendo “aquela em que o professor apresenta o conteúdo oralmente, partindo de definições e exemplos [...] seguidos de exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação” (BRASIL, 1998, p. 37). Com esse tipo de trabalho que ainda hoje é, com frequência, realizado em sala de aula, o aluno aprende a reproduzir o que lhe foi ensinado, mas não mostra uma aprendizagem efetiva ao se defrontar com novos problemas a resolver.

Vale (1997) considera que os cursos de formação inicial de (futuros) professores de Matemática devem proporcionar aos licenciandos a oportunidade de: (1) desenvolver modelos de ensino-aprendizagem fundamentados na resolução de problemas; (2) resolver problemas diversificados e (3) conhecer dificuldades, desempenhos, convicções, concepções e atitudes dos (futuros) professores perante a resolução de tais problemas. Segundo a autora, esse é um período "privilegiado, pois pode contribuir favoravelmente para o desenvolvimento das concepções dos futuros professores" (VALE, 1997, p. 2), e deve harmonizar um ambiente de aprendizagem em que eles tenham amplas oportunidades para resolver uma grande variedade de problemas. Esse ambiente deverá confrontá-los com as mesmas atividades e experiências que deverão propor aos seus (futuros) alunos.

Sendo assim, os cursos de formação inicial de professores de Matemática, devem, entre outras coisas, aprofundar conhecimentos sobre as competências e os saberes dos licenciandos, pois estes podem encontrar-se em melhores condições do que os professores que já estão atuando como docentes, no sentido de que poderão estar mais receptivos para a aprendizagem e para mudanças em suas concepções. Quanto mais soubermos sobre como reagem os (futuros) professores e o que sabem sobre os conteúdos matemáticos e sobre a resolução de problemas, mais facilmente poderemos ir ao encontro de uma metodologia de ensino que os ajude a ultrapassar determinadas dificuldades influenciando positivamente o seu ensino (VALE, 1997).

Vale salientar que as discussões específicas sobre a resolução de problemas na formação inicial de (futuros) professores de Matemática, tanto no Brasil como em outros países, são bastante pontuais. No Brasil, Nunes (2010) e Costa (2012) sugerem que esse trabalho seja feito com o intuito de propiciar momentos de reflexão e análise sobre as potencialidades que a resolução de problemas oferece no sentido de incrementar a aprendizagem e melhorar os processos de ensino de Matemática. Esses trabalhos destacam a importância de adequar aos licenciandos experiências que desenvolvam seus conhecimentos "em e sobre" a Matemática e "em e sobre" a resolução de problemas.

Nesse sentido, Onuchic e Allevato (2015) relatam experiências realizadas num curso superior de licenciatura em Matemática, envolvendo proporcionalidade através da resolução de problemas. As autoras apontam as dificuldades que os licenciandos apresentaram durante a resolução dos problemas envolvendo esse conceito; no entanto foi possível reconstruir e aprofundar conhecimentos sobre proporcionalidade e sobre outros relacionados a ele, considerando-o como conceito unificador. A metodologia de ensino através da resolução de problemas utilizada pelas autoras mostrou-se bastante eficaz, no sentido de ter criado situações de resgate, correção e ampliação de conhecimentos prévios, bem como de cnstrução de novos conhecimentos.

Portanto, a finalidade de discutir o raciocínio proporcional e utilizar a resolução de problemas na formação inicial de (futuros) professores de Matemática é desenvolver os conhecimentos e as práticas dos professores, não só para que possam reproduzi-las, mas, para prepará-los para uma prática docente que seja dinâmica, interativa e reflexiva.

O Contexto da Pesquisa e os Instrumentos Metodológicos

A pesquisa apresentada no presente artigo é de natureza qualitativa, cujos dados foram coletados através das observações realizadas pelo segundo autor deste texto, enquanto os licenciandos resolviam os problemas propostos envolvendo proporcionalidade. Os participantes envolvidos eram estudantes do primeiro período de um programa de formação inicial de professores de Matemática, de uma universidade pública do Estado do Maranhão, que buscavam, na época, novos recursos para desenvolver os conteúdos com seus (futuros) alunos.

Os encontros para a realização das atividades de pesquisa eram semanais e, foram realizados fora do horário normal de suas aulas, ou seja, no horário noturno, com duração de 4 horas cada um.

Tendo como objetivo analisar aspectos relevantes acerca do raciocínio proporcional e da resolução de problemas na formação desses (futuros) professores, durante a coleta dos dados, foram realizadas leituras e discussões de textos sobre o ensino de proporcionalidade, a resolução de problemas e a formação de professores, além de atividades práticas de resolução de problemas envolvendo o conteúdo em estudo.

As resoluções escritas desses problemas e as discussões, essas registradas em um diário de campo, constituíram os dados desta pesquisa, de modo que o pesquisador manteve contato direto com o ambiente e com os sujeitos envolvidos. Assim, o pesquisador foi o principal instrumento de pesquisa, responsável pela organização e condução das atividades desenvolvidas (GOLDENBERG, 2007).

A Análise e a Discussão dos Dados

Ao trabalharmos com resolução de problemas como ponto de partida para construir novos conceitos matemáticos, estamos corroborando com as ideias de Onuchic (1999), Nunes (2010), Costa (2012), Allevato e Onuchic (2014) e Onuchic e Allevato (2015). Os problemas aqui apresentados têm o intuito de "reconstruir" o conceito de proporcionalidade e, ao mesmo tempo, analisar se os (futuros) professores desenvolviam seu raciocínio proporcional durante a resolução do problema.

Vale ressaltar que as resoluções dos problemas foram conduzidas por meio de um roteiro de atividades sugerido para se trabalhar com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas[7].

O primeiro problema apresentado aos (futuros) professores foi:

Resolva e marque a alternativa correta para o problema. Suely e Júlia estavam correndo na mesma velocidade ao redor de uma trilha. Suely começou primeiro. Quando Suely completou 9 voltas, Júlia completou 3 voltas. Quando Júlia completou 15 voltas, quantas voltas Suely completou? a) ( ) 45 voltas b) ( ) 24 voltas c) ( ) 21 voltas d) ( ) 6 voltas Este problema expressa uma situação de proporcionalidade? Justifique!

Fonte: Tinoco, 1996

[7] Para maiores detalhes sobre essa Metodologia, consultar Allevato e Onuchic (2014).

Para a resolução desse problema, os (futuros) professores se reuniram em duplas[8] após terem feito a leitura para entendimento do enunciado e esclarecimento de eventuais dúvidas. Com tudo esclarecido, começaram a resolver o problema. Enquanto isso, o pesquisador observava seus comportamentos e as estratégias de resolução.

A seguir, analisaremos algumas resoluções apresentadas. A dupla ADR1 e ADR3 fez três tentativas em que foram utilizadas estratégias diferentes:

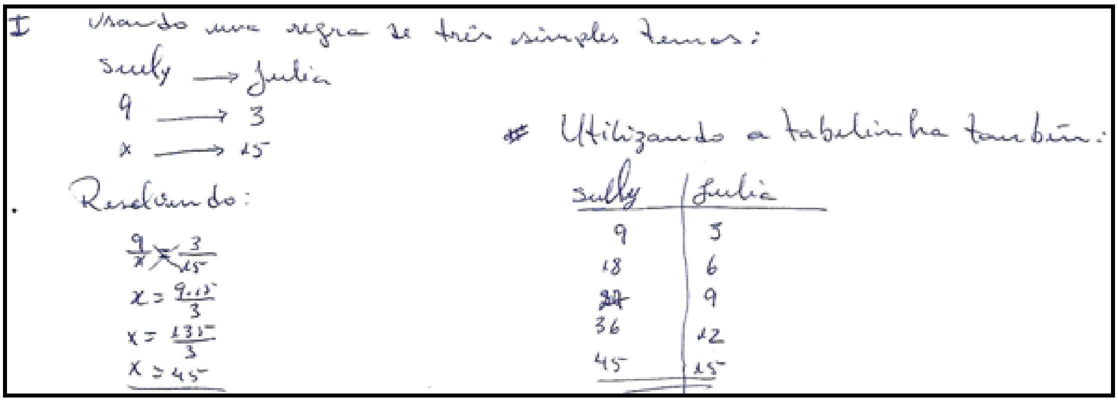


Figura 1: Resolução apresentada por ADR1 e ADR3
Fonte: Dados dos pesquisadores

Nessa primeira tentativa, os licenciandos utilizaram a regra de três simples a partir da definição de proporção, ou seja, da igualdade entre duas razões. Em seguida, construíram uma tabela para confirmar o resultado obtido.

Após a resolução, seguiu-se o diálogo:

Dupla: — *Professor, tem alguma coisa errada na resolução, não tem?*

Pesquisador: — *Por que vocês acham isso?*

Dupla: — *Ambas estão a uma mesma velocidade; a diferença é que Júlia começou a correr depois, então, pode Júlia dar 6 voltas e Suely 18?* [segunda linha da tabela].

Ao invés de responder aos questionamentos, o pesquisador pediu à dupla que fizesse novamente a leitura do problema, já que estavam com dúvidas quanto à solução, e ficou observando que estratégia utilizariam. Os licenciandos tentaram de outra maneira:

[8] Com o intuito de resguardar a identidade dos (futuros) professores, utilizaremos pseudônimos ADR1, ADR2, ..., ADRn para identificá-los.

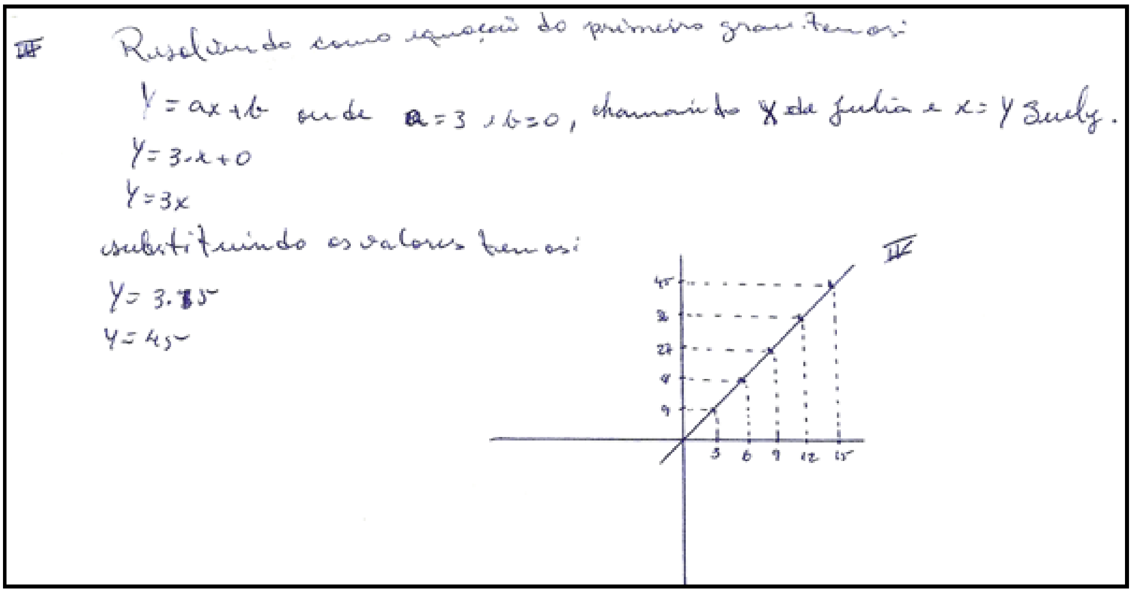


Figura 2: Resolução apresentada por ADR1 e ADR3
Fonte: Dados dos pesquisadores

Apesar de os licenciandos terem informado que resolveram usando uma “equação” de primeiro grau, na verdade, resolveram por meio da função y = *a*.x indicando relações multiplicativas, diretamente proporcionais, entre as variáveis x e y, que resultaram na constante de proporcionalidade *a*, no caso *a* = 3. E até representaram graficamente, mas chegaram à conclusão de que não estava correto, pois encontraram a mesma solução (45), obtida com a estratégia anterior. A dupla percebia que o que estava fazendo “matematicamente” não correspondia à situação expressa no problema. Dessa forma, achou que seria melhor resolver usando uma “linha de raciocínio” (palavras de um dos participantes da dupla).

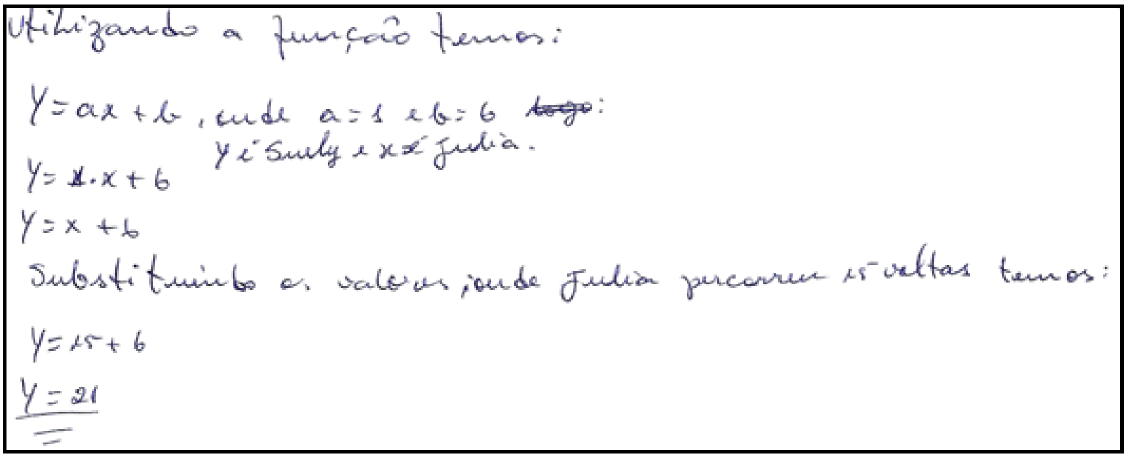
Então, a dupla foi novamente questionada:

Pesquisador: — *Como assim, por uma linha de raciocínio?*

Um dos licenciandos respondeu:

ADR3: — *Como Suely partiu primeiro, a partir da sétima volta em diante, Júlia começou a correr junto com Suely, na mesma velocidade, sendo que Suely está 6 voltas à frente de Júlia. Logo, quando Júlia percorrer a décima quinta volta, Suely vai estar na vigésima primeira, pois Suely está 6 voltas à frente de Júlia*.

Foi solicitado a ADR1 e ADR3 que representassem matematicamente, ou seja, que escrevessem o que haviam acabado de explicar. A resolução apresentada foi:


Utilizando a função temos:

$y = ax + b$, onde $a = 1$ e $b = 6$ ~~logo~~:

y é Suely e x é Júlia.

$y = 1 \cdot x + 6$

$y = x + 6$

Substituindo os valores, onde Julia percorreu 15 voltas temos:

$y = 15 + 6$

$y = 21$

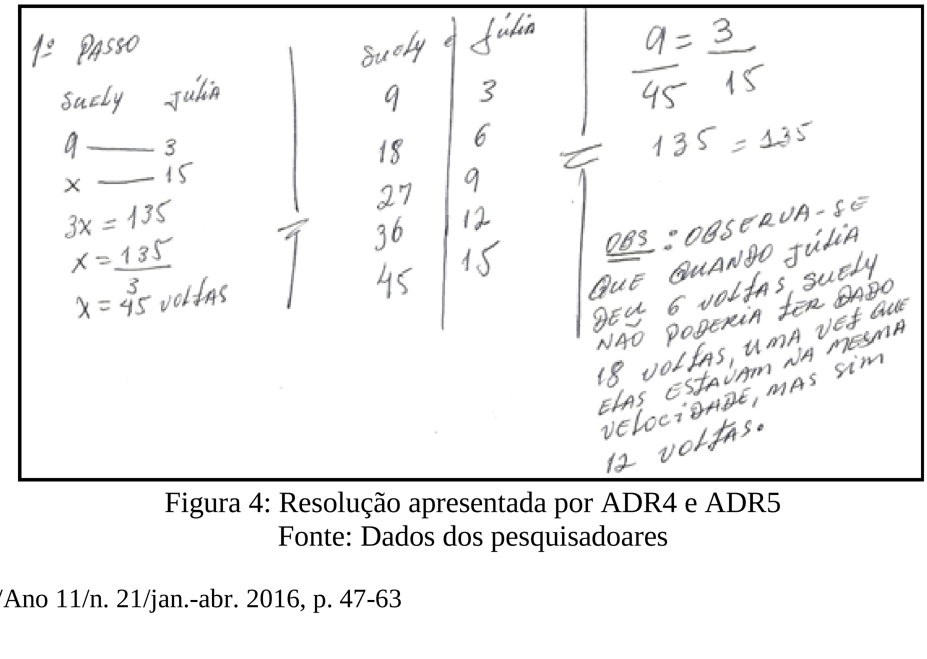
Figura 3: Resolução apresentada por ADR1 e ADR3
Fonte: Dados dos pesquisadoares

Desse modo, a dupla concluiu que o problema não expressa uma situação de proporcionalidade. Apesar disso, consideramos que foi o raciocínio proporcional que permitiu aos participantes chegar a essa conclusão, conforme explicitam Silvestre e Ponte (2013):

> [...] durante a aprendizagem formal da proporcionalidade direta os alunos devem trabalhar também com problemas que não envolvem a proporcionalidade direta. Em particular, o trabalho de sala de aula deve envolver problemas pseudoproporcionais, isto é, problemas que não envolvem proporcionalidade direta, mas geram nos alunos uma forte tendência para assumir a sua existência (SILVESTRE; PONTE, 2013).

Podemos observar nos processos com que desenvolveram as 3 (três) resoluções que os (futuros) professores utilizaram o raciocínio proporcional, bem como o conceito de proporcionalidade, embora por vez de forma equivocada, ao utilizarem habilidades para reconhecer, explicar, pensar sobre, fazer gráficos, fazer julgamentos, representar e simbolizar proporções diretas, conforme consideram Borralho, Monteiro e Espadeir (2004). Após as reflexões desenvolvidas no trabalho em grupo e as várias discussões, conseguiram perceber que o problema não se referia a uma situação envolvendo proporcionalidade (CAMEJO, MARANHÃO, MIRANDA, 2009).

Outras resoluções são apresentadas a seguir:


1º PASSO

Suely Júlia

9 — 3

x — 15

$3x = 135$

$x = \frac{135}{3}$

$x = 45$ voltas

Suely	Júlia
9	3
18	6
27	9
36	12
45	15

$\frac{9}{45} = \frac{3}{15}$

$135 = 135$

OBS: OBSERVA-SE QUE QUANDO JÚLIA DEU 6 VOLTAS SUELY NÃO PODERIA TER DADO 18 VOLTAS, UMA VEZ QUE ELAS ESTAVAM NA MESMA VELOCIDADE, MAS SIM 12 VOLTAS.

Figura 4: Resolução apresentada por ADR4 e ADR5
Fonte: Dados dos pesquisadoares

Nessa resolução, percebemos que a dupla, também utilizou mais de uma estratégia para confrontar os resultados. A dupla não tinha certeza quanto à solução encontrada, pois também percebeu que enquanto Júlia deu 6 voltas, Suely não poderia ter dado 18. Por isso, resolveu novamente o problema, agora obtendo a solução correta:

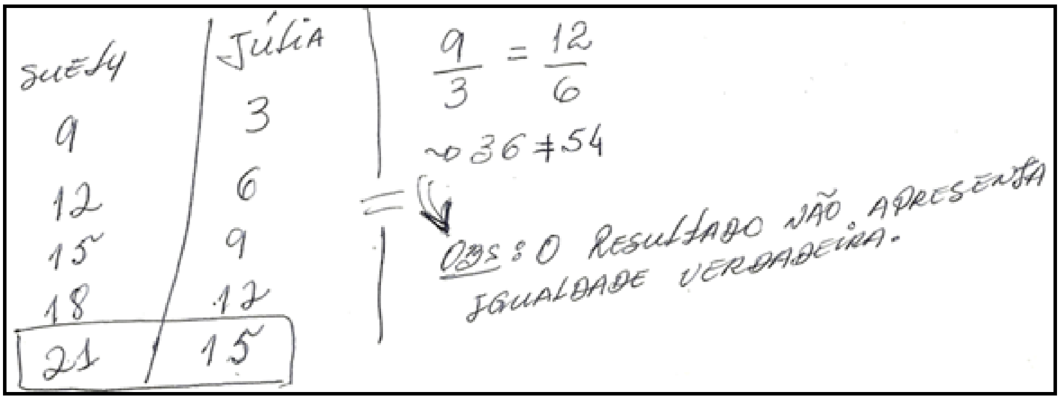


Figura 5: Resolução apresentada por ADR4 e ADR5
Fonte: Dados dos pesquisadoares

A dupla iniciou a resolução pela tabela; em seguida, utilizou o conceito de proporção para verificar se o resultado encontrado estava correto e, com isso, chegou à conclusão de que o problema não expressa proporcionalidade.

De fato, um dado essencial nesse problema, que não foi percebido de imediato e considerado pelos (futuros) professores, é que as atletas corriam a uma mesma velocidade. Assim, a partir da terceira volta de Júlia, em que a diferença entre as corredoras era de 6 voltas, essa diferença se mantém nas demais voltas. Quando Júlia terminou 15 voltas, Suely terminou 21 voltas. Ou seja, a comparação entre as grandezas não é multiplicativa, mas aditiva, não se configurando, de fato, uma situação de proporcionalidade.

Também, é possível observar nas resoluções apresentadas, que os licenciandos empregaram tanto o raciocínio quantitativo, que envolve algoritmos numéricos, quanto o qualitativo, ao explicarem as estratégias utilizadas.

Após todas as duplas terem concluído a resolução do problema e entregado por escrito todas as tentativas de resolução, realizamos a plenária para discussão das soluções obtidas e escolha da que era mais adequada ao problema, e, conforme consideram Allevato e Onuchic (2014), esse momento se mostrou bastante relevante para a construção do conhecimento acerca do conteúdo que queríamos trabalhar, qual seja, proporcionalidade.

O segundo problema proposto aos participantes está apresentado a seguir:

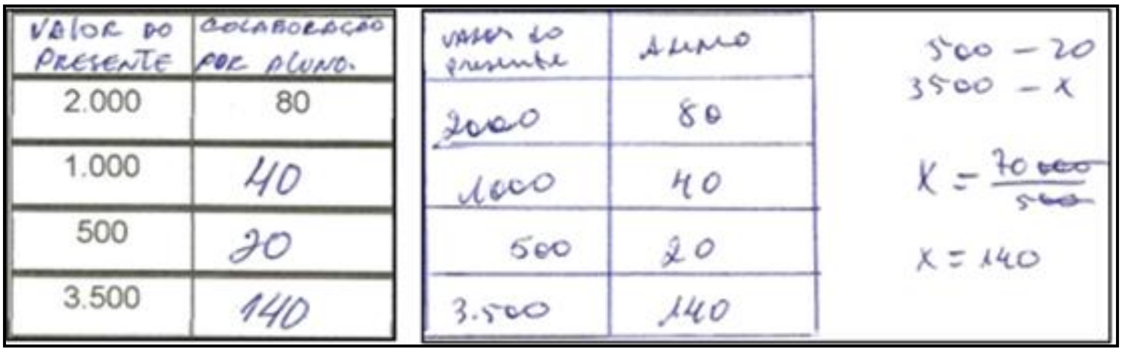
A turma de um curso de licenciatura resolveu fazer uma “vaquinha” para dar um presente ao coordenador. Todos os alunos vão colaborar. Se o presente custar R$ 2.000,00, cada aluno vai participar com R$ 80,00.
Se a turma escolher um presente de R$ 3.500,00, quanto deverá dar para cada aluno?
Complete a tabela a seguir:

2.000	80
1.000	
500	
3.500	

Agora responda:
a) Que grandezas variam no problema?
b) Essas grandezas são proporcionais? Por quê?
c) Observe a tabela. Que número se mantém constante?
d) O que esse número representa?

Fonte: Tinoco, 1996

Foi solicitado aos licenciandos que, inicialmente, o resolvessem individualmente. O pesquisador observava o trabalho sendo realizado e esclarecia dúvidas pontuais. As resoluções foram entregues por escrito, algumas das quais serão apresentadas a seguir. Nesse problema, os (futuros) professores tiveram poucas dúvidas, pois fizeram poucos questionamentos. Na Figura 6, apresentamos dois protocolos com o preenchimento da tabela:



VALOR DO PRESENTE	COLABORAÇÃO POR ALUNO
2.000	80
1.000	40
500	20
3.500	140

valor do presente	aluno
2000	80
1000	40
500	20
3.500	140

500 — 20
3500 — x
$X = \frac{70\,000}{500}$
$X = 140$

Figura 6: Respostas apresentadas por ADR5 e ADR3, respectivamente
Fonte: Dados dos pesquisadores

Os licenciandos foram orientados a manter todos os “escritos”, relativos a cálculos ou outros, nas folhas que foram entregues ao pesquisador. Por isso, acreditamos que, no preenchimento da tabela, o licenciando ADR5 tenha utilizado uma estratégia diferente da de ADR3. Possivelmente, ADR5 tenha encontrado os valores da 2ª e da 3ª parcela por divisões sucessivas por 2; e os valores da 4ª linha da tabela, por adição dos valores anteriores (1ª, 2ª e 3ª linhas) ou, simplesmente, por multiplicação dos valores da 3ª linha por 7. De qualquer modo, esse licenciando não fez o registro escrito do processo, ou seja, calculou mentalmente os valores, realizando, assim, o raciocínio proporcional. ADR3 utilizou a estratégia da regra de três, conforme registro escrito, estratégia de resolução muito arraigada quando se trata de problemas envolvendo proporcionalidade.

Ao serem questionados sobre quais grandezas variam nessa situação, ADR4 respondeu que o valor do presente e o valor com que cada aluno vai colaborar, são as grandezas envolvidas no problema, e enquanto que, para ADR5 é a colaboração dos alunos.

Assim, embora tenham preenchido corretamente a 1ª linha da tabela (Figura 6) indicando quais eram essas grandezas, os licenciandos não relacionaram com o que lhes foi solicitado no item (a), sugerindo que o registro na tabela não estava acompanhado da compreensão efetiva de quais eram as grandezas envolvidas no problema.

Para o item (b), que questiona se as grandezas são proporcionais, as respostas, foram diversificadas. Para ADR3 as grandezas são proporcionais até 20 alunos, enquanto que para ADR5 as grandezas são proporcionais porque existe uma variação constante, a colaboração dos alunos.

Por essa resposta, percebemos que alguns dos (futuros) professores ainda apresentavam dificuldades em identificar uma proporção, ou seja, em perceber a relação diretamente proporcional entre duas grandezas, a ser expressa por uma função linear:

> Quando duas grandezas x e y são diretamente proporcionais, a razão y/x entre o valor de y e o valor correspondente de x é constante. Se o valor dessa constante é a, $a \neq 0$, então $y/x=a$, ou $y = a.x$. Assim, dado o valor de x, para obtermos o valor correspondente a y, multiplica-se x pela constante a. Então a expressão $y = a.$x define y como uma função linear de x.

Um dos (futuros) professores conseguiu notar a presença da constante na relação, e afirmou:

ADR5: — *O problema trata de grandezas diretamente proporcionais. Logo, existe uma constante.*

Por isso, foi solicitado aos licenciandos que observassem a tabela preenchida e respondessem ao seguinte questionamento: Que número se mantém constante? Alguns dos participantes, mesmo depois de algumas discussões sobre o tema, ainda apresentaram dificuldade. ADR1 tendo respondido, no item (b), que as grandezas do problema são proporcionais, no item (c) respondeu que não tem esse número constante.

Então, durante as discussões, ADR3 fez o seguinte questionamento:

ADR3: — *Professor, não tem somente um número constante? Então, como saber o que ele representa?*

A dúvida, expressa oralmente por ele, também se manifestou na resposta escrita, em que o licenciando respondeu que as constantes seriam os números 20 e 500.

Vale ressaltar que apenas um licenciando (ADR2) apresentou o número 25 como sendo a constante. Para ele, as grandezas envolvidas nesse problema são proporcionais, e acrescentou:

ADR2: — *O custo do presente aumenta ou diminui na mesma proporção, de acordo com o valor que cada aluno contribui.*

E o que representa esse número que se mantém constante?

ADR5 respondeu que representa o valor da colaboração dos alunos.

As respostas indicam que, de fato, os (futuros) professores ainda não haviam percebido e compreendido que nas relações que representam grandezas proporcionais existe uma constante, a constante de proporcionalidade. Percebemos que essa dúvida permaneceu, em outros licenciandos, até o momento da formalização, quando todos esses aspectos foram esclarecidos: foi destacada a relação entre a constante que existe na relação multiplicativa e as grandezas do problema e, também, os fatos ligados à função afim que essa relação expressa.

Enfim, das resoluções apresentadas pelos (futuros) professores, podemos aferir que já haviam indícios do raciocínio proporcional quando demonstravam habilidades em reconhecer, explicar, pensar sobre, fazer gráficos e representar proporções diretas e a condução das atividades e discussões e reflexões realizadas possibilitaram o desenvolvimento desse raciocínio.

Considerações finais

Acreditamos, enfim, que os problemas aqui apresentados e discutidos foram geradores da reconstrução e ressignificação do conceito de proporcionalidade pelos (futuros) professores, embora o tenham utilizado, inicialmente, para a resolução, sem se atentarem para o seu significado. Naquele momento utilizaram simplesmente o algoritmo de resolução, o que demonstra que a compreensão conceitual e, de fato, o raciocínio proporcional são aspectos ainda negligenciados no ensino de proporção (CYRINO et al, 2014).

Não basta encontrar a solução para um problema; também é importante explicar como a encontrou. Por vezes, nos preocupa a maneira como o raciocínio proporcional tem sido trabalhado nas escolas: um ensino restrito a cálculos e à manipulação de regras, propiciando um desenvolvimento frágil e pouco significativo desse raciocínio matemático.

Dessa forma, acreditamos, a partir deste estudo desenvolvido, que um trabalho em sala de aula utilizando a Resolução de Problemas, especificamente a Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, favorece um ambiente de aprendizagem onde o aluno desenvolve-se ativamente, e experimenta avanços na construção do conhecimento. Os licenciandos entenderam isso a partir das reflexões desenvolvidas nesta experiência de formação.

Por fim, sugerimos aos professores que, durante o ensino formal de proporcionalidade, escolham criteriosamente os problemas a apresentar aos alunos, para que aprendam a resolver problemas progressivamente mais complexos e compreendam a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta (SILVESTRE; PONTE, 2013).

Referências

ALLEVATO, N. S. G. Resolução de Problemas. In: **Associando o Computador à Resolução de Problemas Fechados: Análise de uma Experiência.** 2005. 370 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2005.

______.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: Por que através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. R. et al. (Org). **Resolução de Problemas:** Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 35-52

BEHR, M.; LESH, R.; POST, T. R. A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra. In: COXFORD, A. F. SHULTE, A. P. (Org.). **As ideias da álgebra.** Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995, p. 89-103.

BORRALHO, A.; MONTEIRO, C.; ESPADEIR, R. **A matemática na formação do professor**. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação – secção de Educação Matemática, 2004.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais** - 3º e 4º ciclos: Matemática. Brasília: MEC, 1998.

CAMEJO, A; MARANHÃO, C; MIRANDA, M. R. Ideias de professores dos anos iniciais sobre números racionais: In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2009, Brasília. **Anais**... Brasília: Universidade Católica de Brasília, 2009, p 12-13.

COSTA, M. S. **Ensino-aprendizagem-avaliação de proporcionalidade através da resolução de problemas:** uma experiência na formação inicial de (futuros) professores de matemática. 292 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2012.

CRAMER, K.; POST, T. Connecting research to teaching proportional reasoning. **Mathematics Teacher**, v. 86, n. 5, p. 404-407, 1993.

CYRINO, M. C. C. T, et al. **Formação de professores em comunidade da prática:** frações e raciocínio proporcional. Londrina: UEL, 2014.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar**: como fazer pesquisa qualitativa em ciências sociais. Rio de Janeiro: Record, 2007.

HOFFER, A. Ratios and proportional thinking. In: POST, T. (Org.). **Teaching mathematics in grades K-8**. Boston: Allyn & Bacon, 1988.

LAMON, S. **Teaching fractions and ratios for understanding**: Essential Content Knowledge and instructional strategies for teachers, 2. ed. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 2005.

LESH, R.; POST, T.; BEHR, M. Proportional reasoning. In: HILBERT, J.; BEHR, M. (Org.). **Number Concepts and operations in the midlle grades**. Reston, VA: Lawrence Erlbaum & NCTM, p. 93-118, 1988.

MARANHÃO (Estado). Secretaria de Estado da Educação. **Proposta Curricular do Estado do Maranhão** – Matemática: Ensino Fundamental – 5ª a 8ª série, 2000.

MARANHÃO, C.; MACHADO, S. Uma meta-análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional. **Educar em Revistas**, n. 1, p. 141-156, Editora UFPR, 2011.

MARCELO GARCÍA, C. **Formação de professores:** para uma mudança educativa. Porto: Porto, 1999.

MIZUKAMI, M. G. N. **Ensino**: as abordagens do processo. São Paulo: EPU, 1986.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHER OF MATHEMATICS. **An agenda for action**: Recommedations for school mathematics for the 1980s. Reston: NCTM, 1980. Disponível em http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=17278. Acesso em 25 abr. 2016.

______. **Curriculum and evaluation standards for school mathematics**. Reston: NCTM, 1989.

______. **Principles and Standards for School Mathematics.** Reston: NCTM, 2000.

NUNES, C. B. **O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas:** perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática. 2010. 430 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, 2010.

ONUCHIC, L. R. ALLEVATO, N. S. G. Proporcionalidade Através da Resolução de Problemas no Curso Superior de Licenciatura em Matemática. In: In: SEMINÁRIO

INTERNACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2015, Perinópolis. **Anais**... Perinópolis: Pousada dos Pirineus, 2015, p. 1-14.

______. Ensino-Aprendizagem de Matemática através de Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática**: Concepções e Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

PONTE, J. P. A vertente profissional da formação inicial de professores de Matemática. **Educação Matemática em Revista**. a. 9, n. 11A – Edição Especial. Abril, 2002.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. Developing Understanding in Maathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Org.). **New Directions for Elementary School Mathematics**. Reston: NCTM, p. 31-42, 1989.

SILVESTRE, A.; PONTE, J. P. Raciocínio proporcional: uma perspectiva atual. **Educação e Matemática**: Revista da Associação de Professores de Matemática, n. 123, maio/junho, 2013.

______; ______. Ser ou não ser uma relação proporcional: uma experiência de ensino com alunos do 6º ano. **Actas do XX Seminário de Investigação em Educação Matemática**: Associação de Professores de Matemática, 2009.

TINOCO, L. A. A. (Coord.) **Razões e Proporções**. Instituto de Matemática / UFRJ – Projeto Fundão – SPEC/PADCT/CAPES - Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 1996.

VALE, I. Desempenhos e concepções de futuros professores de Matemática na resolução de problemas. In: FERNANDES, D.; LESTER, F.; BORRALHO, A.; VALE, I. (Org.). **Resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática**: múltiplos contextos e perspectivas. Aveiro: GIRP, 1997. p.1-38.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

Célia Barros Nunes
Universidade do Estado da Bahia (UNEB) - Brasil
E-mail: celiabns@gmail.com

Manoel dos Santos Costa
Universidade Ceuma (UNICEUMA) - Brasil
E-mail: manoel.costa@ceuma.br

Resolução de Problemas nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: Mitos, Práticas e Desafios

Problem Solving in the Early Years of Elementary School: Myths, Practices and Challenges

Edda Curi
Universidade Cruzeiro do Sul- Brasil

RESUMO

Este texto tem como objetivos apresentar os resultados de uma pesquisa longitudinal desenvolvida no período de 2011-2014 a respeito de resolução de problemas nos anos iniciais do Ensino Fundamental e focalizar como as três coleções de Matemática mais vendidas no Brasil em 2013, segundo o Plano Nacional do Livro Didático – PNLD, apresentam problemas do campo conceitual multiplicativo aos estudantes e professores desse segmento de ensino. Optou-se por analisar apenas os problemas que envolvem o conjunto de números naturais. A pesquisa é qualitativa e envolve procedimentos de pesquisa documental. Entre os resultados da pesquisa longitudinal, destaca-se a quebra de tabus entre as professoras participantes no que se refere à apresentação de problemas para alunos dos anos iniciais apenas depois da alfabetização e de saberem os algoritmos das operações. A análise das três coleções revela que as pesquisas de Vergnaud sobre o campo conceitual multiplicativo não foram incorporadas e que a quantidade de problemas diminui conforme o grau de escolaridade avança.

Palavras chave: Problemas do campo multiplicativo, análise de livros didáticos, pesquisa longitudinal.

ABSTRACT

The purpose of the present text is to present the results of a longitudinal research developed from 2011 to 2014 about problem solving in the early years of Elementary School. Also, to point out how the three Mathematics textbook collections best sold in Brazil in 2013, according to National Plan of Textbooks – PNLD, show the multiplicative conceptual field problems to students and teachers of such segment. We chose to analyse only the problems involving the set of natural numbers. It is a qualitative research and involves procedures of document analysis. Among the results of that longitudinal research, we highlight the taboo breaking among the participant teachers related to presenting the problems to students of early years just after they have become literate and have learned the operation algorithms. The analysis of the three textbook collections reveal that Vergnaud's research about multiplicative conceptual field was not incorporated and the amount of problems decreases as school years move forward.

Key words: Multiplicative field problems; textbook analysis; longitudinal research.

Introdução

Este texto é resultado de um conjunto de pesquisas que foram desenvolvidas no período de 2011 a 2014 pelo Grupo de Pesquisa Conhecimentos, Crenças e Práticas de Professores que Ensinam Matemática – CCPPM, no âmbito do Programa Observatório da Educação - OBEDUC, liderado por mim, autora deste artigo. Focaliza primeiramente, com apoio em investigações realizadas no âmbito do OBEDUC, alguns resultados dessas pesquisas em relação à resolução de problemas. Em seguida, analisa o foco dado aos problemas do campo multiplicativo pelas três coleções de livros didáticos mais vendidas em 2013, segundo o PNLD, com base em uma dissertação de mestrado recém defendida.

O Grupo de Pesquisa tinha apoio da CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento do Pessoal do Ensino Superior e era composto por 17 bolsistas (6 professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental de seis escolas públicas, 3 mestrandos, uma doutoranda, uma doutora e 6 alunos da graduação em Pedagogia), além de 13 participantes voluntários, professores da instituição e da rede pública. Nessa trajetória, houve modificações na constituição do Grupo, mas estas não interferiram no desenvolvimento profissional de seus participantes nem na condução da pesquisa. Ao contrário, o Grupo se fortaleceu, disseminando os resultados das pesquisas nas escolas da rede pública. As diferentes experiências profissionais e acadêmicas dos participantes e os interesses comuns evidenciaram uma perspectiva de trabalho colaborativo, baseado fundamentalmente em ouvir a prática das professoras, seus saberes e dificuldades, por meio da reflexividade, referendando estudos de Boavida e Ponte (2003).

As dificuldades de acesso e entendimento de documentos oficiais relativos às orientações curriculares e às avaliações externas, a necessidade de compreendê-los, de utilizá-los pedagogicamente e a aversão dos professores dos anos iniciais em relação à Matemática faziam parte das discussões desse Grupo. Pesquisas sobre a relação de professores dos anos iniciais com a Matemática, como a de Curi (2005), revelam que a forma como os professores aprenderam Matemática na educação básica interfere na sua prática mais do que suas aprendizagens durante o curso de formação.

Contextualização da Pesquisa

Um dos temas estudados foi a resolução de problemas como um dos “caminhos” para fazer Matemática em sala de aula. Nesse sentido, o Grupo apoiou-se nos Parâmetros Curriculares Nacionais e em autores como Allevato (2014), que discutem o foco na resolução de problemas nas aulas de Matemática.

Era bastante claro para as professoras desse Grupo que as crianças só poderiam resolver problemas se estivessem totalmente alfabetizadas; por esse motivo, centravam suas aulas na alfabetização, deixando a Matemática como secundária no horário escolar semanal. Também entendiam que as crianças precisavam primeiro aprender os algoritmos para depois resolver problemas, e assim procediam em sala de aula. Ensinavam e treinavam as crianças exaustivamente nos algoritmos das operações para depois apresentar alguns problemas para aplicação desses algoritmos, ou seja, ensinavam Matemática, na perspectiva de Allevato (2014), “ensinar para resolver problemas”.

Outra ideia das professoras desse Grupo era que seus alunos não conseguiam resolver problemas porque não sabiam ler e interpretar o enunciado. Essa convicção foi discutida exaustivamente durante as reuniões do Grupo. As opiniões eram bastante resistentes, mas se modificaram ao longo do Projeto, com discussões e pequenas pesquisas que as professoras realizavam em sala de aula com seus alunos.

Os resultados dessas pequenas pesquisas e as reflexões realizadas foram quebrando esses tabus e permitiram o avanço das professoras.

Alguns Resultados sobre Resolução de Problemas

A seguir, o texto apresenta alguns resultados sobre resolução de problemas pelas crianças e impactos na formação das professoras participantes da pesquisa:

a) As professoras dos dois primeiros anos de escolaridade liam os problemas que poderiam ser resolvidos por meio de uma das quatro operações básicas aos seus alunos, e eles os resolviam utilizando procedimentos próprios, mesmo antes de aprenderem os algoritmos relativos a essas operações. Esse dado mostra que, mesmo sem saber ler correntemente e sem aprender os algoritmos das operações, as crianças resolviam problemas. Os procedimentos de resolução eram socializados nas salas de aula, as professoras faziam intervenções e as crianças evoluíam, desmistificando a ideia de que primeiro deveriam ensinar os algoritmos das quatro operações às crianças para só depois elas resolverem problemas envolvendo essas operações (Vece, 2012; Mariano, 2012; Curi, 2012).
b) Os dados de uma dissertação de mestrado defendida em 2013 no âmbito desse Projeto mostram que cerca de 90% dos alunos de 5º ano identificam a operação que resolve um problema do campo aditivo. Os erros encontrados eram nos procedimentos de cálculo e na utilização dos algoritmos (Pereira, 2012). Esses dados permitiram refletir sobre a ideia das professoras de que seus alunos não resolviam corretamente problemas das quatro operações básicas porque não sabiam ler e interpretar o enunciado.
c) Os dados de outra dissertação de mestrado defendida em 2012 no âmbito desse Projeto mostram que as crianças têm mais dificuldade com problemas do campo multiplicativo, principalmente se envolverem a relação “muitos a muitos” da proporcionalidade e a divisão em qualquer dos seus significados (Zaran, 2012). As dificuldades com algoritmos também se revelam com mais intensidade do que a identificação da operação que resolve o problema.
d) Nos problemas do campo aditivo, pesquisas realizadas pelas professoras do Grupo e apresentadas em artigo (Curi, 2014) mostram que o índice de acertos na resolução de problemas é muito maior nas turmas de 1º, 2º e 3º anos do que nas turmas de 4º e 5º anos. Esse dado permitiu uma reflexão sobre a forma como os problemas vinham sendo trabalhados nos anos iniciais do Ensino Fundamental, já como aplicação dos algoritmos estudados, sem significado para as crianças.
e) Ainda com relação ao campo aditivo, a construção de enunciados de problemas desse campo pelas crianças mostra que elas propõem enunciados em que transparece o significado de transformação, na maioria das vezes, e com a incógnita no termo final (Curi, 2013).

No próximo item, o texto apresenta alguns estudos sobre a abordagem da resolução de problemas dos campos aditivo e multiplicativo nas várias instâncias curriculares, usando como fonte teórica Sacristan (2000).

Resultados de pesquisas sobre a abordagem de problemas dos campos aditivo e multiplicativo nas várias instâncias curriculares

Uma prática do Grupo era analisar os currículos prescritos, apresentados pelos livros didáticos utilizados nas escolas, praticados pelas professoras e avaliados pelo SAEB. Os dados serviam para reflexão do Grupo sobre a abordagem do tema estudado nas várias instâncias curriculares. Os resultados dessa análise foram apresentados no VI Seminário Internacional de Pesquisas em Educação Matemática - SIPEM e sintetizados a seguir:

a) Em relação aos problemas desses campos, o currículo prescrito (Parâmetros Curriculares Nacionais) apresenta os diferentes significados dessas operações, com exemplos e discussões com base nos estudos de Vergnaud (1996). Nos documentos curriculares do Estado e do Município de São Paulo, especificados ano a ano, esses significados se ampliam em cada ano de escolaridade e as expectativas de aprendizagem estão encadeadas (CURI, 2015).

b) No âmbito do currículo apresentado, foram analisadas as coleções de livros didáticos utilizados nas escolas participantes da pesquisa. Nesses livros, há menos problemas nos exemplares de 4º e 5º anos do que nos de 2º e 3º anos. Os livros analisados não exploram todos os significados das operações veiculados nos estudos de Vergnaud (1996) e propostos nos currículos prescritos. Alguns dos significados são quase que inexplorados (CURI, 2015).

c) Com relação ao campo aditivo, o significado mais trabalhado é o de transformação, seguido do de composição de transformações. Os de comparação e composição quase não são explorados. Nos livros de 5º ano, não há nenhum problema envolvendo significados de comparação e de composição (CURI, 2015).

d) Um ponto em comum nesses livros é que os problemas apresentam a incógnita sempre como termo final da sentença matemática, ou seja, os problemas são parecidos, com contextos diferentes, mas com raciocínio similar (CURI, 2015).

e) Com relação ao campo multiplicativo, o significado mais trabalhado nos livros é o de proporcionalidade. Não há nenhum problema com significado de configuração retangular em dois dos três livros de 5º ano analisados e apenas alguns de combinatória (CURI, 2015).

Os estudos realizados pelo grupo mostraram ainda que o foco dado nos livros didáticos usados nas escolas era de “ensinar para resolver problemas” em que os autores propunham primeiro o ensino dos algoritmos e depois problemas para serem resolvidos usando os algoritmos ensinados. As reflexões realizadas apontaram para a importância de, mesmo usando a concepção do “ensinar através da resolução de problemas”, efetivar propostas de problemas variados usando todos os significados propostos nas teorias estudadas.

Como já foi dito, as análises das coleções didáticas no período do OBEDUC eram realizadas nos livros adotados nas escolas naquele ano em que o tema estava sendo pesquisado. A questão que o Grupo colocava era: Será que os livros mais bem avaliados, ou os mais vendidos no Brasil tinham outro enfoque para os problemas? Com essa questão em mente, uma professora de curso de Pedagogia que estava fazendo o mestrado profissional na instituição se propôs a analisar o foco dado aos problemas do campo multiplicativo, de acordo com as pesquisas de Vergnaud (1994), pelas três coleções de livros de Matemática no PNLD de 2013.

Dessa forma, os dados que serão apresentados nos próximos itens provêm da dissertação de mestrado de Claudia Alves de Castro, que foi concluída em agosto de 2016.

Para maior compreensão do leitor, o texto apresenta a seguir uma síntese dos estudos de Vergnaud sobre o tema.

Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas

Vergnaud (1990) define o Campo Conceitual como um conjunto de situações cujo domínio requer a noção de situações e ações dos sujeitos em Matemática bem como outros conceitos distintos, não reduzindo os conceitos matemáticos a uma única definição, mas possibilitando uma ruptura entre os conhecimentos prévios e os novos.

O autor define uma trípleta, três conjuntos indissociáveis, um conjunto de situações que dá sentido ao conceito (S), um conjunto de ações dos sujeitos diante de uma situação (I) e representações simbólicas (R), ou seja, uma função tríplice, distinta, mas interligada. Sua representação simbólica apresenta-se pela sigla: C = (S, I, R).

Segundo Vergnaud (1990), o uso simultâneo dessa função tríplice é essencial para se estudar um determinado conceito no processo ensino-aprendizagem. Afirma, ainda, que essas situações não são biunívocas, pois não se relacionam a um único conceito, assim como um conceito não se resume a uma única situação.

De acordo com o autor, todos os conceitos só se tornam significativos a partir de situações naturais, assim como o conjunto de situações requer o domínio de vários conceitos de naturezas distintas.

Segundo Vergnaud (1994), as relações multiplicativas apresentam vários tipos de multiplicação e/ou divisão e várias classes de problemas. O autor destaca que se faz necessário analisá-los com muito cuidado para que se possam distinguir essas classes, oferecendo às crianças possibilidades para que reconheçam os procedimentos adequados e apropriados para a solução dos problemas propostos.

De acordo com Vergnaud (1996), as relações multiplicativas mais simples não são as ternárias (relações que ligam três elementos entre si), mas sim, as quaternárias (relações que ligam quatro elementos entre si), em que os problemas de multiplicação ou divisão implicam uma proporção simples de duas variáveis, uma em relação à outra. Segundo o autor, as relações quaternárias são utilizadas para introduzir a multiplicação no ensino básico.

Vergnaud (2009) define duas grandes categorias de problemas: Isomorfismo de Medidas e Produto de Medidas. A seguir, o texto discorre sobre elas.

Isomorfismo de Medidas

Na categoria Isomorfismo de Medidas, Vergnaud (2009) apresenta problemas que envolvem a ideia de proporcionalidade. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais, os autores separam os problemas de proporcionalidade dos de multiplicação comparativa. Optou-se, para facilitar ao leitor identificar esses tipos de problema, por apresentar separadamente os problemas de proporcionalidade e os de multiplicação comparativa, embora estes últimos sejam um subconjunto dos anteriores.

a) Proporcionalidade: nos problemas de proporcionalidade, Vergnaud (2009) destaca uma relação quaternária envolvendo duas quantidades de um tipo e as outras duas de outro tipo. Nos problemas mais simples, uma dessas quantidades é igual a *um*. É o que Bryant e Nunes (1997) denominam relação "um a muitos", como no exemplo a seguir:

Mariana toma 2 copos de suco por dia. Quantos copos de suco ela toma em uma semana?
1 ______ 2
7 ______ ?

Figura 1 - Exemplo 1
Fonte: autora do texto

Quando a relação quaternária apresenta uma correspondência entre os dois tipos de quantidades em que nenhuma delas é unitária, é uma situação mais complexa do que a anterior, denominada relação "muitos a muitos" (BRYANT E NUNES, 1997).

Uma piscina com capacidade de 80 mil litros fica totalmente cheia em 15 horas. Em 12 horas, quantos litros de água ela teria?
15 _______ 80 000
12 _______ ?

Figura 2 - Exemplo 2
Fonte: autora do texto

b) Multiplicação Comparativa: é uma relação que faz parte do significado de proporcionalidade. Envolve uma nomenclatura própria, por isso, a separação no documento curricular brasileiro, como, por exemplo, dobro, triplo, terça parte, metade, etc., ou ainda, duas vezes mais, três vezes mais, etc.

Roberto tem 15 lápis de cor. Márcia tem o dobro do número de lápis que Roberto tem. Quantos lápis tem Marcia?

Figura 3 - Exemplo 3
Fonte: autora do texto

Sofia tem um caderno de 100 folhas. Já usou metade. Quantas folhas ela usou?

Figura 4 - Exemplo 4
Fonte: autora do texto

Produto de Medidas

Segundo Vergnaud (2009), a categoria Produto de Medidas envolve uma relação ternária, em que se apresentam três quantidades, sendo uma o produto das outras duas, ao mesmo tempo no plano numérico e no plano dimensional. O autor representa a relação ternária por meio de uma tabela cartesiana, pois considera a forma mais natural de apresentá-la. Ele considera que é por meio do produto cartesiano que se deve explicar a estrutura do Produto de Medidas.

O autor destaca que a categoria Produto de Medidas não é bem compreendida pelas crianças dessa faixa etária, por se tratar de uma dupla proporcionalidade, em que se faz necessário que elas identifiquem uma dimensão em relação a um produto de dimensões mais simples. Ou seja, as relações multiplicativas se remetem a um conjunto de composições numéricas (multiplicações, divisões, regras de três simples e composta, etc.) e as composições relacionadas às dimensões (dimensões simples, dimensões-produto, dimensões-quociente).

O pesquisador classifica os problemas de Produto de Medidas em duas classes: a primeira envolve problemas de multiplicação que permitem encontrar a medida produto, conhecendo-se as medidas elementares ou problemas de divisão, que permitem encontrar uma das medidas elementares conhecendo-se a outra medida e a medida-produto, denominada problemas de Configuração Retangular. A segunda corresponde aos problemas de Combinatória.

a) Configuração Retangular: são situações que se referem à organização de elementos em forma retangular, ou seja, linhas e colunas.

Uma caixa que comporta latas de refrigerante está dividida em 10 colunas. Cada coluna acondiciona 8 latas de refrigerantes. Quantas latas de refrigerante essa caixa comporta?

Figura 7 - Exemplo 7
Fonte: autora do texto

b) Combinatória: são situações que envolvem dois conjuntos de elementos e relacionam todos os elementos de um conjunto com todos os elementos do outro. Abarca o raciocínio combinatório, denominado por alguns autores produto cartesiano.

Uma lanchonete oferece 3 tipos de lanche natural (atum, queijo e palmito) e 2 tipos de suco (laranja e uva). Quantas são as possibilidades de escolha de um tipo de lanche e um tipo de suco?

Figura 8 - Exemplo 8
Fonte: autora do texto

O autor considera que cada uma dessas classes se divide em numerosas subclasses, que são identificadas conforme as propriedades dos números, o campo numérico e a variação da posição da incógnita.

Análise da Coleção de Livros Didáticos

Para realizarmos as análises dos problemas do campo multiplicativo nos livros didáticos da coleção selecionada, embasamo-nos nas categorias dos estudos de Vergnaud (1994, 2009) sobre o campo multiplicativo: Isomorfismo de Medidas e Produto de Medidas, mas também na categorização proposta nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1997). Em cada coleção, foram analisados os livros propostos aos alunos e o material destinado ao professor.

Coleção A

O autor da coleção A destaca no Manual do Professor que procurou minimizar o cálculo mecânico e os problemas rotineiros de multiplicação e divisão, contextualizando-os em situações interessantes, evitando que os alunos se apoiassem na memorização e mecanização. O autor ressalta que o trabalho matemático com situações-problema deve estar ligado a situações da vivência dos alunos, para que consigam construir significados das operações e delas se apropriarem para que os resultados sejam satisfatórios no processo de ensino-aprendizagem.

No entanto, o autor não discorre sobre as estruturas multiplicativas e nem dá pistas de abordagem dos problemas que envolvam as operações de multiplicação e divisão.

Nos volumes para uso dos alunos, foram encontrados os seguintes tipos de problemas apresentados na tabela 1.

Tabela 1- ANÁLISE DA COLEÇÃO A

CATEGORIA	GRUPO		ANO				
			1º	2º	3º	4º	5º
Isomorfismo	Proporcionalidade	Um a muitos		22	75	72	67
		Muitos a muitos		-	1	4	7
	Multiplicação Comparativa	Dobro		3	1	1	-
		Triplo		2	1	-	2
		Metade		6	-	-	1
		Duas vezes mais		-	-	-	-
		Três vezes		-	-	-	-
		Terça parte		1	3	1	1
		Quarta parte		1	-	1	4
		Quinta parte		1	1	-	6
		Outras partes		-	-	-	11
Produto de Medidas	Configuração Retangular	Discretas		6	7	14	8
		Contínuas		-	-	3	4
	Combinatória	Produto Cartesiano		3	7	3	4
Totais			0	45	96	99	115

Fonte: dados da dissertação de mestrado de Claudia Alves de Castro

Como é possível observar na tabela 1, o livro didático do 1º ano não contempla problemas do campo multiplicativo. Segundo o autor, o livro nesse nível deve enfatizar a ideia de correspondência "um a um" ou correspondência biunívoca, pois acredita que a ideia de correspondência "um a um" seja um instrumento eficaz para o saber de agrupamentos de elementos e a construção das ideias de números. Ao que parece, o autor entende que problemas do campo multiplicativo não devem ser desenvolvidos no 1º ano de escolaridade.

Pode-se observar que o autor propõe problemas para o 2º ano no que diz respeito à correspondência “um a muitos”, referentes à categoria Isomorfismo de Medidas com o significado de proporcionalidade. No entanto, no que tange à correspondência “muitos a muitos”, nesse nível, o autor não aborda nenhum problema, o que, de acordo com nossa fundamentação teórica, é considerado desnecessário nessa faixa etária.

No 3º ano, constatou-se um número muito grande de problemas sobre a correspondência “um a muitos” e apenas *um* problema de correspondência “muitos a muitos”, algo desproporcional se for considerado que deve haver uma ampliação de significados a cada ano de escolaridade.

Nos livros de 3º, 4º e 5º anos, observou-se que há um equilíbrio na quantidade de problemas no que diz respeito aos problemas de correspondência “muitos a muitos”, com aumento gradativo de um ano para o outro. No entanto, a quantidade é muito pequena, dada a importância de ampliação da ideia de proporcionalidade.

Ainda na categoria Isomorfismo de Medidas, no que se refere à Multiplicação Comparativa, o autor aborda problemas envolvendo as noções de dobro e triplo do 2º ao 5º ano, mas os problemas envolvendo metade, mais adequados para alunos de 4º e 5º anos, são abordados no 2º e no 5º ano. Percebe-se que há um hiato na continuidade das noções de metade, quando essa noção deveria ser intensificada a partir do 3º ano, preparando os alunos para o contato com os números racionais.

Há uma incoerência nessa abordagem, porque a terça parte é abordada do 2º ao 5º ano; a quarta parte, nos 2º, 4º e 5º anos; a quinta parte, nos 2º, 3º e 5º anos; e outras partes, tão somente no 5º ano. O hiato já apontado no tratamento da noção de metade permanece na abordagem das noções de outras partes. Não há continuidade e ampliação do desenvolvimento dessas noções.

De acordo com nosso aporte teórico, o significado da multiplicação envolvendo a noção de *duas vezes mais e três vezes mais* é muito importante para a construção dos significados dos problemas do campo multiplicativo, pois, para a criança, esses termos são mais difíceis de compreender do que os termos dobro, triplo, etc. No entanto, na análise da coleção A, foi detectado que a mesma não apresenta problemas envolvendo essa linguagem, abordando parcialmente o significado de Multiplicação Comparativa, tratando apenas das noções de dobro, triplo, metade, terça parte, etc., e sem continuidade ano a ano.

Na categoria Produto de Medidas, foi possível observar que há um equilíbrio em relação à ideia da Configuração Retangular, a partir do 2º ano até o 5º ano, mesmo havendo um número muito pequeno de problemas por ano de escolaridade. O autor dá mais ênfase aos problemas que envolvem grandeza discreta do 2º ao 5º ano, enquanto a grandeza contínua é abordada apenas nos 4º e 5º anos.

Quanto à Multiplicação Combinatória (Produto Cartesiano), observou-se estar presente do 2º ao 5º ano, porém, no 4º ano, foi dada mais ênfase com maior número de problemas.

Podemos concluir que o autor, em todos os anos de escolaridade, enfatizou mais problemas do campo multiplicativo na categoria Isomorfismo de Medidas, envolvendo a correspondência “um a muitos” em relação à correspondência “muitos a muitos”, sempre envolvendo grandezas discretas, dando pouca ênfase aos problemas de Produto de Medidas.

Cabe destacar que o conceito de multiplicação começa a ser construído na abordagem de problemas de Produto de Medidas, pois, no Isomorfismo de Medidas, é possível resolvê-los por adição de parcelas iguais.

Coleção B

O autor da coleção B destaca no Manual do Professor que procurou apresentar problemas interessantes para as crianças com contextos em situações do cotidiano, e cita que o trabalho matemático deve estar ligado a situações da vivência dos alunos, para que possam construir significados. O autor não cita nenhuma orientação sobre as estruturas multiplicativas e nem dá pistas de abordagem dos problemas que envolvam as operações de multiplicação e divisão.

Nos volumes para uso dos alunos, foram encontrados os seguintes tipos de problemas apresentados na tabela 2.

Tabela 2 - ANÁLISE DA COLEÇÃO B

CATEGORIA	GRUPO		ANO				
			1º	**2º**	**3º**	**4º**	**5º**
Isomorfismo	Proporcionalidade	Um a muitos	3	9	69	51	4
		Muitos a muitos	1	4	11	1	5
	Multiplicação Comparativa	Dobro	-	1	3	1	-
		Triplo	-	2	2	2	-
		Metade	3	-	6	10	-
		Duas vezes mais	-	-	-	-	-
		Três vezes	-	2	-	-	1
		Terça parte			-	9	
		Quarta parte			-	9	
		Quinta parte			-	5	
		Outras partes			-	5	
Produto de Medidas	Configuração Retangular	Discretas	2	5	11	6	3
		Contínuas	-	-	-	6	-
	Combinatória	Produto cartesiano	1	6	6	6	5
Totais			10	29	108	111	17

Fonte: dados da dissertação de mestrado de Claudia Alves de Castro

Na tabela 2, o livro didático do 1º ano contempla alguns poucos problemas do campo multiplicativo. O autor propõe apenas 9 problemas para o 2º ano no que diz respeito à correspondência "um a muitos", referentes à categoria Isomorfismo de Medidas com o significado de proporcionalidade. Nos 3º e 4º anos, constatou-se um número muito grande de problemas sobre a correspondência "um a muitos" e um número bem menor de problemas de correspondência "muitos a muitos", algo desproporcional se for considerado que deve haver uma ampliação de significados a cada ano de escolaridade. O que chamou a atenção é que no 5º ano, há uma diminuição acentuada da quantidade de problemas, totalizando apenas 17 problemas do campo multiplicativo com números naturais no livro todo.

Ainda na categoria Isomorfismo de Medidas, no que se refere à Multiplicação Comparativa, o autor não aborda problemas envolvendo esse significado no 5º ano, nem usando dobro e triplo, nem envolvendo metade, um terço. Também não aborda o foco de duas vezes mais ou três vezes mais, por exemplo. A falta de trabalho com esses significados não possibilita a familiaridade do aluno com a terminologia usada nos números racionais (metade, terça parte, etc.).

Há uma incoerência nessa abordagem, não há continuidade e ampliação do desenvolvimento dessas noções.

De acordo com nosso aporte teórico, o significado da multiplicação envolvendo a noção de *duas vezes mais e três vezes mais* é muito importante para a construção dos significados dos problemas do campo multiplicativo, pois, para a criança, esses termos são mais difíceis de compreender do que os termos dobro, triplo, etc. No entanto, na análise da coleção B, foi detectado que a mesma apresenta apenas 3 problemas envolvendo essa linguagem, abordando parcialmente o significado de Multiplicação Comparativa, tratando apenas das noções de dobro, triplo, metade, terça parte, etc., sem aprofundamento e continuidade ano a ano.

Na categoria Produto de Medidas, foi possível observar que há um número muito pequeno de problemas por ano de escolaridade, tanto na Configuração Retangular como no significado de Combinatória. O autor dá mais ênfase aos problemas que envolvem grandeza discreta do que aos de grandeza contínua, abordada apenas no 4º ano.

Quanto à Multiplicação Combinatória (Produto Cartesiano), observou-se estar presente do 1º ao 5º ano.

Podemos concluir que o autor, em todos os anos de escolaridade, enfatizou mais problemas do campo multiplicativo na categoria Isomorfismo de Medidas, envolvendo a correspondência "um a muitos" em relação à correspondência "muitos a muitos", sempre envolvendo grandezas discretas, dando pouca ênfase aos problemas de Produto de Medidas.

Coleção C

Tabela 3 - ANÁLISE DA COLEÇÃO C

CATEGORIA	GRUPO		ANO				
			1º	2º	3º	4º	5º
	PROPORCIONALIDADE	UM A MUITOS	4	10	23	37	20
		MUITOS A MUITOS	1	1	4	9	-

ISOMORFISMO	MULTIPLICAÇÃO COMPARATIVA	DOBRO	-	2	2	-	-
		TRIPLO	-	2	5	1	-
		METADE	4	-	1	6	6
		DUAS VEZES MAIS	1	-	-	-	-
		TRÊS VEZES	1	-	-	-	-
		TERÇA PARTE	-	-	-	4	4
		QUARTA PARTE	-	-	-	6	6
		QUINTA PARTE	-	-	-	4	1
		OUTRAS PARTES	-	-	-	-	3
PRODUTO DE MEDIDAS	CONFIGURAÇÃO RETANGULAR	DISCRETAS	1	6	5	4	-
		CONTÍNUAS	-	-	-	-	2
	COMBINATÓRIA	PRODUTO CARTESIANO	1	5	7	2	-
TOTAIS			13	26	47	73	42

Fonte: dados da dissertação de mestrado de Claudia Alves de Castro

Na coleção C, também o autor não chama atenção para o professor sobre o campo conceitual multiplicativo. Descreve que a coleção enfoca problemas envolvendo o dia a dia das crianças e destaca a importância do cálculo.

No material do aluno, a tabela 3 mostra uma grande redução da quantidade de problemas em relação às coleções anteriores. O ano de escolaridade com maior quantidade de problemas é o 4º ano. Há uma queda bastante grande também da quantidade de problemas no 5º ano. A Multiplicação Comparativa é muito pouco explorada na coleção, apesar de aparecer com a noção de partes do todo nos 4º e 5º anos. Também se nota que a relação “muitos a muitos” não é explorada no 5º ano, o que mostra que não há ampliação da ideia de proporcionalidade, uma das ideias centrais da Matemática num ano em que os alunos são mais maduros para a construção dessa ideia.

Há um trabalho com Produto de Medidas em todos os anos de escolaridade, mas muito acanhado, pois a quantidade de problemas é pequena e as grandezas contínuas só são exploradas em 2 problemas no 5º ano.

Cabe destacar que o conceito de multiplicação começa a ser construído na abordagem de problemas de Produto de Medidas, pois, no Isomorfismo de Medidas, é possível resolvê-los por adição de parcelas iguais.

Síntese das três coleções

Nas coleções analisadas o foco para abordagem dos problemas é do “ensinar para resolver problemas”, pois os autores apresentam primeiro os algoritmos e depois os problemas como aplicação dos algoritmos ensinados.

Constatou-se uma pequena variedade de significados das ideias do campo multiplicativo, focalizando com mais intensidade a ideia de proporcionalidade na relação “um a muitos”. Não há ampliação ano a ano da quantidade de problemas por significado; ao contrário, em alguns casos, isso diminui no 5º ano. A quantidade de problemas envolvendo Produto de Medidas é pequena nas três coleções, o que não proporciona aos alunos a construção do pensamento multiplicativo, pois os problemas envolvendo proporcionalidade podem ser resolvidos com adição de parcelas iguais. Os problemas de Combinatória, principalmente, requerem uma multiplicação para resolvê-los. Como a abordagem desse tipo de problema é pequena nas coleções analisadas, corre-se o risco de o aluno chegar ao final do 5º ano resolvendo multiplicações usando apenas adições de parcelas iguais.

É possível considerar que essas lacunas observadas geram dificuldades no desenvolvimento do raciocínio multiplicativo, ou seja, as coleções não criam boas situações de aprendizagem em quantidades adequadas para que propiciem o desenvolvimento do pensamento multiplicativo dos estudantes que usam essas coleções.

Considerações Finais

Com base nas pesquisas realizadas, constatou-se que, no geral, a crença das professoras de que os problemas só podiam ser apresentados às crianças após a sua alfabetização e como aplicação do que foi ensinado foi desmistificada. Os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental participantes da pesquisa responderam muito bem às propostas de resolução de problemas, usaram vários tipos de procedimentos próprios para resolvê-los e chegaram às repostas adequadas. Nos três primeiros anos de escolaridade, os alunos acertaram mais os problemas propostos usando procedimentos próprios, do que os alunos do 4º e 5º ano que se apoiavam mais nos algoritmos das operações.

Esses resultados mostram que, nos anos iniciais do Ensino Fundamental é possível "ensinar através da resolução de problemas" e que os alunos respondem mais positivamente quando o professor propõe um problema antes de ensinar o algoritmo, do que quando o professor se utiliza de problemas para aplicar conhecimentos já estudados, ou seja, quando se utiliza da concepção de "ensinar para resolver problemas".

No entanto, os livros didáticos usados por essas professoras abordavam os problemas envolvendo as operações fundamentais da aritmética com foco no "ensinar para resolver problemas". Apresentavam primeiro os algoritmos das operações para depois focalizar problemas. As reflexões das professoras no grupo de pesquisa mostram que estas ficavam presas à abordagem dada nos livros, mesmo com todas as discussões realizadas e com as propostas de ensino "através da resolução de problemas".

O mesmo foco era dado nas três coleções de livros analisados na dissertação de mestrado. O foco maior era nos algoritmos e os problemas eram apresentados para aplicação dos algoritmos estudados.

Esses resultados apontam uma incoerência entre o foco dado pelos livros didáticos que se utilizam da concepção do "ensinar para resolver problemas" e as possibilidades de resolução de problemas por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental que eram maiores quando as professoras focalizavam o ensino "através da resolução de problemas".

Os resultados revelam ainda a necessidade de formação de professores tematizando sua prática, pois esse foco possibilitou às professoras participantes do OBEDUC que explicitassem sua prática ao trabalhar com resolução de problemas e evoluíssem em suas concepções, a partir de leituras e discussões de textos teóricos sobre o tema e de propostas de sala de aula que foram desenvolvidas durante a formação.

Referências

ALLEVATO, N. S. G. Trabalhar através da resolução de problemas: possibilidades em dois diferentes contextos. In **VIDYA**, v. 34, n. 1, p. 209-232, jan./jun., 2014.

BOAVIDA, A. M.; PONTE, J. P. Investigações colaborativas: potencialidades e problemas. In GTI (org). **Refletir e investigar sobre a prática profissional**. Lisboa: APM, 2003.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais** – Matemática, 1º e 2º ciclos. Brasília: Ministério da Educação- Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

BRYANT, P.; NUNES, T. *Crianças fazendo Matemática.* Porto Alegre: Artmed, 1997.

CURI, E. **A matemática e os professores polivalentes**. São Paulo: Musa Editora, 2005.

_________ Reflexões sobre a construção de enunciados de problemas do campo aditivo por crianças de oito anos. **Anais do CIBEM**. Montevideo, 2013.

________. Resolução de problemas do campo multiplicativo por crianças de 7 e 8 anos. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – SIPEMAT, 3, 2012, Fortaleza. **Anais**. Fortaleza /CE: SIPEMAT, 2012.

_________. O trabalho com resolução de problemas do campo aditivo por crianças dos dois primeiros anos do ensino fundamental. In ENDIPE. Anais do ENDIPE. Fortaleza /CE: ENDIPE, 2014.

_________. Orientações curriculares, livros didáticos, Prova Brasil de Matemática do 5º ano e práticas de sala de aula: resultados de uma pesquisa longitudinal. **Anais do VI SIPEM**. Pirenópolis, 2015.

DANTE, L. R. **Ápis: Alfabetização Matemática.** São Paulo: Ed. Ática, 2011.

MARIANO. S.F. Procedimentos de crianças de 2º ano do ensino fundamental na resolução de problemas do campo aditivo com o significado de transformação. In **Educação Matemática: grupos colaborativos, mitos e práticas.** São Paulo: Terracota, 2012, p. 95-114.

PEREIRA, J.F.F. **Resolução de problemas do Campo Aditivo por alunos de 5º ano de uma escola pública da cidade de São Paulo.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Cruzeiro do Sul. São Paulo, 2012.

SACRISTAN, J. G. **O currículo: uma reflexão sobre a prática**. Porto Alegre: Artmed, 2000, 3ª Edição.

VECE, J.P. Alunos do 1º ano do ensino fundamental e os problemas de transformação negativa. In **Educação Matemática: grupos colaborativos, mitos e práticas**. São Paulo: Terracota, 2012, p. 71-94.

VERGNAUD, G. La théorie the champs conceptuels. **Recherches em Didactiques des Mathématiques**, v. 10, n. 23, p. 145, 1990.

__________. Multiplicative conceptual field: what and why? In Guershon, H. and Confrey, J.. (Eds.) **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics.** Albany, N. Y. : State University of New York Press. pp. 41-59, 1994.

____________. A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas.** Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 155-191.

_________. **A criança e a realidade.** Tradução: MORO, M. L.F.; SOARES, M.T.C. Curitiba. Ed. da UFPR, 2009.

__________. Construção do conhecimento matemático e a teoria dos campos conceituais. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – SIPEMAT, 3, 2012, Fortaleza. **Anais**. Fortaleza /CE: SIPEMAT, 2012.

ZARAN, M. L. O. **Problemas de estruturas multiplicativas num quinto ano do Ensino Fundamental.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Cruzeiro do Sul. São Paulo, 2012.

Edda Curi
Universidade Cruzeiro do Sul (UNICSUL) - Brasil
E-mail: edda.curi@gmail.com

Creación de Problemas. Avances y Desafíos en la Educación Matemática

Formulação de Problemas. Avanços e Desafios na Educação Matemática

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM – Peru

RESUMEN

Presentamos una mirada panorámica de los avances en investigaciones y experiencias didácticas en creación de problemas tomando como referencias fundamentales el trabajo de Kilpatrick (1987); las publicaciones en la edición especial de Educational Studies in Mathematics (2013); los libros sobre este campo editados por F. Singer, N. Ellerton y J. Cai (2015) y por P. Felmer, E. Pehkonen, y J. Kilpatrick (2016); y algunas investigaciones que se vienen haciendo en Iberoamérica. Las investigaciones que referimos y los puntos de vista e interrogantes que destacamos, consideramos que son estímulos y retos para continuar investigando y favoreciendo el involucramiento de la creación de problemas en los sistemas educativos.

Palabras clave: Educación matemática, Creación de problemas, Solución de problemas.

RESUMO

Apresentamos uma visão panorâmica dos avanços nas pesquisas e experimentos de ensino em formulação de problemas tomando como referências fundamentais os trabalhos de Kilpatrick (1987); as publicações na edição especial de Educational Studies in Mathematics (2013); os livros sobre essa temática, editados por F. Singer, N. Ellerton e J. Cai (2015) e por P. Felmer, E. Pehkonen e J. Kilpatrick (2016); e algumas pesquisas que têm sido realizadas na América Latina. As pesquisas às quais nos referimos e os pontos de vista e questões que destacamos são considerados como estímulos e desafios para que se continue pesquisando e favorecendo o envolvimento com a formulação de problemas nos sistemas de ensino.

Palavras-Chave: Educação matemática, Formulação de problemas, Resolução de problemas.

Introducion

Una pregunta natural en el marco del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas con énfasis en la resolución de problemas, es ¿por qué nuestros aprendizajes y enseñanzas de matemáticas resolviendo problemas tienen que estar restringidos a problemas que fueron creados por otras personas? Ciertamente, hay muy buenos problemas creados por matemáticos y educadores matemáticos y pueden ser muy útiles para determinadas circunstancias de enseñanza o aprendizaje; sin embargo, cada clase, cada conjunto de alumnos tiene sus propias particularidades, motivaciones, dificultades y requerimientos, así como su propio entorno socio cultural y su conjunto de experiencias y saberes previos. Todo esto requiere una atención particular del docente y – evidentemente – el uso de problemas adecuados para cada conjunto de alumnos. Así, emerge claramente un gran reto para el profesor: crear esos problemas. Problemas que estén relacionados con ese contexto educativo concreto y que favorezcan el aprendizaje; más aún, que con la experiencia que el profesor tenga en la creación de problemas para sus alumnos, estimule a estos a crear problemas y que la creación de problemas sea otra forma de aprendizaje, de mejorar las actitudes hacia la matemática, de estimular la creatividad, de ampliar conocimientos y de investigar. En ese sentido, por su importancia en la formación de profesores, destacamos la afirmación de Abu-Elwan (1999, p. 1):

> Mientras que los formadores de profesores reconocen en general que los futuros profesores requieren orientación en el dominio de la capacidad para enfrentar y resolver los problemas, lo que a menudo se pasa por alto es el hecho fundamental que, como profesores, deben ser capaces de ir más allá del papel de solucionadores de problemas. Es decir, con el fin de promover una situación de clase, cuyo foco central sea la solución creativa de problemas, el orientador debe ser diestro en el descubrimiento y en la correcta creación de problemas que requieran soluciones.

Cabe mencionar que científicos como Einstein e Infeld, reconocidos no solo por sus aportes notables en los campos que trabajaron sino por sus reflexiones sobre la actividad científica, hicieron notar la importancia de la creación de problemas (Einstein and Infeld, 1938, p.92); asimismo, matemáticos destacados se refirieron a este tema, en particular Halmos (1980) que – destacando que los problemas son el corazón de las matemáticas – exhorta a los profesores a formar estudiantes que sean mejores solucionadores y mejores creadores de problemas que nosotros (p. 524).

La importancia de la creación de problemas ha sido destacada por un buen número de investigadores en educación matemática y actualmente contamos con numerosas y muy importantes publicaciones tratando diversos aspectos de la creación de problemas, vinculados con la formación matemática de los estudiantes en todos los niveles educativos y con la formación de profesores. Espinoza, Lupiañez y Segovia (2014) aportan con información valiosa sobre investigaciones sobre creación de problemas – ellos llaman invención de problemas – realizadas en diversos campos de la educación matemática hasta el 2012, sobre todo con estudiantes de educación básica. En este artículo presentamos una mirada panorámica de los avances en investigaciones y experiencias didácticas en creación de problemas tomando como referencias fundamentales el trabajo de Kilpatrick (1987); las publicaciones en la edición especial de Educational Studies in Mathematics (2013); el libro sobre este campo editado por Singer, Ellerton y Cai (2015); y algunas investigaciones que se vienen haciendo en Iberoamérica.

Un Artículo Pionero

Jeremy Kilpatrick, en 1987, escribió Problem formulating: Where do good problems come from?, como el capítulo 5 del libro *Cognitive science and mathematics education*, editado por Alan Schoenfeld y marcó un hito en la historia de la investigación relacionada con la creación de problemas. Una muestra de ello es que es citado en numerosos artículos de investigación y tesis de maestría y doctorado sobre creación de problemas. En él propone que la formulación de problemas debe ser vista no solo como un *objetivo* de la formación sino también como un *medio* de formación (1987, p 123) y enfatiza que a todos los estudiantes, como parte de su educación, debería brindársele oportunidades de vivir la experiencia de descubrir y crear sus propios problemas. Llamando la atención sobre los pocos estudios sistemáticos sobre creación de problemas realizados hasta entonces, Kilpatrick aporta a definir algunos aspectos que se requerían estudiar e investigar como pasos previos a la construcción de un edificio teórico. Cabe destacar que él mismo hace la sabia reflexión que los intentos de enseñar habilidades de creación de problemas, no requieren, desde luego, esperar una teoría. (p. 124).

Una sección importante del capítulo 5 es "Source of problems" y en ella hace notar cómo prácticamente todos los problemas que resuelve un estudiante han sido propuestos por otra persona; sin embargo, en la vida real muchos problemas, si no la mayoría, deben ser creados o descubiertos por el que los resuelve, quien da al problema una formulación inicial (p. 124). También hace notar que los problemas se van reformulando mientras se van resolviendo y relaciona esto con las investigaciones, recordando que Davis (1985) afirma, que lo que es típico que ocurra en una investigación prolongada, es que la formulación de problemas y la solución de problemas van "de la mano", cada uno provocando al otro, conforme la investigación va progresando (p. 23). Relaciona también la creación de problemas con las experiencias de los diseñadores de software que formulan una secuencia adecuada de subproblemas para resolver un problema. Plantea que un asunto a examinar por profesores e investigadores es "si orientando la atención de los estudiantes a los procesos de reformulación y proporcionándoles práctica en esto, podemos mejorar su desempeño en la resolución de problemas" (p. 130) Indica también que los problemas pueden ser una formulación matemática resultante de la exploración de una situación y en ese sentido, "los ejercicios escolares en la construcción de modelos matemáticos de una situación presentada por el profesor, están destinados a proveer a los estudiantes experiencias en formulación de problemas" (p. 131).

Otra sección importante del trabajo de Kilpatrick (1987) es "Processes of problem formulating", en la que considera a la asociación, la analogía, la generalización y la contradicción. Opina que el uso de mapas conceptuales para representar la organización de conceptos, como lo sugieren científicos cognitivistas como Novak y Gowin podría ayudar a la comprensión de tales conceptos, a estimular el pensamiento creativo acerca de ellos y a complementar las ideas que dan Brown y Walter (1983) para la creación de problemas por asociación. Al referirse a la analogía recuerda que Polya (1954) mostró que ésta puede ser un campo fértil para nuevos problemas. En cuanto a la generalización, comenta casos de generalización inspirados en solo un caso; la destaca como una posible fuente de nuevos problemas, pero advierte que es un asunto todavía virtualmente inexplorado. En cuanto al proceso de contradicción, se refiere a la estrategia denominada "what if not" propuesta por Brown y Walter (1983), que genera nuevos problemas por contradicción de una o más partes de una afirmación en un problema dado y en general, a modificaciones a un problema dado.

En su sección "Instruction in problem formulating", luego de presentar y comentar casos muy interesantes con niños, plantea las preguntas: "¿Las habilidades de formulación de problemas deberían ser enseñadas explícitamente o por descubrimiento? ¿Cuán general debería ser la enseñanza en la formulación de problemas? ¿Cómo podría interactuar la enseñanza en la formulación de problemas con la enseñanza en la resolución de problemas? " (p. 141). Finaliza esta sección refiriéndose en términos favorables al trabajo en grupo y conjeturando que el trabajo colaborativo ayudará a los estudiantes a mejorar su desempeño en la formulación de problemas.

Finalmente, en la sección “Understanding and developing problem formulating abilities”, plantea varias preguntas, como “Quizás la cuestión central desde el punto de vista de la ciencia cognitiva es ¿qué pasa cuando alguien formula un problema? (…) ¿Cuál es la relación entre formulación de problemas, resolución de problemas y conocimiento de base estructurado? ¿Cuán rico debe ser un conocimiento de base para formular problemas? (…) ¿Cómo añade al conocimiento de base la experiencia en formular problemas? (…) ¿Qué procesos metacognitivos se requieren para formular problemas?”

Es interesante notar que algunas de estas preguntas están entre las preguntas no respondidas que proponen y analizan Cai et al (2015), en el capítulo 1 del libro Mathematical Problem Posing. Cabe destacar el énfasis en la necesidad de conocer los procesos cognitivos en la creación de problemas, aspecto que ya lo planteaba Kilpatrick en 1987, como acabamos de ver.

Investigaciones y Experiencias Didácticas

Actualmente hay un gran número de publicaciones relacionadas con creación de problemas; muchas de ellas son investigaciones y experiencias didácticas que recogen las cuestiones planteadas por Kilpatrick, que acabamos de comentar. Otras surgieron de manera natural, como reflexiones suscitadas en el marco de trabajos sobre resolución de problemas, ante el requerimiento natural de tener problemas adecuados para usar investigaciones sobre resolución de problemas o respondiendo a una actitud reflexiva de no conformarse con resolver y pedir a los estudiantes que resuelvan problemas siempre creados por otras personas.

Tres publicaciones resumen bien el estado de la cuestión en investigaciones sobre creación de problemas: el número 83, de mayo del 2013, de la reconocida revista Educational Studies in Mathematics, dedicado íntegramente a este tema, que en sus 162 páginas contiene 12 artículos; y dos libros publicados recientemente por la editorial Springer en su serie Research in Mathematics Education. Estos son el publicado en el 2015: Mathematical Problem Posing. From Research to Effective Practice, editado por Singer, Ellerton y Cai (2015), que en sus 569 páginas contiene 26 capítulos; y el publicado en mayo del 2016: Posing and solving mathematical problems. Advances and new perspectives, editado por Felmer, Pehkonen y Kilpatrick (2016), que en sus 402 páginas contiene 22 artículos.

Un Marco para la Investigación sobre Creación de Problemas de Matemáticas

La revista *Educational Studies in Mathematics*, publicó en mayo del 2013 su volumen 83: Problem Posing in Mathematics Teaching and Learning: Establishing a Framework for Research, íntegramente dedicado a creación de problemas. El primer artículo, Problem-posing research in mathematics education: new questions and directions, de Singer, Ellerton y Cai (2013), antes de referirse a las nuevas perspectivas de investigación sobre creación de problemas contenidas en la publicación, da una visión amplia, con referencias específicas, de las investigaciones realizadas en este campo entre 1987 y 2012. Se refiere a investigaciones que vinculan creación de problemas con la formación matemática general y con el desarrollo de habilidades, de actitudes y de la creatividad. También a su interrelación con creación de problemas y a estudios sobre cuándo y cómo debería integrarse sesiones de creación de problemas. Asimismo, da información sobre investigaciones realizadas acerca de formas de generar nuevos problemas y acerca de la necesidad que los profesores desarrollen habilidades para manejar situaciones complejas en contextos de creación de problemas.

Como manifiestan Singer, Ellerton y Cai (2013) en su artículo introductorio a esta publicación, los artículos orientan a nuevas direcciones de investigación; así, algunos ponen énfasis en el diseño de tareas de creación de problemas a partir de marcos (frameworks) de problem solving o mediante situaciones significativas involucrando artefactos culturales:

- A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks, de Florence Mihaela Singer y Cristian Voica;
- When a problem is more than a teacher's question, de Jo Clay Olson y Libby Knott;
- Artifacts as sources for problem-posing activities, de Cinzia Bonotto.

Otros artículos ponen énfasis en la comprensión de la naturaleza de la creación de problemas, mediante estudios comparativos.

- Mathematical problem posing as a measure of curricular effect on students' learning, de Jinfa Cai, John C. Moyer, Ning Wang y Stephen Hwang;
- Dissecting success stories on mathematical problem posing: a case of the Billiard Task, de Boris Koichu y Igor Kontorovich.

Un tercer grupo de artículos enfoca su atención a las relaciones entre los conocimientos matemáticos de los estudiantes con sus habilidades en la creación de problemas:

- Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: development of an active learning framework, de Nerida F. Ellerton;
- Teachers implementing mathematical problem posing in the classroom: challenges and strategies, de Shuk-kwan S. Leung;
- An investigation of relationships between students' mathematical problem-posing abilities and their mathematical content knowledge, de Xianwei Y. Van Harpen y Norma C. Presmeg.

El cuarto grupo de artículos presenta y orienta investigaciones sobre el efecto en los procesos de instrucción, de las situaciones de aprendizaje basadas en la creación de problemas:

- Developing teachers' subject didactic competence through problem posing, de Marie Tichá y Alena Hošpesová;
- Problem posing based on investigation activities by university students, de João Pedro da Ponte y Ana Henriques.

El décimo segundo artículo, Problem-posing research in mathematics education: looking back, looking around, and looking ahead, de Edward Silver, presenta perspectivas globales sobre la creación de problemas de matemáticas; así, plantea la pregunta ¿Creación de problemas por quienes y con qué propósito?, trata sobre la interrelación entre la resolución de problemas y la creación de problemas y hace notar la necesidad de explorar las formas en que las tareas de creación de problemas podrían usarse como evaluaciones (assessments) de resultados deseados de aprendizajes (p. 161).

Creación de Problemas Matemáticos: de la investigación a la práctica efectiva

En los primeros siete capítulos de este libro, Singer, Ellerton y Cai (2015), se define el campo de la creación de problemas en el contexto de la educación matemática. Profundizan aspectos de la creación de problemas en la perspectiva de considerarlo un medio para comprender y mejorar el aprendizaje de matemáticas de los estudiantes (Jinfa Cai et al); examinan perspectivas de modelamiento – entre ellas modelamiento mediante conjeturas (R. Hansen y G. Hana); conceptualizan creación de problemas en el marco de las transformaciones de problemas dados y de representaciones (J. Milinkovié); proponen cómo usar la tecnología digital en actividades de creación de problemas (S. Abramovich y E.K. Cho); enfocan la relación entre creación de problemas, resolución de problemas y creatividad en la educación primaria (C. Bonotto y L. Del Santo); y exploran medios y brindan elementos teóricos para ir más allá de la rutina en las clases de matemáticas, estimulando la creatividad mediante creación de problemas (V. Matsko y J. Thomas, Cap. 6 y F. Singer y C. Voica, Cap. 7).

Destacamos el capítulo 1 denominado Problem-posing research in mathematics education: some answered and unanswered questions desarrollado por Cai et al (2015). En el que se presenta aspectos importantes para investigar sobre la creación de problemas. Una de las preguntas – relacionada con las reflexiones de Kilpatrick (1987) – se refiere a cuánto conocemos acerca de los procesos cognitivos relacionados con la creación de problemas. Se hace mención a los procesos recursivos de cadenas de solución y creación descritos por Cai y Cifarelli (2005) y al trabajo de Pittalis, Christou, Mousoulides, y Pitta-Pantazi (2004) en el que proponen un modelo de procesos cognitivos involucrados en la creación de problemas. Este modelo considera cuatro procesos: La edición de problemas a partir de estímulos icónicos o simbólicos, el filtrado de información importante y crítica, la comprensión de relaciones estructurales en la información cuantitativa, y la traducción de información cuantitativa de un modo a otro. En base a estudios experimentales, Pittalis et. al. (2004) afirman que estos procesos corresponden a diferentes tipos de tareas de creación de problemas, enfatizando la importancia del filtrado y la edición. Este modelo tuvo una aplicación por Christou, Mousoulides, Pittalis, and Sriraman (2005) que conllevó al desarrollo de una taxonomía de los procesos de creación de problemas relacionados a distintos tipos de tareas.

Los ocho capítulos siguientes del libro son dedicados fundamentalmente a ejemplos prácticos de sesiones de trabajo en clases usando creación de problemas. Dos de ellos enfatizan la relación entre creación de problemas y resolución de problemas (V. Cifarelli y V. Sevin, Cap. 8; y S. Gade y C. Blomqvist, Cap. 9); otros dos focalizan más su atención en el aspecto formativo de la creación de problemas, no como un fin en sí mismo, sino como un medio para mejorar procesos de aprendizaje (K. Klaassen y M. Doorman, Cap. 10; y M.L. Kwek, Cap. 13). El capítulo 11 está dedicado a la creación de problemas y la enseñanza y aprendizaje de la estadística en la educación básica (L. English y J. Watson). El capítulo 12 es en clases de secundaria y de nivel superior, usando computadoras (M. Imaoka, T. Shimomura y E. Kanno). Los dos siguientes capítulos muestran estudios sobre habilidades y actitudes de estudiantes de China y Estados Unidos en relación a la creación de problemas de matemáticas (X. V. Harpen y N. Presmeg, Cap. 14; y L. Chen, V. Dooren y L. Verschaffel, Cap. 15).

En el capítulo 13, denominado Using problem posing as a formative assessment tool (M. L. Kwek) se explora el uso de la creación de problemas como un instrumento de evaluación formativa para examinar los procesos de pensamiento de los estudiantes, así como sus comprensiones y competencias matemáticas. Mediante la implementación de actividades de creación de problemas y análisis de los problemas creados por 75 alumnos de secundaria de altas habilidades, la autora manifiesta que el estudio identificó varios factores cognitivos relacionados a la creación de problemas: la habilidad de los estudiantes para identificar la estructura matemática de un problema, su familiaridad con estrategias de pensamiento creativo, técnicas de ingeniería inversa, modelación matemática con situaciones de la vida real, tolerancia hacia la ambigüedad, y pensamiento productivo y comunicación mediante la redacción de un problema de matemáticas (p.291).

Los diez capítulos siguientes brindan valiosos elementos para incluir creación de problemas en los programas de formación inicial y continua de profesores. Los capítulos 16 y 17 ponen énfasis en la relación entre creación de problemas y resolución de problemas (R. Rosli et al Cap. 16; y B. Prabhu y B. Czarnocha, Cap 17); los capítulos 18 y 19 tratan la creación de problemas en entornos de geometría dinámica (R. Leikin, Cap 18 y I. Lavy, Cap 19); los capítulos 20, 21 y 22 muestran diversos trabajos sobre creación de problemas en la formación de profesores de matemáticas para la educación primaria y secundaria (T. Grundmeier, Cap 20; A. Hospesová y M. Tichá, Cap 21; y M. Klinshtern, B. Koichu y A. Berman, Cap. 22). El capítulo 23 es una mirada general sobre creación de problemas en la formación de profesores (H. Osana y I. Pelezer); el capítulo 24 expone experiencias y reflexiones para potenciar las sesiones de trabajo con profesores, empleando creación de problemas a nivel individual y grupal (S. Crespo).; y el capítulo 25 presenta un estudio con profesores de educación secundaria en formación y en ejercicio en la perspectiva de integrar creación de problemas en los currícula de formación de profesores e introduce el concepto de *Pedagogy of Problem Posing* (N. Ellerton).

En el capítulo 26, los editores nos presentan una mirada general acerca de las contribuciones especiales del libro sobre la creación de problemas. En palabras de ellos: "comentamos aquí cómo el libro toma en consideración literatura anterior, da energía a las prácticas actuales y mira hacia futuros emprendimientos sobre aprendizaje, enseñanza e investigación" (p. x).

Creación y Resolución de Problemas Matemáticos: avances y nuevas perspectivas

El libro, Felmer, Pehkonen y Kilpatrick (2016), tiene 3 partes: (I) Creación y resolución de problemas hoy, que tiene 7 artículos; (II) Estudiantes, creación de problemas y resolución de problemas, que tiene 8 artículos; y (III) Profesores, creación de problemas y resolución de problemas, que tiene 7 artículos. El último de los artículos de cada parte, denominado Reacción (de la parte correspondiente), es una mirada global y comentada de los artículos anteriores. Las Reacciones correspondientes a los artículos de las partes I, II y III han sido escritas por John Mason, Masami Isoda y Kaye Stacey, respectivamente.

Como puede deducirse del título del libro y de sus partes, en general se destaca la interrelación entre la creación y la resolución de problemas de matemáticas. Hay cuatro artículos que tratan más específicamente sobre la creación de problemas

En la Parte I:

- How do textbooks incorporate mathematical problem posing? An international comparative study, de Jinfa Cai, Chunlian Jiang, Stephen Hwang, Bikai Nie y Dianshun Hu.
- Problem-posing and questioning: Two tools to help solve problems, de José Carrillo y Jorge Cruz.
- Reformulating: approaching mathematical problem solving as inquiry, de Jeremy Kilpatrick.

En la Parte III:

- Mathematical problem posing: a case of elementary school teachers developing tasks and designing instructions in Taiwan, de Shuk-Kwan S. Leung.

El primero de estos (¿Cómo incorporan los libros de texto la creación de problemas? Un estudio comparativo internacional.), destaca la importancia de incluir actividades productivas y robustas de creación de problemas en los materiales de los currícula y brinda a los investigadores, diseñadores de currícula y autores de libros valiosa información para incorporar la creación de problemas en la matemática escolar. Examinan dos series de textos usados en China y dos series de textos usados en EE. UU. , que – en sus respectivos países – representan los textos que más ampliamente han adoptado los materiales del curriculum de las matemáticas elementales. Más allá de la propia comparación y de las reflexiones sobre el curriculum intencional e implementado, es muy interesante la clasificación que hacen para su estudio, de cinco tipos de tareas de creación de problemas: 1) crear un problema que corresponda a la(s) operación(es) aritmética(s) dada(s), 2) formular variaciones a una pregunta, con la misma relación matemática o estructura, 3) formular preguntas adicionales a partir de la información dada y de una pregunta de muestra , 4) formular preguntas en base a información dada, y 5) tareas irrestrictas de creación de problemas.

En el segundo artículo (Creación de problemas y cuestionamientos: dos instrumentos para ayudar a resolver problemas), los autores exponen su experiencia didáctica con reflexiones metacognitivas, realizada con dos estudiantes de 14 años de edad. Ellos resolvieron problemas después de responder un cuestionario adecuadamente elaborado, luego respondieron otro cuestionario y finalmente crearon problemas con la misma estructura de los problemas que resolvieron. Los cuestionarios consideran aspectos de los problemas, de los recursos y estrategias a emplearse para resolverlos y de la experiencia misma luego de haberlos resuelto. Los autores recogieron elementos didácticos muy valiosos y proponen desarrollar experiencias similares por ser favorables a la resolución y a la creación de problemas.

En el tercer artículo (Reformulación: una aproximación a la resolución de problemas matemáticos como indagación), Kilpatrick relieva la importancia de la resolución de problemas en la perspectiva de la indagación y la relación de esta con la formulación y reformulación de problemas. Recomienda que para la formación de profesores en esta línea, se considere preguntas de metacognición y se tenga en cuenta la demanda cognitiva de los problemas. Se refiere con amplitud a experiencias con estos enfoques; en particular al *Promoting Inquiry in Mathematics and Science education across Europe (PRIMAS).* Enfatiza que para implementar el aprendizaje basado en la indagación es fundamental considerar la creación de problemas en el marco de la indagación.

En el cuarto artículo (Creación de problemas matemáticos: un caso en el que profesores de educación básica desarrollan tareas y diseñan instrucciones en Taiwan) se presenta un estudio desarrollado con tres profesores seleccionados de un estudio previo sobre métodos factibles para estimular a los niños a crear problemas. Los profesores continuaron en la ruta iniciada, y no solo desarrollaron sus propias tareas, sino también diseñaron sus propias clases sobre creación de problemas. La experiencia didáctica fue llevada a cabo durante un año y el informe incluye estudios de diarios de los profesores, de cuadernos de los niños, de entrevistas, de grupos focales, reflexiones sobre las tareas propuestas en las clases de creación de problemas y diversas sugerencias.

Otros Avances en Creación de Problemas

El estudio meta analítico, con criterios cuantitativos, que hacen R. Rosli , M. Capraro y R. Capraro (2014) sobre los efectos de la creación de problemas en el aprendizaje matemático de los estudiantes, además de sus estimulantes resultados, brinda una visión importante sobre las publicaciones en este campo entre 1989 y 2011.

Algunas investigaciones que conocemos, realizadas en Iberoamérica, las resumimos en el siguiente cuadro:

2002	Estrategia metacognitiva en la formulación de problemas para la enseñanza de la matemática	Instituto Superior Pedagógico	Holguín, Cuba	Tesis Doctoral	Miguel Cruz Ramírez
2011	La invención de problemas y sus ámbitos de investigación	Universidad de Granada	España	Artículo	Encarnación Castro
2012	Invención-resolución de problemas por alumnos de educación primaria	Universidad de Granada	España	Tesis doctoral	María Ayllón
2013	Invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento en matemática: un estudio exploratorio	Universidad Nacional de Costa Rica y Universidad de Granada	Costa Rica y España	Artículo presentado en el I CEMACYC	J. Espinoza, J. Lupiañez, e I. Segovia
2014	Creación de problemas en la docencia e investigación	Pontificia Universidad católica del Perú - IREM	Perú	Artículo en libro	U. Malaspina y E. Vallejo
2015	Inventar problemas para desarrollar la competencia matemática	Universidad Camilo J. Cela y Universidad de Granada	España	Libro	José Fernández y Juan Barbarán
2016	Reflexión sobre el significado de qué es buen problema en la formación inicial de maestros.	Universidad de Barcelona y Pontificia Universidad Católica del Perú	España y Perú	Artículo en *Perfiles Educativos*	Alberto Mallart, Vicenç Font y Uldarico Malaspina

Cabe mencionar que Sandra Crespo, natural de República Dominicana, es una destacada investigadora en el campo de la creación de problemas. Sus investigaciones las realiza como Profesora en la Michigan State University.

En la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) se viene desarrollando la línea de investigación creación de problemas, desde el 2011. Malaspina es el promotor de esta línea de trabajo y con algunos investigadores del Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP) ha desarrollado talleres de formación de profesores de primaria y secundaria mediante sesiones de trabajo de creación de problemas. Con base en tales experiencias se vienen realizando investigaciones y propuestas de estrategias para estimular la capacidad de creación de problemas de los profesores en formación y en ejercicio y para desarrollar la competencia docente de análisis didáctico. Se han desarrollado experiencias didácticas con la estrategia para crear problemas denominada *Episodio, Problema Pre y Problema Pos* (Estrategia EPP) propuesta por Malaspina. Los *Problemas Pre* son problemas que deben crear los profesores, cuyas soluciones favorezcan la mejor comprensión y solución del problema considerado en el episodio en clase que se les presenta en los talleres. En ese sentido, se ha iniciado la investigación sobre la inclusión en la estrategia EPP de una fase de Reflexión Didáctica (Estrategia ERPP) que contribuya a poner más énfasis en consideraciones didácticas que en contenidos para elaborar los *Problemas Pre*. En estas líneas de trabajo se han publicado varios artículos de Malaspina en la *Revista Iberoamericana de Educación Matemática UNIÓN* y otros han sido expuestos en foros internacionales como ICME, PME, CERME, CIBEM y CIAEM. Asimismo, se han escrito dos tesis de maestría en enseñanza de las matemáticas: de la profesora de primaria Catherina Martínez, con el tema Estrategias para estimular la creación de problemas de adición y sustracción de números naturales a profesores de educación primaria, y del profesor de secundaria Carlos Torres, con el tema Creación de problemas sobre funciones cuadráticas por profesores en servicio, mediante una estrategia que integra nociones del análisis didáctico. También se investiga analizando los problemas creados por alumnos, de primaria, empleando los criterios de originalidad, flexibilidad y fluidez. En esta línea de trabajo está la tesis de maestría del profesor de primaria Jorge Cárdenas, con el tema Análisis de problemas de adición, sustracción y multiplicación de expresiones decimales, creados por estudiantes de 6° grado de primaria en una experiencia didáctica, y también la ya mencionada tesis de Catherina Martínez.

Ciertamente, en muchos lugares del mundo hay otras valiosas investigaciones sobre creación de problemas y seguramente hay también profesores que silenciosamente y por iniciativa propia desarrollan interesantes experiencias didácticas con creación de problemas en sus clases. Es un reto para quienes estamos comprometidos con el avance de la educación matemática, a nivel personal e institucional, detectar y apoyar esos esfuerzos.

Comentarios Finales

Esta mirada panorámica, aunque incompleta, nos permite ver parte de lo mucho que se viene haciendo en este campo de investigación y también tomar conciencia de lo mucho que hay por hacer. Una tarea importante es seguir reflexionando sobre las interrogantes planteadas por Kilpatrick (1987) y sobre las que nos dejan las diversas investigaciones mencionadas.

Para seguir avanzando en investigaciones sobre creación de problemas y contribuir a una mayor consolidación de esta línea de investigación, será muy importante que todos los educadores matemáticos le prestemos más atención, busquemos integrar enfoques y resultados e impulsemos trabajos conjuntos e interdisciplinarios. Como dicen Singer, Ellerton y Cai (2013, p. 5), retomando la propuesta de Kilpatrick (1987),

> La creación de problemas es una cuestión antigua. Lo que es nuevo es la toma de conciencia de que la creación de problemas necesita impregnarse en los sistemas educativos en todo el mundo, como medio de enseñanza (…) y como objeto de enseñanza (…) con objetivos importantes en situaciones de la vida real.

Referencias

ABU-ELWAN, R. The development of mathematical problem posing skills for prospective middle school teachers. In: International Conference on Mathematical Education into the 21st Century: social challenges, issues and approaches, 2., 1999, Cairo, Egypt. **Proceedings**... Cairo, Egypt, 1999. p. 1-8.

AYLLÓN, M. F. **Invención-resolución de problemas por alumnos de educación primaria**. 2012. 532 f. Tesis Doctoral (Didáctica de la Matemática) - Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, Granada, 2012.

BROWN, S.; WALTER, M. **The art of problem posing.** Philadelphia: Franklin Institute Press, 1983.

CAI, J. et al. Problem-Posing Research in Mathematics Education: some answered and unanswered questions. In: SINGER, F.; ELLERTON, N.; CAI, J. (Ed.). **Mathematical Problem Posing**: from research to effective practice. New York: Springer, 2015. cap. 1, p. 3-34.

CASTRO, E. La invención de problemas y sus ámbitos de investigación. In: LUPIÁÑEZ, J. L. et al. **Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática**. Granada: Universidad de Granada, 2011.

DAVIS, P. J,. What do I Know? A study of mathematical self-awareness. **College Mathematics Journal**, n. 16, p. 22-41, 1985.

EDUCATIONAL Studies in Mathematics - PME Special Issue: Problem Posing in Mathematics Teaching and Learning: establishing a framework for research, v. 83, n. 1. [S.l.]: Springer, mai. 2013.

EINSTEIN, A.; INFELD, L. **The evolution of physics**. New York: Simon And Schuster, 1938.

ELLERTON, N. Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: development of an active learning framework. **Educational Studies in Mathematics**, v. 83, n. 1, p. 87-101, mai. 2013.

ESPINOZA, J.; LUPIÁÑEZ, J. L.; SEGOVIA, I. La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática.. **Revista Digital Matemática, Educación e Internet**, v. 14, n. 2, p. 1-12, 2014.

FELMER, P.; PEHKONEN, E.; KILPATRICK, J. (Ed.). **Posing and solving mathematical problems:** advances and new perspectives. Switzerland: Springer, 2016.

FERNANDÉZ, J.; BARBARÁN, J. **Inventar problemas para desarrollar la competência matemática.** Madrid: La Muralla, 2015.

HALMOS, P. The heart of mathematics. **American Mathematical Monthly**, n. 87, p. 519-524, 1980.

KILPATRICK, J. Problem formulating: where do good problem come from?. In: SCHOENFELD, A. H. (Ed.). **Cognitive science and mathematics education**. Hillsdale, N. J.: Erlbaum, 1987. p. 123-147.

MALASPINA, U. Problem posing as a means for developing mathematical thinking. In: International Congress of Mathematicians, 2014, Seoul, Korea. **Abstracts...** Seoul, Korea, p. 658-659.

MALASPINA, U.; VALLEJO, E. Problem posing in pre-service primary school teachers' training. In: OSTERLE, S. et al. (Ed.). **Proceedings of the Joint Meeting of the PME 38 and PME-NA 36**, v. 6. Vancouver, Canadá, p. 159.

MALASPINA, U.; MALLART, A.; FONT, V. Development of teachers' mathematical and didactic competencies by means of problem posing. In: Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, 9th., 2015, Prague, Czech Republic. **Proceedings**... Prague, Czech Republic: Charles University In Prague, 2015. p. 2861-2866.

POLYA, G. **Mathematics and plausible reasoning.** Princeton: Princeton University Press, 1954.

ROSLI, R.; CAPRARO, M. M.; CAPRARO, R. M. The effects of problem posing on student mathematical learning: a meta-analysis. **International Education Studies**, v. 7, n. 13, p. 227-241, 2014.

SILVER, E. A. Problem-posing research in mathematics education: looking back, looking around, and looking ahead. **Educational Studies in Mathematics**, v. 83, n. 1, p.157-162, mai. 2013.

SINGER, F.; ELLERTON, N.; CAI, J. Problem posing research in mathematics education: new questions and directions. **Educational Studies in Mathematics**, v. 83, n. 1, p. 9-26, mai. 2013.

SINGER, F.; ELLERTON, N.; CAI, J. (Ed.). **Mathematical Problem Posing**: from research to effective practice. New York: Springer, 2015.

Uldarico Malaspina Jurado
IREM/PUCP – Pontifícia Universidad Católica del Perú
E-mail: umalasp@pucp.pe

Resolução de problemas – Entre o tudo e o nada: possíveis articulações

Problem Solving - Between all and Nothing: Possible Articulations

Rosilda dos Santos Morais
Universidade Federal de São Paulo – UNIFESP – Brasil

Andresa Maria Justulin
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – Brasil

RESUMO

O presente trabalho é resultado de uma pesquisa que se interessou por investigar a Resolução de Problemas nas frentes pesquisa acadêmica, documentos oficiais, livros didáticos e professores de sala de aula buscando possíveis articulações entre elas. Desejando por saber se (e como) a Resolução de Problemas como metodologia de ensino se articula nessas frentes, foi realizada uma pesquisa que seguiu pressupostos teórico-metodológicos da história do tempo presente. Norteada pela questão "Como (e se) as frentes livro didático, pesquisa acadêmica e documentos oficiais se articulam de modo a serem incorporadas no trabalho de sala de aula do professor de Matemática?" buscou-se apreender, o objetivo da pesquisa, nas frentes analisadas como (e se) essa produção se articula com o presente em livros didáticos, em documentos oficiais e na sala de aula de Matemática. Os resultados desta pesquisa revelaram certa confluência da pesquisa acadêmica com os documentos oficiais, discreta articulação dessas frentes com os livros didáticos, pois essa articulação não faz referência à pesquisa atual sobre Resolução de Problemas, e fragilidade no que se refere às apropriações dessas frentes no trabalho do professor de matemática de sala de aula.

Palavras-chave: Resolução de Problemas, Livro Didático, Educação Matemática, Orientações Curriculares.

ABSTRACT

This work is the result of a research that was interested in investigating the Problem Solving fronts in academic research, official documents, textbooks and classroom teachers seeking possible links between them. Interested to know whether (and how) the Problem Solving as a teaching methodology is articulated on these fronts, a research that followed theoretical and methodological premises of the history of the present time was held. Orientend by the question "How (and if) the textbook, academic research and official documents fronts are organized in order to be incorporated into the classroom work of the mathematics teacher?" we attempted to grasp, the purpose of the research, the fronts analyzed how (and if) this production is linked to the present in textbooks, official documents and mathematics classroom. The results of this research showed some confluence of academic research with the official documents, discrete articulation of these fronts with the textbooks, as this articulation makes no reference to current research on Problem Solving, and fragility in relation to appropriations of these fronts at math classroom teachers' work.

Keywords: Problem Solving, Textbook, Mathematics Education, Curriculum Guidelines.

Introdução

O fascículo temático *Resolução de Problemas na Educação Matemática* se apresenta à comunidade de pesquisadores da área, sobretudo à de Resolução de Problemas, em momento bastante oportuno haja vista a presença de discussões acalouradas sobre o tema, seja por meio de documentos oficiais, formação inicial e continuada de professores de Matemática, livros didáticos, artigos e eventos científicos, dentre outros. Assim, um temático que se propõe a reunir, em um só lugar, pesquisas que discutem tal objeto busca não só revisitar o tema, mas projetá-lo no cenário atual. Proposição essa que apresenta duas facetas, uma que se refere à maturidade da pesquisa sobre Resolução de Problemas e a outra, talvez a mais desafiadora, que se refere a pensar a Resolução de Problemas articulada com o *saber fazer* de professores de sala de aula. Por *saber fazer* entendem-se ações mobilizadas por professores no sentido de adotar a Resolução de Problemas como abordagem metodológica.

Este texto se situa nos meandros desse "passado/presente", ou seja, no âmbito da pesquisa sobre Resolução de Problemas e dos modos desse *saber fazer* atuais. Assume-se metodologicamente esta escrita como uma narrativa historiográfica do tempo presente[9]. Para tanto, recorreu-se à produção de pesquisa sobre Resolução de Problemas e buscou-se apreender como (e se) essa produção, que ganhou fôlego a partir da segunda metade do século XX, se articula com o presente em livros didáticos, em documentos oficiais[10] e na sala de aula de Matemática, sendo que para essa última foram considerados relatos de professores de Matemática da Educação Básica.

Essa articulação se justifica pelo pressuposto de que seria razoável haver uma convergência entre essas frentes, livros didáticos, documentos oficiais, pesquisa acadêmica e relato de professores, especialmente em se tratando de a Resolução de Problemas ter em seu cerne o ensino e a aprendizagem de Matemática. Essa razoabilidade é destacada no documento "GUIA de livros didáticos – PNLD, 2014..." (BRASIL, 2014) quando afirma que o livro didático tem por função, muitas vezes, levar à sala de aula modificações didáticas e pedagógicas propostas em documentos oficiais, assim como resultados de pesquisas sobre a aprendizagem da Matemática. O uso da expressão "muitas vezes" parece desobrigar o livro didático da referida função, mas ao trazer o tema para seu texto, dá a ela lugar de destaque.

Isso posto, essa pesquisa se propõe a investigar **"Como (e se) as frentes livro didático, pesquisa acadêmica e documentos oficiais se articulam de modo a serem incorporadas no trabalho de sala de aula do professor de Matemática?"**.

O foco dessa investigação foi a Resolução de Problemas como abordagem metodológica. Assumida essa posição, foram consideradas(os) orientações de documentos oficiais; resultados da pesquisa relativa a essa temática; a análise de três livros didáticos cujo critério de escolha obedeceu a duas instâncias: (1) indicados pelo PNLD e, nesses, (2) aqueles que ocupam as três primeiras posições dentre os mais vendidos. Assumiu-se na análise dos livros que o manual do professor seria um dos documentos analisados dado que esse documento é parte indissociável da obra. Por essa razão decidiu-se consultar por meio de questionário professores de sala de aula da Educação Básica a respeito de como (e se) fazem

[9]História do Tempo Presente é compreendida aqui como a escrita de uma narrativa histórica na qual o historiador investiga um tempo que é o seu próprio tempo com testemunhas vivas e com uma memória que pode ser a sua. (AREND; MACEDO, 2009).

[10]Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) e as Orientações Curriculares Nacionais – OCN (BRASIL, 2006).

uso desse material em suas aulas, como também foram investigadas questões sobre trabalho pedagógico, conhecimentos acerca da Resolução de Problemas, dentre outros.

A pesquisa e suas frentes

Situando a Resolução de Problemas historicamente

Dado que esta pesquisa se configura como uma narrativa historiográfica do tempo presente, seus elementos constituintes são Resolução de Problemas – no tempo recortado do início do século XX aos dias atuais; livros didáticos – analisados pelo PNLD, 2014; PCN (BRASIL, 1998) e OCN (BRASIL, 2006); e, por fim, relatos de professores.

Por história do tempo presente entende-se uma narrativa na qual o historiador investiga um tempo que é o seu próprio, com testemunhas vivas e com uma memória que pode ser, inclusive, a sua. O "material de trabalho" dessa história são acontecimentos[11] situados a partir do século XX, e é nesse recorte temporal que a pesquisa em Resolução de Problemas vai sendo constituída. Nesse momento da história, início do século XX, o que se vê são pesquisas que colocam acento à importância da Resolução de Problemas nas aulas de Matemática, mas não se fala ainda em metodologia de ensino.

George Polya (1945/1995)[12] recebe o papel de precursor da Resolução de Problemas na grande maioria de pesquisas sobre essa temática. É certo que os efeitos de suas pesquisas exerceram, e ainda exercem, forte influência no que hoje se sabe sobre o tema. No entanto, assumir que Polya é o "pai" da Resolução de Problemas, em essência, é lhe apontar uma origem e, nesse sentido, reconhece-se sua fragilidade, não em desacordo à produção de Polya, mas assumindo a postura de que em todo começo histórico das coisas não está a identidade ainda preservada da origem, mas a discórdia entre elas – o disparate (FOUCAULT, 2015). Nesse sentido, "a origem está sempre antes da queda, antes do corpo, antes do mundo e do tempo..." (*Ibid*., 2015, p.59) de forma que se faz necessário manter o que se passou na dispersão que lhe é própria se o desejo é o de apreender o fenômeno em estudo em sua multiplicidade. Assim, embora o trabalho de Polya (1945) constitua a base de muitas pesquisas sobre Resolução de Problemas, anterior a ele pesquisadores, como Edward Lee Thorndike por exemplo, já colocavam acento nos problemas matemáticos e relatavam sua importância no ensino de Matemática.

Guimarães (2013) afirmou que Polya foi quem, pela primeira vez, apresentou uma visão mais profunda e mais compreensiva da resolução de problemas nos currículos escolares de Matemática (GUIMARÃES, 2013). Essa pode ter sido a principal razão de esse pesquisador ser lembrado, ainda hoje, com muita ênfase quando o tema é Resolução de Problemas. Seu livro, *How to solve it: a new aspect of mathematical method*, publicado em 1945, é, se não o mais conhecido da obra de Polya, aquele que se faz presente em discursos e

---

[11] Foucault (2015), apoiado em Nietzche, define acontecimento não como "uma decisão, um tratado, um reino, ou uma batalha, mas uma relação de forças que se inverte, um poder confiscado, um vocabulário retomado e voltado contra seus utilizadores, uma dominação que se enfraquece, se distende, se envenena e outra que faz sua entrada, mascarada. As forças que se encontram em jogo na história não obedecem nem a uma destinação, nem a uma mecânica, mas ao acaso da luta" (p.73).

[12] O livro *How to solve it: a new aspect of mathematical method* teve sua primeira edição publicada em 1945. A obra consultada nesta pesquisa é uma edição de 1995.

práticas quando esse pesquisador é chamado à memória. Há ainda nesse livro, condensada em uma página, uma sequência de quatro fases que o pesquisador julgou serem aquelas que um resolvedor de problemas executa durante a resolução de qualquer problema; sejam elas: 1) compreender o problema; 2) estabelecer um plano; 3) executar o plano; e 4) examinar a solução obtida (POLYA, 1945/1995). Em muitos discursos o trabalho de pesquisa de Polya é reduzido ao que foi apresentado na referida página.

O papel da pesquisa sobre Resolução de Problemas liderado por pesquisadores norte-americanos é notório. O NCTM[13], nos Estados Unidos da América (EUA), por exemplo, ganha a cena desde o final da década de 1970 por realizar pesquisa sistemática sobre o tema de modo a ter disponibilizado à comunidade de educadores matemáticos, bem como à de professores daquele país, documentos que não só orientaram o currículo no âmbito da resolução de problemas, mas também o documento *Standards2000* que apontava a Resolução de Problemas[14] como um dos cinco Padrões de Procedimento para a Matemática Escolar. Nas recomendações dos *Standards2000* a Resolução de Problemas é recomendada na perspectiva do "através de", isto é, o ensino de um novo conceito ou conteúdo matemático deveria se dar sempre através de um problema matemático.

Seguido da publicação dos *Standards2000*, o pesquisador americano John A. Van de Walle (2001) publicou o livro *Elementary and Middle School Mathematics*, que incorpora orientações dos *Standards2000* em todos os seus tópicos, bem como em situações problema. Tanto os *Standards2000* quanto o livro de Van de Walle são diferenciais naquilo que se propuseram a fazer, incorporar a pesquisa sobre Resolução de Problemas e orientações curriculares e, ainda, ampliaram o que havia sido proposto no documento "Uma Agenda para ação[15]... (1980)", publicado no início da década de 1980 pelo próprio NCTM. Esse documento sugeria que o ensino de Matemática para aquela década fosse orientado pela Resolução de Problemas.

A perspectiva recomendada pelo NCTM para a Resolução de Problemas nos *Standards2000*, a saber, "através de", é uma das três apontadas por Hatfield (1978), retomadas por Schroeder e Lester (1989), quando disse haver três concepções sobre o trabalho com resolução de problemas: (1) o ensino sobre Resolução de Problemas; (2) o ensino para a resolução de problemas; e (3) o ensino através da resolução de problemas[16] (SCHROEDER; LESTER, 1989).

Após a mobilização, sobretudo na década de 1980, da pesquisa internacional acerca da Resolução de Problemas viu-se no Brasil a pesquisa sobre essa temática em movimento. Documentos oficiais, especialmente na década de 1990, passaram a inserir em suas orientações notas direcionando o trabalho com essa abordagem mas, ainda, no âmbito da recomendação e não da orientação. O tópico seguinte irá discorrer sobre esse tema.

---

[13] Conselho Nacional de Professores de Matemática, dos Estados Unidos.

[14] Embora a resolução de problemas tenha sido objeto de estudos pelo NCTM desde o final da década de 1970, foi somente no ano 2000 que se passou a falar em metodologia de ensino. Assim, em referência à metodologia, há quem faça uso da escrita Resolução de Problemas com R e P maiúsculos e quem o faça com r e p maiúsculos. No âmbito da técnica de resolução de problemas, neste texto será mantido r e p minúsculos e no âmbito da metodologia usarse-á R e P. Todavia não há consenso sobre isso na pesquisa de modo que muitos pesquisadores que investigam essa temática não diferenciam uma escrita da outra.

[15] "*An Agenda for Action*...(1980s)" (NCTM, 1980).

[16] Cada uma dessas concepções foram discutidas por autor 1 (2014) no artigo "Uma abordagem Histórica da Resolução de Problemas".

A Resolução de Problemas nos documentos oficiais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998) consideram que os problemas matemáticos não têm desempenhado o seu verdadeiro papel, não sendo utilizados como ponto de partida da atividade matemática mas, na melhor das hipóteses, aparecem como forma de aplicação de conhecimentos. Assim,

> A prática mais frequente consiste em ensinar um conceito, procedimento ou técnica e depois apresentar um problema para avaliar se os alunos são capazes de empregar o que lhes foi ensinado. Para a grande maioria dos alunos, resolver um problema significa fazer cálculos com os números do enunciado ou aplicar algo que aprenderam nas aulas. Desse modo, o que o professor explora na atividade matemática não é mais a atividade, ela mesma, mas seus resultados, definições, técnicas e demonstrações. (BRASIL, 1998, p. 40).

O documento ainda destaca que a Resolução de Problemas deve ser desenvolvida como uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto no qual conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas podem ser desenvolvidos.

As Orientações Curriculares Nacionais – OCN (BRASIL, 2006) retomam essas ideias e as aprofundam em termos de correntes metodológicas e de concepções de ensino e aprendizagem. De acordo com esse documento:

> A primeira concepção dá origem ao padrão de ensino “definição exemplos exercícios”, ou seja, a introdução de um novo conceito dar-se-ia pela sua apresentação direta, seguida de certo número de exemplos, que serviriam como padrão, e aos quais os alunos iriam se referir em momentos posteriores; a cadeia seria fechada com a apresentação de um grande número de exercícios, bastante conhecidos como “exercícios de fixação”.
>
> Já na segunda concepção, tem-se o caminho inverso, ou seja, a aprendizagem de um novo conceito matemático dar-se-ia pela apresentação de uma situação-problema ao aluno, ficando a formalização do conceito como a última etapa do processo de aprendizagem. Nesse caso, caberia ao aluno a construção do conhecimento matemático que permite resolver o problema, tendo o professor como um mediador e orientador do processo de ensino-aprendizagem, responsável pela sistematização do novo conhecimento. (BRASIL, 2006, p. 81).

Uma das justificativas para a segunda abordagem anteriormente explicitada considera a história da construção do conhecimento matemático que se deu a partir de problemas a serem resolvidos. Essa seria uma corrente, no entanto, pouco explorada nos sistemas de ensino, de acordo com Brasil (2006).

O livro didático e seu percurso no Brasil

Os livros didáticos têm historicamente representado, na maioria das escolas brasileiras, um material impresso utilizado como recurso didático por alunos e professores. Romanatto (2009) destaca que ele acompanhou o processo de escolarização do Brasil e apresenta algumas diferenças quanto à sua utilização ao longo do século XX. Ainda de acordo com esse autor, na primeira metade desse século, conteúdos e metodologias eram apresentados pelo professor, enquanto que nas décadas seguintes, os livros didáticos passaram a veicular conteúdos escolares e princípios metodológicos.

Em escala nacional, de acordo com informações do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), em 1929 foi criado o Instituto Nacional do Livro (INL), órgão responsável para legislar sobre políticas do livro didático. Em 1938, pelo Decreto-Lei 1006, de 30/12/38, é instituída a Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD) que estabelece a primeira Legislação do Livro Didático. Em 1976, através do Decreto n° 77.107, o governo se torna o responsável pela compra e distribuição de livros para os estados por meio do FNDE. O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) é instituído em 1985 por meio do Decreto n° 91.542.

Desde 1985, várias mudanças ocorreram no âmbito da aquisição e avaliação dos livros didáticos adotados no Brasil. Uma delas foi que em 1996 foi publicado o primeiro Guia de Livros Didáticos com o propósito de avaliar os livros a partir de critérios previamente discutidos. Ao longo dos anos o PNLD se estendeu para os anos finais do Ensino Fundamental, a partir de 1995, e para o Ensino Médio, a partir de 2005. Em 2010 o PNLD passou a atender também a Educação de Jovens e Adultos (EJA). A partir de 2014, esse programa, PNLD, incorporou objetos educacionais digitais[17] complementares aos livros didáticos e no ano seguinte, em 2015, editoras puderam apresentar obras digitais, com o mesmo conteúdo do material impresso, juntamente com os objetos educacionais digitais.

Procedimentos metodológicos

Na tentativa de responder a questão norteadora deste trabalho, **"Como (e se) as frentes livro didático, pesquisa acadêmica e documentos oficiais se articulam de modo a serem incorporadas no trabalho de sala de aula do professor de Matemática?"**, e considerando a Resolução de Problemas como foco de interesse da mesma, descrever-se-á, nesta seção, o caminho percorrido na investigação.

A partir das inquietações das autoras, iniciou-se uma revisão bibliográfica que considerou documentos oficiais resgatando-se, neles, as recomendações metodológicas sobre Resolução de Problemas. Nesse caminho, buscou-se identificar o percurso histórico de regulação do livro didático, bem como programas públicos de distribuição desse material. Ao tratar dos livros de Matemática atuais fez-se a escolha pela análise das três coleções mais distribuídas, em número, no Brasil. Foram elas: (1) *Praticando Matemática* (2012), com a distribuição de 2.831.411 exemplares; (2) *Vontade de saber Matemática* (2012), com 2.694. 730 exemplares e (3) *Projeto Teláris* (2013), com 2.274.623 exemplares distribuídos.

Para analisar os livros didáticos foi elaborada a "ficha de análise do livro didático" apresentada no Quadro 1:

[17] Conforme Edital do PNLD 2015, item **4.2.3, "**Entende-se por objetos educacionais vídeos, imagens, áudios, textos, gráficos, tabelas, tutoriais, aplicações, mapas, jogos educacionais, animações, infográficos, páginas web e outros elementos". (p.3)

Quadro 1- Ficha de Análise do livro didático

Ficha de Análise	
Conceitos e definições	Apresentados em primeiro plano
	Construídos a partir de exemplos/ problemas
	Trazidos após apresentação do tema
	Ausente
Atividades propostas	Exercícios
	Problemas fechados
	Problemas abertos
	Investigação Matemática
	História da Matemática
	Jogos
	Modelagem Matemática
	Uso de recursos digitais
Estratégia de trabalho proposto para as atividades	individual
	grupo
Recomendações aos professores (no manual)	Propõe a realização da atividade por meio da Resolução de Problemas
	Não faz referência à Resolução de Problemas
	Destaca diferentes abordagens metodológicas
	Não faz referência as diferentes abordagens metodológicas

As categorias elencadas foram pensadas de modo que, por meio delas, fossem produzidos elementos auxiliares à questão de pesquisa levantada, ou seja, por meio delas pretender-se-ia analisar como os livros didáticos recomendavam o trabalho com Resolução de Problemas, bem como se essas orientações estavam de acordo com documentos oficiais investigados.

Considera-se, assim, que este trabalho em termos metodológicos realizou uma análise documental de cunho interpretativo na qual os documentos analisados, fontes desta pesquisa, se referem tanto àqueles produzidos em um passado não muito distante quanto aos produzidos no tempo presente. Associado à essa documentação recorreu-se, ainda, a um procedimento usual da história do tempo presente que é o de interrogar atores do presente sobre seus posicionamentos em relação ao objeto investigado, neste caso os professores.

Livros didáticos analisados

Praticando Matemática

A Coleção Praticando Matemática é publicada pela editora do Brasil e seus autores são Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos. Está organizada em quatro volumes destinados às quatro últimas séries do Ensino Fundamental.

Tendo como referência o conteúdo "Números Decimais", o capítulo analisado é iniciado apresentando a notação decimal. É ressaltado o sistema decimal posicional sendo apresentados alguns exemplos numéricos, até se criar ordens à direita da unidade, conceituando-se os décimos, centésimos, milésimos, décimos de milésimos e assim por diante. O conteúdo em algumas seções do capítulo, como exemplo, adição e subtração de números decimais, é apresentado por meio de um problema envolvendo o pagamento de contas, com a finalidade de explicar o algoritmo: "Devemos somar centésimos com centésimos, décimos com décimos, unidades com unidades e assim por diante. Isso fica mais fácil se colocarmos vírgula embaixo de vírgula" (p. 208).

Em relação às tarefas propostas, as seções do capítulo dividem-se em exercícios, desafios e autoavaliação (que enfatiza testes de múltipla escolha). As seções denominadas "exercícios" trazem tanto o que Butts (1980) denomina de exercício de reconhecimento quanto exercícios algorítmicos ou problemas de aplicação .

Figura 1: Problemas de aplicação (p. 205) e exercícios algorítmicos (p. 211).

23 A temperatura normal de Rosa é 37 graus. Ela ficou gripada e observou que estava com 37,9 graus de temperatura. Tomando um antitérmico receitado pelo médico, sua temperatura baixou meio grau. Em que valor chegou a temperatura de Rosa? 37,4 graus

43 Calcule.

a) 5,237 · 10 52,37
b) 4,169 · 100 416,9
c) 8,63 · 1 000 8 630
d) 0,287 · 100 28,7
e) 1 000 · 0,9 900
f) 10 · 0,3 3
g) 4,83 : 10 0,483
h) 674,9 : 100 6,749
i) 0,08 : 10 0,008
j) 7 814,9 : 1 000 7,8149
k) 0,017 : 100 0,00017
l) 6 312,4 : 1 000 6,3124

Em relação ao trabalho em grupo, a atividade seguinte, página 212 do livro em análise, é a única nessa seção que o sugere. Ela, no entanto, pressupõe mais uma consulta ao colega do que favorece a construção do conhecimento matemático coletivamente.

Vamos multiplicar 2 por um número menor que 1, como 0,8, por exemplo: 2 · 0,8 = 1.6.
O produto 1,6 é menor que 2.
1. Use a calculadora para efetuar 84,5 · 0,38.
O produto obtido é maior ou menor que 84,5?
2. Discuta com os colegas: o que acontece com o produto quando multiplicamos um número por outro menor que 1?

Ao longo do capítulo do livro em análise pôde-se notar, também, uma preocupação dos autores em mostrar a presença dos números decimais em jornais, na ciência, no comércio e no dia a dia. A atividade proposta na página 212 desse livro é um exemplo:

1. Procure em jornais ou revistas: notícias, tabelas, gráficos, anúncios em que apareçam números decimais. Recorte-os e cole em seu caderno. Escreva cada um por extenso e explique o tipo de aplicação que ele tem: registro de uma medida, preço, dados econômicos etc.
2. Você já utilizou algum número decimal hoje? Em que situação?

Sobre as recomendações aos professores relacionadas ao trabalho com Resolução de Problemas, o livro traz uma subseção intitulada "Matemática e resolução de problemas". Nela o autor aborda os passos de Polya (1945) e os cinco tipos de problemas matemáticos propostos por Butts (1980): exercícios de reconhecimento, exercícios algorítmicos, problemas de aplicação, problemas de pesquisa aberta e situações-problema. Não são realizadas no manual do professor referências às outras abordagens metodológicas elencadas na "ficha de análise do livro didático".

Vontade de saber Matemática

O livro "Vontade de Saber Matemática", dos autores Joamir Roberto de Souza e Patrícia Rosana Moreno Pataro, é publicado pela editora FTD. Essa coleção está organizada em quatro volumes destinada aos anos finais do Ensino Fundamental. No manual do professor ressalta-se que

> Durante o desenvolvimento dos capítulos há uma preocupação em trabalhar os conteúdos em uma proposta de currículo em espiral, ou seja, os conteúdos são retomados em vários momentos com uma complexidade gradativa, tratando os quatro eixos temáticos de maneira equilibrada. (SOUZA; PATARO, 2012, p. 5, manual do professor)

O início do capítulo apresenta um texto sobre cronometragem ressaltando o uso de aparelhos capazes de registrar décimos, centésimos ou milésimos de segundo. Se apropria desse exemplo para tratar conceitos e definições e em seguida apresenta o conceito de Décimo.

Em relação às tarefas propostas pode-se destacar que o livro apresenta problemas-padrão, o que não possibilita em sua resolução o uso de diferentes estratégias. Em geral, o problema admite solução única bastando o aluno operar com os dados do enunciado.

O capítulo analisado não faz referência a nenhuma das temáticas em análise presentes na "ficha do livro didático". As atividades sugeridas não trazem orientação no que se refere à disposição dos alunos para a realização das atividades propostas, se individual ou em grupos. Ao final do capítulo sugere-se o uso do programa computacional *Microsoft Mathematics®* para trabalhar conversões de unidades de medidas e operações com decimais. É apresentada também uma atividade de revisão e alguns testes de múltipla escolha, sendo um deles da prova do SARESP (Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar - SP).

O manual do professor apresenta orientações gerais sobre (1) estrutura da obra, (2) conteúdos da coleção e (3) orientações didáticas e metodológicas. A seção (3) trata dos objetivos da Matemática para o Ensino Fundamental, da seleção de conteúdos, do trabalho interdisciplinar, dos temas transversais, da avaliação, do papel do professor e dos recursos didáticos (História da Matemática, Atividades com jogos e recursos tecnológicos). Ao trabalhar com o capítulo em análise sugere o jogo "Dominó dos Números Decimais" como alternativa pedagógica.

O Catálogo dessa coleção[18], documento que divulga a obra, põe ênfase no uso de uma "Metodologia baseada na resolução de problemas, com conteúdo distribuído em espiral" (p. 4), embora não tenha sido identificado como a abordagem citada é trabalhada, nem mesmo no Manual do Professor.

Catálogo da Coleção "Vontade de Saber Matemática", disponível em: https://issuu.com/editoraftd/docs/pages_from_folder_vontadesabermatem?e=2795367/4555973.

Projeto Teláris: Matemática

O Projeto Teláris – Matemática é uma coleção elaborada por Luiz Roberto Dante e publicada pela editora Ática. O conteúdo analisado, Números Decimais, é tratado no sétimo capítulo do livro do 6º ano. O início do referido capítulo apresenta uma introdução, por meio de um texto, dos "números com vírgula". Nesse texto, publicado em 8 de setembro de 2010, são apresentados dados sobre o aumento anual de pescado por pessoa no Brasil, indicando um crescimento de 6,46 kg para 9,03 kg, entre 2003 e 2009, número que representa 39,78% de aumento no período. A partir desses números o autor destaca que eles estão escritos "na forma de número decimal ou na forma decimal" (DANTE, 2013, p. 190).

Em relação à apresentação dos conceitos e conteúdos, ao tratar do conceito de décimos, o autor lança mão de dois exemplos: o termômetro, em que "cada grau é dividido em dez partes iguais, ou seja, cada parte corresponde a um décimo do grau" (p. 191), e a régua, em que "cada centímetro (cm) tem 10 milímetros (mm). Logo, cada milímetro corresponde a $\frac{1}{10}$ do centímetro" (p.191).

No capítulo analisado as tarefas propostas envolvem desde exercícios e cálculo mental até problemas fechados. No final do capítulo, na seção "Outros contextos", são apresentados problemas relacionados ao contexto do fazer compras. Outras seções como Tratamento da Informação, Revisão Cumulativa e Ponto de Chegada completam o capítulo.

Ao longo do texto alguns problemas estimulam o trabalho em duplas ou grupos, como o da página 216 do referido livro, apresentado logo a seguir:

Projeto em equipe: a classe vai ao supermercado

Reúna-se com seus colegas e façam uma pesquisa de preços da cesta básica de sua cidade. Comparem os preços de várias marcas de um mesmo produto. Depois calculem a porcentagem das diferenças de preço. Veja, por exemplo, os ingredientes da cesta básica de Brasília.

carne(6,0kg)	feijão (4,5 kg)	farinha(1,5kg)	tomate(9,0kg)	café (600g)	açúcar(3,0kg)	manteiga(750g)
leite(7,5l)	arroz(3,0kg)	batata (6,0kg)	pão (6,0kg)	banana (7,5dz)	óleo(900ml)	

O manual do professor apresenta a coleção, enfatizando as recomendações dos PCN com destaque para o "ensinando por compreensão", a integração, a interdisciplinaridade e a formulação e resolução de problemas. São apresentados os objetivos para o ensino de matemática e recomendados o uso de recursos didáticos auxiliares, como livros paradidáticos, calculadora, jornais, revistas e folhetos de propagandas, computador, jogos, divertimentos e quebra-cabeças. A organização de uma sala ambiente ou laboratório de ensino também é recomendada.

Nesse documento há uma seção exclusiva para a "Formulação e resolução de problemas". Nela, são apresentados os objetivos de se trabalhar a resolução de problemas, as etapas de resolução de um problema, conforme Polya (1945/1995), e são apresentadas ao professor sugestões para o trabalho com resolução de problemas em sala de aula. Essas últimas abarcam recomendações: começar com problemas mais simples, fortalecendo a autoestima e autoconfiança do aluno; valorizar o processo e não apenas o resultado; incentivar a comunicação matemática, solicitando que o aluno explique como resolveu o problema; estimular a verificação da resposta; utilizar o erro como possibilidade para a construção de uma ideia nova; orientar que o aluno descubra por si a solução; propor que os alunos inventem seus problemas ou que os formulem a partir de uma resposta dada; não apressar os alunos quando estão pensando sobre um problema; montar um “banco de problemas”, por assunto ou nível de dificuldade.

O autor apresenta no final dessa seção um problema, para ser discutido em classe, como exemplo ao professor. A situação abordada envolve um problema e o autor vai, passo-a-passo, indicando as etapas propostas por Polya para a resolução de problemas e tecendo comentários gerais ao professor. As orientações são iniciadas com a seguinte sugestão: “seria interessante que na primeira semana de cada ano você discutisse com a classe um exemplo como este que vamos analisar. Assim, sempre que o aluno for resolver um problema, lembrará destas fases [POLYA, 1945/1995] e destes cuidados a tomar” (DANTE, 2013, p. 27, manual do professor).

Relato dos professores investigados

Ao iniciar a investigação nos livros didáticos, nos documentos oficiais e na pesquisa sobre Resolução de Problemas buscando possíveis articulações entre essas frentes emergiu a necessidade de saber de professores da Educação Básica se (e como) faziam uso do manual do professor, parte integrante do livro didático, em suas atividades de sala de aula. O manual tem, por função, o papel de auxiliar a obra, o livro, no processo de ensino e aprendizagem (GUIA, 2014). Nesse sentido, a investigação nos livros contemplou também os manuais haja vista sua função, antes citada. Nessa esteira, as articulações investigadas poderiam estar, também, nesses documentos e, na iminência disso, sua utilização pelos professores parecia convergir à uma articulação em sua inteireza. Isso posto, interrogar professores passou a ser uma necessidade.

Assim, foi elaborado um questionário, que foi entregue a sete professores, desejando saber não só sobre o livro didático e o manual, mas sobre Resolução de Problemas, sobre documentos oficiais e sobre a pesquisa em Resolução de Problemas. Os professores entrevistados foram escolhidos por proximidade deles com uma destas pesquisadoras.

Uma questão que surgiu durante a realização desta pesquisa foi pensar sobre qual seria um bom número de professores a ser entrevistado. Diante dessa inquietação, seguida de muitas discussões, decidiu-se não alargar o número de interrogados haja vista que o que se buscava não era conhecer o quantitativo dos que fazem, ou não, uso do manual, do livro didático etc., mas saber se havia proximidade dele, o entrevistado, com os manuais, com documentos oficiais etc. Assim, o número de entrevistados não era o foco, mas o que cada um deles poderia dizer sobre o que estava sendo interrogado.

Dos questionários aplicados foram analisados apenas quatro, cujo critério de seleção obedeceu a entrega dos mesmos em tempo para a escrita deste texto. Seus resultados serão apresentados no texto que segue.

Na primeira questão, “O que é a Resolução de Problemas para você?”, observou-se pouco conhecimento dos professores acerca da Resolução de Problemas como metodologia e em nenhuma das respostas se percebe convergência com as frentes em análise, ao menos no âmbito da pesquisa e documentos oficiais. O que se nota são mais as impressões dos professores acerca da resolução de problemas como prática do que indícios da pesquisa em seus discursos.

Dentre as respostas, a resolução de problemas foi apontada como técnica de resolver problemas, método de organização de dados e a resolução de problemas sendo trabalhada por meio de situações da vida real, conforme excertos a seguir:

> P1: "É resolver problemas utilizando técnicas que permitem identificar os tipos de problemas e suas possíveis resoluções (sic)".
>
> P2: "É um método de organização de dados que desenvolve o raciocínio e possibilita a interação de forma clara e objetiva, ou seja, a solução não está disponível no início, é preciso construí-la, isto porque é preciso compreender a situação, e reconhecer a ação que se deve utilizar para agir sobre tal situação (sic)".
>
> P3: "Trabalhar com uma situação real na qual o aluno irá resolver junto com a classe utilizando seus conhecimentos (sic)".
>
> P4: "Usar a resolução de problemas para facilitar a transmissão de conhecimentos (sic)".

Na segunda questão, que interrogou sobre "se o professor faz uso da Resolução de Problemas em suas aulas", e, para o caso de a resposta ser "sim", como faz, não houve em nenhuma das respostas aproximações com as orientações das frentes documentos oficiais e pesquisa em Resolução de Problemas. Um deles, P3, afirma já ter tentado trabalhar com Resolução de Problemas, mas que não teve o objetivo atingido. Esse professor não explicita o que seria "objetivo atingido" e parece haver um desejo, não revelado, de dizer mais sobre, mas a resposta parou nisso.

A partir da resposta de P3 à questão 1, quando disse "Trabalhar com uma situação real na qual o aluno irá resolver junto com a classe utilizando seus conhecimentos", nota-se que havia algo a ser problematizado nessa resposta, caso fosse o questionário uma entrevista semi-aberta, por exemplo, buscando identificar o que, de fato, ele sabe sobre Resolução de Problemas, uma vez que suas respostas deixam indícios de que ele sabe mais de resolução de problemas do que a técnica comum nas aulas de Matemática. No entanto, ficamos com o que foi exposto.

Todas as respostas à questão 2 foram afirmativas, isto é, fazem uso da Resolução de Problemas em suas aulas mas, ao justificar "como", nota-se que não se fala da Resolução de Problemas, mas de estratégias adotadas para uma aula de Matemática no sentido de aplicação da Matemática na vida real ou mesmo de resolução de problemas como técnica. O relato a seguir é um exemplo disso:

> "Sim, lanço mão de situações do dia-a-dia para demonstrar onde e como são aplicadas a matemática e sua importância para qualquer área do conhecimento" (*sic*).

A questão 3, "Assumindo que se utiliza da Resolução de Problemas, como inicia um novo conteúdo?" é emblemática para o que vimos conjecturando anteriormente, de que os professores interrogados desconhecem o que diz a pesquisa atual sobre Resolução de Problemas e documentos oficiais. Nas respostas, exceto uma, afirmam que iniciam um novo conteúdo sempre com situações da vida real. Não que essa afirmação esteja errada, mas ela não atende ao que dizem as frentes em análise. A excessão está na resposta do P3. Percebe-se que ele, de fato, tem algum conhecimento da pesquisa sobre Resolução de Problemas. Em sua resposta, ele diz:

> “A partir de um problema (real ou não), define-se a metodologia a ser utilizada, que no caso é o conteúdo a ser ensinado” (*sic*).

Todos os professores afirmaram na questão 4, que interessou por saber se os professores já haviam lido “as orientações sobre Resolução de Problemas nos PCNs, Diretrizes Curriculares ou no Livro Didático”, já terem lido todos os documentos. O P3, antes citado, diz ter lido não só os documentos que compõem as frentes em análise nesta pesquisa, mas livros específicos sobre Resolução de Problemas e, nesse caso, cita Polya, como também demais livros didáticos além dos que utiliza em suas aulas. Nota-se aqui que nossa hipótese anterior, quando supusemos que esse professor sabia mais sobre Resolução de Problemas do que a mera técnica, parece se efetivar. Verifica-se em suas respotas que ele não soube bem dizer sobre o que sabe, muito provavelmente porque não a utiliza em suas aulas, mas que já teve algum conhecimento adquirido sobre o tema.

A quinta pergunta do questionário desejou saber em que medida o manual do livro didático auxilia as aulas do professor, se ele recorre às orientações lá propostas e, para o caso de resposta afirmativa, se percebe orientações naquele documento que são indicativas da Resolução de Problemas.

As respostas para essa pergunta foram diversas, às quais serão apresentadas logo a seguir:

> P1. “Nem sempre, pois a maioria dos livros didáticos não trazem informações sobre R.P, mas preparo as aulas em casa utilizando estratégias pessoais dentro dos conteúdos a ser trabalhado. Proponho pesquisa aos alunos instigando-os a entender e organizar dados para resolução de problemas” (*sic*).
>
> P2: “Sim, o livro didático utilizo algumas situações como atividades e sugestões no guia do professor” (*sic*).
>
> P3: “Muitas vezes os conteúdos do livro didático são expressos na forma de um problema prático que auxilia o professor no ensino do mesmo” (*sic*).
>
> P4: “Não utilizo com frequência” (*sic*).

Como foi dito antes, ouvir os professores foi uma escolha que suscedeu à pesquisa das frentes inicialmente definidas nesta pesquisa. Nessa ação desejou-se saber, primeiramente, sobre sua aproximação com o manual do professor. O Guia do Livro Didático (2014) afirma que esse documento deve sempre acompanhar a obra didática, pois ele é um instrumento privilegiado para que ela possa cumprir seu papel como auxiliar do processo de ensino e aprendizagem. Diante dessa afirmação, as respostas apresentadas anteriormente para a questão cinco são pouco representativas para os objetivos desta pesquisa se o desejo era o de saber sobre apropriações pelo professor das orientações do manual. Além disso, percebe-se, no caso dos livros, que a apropriação das atividades não parece ser orientada por pesquisas ou por orientações de documentos oficiais, mas por uma abordagem particular do que se acredita ser a melhor estratégia de trabalho. Essas estratégias dizem do perfil do professor, de suas escolhas e não do que orientam documentos oficiais etc.

Diante das respostas à questão cinco e a partir do que diz o Guia sobre a função do manual do professor pode-se afirmar que a obra escolhida pelo professor pode ter seu aproveitamento comprometido se o manual não for utilizado conjuntamente. Além disso, ao se considerar o foco de investigação desta pesquisa, pensar possíveis articulações entre as frentes analisadas, o não uso do manual como instrumento auxiliar da obra fragiliza possíveis articulações lá existentes, pois elas não são incorporadas na prática docente, haja vista que seu uso ou é inexistente ou é esporádico. É possível notar que em duas das respostas ou o professor não faz uso das orientações do manual ou faz pouco uso. No caso das respostas afirmativas, os professores não deixam claro como fazem o uso, apenas afirmam que recorrerem às sugestões lá presentes.

A questão seis deveria ter sido respondida apenas para os que disseram "sim" na anterior. Ela buscou saber do professor o que achou das recomendações dos PCNs, das diretrizes curriculares e do manual do livro didático sobre Resolução de Problemas. Nesse caso, o P2, que mencionou o uso esporádico do manual, disse que há outras formas de ensinar que não as sugeridas na questão, enquanto que, para outro professor, P1, embora os PCNs e OCNs digam como deve ser o trabalho com Resolução de Problemas, o livro didático não dá conta disso. Esse professor foi o mesmo que disse não haver manual na maioria dos livros.

As demais questões, sete, oito, nove e dez, buscaram saber sobre (7) se os professores acham que o livro didático possibilita o trabalho com Resolução de Problemas; (8) qual o envolvimento (ou desempenho) dos alunos em uma aula que tem a Resolução de Problemas como metodologia; (9) em que medida ele, professor, têm acesso à pesquisa acadêmica, sobretudo a pesquisa em Resolução de Problemas; e, por fim, (10) se acredita que as orientações dos documentos oficiais, a pesquisa sobre Resolução de Problemas e o livro didático "estão alinhadas". Para a questão dez, em caso de resposta afirmativa, foi interrogado em que medida.

Sobre essas últimas questões, as respostas foram parecidas. No caso da questão sete, elas foram todas muito vagas, sendo que em nenhuma foi evidenciada a Resolução de Problemas como possibilidade de trabalho nos livros didáticos. O mesmo se manteve na questão oito, com respostas também muito incipientes destacando, apenas, o caráter lúdico de atividades diferenciadas, por vezes propostas pelos professores em suas aulas. Os professores disseram trabalhar com Resolução de Problemas na questão dois mas, quando foram interrogados naquele momento sobre como o fazem, identificou-se que não se fala da metodologia, mas da técnica de resolver problemas, como antes destacado. Por essa razão, estebelecendo um paralelo com a questão oito, é possível notar a razão da incipiência citada tendo em vista que não trabalham com a metodologia, embora tenham relatado que sempre que possível propõem atividades diferenciadas, o que não coaduna com os objetivos desta pesquisa.

Quando interrogados sobre se têm acesso à pesquisa acadêmica, um deles, P1, afirmou que ou faz pesquisa pessoal ou participa de cursos de capacitação, enquanto que o outro, P3, disse que o acesso à pesquisa acadêmica é fácil, que está disponível na *internet*, mas que o interesse por esse tipo de pesquisa é pequeno.

Quanto à questão dez, uma das respostas afirma que há alinhamento entre as frentes enquanto que outra responde apenas que “Não”. Por outro lado, nas outras duas respostas, um não respondeu e o outro disse apenas que as diretrizes curriculares do Paraná orientam o ensino por meio da Resolução de Problemas, mas não relaciona essa orientação com os livros didáticos.

Considerações Preliminares

Desde a interrogação apresentada no início desta pesquisa se passou algum tempo até a escrita desta parte do texto em específico. Tempo esse destinado a investigar articulações possíveis entre pesquisa, documentos oficiais, livros didáticos e relatos de professores de Matemática sobre Resolução de Problemas. Essas articulações pareciam desde o início razoáveis dado que a produção de pesquisa sobre essa temática tem, em uma de suas frentes, o ensino e a aprendizagem de Matemática de sala de aula. Assim, considerar essas articulações seria assumir que a pesquisa acadêmica tem seus resultados repercutidos na sala de aula por alguma via que, nesse caso, assumiu-se ser o livro didático. Não obstante diagnosticou-se que era preciso saber de professores de sala de aula como fazem uso do livro didático, bem como do manual do professor, aquele que traz recomendações sobre o desenvolvimento das atividades propostas na obra.

Isso posto, a questão de pesquisa “Como (e se) as frentes livro didático, pesquisa acadêmica e documentos oficiais se articulam de modo a serem incorporadas no trabalho de sala de aula do professor de Matemática?” carece de resposta, dado o caminhar da pesquisa. Mediante a essa necessidade, nos resultados desta pesquisa identificou-se confluência entre algumas das frentes analisadas no que concerne ao trabalho com Resolução de Problemas.

Em primeira instância, essa confluência ocorre em dois dos livros didáticos analisados, mas pode-se afirmar que ela não atende aos pressupostos atuais da pesquisa sobre Resolução de Problemas, isto é, a Resolução de Problemas na perspectiva do “através de”, mesmo tendo a pesquisa falado muito sobre esse tema, especialmente em teses e dissertações de mestrado e de doutorado, respectivamente. A abordagem identificada se concentra na perspectiva do “para”, citada no tópico 2 deste texto, pois se pode perceber orientações no sentido de ensinar um conceito matemático “para”, então, resolver problemas. Embora em uma das obras analisadas tenha sido afirmado que a obra foi pensada de modo que a Resolução de Problemas fosse trabalhada em espiral, não foi possível identificar na pesquisa realizada como os autores o fizeram. O que se viu em dois dos três livros analisados sobre a temática investigada foram citações das quatro fases que um resolvedor de problemas executa na resolução de qualquer problema, citadas por Polya (1945). Nesse sentido, cabe interrogar “A quem interessa a pesquisa sobre Resolução de Problemas realizada a partir de Polya? Estaria a academia produzindo pesquisa para atender apenas a seus interesses? Quais os meios que deveriam ser seguidos para que a pesquisa acadêmica chegasse à sala de aula? E, por fim, interroga-se se é mesmo interessante, e para quem, que ela, a pesquisa acadêmica, chegue à sala de aula?” Essas questões ganham significado na medida em que se considera que a Resolução de Problemas tem em seu cerne o ensino e a aprendizagem de Matemática. Por essa razão, e por conta de orientações presentes em documentos oficiais, parece fazer algum sentido levantá-las.

Outro aspecto, ainda relacionado ao livro didático e ilustrado nesta pesquisa, refere-se aos tipos de atividades apresentadas ao professor. É sabido que em sala de aula muitos professores fazem uso do livro didático diariamente e que, sendo as atividades sugeridas não adequadas ou que tragam problemas fechados em sua maioria, seu uso pode justificar o distanciamento em relação às pesquisas acadêmicas ou recomendações oficiais dado que os livros não atendem as recomendações desses últimos. Pesquisas internacionais, como a desenvolvida por Vicent e Stacey (2008); e Kaur e Yeap (2009), colocam acento nos tipos de questões de exames e de livros didáticos afirmando que eles interferem na aplicação da Resolução de Problemas em sala de aula por parte do professor.

No âmbito das orientações sobre Resolução de Problemas presentes nos livros didáticos analisados percebeu-se que elas se mostram generalistas, sendo plausível questionar sua apropriação pelo professor de Matemática de sala de aula. Nesse sentido buscou-se, por meio de relatos de professores, vislumbrar confluências entre os cenários em análise:

A primeira refere-se ao professor que afirma conhecer os documentos oficiais e pesquisas acadêmicas sobre Resolução de Problemas, mas que não trabalha com essa metodologia de ensino por achá-la difícil ou mesmo por afirmar que esse tipo de pesquisa não é de interesse do professor;

A segunda possibilidade envolve o trabalho de professores que afirmam conhecer os documentos e recomendações oficiais e dos livros didáticos, mas que se distanciam das pesquisas em Resolução de Problemas e dessas orientações.

Por fim admite-se que a pesquisa acadêmica deveria orientar documentos oficiais e isto foi identificado nesta pesquisa como uma das articulações buscadas; por consequência, essas orientações deveriam ser consideradas na escrita de livros didáticos a fim de auxiliar o trabalho do professor de sala de aula. No que foi observado pode-se afirmar que ainda que se tenha notado confluências entre as frentes, pesquisa acadêmica, documentos oficiais e livro didático, ela é pouco significativa tanto no texto que se apresenta no livro didático quanto na apropriação pelo professor daquilo que o livro propõe, haja vista que ele, o professor, afirma não ter acesso à pesquisa, como destacou um deles ao afirmar que a pesquisa sobre Resolução de Problemas é de fácil acesso, mas que não é de interesse do professor pesquisá-la. Todos os professores consultados relataram ter tido acesso às orientações de documentos oficiais, mas não se observa, em seus relatos, apropriações delas. Como fazer para despertar esse interesse, dado que a pesquisa afirma que o trabalho com Resolução de Problemas produz resultados significativos?

Considerações finais

Como encaminhamentos desta pesquisa poder-se-ia apresentar como sugestão, para esse “despertar de interesse”, projetos que colocassem o professor como parte da equipe de produção de pesquisa, de documentos oficiais e de livros didáticos, isto é, o professor seria um dos produtores daquele que viria a ser seu instrumento imediato de trabalho, neste caso o livro diático, documentos oficiais e pesquisa. Reconhece-se no presente, trabalhos que vêm sendo realizados nessa direção, especialmente na produção de livro didático, mas as obras analisadas nesta pesquisa não contemplaram essa dinâmica.

Por fim, entre “o tudo e o nada” destaca-se a presença do “tudo” no âmbito da pesquisa, uma articulação evidente dela para com documentos oficiais, pouco impacto na escrita de livros didáticos e nenhuma ou uma mínima apropriação por parte de professores de Matemática de sala de aula no exercício de seu ofício. Nesse universo de tantas variáveis, as possíveis articulações buscadas entre “o tudo” e “o nada” se lhes apresentam como a fragilidade de uma teia incompleta. Tal metáfora revela-se adequada visto que as frentes analisadas nesta pesquisa estão em “processo de”, com fios ainda não tecidos no tempo presente.

Referências

AREND, S. M. F.; MACEDO, F. Sobre história do tempo presente. **Revista Tempo e Argumento** – Revista do Programa de Pós-Graduação em História, v.1, n.1, Florianópolis, p.201-216. Jan./jun.2009.

ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. **Praticando matemática**, 6. 3. ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012. (Coleção praticando matemática).

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental: Matemática**. Brasília, 1998.

______. Ministério da Educação. Secretária de Educação Básica. **Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. v.3 Ciências Humanas e suas tecnologias. Brasília - DF, 2006.

BUTTS, T. Formulando problemas adequadamente. In: KRULIK, S.; RAYS, R. **A resolução de problemas na matemática elementar.** São Paulo: Atual, 1997.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris:** Matemática, 6º ano. 1.ed. São Paulo: Ática, 2013. (Coleção Projeto Teláris: Matemática).

FOUCAULT, M. **Microfísica do Poder**. Paz e Terra: 3ª ed. Rio de Janeiro/São Paulo: 2015.

GUIMARÃES, H. M. Polya e as capacidades matemáticas. **Educação e Matemática**, [S.I], n.114, p.28-36, 2011. Associação dos Professores de Matemática (APM).

LAJOLO, M. Livro didático: um (quase) manual do usuário. **Em aberto**, ano 16, n. 69, Brasília, 1996.

KAUR, B.; YEAP, B. H. Mathematical problem solving in Singapore schools. In: KAUR, B.; YEAP, B. H.; KAPUR, M. (Ed.) **Mathematical Problem Solving:** yearbook 2009. Singapore: Association of Mathematics Education and World Scientific, 2009. P. 3-13.

Autor 1. Uma Abordagem Histórica da Resolução de Problemas. In: ONUCHIC, L. R. et al. (Orgs.). In: **Resolução de Problemas:** Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 17 - 34.

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics. **An Agenda for Action**. Reston: NCTM, 1980.

OLIVEIRA, E. M. Q. **O uso do livro didático de matemática por professores do ensino fundamental.** 2007. 152f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007.

PÓLYA, G. **How to solve it:** A new aspect of mathematical method, Princeton, USA, Princeton University Press, 1945. Edição consultada: 1995.

ROMANATTO, M. C. **O Livro Didático:** alcances e limites. Disponível em http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas_redondas/mr19-Mauro.doc. Acesso em 13/04/2009.

SCHROEDER, T.L., LESTER Jr., F.K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P.R., SHULTE, A.P. (Ed.) **New Directions for Elementary School Mathematics**. National Council of Teachers of Mathematics, 1989. (Year Book).

SOUZA, J. R. ; PATARO, P. R. M. **Vontade de saber matemática**, 6º ano. 2. ed. São Paulo: FTD, 2012.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics.** New York: Longman, ed. 4, 2001.

VICENT, J.; STACEY, K. Do mathematics textbooks cultivate shallow teaching? Applying the TIMSS Video Study criteria to Australian Eighth-grade mathematics textbooks. **Mathemaatics Education Research Journal**, 2008, 20, 1, p. 82-107.

Rosilda dos Santos Morais
Departamento de Ciências Exatas e da Terra – DECET – UNIFESP, campus Diadema - Brasil
E-mail: rosildamorais7@gmail.com

Andresa Maria Justulin
Departamento Acadêmico de Matemática – DAMAT – UTFPR, campus Cornélio Procópio - Brasil
E-mail: andresa_justulin@yahoo.com.br

Interfaces entre as tecnologias digitais e a resolução de problemas na perspectiva da educação matemática

Interfaces between digitals tecnologies and problem solving in the mathematic education perspective

Adriana Richit
Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS – Brasil

RESUMO

Nesse ensaio teórico propomos algumas reflexões sobre as tecnologias digitais e o modo como participam, histórica e culturalmente, do processo de produção de conhecimento. Do mesmo modo, apresentamos considerações sobre a resolução de problemas, na perspectiva da educação matemática, evidenciando aspectos históricos, políticos e epistemológicos no que se refere ao processo de apropriação de conhecimentos em matemática e a formação matemática dos estudantes. A partir dessa abordagem inicial buscamos deflagrar reflexões e entendimentos sobre as relações entre as tecnologias e a resolução de problemas, enfatizando as interfaces entre ambas e as possibilidades que emergem da articulação dessas na abordagem de conceitos matemáticos, sobretudo na educação básica. Dessa abordagem destacaram-se as interfaces política, pedagógica, epistemológica, histórica e social.

Palavras-chave: Tecnologias Digitais. Resolução de Problemas. Educação Matemática.

ABSTRACT

In this theoretical essay, we offer some reflections on the digital technologies and on the way in which they participate, historically and culturally, of the process of knowledge production. Similarly, we present considerations about “problem solving” in the perspective of mathematics education, emphasizing the historical, political and epistemological aspects regarding the process of knowledge appropriation in mathematics and the mathematical training of students. From this initial approach, we seek to spark ideas and understandings about the relationship between digital technologies and problem solving, emphasizing the interfaces between them and the possibilities that emerge from the articulation of these technologies in the approach of mathematical concepts, especially in basic education. From this approach, the political, pedagogical, epistemological, historical and social interfaces were highlighted.

KeyWords: Digital Technologies. Problem Solving. Mathematic Education.

Introdução

A necessidade de qualificar a educação e promover mudanças nos processos de ensino e aprendizagem requer encaminhamentos pedagógicos distintos dos procedimentos pedagógicos clássicos, os quais, em geral, privilegiam a exposição verticalizada e estática do conhecimento. Diante disso, repensar a prática educativa em matemática aponta para a emergência de novas bases sobre as quais a prática docente possa apoiar-se, na qual o professor deixa de ser a figura principal do processo, tornando-se mediador, promovedor de situações mobilizadoras da aprendizagem, cuja postura precisa favorecer o diálogo, as relações interpessoais, a investigação, a reflexão e, portanto, a apropriação de conhecimentos.

Nessa perspectiva, consideramos que nos vários momentos da prática educativa em matemática – planejamento, concretização do processo de ensino, avaliação-reflexão, replanejamento – o professor precisa ser o mobilizador da aprendizagem dos estudantes, de modo que a partir de uma estratégia pedagógica qualificada e dinamizadora envolvem-se em atividades investigativas e desafiadoras, fazendo referência a situações diversas, por meio das quais conceitos matemáticos curriculares são abordados. Para tanto, a formação do professor precisa propiciar-lhe embasamento e vivências que lhe dê condições de promover novas práticas. Em outras palavras, o professor, em seu processo de formação, precisa vivenciar diferentes tendências no ensino da matemática, por meio das quais constitua as bases da sua prática docente em sala de aula, prática essa comprometida com a apropriação de conhecimentos por parte do estudante.

Compreender a apropriação de conhecimentos em Matemática como um processo dinâmico e investigativo implica uma mudança paradigmática em termos da prática pedagógica de sala de aula, na qual professor e estudantes tornam-se sujeitos do processo, ao tempo que dinâmicas e atividades diferenciadas embasam esse processo. Em outras palavras, a mudança de papeis de professores e alunos nesse ambiente diferenciado deflagra mudanças na organização da escola e, sobretudo, da sala de aula, a qual torna-se espaço investigativo de aprendizagem, resultado de um movimento de interação entre sujeitos e conhecimento.

De acordo com esse entendimento, a formação matemática propiciada na Educação Básica precisa promover o engajamento do sujeito em seu processo de desenvolvimento social, cultural, cognitivo e formação integral como cidadão, dimensões essas que requerem práticas pedagógicas qualitativamente diferentes e emancipadoras. Em tais práticas deve-se considerar a complexidade do contexto social, os novos papéis sociais da escola, as múltiplas possibilidades de práticas interdisciplinares e, principalmente, as tendências pedagógicas emergentes mediante o movimento de mudanças sociais e educacionais.

Assim entendida, uma prática pedagógica coerente com essas mudanças requer ambientes diferenciados de aprendizagem, em que se promovam contextos de investigação e reflexão, privilegiando a formação ampla do estudante. A sala de aula – seja ela a sala clássica constituída de lousa e giz apenas ou laboratório de ensino, laboratório de informática, sala digital – constitui-se em ambiente de aprendizagem, espaço de desenvolvimento de novas práticas, bem como espaço de investigação e reflexão, onde interagem alunos e professores no movimento do conhecimento. Na perspectiva dessa compreensão, em tais espaços a abordagem de conceitos e a apropriação do conhecimento são deflagradas a partir de processos permeados por atividades desafiadoras, mediadas por recursos diversos.

Essas compreensões, somadas à necessidade de qualificar a educação pública, têm mobilizado estudos na região de inquérito denominada educação matemática, que tomam como foco investigativo as práticas pedagógicas de sala de aula, buscando evidenciar as possibilidades de novas práticas e tendências diversificadas. Tais estudos, por sua vez, têm mobilizado a criação de novas políticas públicas – Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN-1997) e as Orientações Curriculares Nacionais (OCN-1998), que se caracterizam como políticas públicas de orientação curricular –, as quais têm contribuído para a emergência de novas práticas pedagógicas na escola e de novas tendências, como a resolução de problemas e o uso pedagógico de tecnologias digitais em matemática.

Analisando o impacto das mudanças educacionais sugeridas pelas diretrizes nacionais no âmbito da prática pedagógica escolar, Tomaz e Davi (2008) postulam que muitas das pesquisas em educação matemática, percebendo as limitações no que se refere à produção de conhecimento, têm produzido e ampliado os conhecimentos sobre a produção de significados e sobre os modos de ensinar e aprender matemática, traduzindo-se em reformulações curriculares e novas diretrizes pedagógicas.

Essas propostas, ou reformulações, visam combater o isolamento e a fragmentação dos conteúdos matemáticos, materializados nos programas curriculares da escola, ressaltando que o conhecimento disciplinar por si só não favorece a compreensão das situações vivenciadas pelo estudante, a partir das quais pode-se trabalhar conceitos e noções matemáticas de maneira diferenciada.

O Ensino da Matemática Frente às Recentes Mudanças Curriculares Nacionais

Os resultados de pesquisas que tomam os processos de ensino e aprendizagem da matemática por foco investigativo, seja na educação básica ou na formação inicial de professores, evidenciam algumas tendências pedagógicas predominantes no âmbito das práticas analisadas. Dentre as atividades identificadas destacam-se a modelagem matemática, as abordagens interdisciplinares e contextualizadas, o uso de tecnologias de informação e comunicação na prática pedagógica escolar, pedagogia de projetos, a resolução de problemas, entre outras. As dinâmicas de aprendizagem pautadas nessas tendências pedagógicas priorizam a aprendizagem baseada na produção de significados para conceitos matemáticos, utilizando-se, para tanto, de atividades diferenciadas – investigação e experimentação matemática, tema gerador, ensino contextualizado, interdisciplinaridade, transversalidade, resolução de problemas, entre outras –, de acordo com a perspectiva teórica fundante.

Verifica-se, no âmbito dessas tendências, ênfase na aprendizagem pautada na produção de significados, a problematização de situações da vida social e fenômenos da natureza, bem como o uso de recursos diversificados, aspectos esses que evidenciam o surgimento de novas práticas em matemática, nas quais prioriza-se a abordagem contextualizada e interdisciplinar de conceitos matemáticos. A disseminação dessas tendências deu-se a partir da criação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) nos anos finais da década de 1990.

A esse respeito, sublinhamos que os PCN de 1997 discutem a interdisciplinaridade e a contextualização no ensino da matemática e os PCN de 1998 apresentam possíveis formas de produção de significados matemáticos em sala de aula, a partir de atividades de resolução de problemas. Segundo os PCN, "essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução" (BRASIL, 1998, p.40).

Contudo, o interesse pela resolução de problemas no ensino da matemática desponta no cenário nacional no final dos anos setenta, em virtude das deficiências das diretrizes propostas para o ensino de matemática. Nos anos oitenta, o National Council of Teachers of

Mathematics elaborou um documento chamado "Agenda for Action", que priorizava e recomendava que a resolução de problemas fosse o principal escopo do ensino de matemática (HUETE; BRAVO, 2006). É nesse cenário que a resolução de problemas passou a ser incorporada aos currículos de práticas escolares de maneira incisiva.

A resolução de problemas, como eixo organizador dos processos de ensino e aprendizagem da matemática, de acordo com os PCN, baseia-se nos seguintes princípios:

> - a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
> - o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
> - aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na História da Matemática;
> - um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular;
> - a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas (BRASIL, 1998, p.41).

Embora os entendimentos acerca de problema e de resolução de problemas preconizados nesses documentos orientadores sugiram tratar-se de situações desafiadoras, por meio das quais os estudantes podem produzir significados para conceitos matemáticos, apropriando-se, destarte, de novos conhecimentos, há na escola, de modo geral, a predominância de práticas pedagógicas que concebem a resolução de problemas como paradigma do exercício. Em tais práticas, o processo de aprendizagem apoia-se na realização de exercícios que priorizam a reprodução sistemática de algoritmos, de modo que a solução constitui-se no princípio-fim desse processo. Sobre isso Rabelo (2004) considera que o conceito de problema é relativo ao sujeito a que se destina.

Consta, ainda, nos PCN das séries finais do ensino fundamental, que um "problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para se obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la" (BRASIL, 1998, p.41). Há nesse documento uma crítica aos problemas comumente utilizados nas práticas pedagógicas escolares, nas quais os problemas propostos não se constituem em problemas, pois, em geral, não existe um desafio nem a necessidade de verificação para validar o processo de solução. Por fim, preconizam que resolver um problema em matemática pressupõe que o estudante "elabore um ou vários procedimentos de resolução (como realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses); compare seus resultados com os de outros alunos; e valide seus procedimentos" (BRASIL, 1998, p.42).

Portanto, resolver problemas não se restringe a interpretar um enunciado proposto e fornecer respostas mediante a utilização de procedimentos matemáticos pré-definidos (algoritmos, fórmulas) e fatidicamente treinados. Respostas corretas, nessa perspectiva, são aceitas e convincentes, mas não asseguram que ocorreu a apropriação do conhecimento matemático. É necessário, ainda, que a resolução de problemas, favoreça o desenvolvimento de habilidades que permitam ao estudante provar os resultados, testá-los, comparar diferentes caminhos para obter a solução (BRASIL, 1998).

Além disso, nas diretrizes dos PCN do ensino médio a resolução de problemas é sugerida como uma prática a ser desenvolvida nas práticas educativas escolares, inclusive, esta postura é reforçada, na seção de competências e habilidades. Outro aspecto a ser considerado em relação à resolução de problemas diz respeito aos conceitos por ela abarcados. Há teóricos que discutem os conceitos de problema e de resolução de problemas, a partir dos quais emergem correntes que sugerem alguns requisitos para se considerar um problema e seu processo de resolução (KILPATRICK, 1985; SCHOENFELD, 1985).

Schoenfeld (1985) aponta quatro categorias de habilidades necessárias para se resolver problemas: recursos, heurísticas, controle e convicções. Polya (1995), do mesmo modo, sugere quatro fases para a resolução de problemas: compreensão do problema, concepção de um plano, execução do plano e visão retrospectiva. De acordo com as compreensões, a resolução de problemas configura-se como um processo por meio do qual o estudante envolve-se com a matemática, produzindo significados para os conceitos abordados, consolidando, desse modo, sua formação matemática. Assim concebida, a resolução de problemas deve ser fomentada nos processos educativos, visando favorecer a formação matemática dos estudantes.

Ressaltamos, contudo, que os processos, etapas descritas por cada um dos autores supracitados constituem uma descrição do modo como, segundo esses autores, nos apropriamos do conhecimento matemático mediante a resolução de problemas, e não, simplesmente, a sequência de etapas envolvidas na tarefa de resolver problemas. Portanto, pode-se dizer que tais etapas caracterizam a dimensão epistemológica do processo de produzir matemática a partir da resolução de problemas.

De acordo com os PCN do ensino médio, a resolução de problemas deve permitir ao estudante mobilizar um leque de competências: selecionar variáveis que serão relevantes para o modelo a construir; problematizar, ou seja, formular o problema teórico na linguagem do campo matemático envolvido; formular hipóteses explicativas do fenômeno em causa; recorrer ao conhecimento matemático acumulado para a resolução do problema formulado, o que, muitas vezes, requer um trabalho de simplificação quando o modelo originalmente pensado é matematicamente muito complexo; validar, isto é, confrontar as conclusões teóricas com os dados empíricos existentes; e eventualmente, quando surge a necessidade, modificar o modelo para que esse melhor corresponda à situação real, aqui se revelando o aspecto dinâmico da construção do conhecimento (BRASIL, 2006, p.84-85). Considerando as premissas basilares da resolução de problemas, emanadas desse documento, evidencia-se a dimensão metodológica dos processos de ensino e aprendizagem da matemática, que tem essa tendência por cenário.

Em relação aos tipos de problemas a serem trabalhados, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio alertam sobre a questão da contextualização que está presente em muitos deles e sua influência unidirecional nos processos de ensino e aprendizagem de matemática, preconizando que a contextualização pode ser concretizada por meio de resolução de problemas, atentando-se aos problemas fechados, porque esses pouco favorecem o "desenvolvimento de habilidades. Nesse tipo de problemas, já de antemão o aluno identifica o conteúdo a ser utilizado, sem que haja maiores provocações quanto à construção de conhecimento e quanto à utilização de raciocínio matemático" (BRASIL, 2006, p. 83-84).

Nessa perspectiva, a resolução de problemas pode ser promovida por meio de diferentes estratégias, apoiadas em diferentes concepções pedagógicas. Há diversas situações de sala de aula que favorecem a abordagem diferenciada de conceitos matemáticos, aproximando-se da perspectiva da resolução de problemas.

A exemplo disso, podemos destacar a Metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, proposta por Onuchic (2013), que pode ser implementada em sala de aula por meio de um roteiro de atividades destinado à orientação de professores para a condução de suas aulas. Nela, os estudantes têm a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgirem com significado e compreensão (NUNES, 2015, p. 72). Professores e estudantes juntos desenvolvem esse trabalho e a aprendizagem se consolida de modo coparticipativo e colaborativo.

Além disso, considerando o problema como ponto de partida e orientação para a aprendizagem matemática, tal metodologia, segundo Allevato e Onuchic (2014), tem mostrado que a Resolução de Problemas se constitui em um contexto bastante propício à construção de conhecimento, colocando o estudante no centro das atividades de sala de aula de Matemática, sem prescindir do fundamental papel desempenhado pelo professor como organizador e mediador no decurso dessas atividades.

Abordando a relevância da participação coativa e coparticipativa do estudante no processo de aprendizagem da matemática, Boaler (2002) pontua que quando os estudantes envolvem-se em atividades abertas e diversificadas, em que são encorajados a desenvolver suas ideias, eles desenvolvem um relacionamento produtivo com a matemática. São estimulados a perceber o utilizar conceitos matemáticos em distintas situações, ampliando os contextos de aprendizagem. Segundo ele, essa capacidade está relacionada ao fato de terem compreendido os métodos matemáticos que lhes foram apresentados, bem como ao fato de as práticas nas quais eles se envolvem permearem situações cotidianas diversas.

Contudo, embora, os livros didáticos contemplem atividades matemáticas pautadas na resolução de problemas, há necessidade de os professores reverem a prática pedagógica, visando tornar a resolução de problemas uma atividade desafiadora e que mobilize o processo cognitivo dos alunos, levando-os a desenvolver a reflexão, a investigação e a experimentação matemática, a postura crítica e a autonomia. Para tanto, os desafios matemáticos apresentados precisam fazer referência à realidade, possibilitando a formação social do conhecimento e a percepção de que o aluno atua como sujeito da produção do conhecimento, uma vez que desenvolvimento do indivíduo constitui-se como resultado de um processo sócio-histórico (VYGOTSKY, 1987).

Em relação à incorporação das tecnologias digitais na prática pedagógica em Matemática, verifica-se que há um movimento de estudos e políticas públicas que priorizam essa dimensão do processo de qualificação da educação brasileira. Essa tendência pedagógica emerge das possibilidades advindas da utilização de recursos pedagógicos diversos, entre os quais as tecnologias, nos processos de ensino e aprendizagem e da interface entre matemática e tecnologias, conforme destacam os PCN.

O termo recurso pedagógico, no senso comum, é conceituado como um elemento material favorável aos processos de ensino e aprendizagem. Adler (2001) afirma que em países desenvolvidos, os professores apontam a falta de recursos pedagógicos como um fator que compromete o desenvolvimento do ensino da matemática. Segundo a autora, os professores tendem a fixar-se apenas nas possibilidades didático-pedagógicas que emergem nas práticas educativas pautadas no uso de recursos diversificados, não reconhecendo outras dimensões desses recursos.

Por outro lado, a abordagem da Matemática, de um modo geral, suscita o uso de recursos pedagógicos diversos. Por exemplo, na geometria euclidiana o uso de materiais como régua, esquadro, compasso, transferidor é essencial. Em geometria espacial o uso de materiais concretos, como sólidos geométricos ou softwares em três dimensões pode propiciar dinâmicas de aprendizagem diferenciadas, bem como favorecer o aprofundamento dos conteúdos curriculares abordados. Em Estatística a manipulação gráfica de dados é favorecida com o uso de planilhas eletrônicas e a plotagem desses dados, entre outros. Do mesmo modo, hoje o uso de software é essencial na abordagem de funções diversas, em operações algébricas e, sobretudo, no estudo de conceitos físicos e químicos.

Além disso, o uso de tecnologias digitais – calculadoras, simuladores, planilhas de cálculo, softwares gráficos, estatísticos, algébricos e de geometria dinâmica –, na realização de cálculos, na representação de conceitos geométricos e funções é particularmente importante na resolução de problemas e na experimentação matemática, situações essas nas quais os processos algoritmizados não se constituem no objetivo-fim dos processos de ensino e aprendizagem da matemática. Segundo as diretrizes dos PCN, “as tecnologias, em suas diferentes formas e usos, constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade, pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas consequências no cotidiano das pessoas” (BRASIL, 1998, p.43).

Os PCN preconizam que o uso das tecnologias de informação e comunicação, aqui denominadas tecnologias digitais, nos processos de ensino e aprendizagem da matemática propicia significativas contribuições para se repensar esses processos à medida que,

> - relativiza a importância do cálculo mecânico e da simples manipulação simbólica, uma vez que por meio de instrumentos esses cálculos podem ser realizados de modo mais rápido e eficiente;
> - evidencia para os alunos a importância do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem de variados problemas;
> - possibilita o desenvolvimento de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental da aprendizagem;
> - permite que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade matemática e desenvolvam atitudes positivas diante de seu estudo (BRASIL, 1998, p.43).

Verifica-se que o entendimento acerca do papel das tecnologias digitais nos processos de ensino e aprendizagem presente nas diretrizes político-pedagógicas dos PCN evidencia aspectos como a visualização, a otimização de cálculos e operações algébricas, ampliação das possibilidades de representação gráfica e, sobretudo, a realização de atividades de investigação e experimentação matemática. Além disso, destaca a possibilidade de promover uma visão ampliada sobre a matemática, uma vez que o desenvolvimento de atividades matemáticas, associadas às situações sociais ou naturais da realidade e pautadas no uso de tecnologias ampliam os modos de ver e aprender a própria matemática. Os aspectos aqui destacados sinalizam a sinergia entre as tecnologias digitais e a resolução de problemas.

Focando as implicações da presença das tecnologias no contexto educacional Lévy (1998, p.27) diz que “antes mesmo de influir sobre o aluno, o uso dos computadores obriga os professores a repensar o ensino de sua disciplina”. Além disso, segundo Marinho (2002, p.42), mobilizados pela dinamicidade social os agentes escolares tomam consciência de que a “escola está sendo desafiada num processo de reformulação necessária para atender às exigências contemporâneas de uma educação de qualidade. A questão da obrigação da escola de preparar alunos para uma sociedade informatizada está clara para alunos e professores”.

Diante disso, consideramos que as transformações sociais e a evolução das tecnologias, juntamente com as reflexões em torno do papel da educação na realidade atual, deflagram mudanças no contexto educacional, incluindo-se modificações curriculares, teóricas e na prática docente, como por exemplo, as estratégias pedagógicas empreendidas em sala de aula (RICHIT; MALTEMPI, 2005).

Partindo desse entendimento compreendemos que a inserção de tecnologias no contexto educacional pode favorecer a participação social das pessoas, levando em conta os interesses coletivos e individuais da comunidade, de modo que não se caracterize como uma importação acrítica de recursos didáticos para a sala de aula (RICHIT; MOCROSKY, 2009).

Entendendo, ainda, que esse pensar a ação pedagógica para a efetivação de uma nova prática, pressupõe a compreensão de que a presença da tecnologia em sala de aula pode favorecer atividades educativas distintas, alicerçadas em investigações matemáticas que permitam ao estudante avançar na compreensão de conceitos e na apropriação de conhecimentos, sublinhamos a necessidade de rompermos com a linearidade apresentada nos currículos escolares e nas práticas pedagógicas cultural e historicamente instituídas.

De acordo com Freire (2004, p.41) “assumir-se como ser social e histórico, como ser pensante, comunicante, transformador, criador...” é uma ação que leva o sujeito a modificar seu espaço ao tempo que é transformado por essa interação social. Na perspectiva desse entendimento, a formação matemática constitui-se dinâmica, uma vez que é determinada pelas condições históricas, sociais e culturais, ao tempo que deve estar comprometida com a preparação para a vida social e desenvolvimento pessoal do estudante.

A partir das considerações apresentadas acerca das mudanças educacionais recentes, em particular no ensino da matemática, e da emergência de novas tendências pedagógicas, cujas bases teóricas pressupõem novas compreensões sobre os processos de ensinar e aprender, são evidenciadas algumas perspectivas acerca das interfaces entre as tecnologias digitais e a resolução de problemas em educação matemática, ressaltando as possibilidades de investigação matemática e apropriação de conhecimentos que emergem do enlaçamento entre nessas duas tendências.

Interfaces entre Tecnologias Digitais e Resolução de Problemas em Educação Matemática

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), Lei nº. 9.394/96, em seu artigo segundo, estabelece que a educação escolar, pública e gratuita, deve vincular-se ao mundo do trabalho e à prática social dos sujeitos, tendo "por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho". Do mesmo modo, os Parâmetros Curriculares Nacionais do ensino médio pontuam que a Matemática pode contribuir na formação para a cidadania por desenvolver "metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação de justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios" (BRASIL, 1999, p.27).

O entendimento presente na LDB e nos PCN está em sinergia com a dimensão crítica da educação matemática proposta por Skovsmose (2001) e corroborada por Barbosa (2003). De acordo com esse último autor, "mais do que informar matematicamente, é preciso educar criticamente através da matemática" (BARBOSA, 2003, p.6). No entanto, como afirma Muzzi (2004), a educação matemática tradicional segue o "paradigma do exercício". O que se observa é que não há um trabalho efetivo que enfatize ações pedagógicas pautadas nas tendências pedagógicas preconizadas nos Parâmetros Curriculares e nas Orientações Curriculares Nacionais.

Além disso, no contexto escolar e acadêmico há pouca ênfase à implementação de estratégias pedagógicas que contemplem as recentes tendências no ensino da matemática. Esse aspecto evidencia as limitações e incoerências na concretização das diretrizes curriculares nacionais, uma vez que, em geral, as escolas não estão preparadas para tais mudanças, assim como os professores não dispõem de formação adequada para promover práticas pautadas em tais tendências. Portanto, a concretização de mudanças em educação pressupõe, entre outras coisas, investimentos em formação de professores (inicial e continuada), bem como a realização de estudos que investiguem as possibilidades advindas dessas novas tendências e da combinação entre as mesmas.

Os resultados de estudos sobre esse tema mostram que um dos caminhos viáveis às mudanças na educação perpassa, essencialmente, a formação de professores, pois é na formação inicial e continuada que os profissionais da educação apropriam-se de novas práticas e têm a possibilidade de desenvolver estratégias pedagógicas pautadas no uso das tecnologias e outros recursos.

Contudo, sabe-se que mudanças nestas dimensões na prática docente, de modo geral, não ocorrem deliberadamente ou de maneira arbitrária. É preciso, primeiramente, que a formação inicial do professor de matemática inclua experiências diversas, contemplando as diversas tendências no ensino da matemática e pautadas no uso de recursos tecnológicos e pedagógicos. Do mesmo modo, os processos de formação continuada precisam promover contextos investigativos e desafiadores que preparem e motivem os docentes a promover novas práticas, utilizando diferentes recursos, sobretudo as tecnologias digitais.

Contudo, qualquer mudança educacional pressupõe que haja um projeto político pedagógico e/ou educacional nas escolas, que contemple as novas concepções de ensino e aprendizagem, nas quais os recursos materiais, como as tecnologias digitais, assumem importantes papeis. Ou seja, é por meio desse plano que novas práticas são viabilizadas.

As considerações destacadas nos parágrafos anteriores ressaltam a *interface política* entre resolução de problemas e tecnologias, pois ambas as tendências são preconizadas nas diretrizes políticas nacionais, enfatizando-se as possibilidades que essas propiciam à abordagem da matemática e a apropriação de conhecimentos. De acordo com os PCN, o uso de tecnologias na abordagem da matemática propicia situações diferenciadas de aprendizagem. Associando-as a resolução de problemas o professor pode estimular diferentes habilidades cognitivas – o pensar matemático, o pensar estratégico, o pensar hierárquico, na medida em que o estudante precisa utilizar/expressar conhecimentos específicos e das tecnologias e definir estratégias de solução para o problema apresentado (PCN, 2006).

Por acreditar que a criação de ambientes de aprendizagem propícios à investigação matemática, tais como as atividades de resolução de problemas, podem favorecer a apropriação de conhecimentos em matemática e que a utilização de tecnologias digitais propiciam contextos de investigação e experimentação matemática, enfatizamos a *interface pedagógica* entre essas tendências. Isto é, a incorporação das tecnologias digitais nas atividades de resolução de problemas pode ampliar as investigações matemáticas, favorecer a elaboração e verificação de novas conjecturas, facilitar e otimizar o processo de execução das estratégias de solução pré-definidas, bem como promover a verificação dos resultados. Portanto, a articulação entre a resolução de problemas e as tecnologias digitais propicia abordagens/metodologias/pedagogias diferenciadas em Matemática.

Assumindo a perspectiva de Pierre Lévy, nas atividades de resolução de problemas as tecnologias participam do processo de produzir conhecimento em matemática à medida que reorganizam o pensamento do estudante, levando-o a propor diferentes caminhos de solução e distintos modos de validar os resultados obtidos. Além disso, o uso da tecnologia no desenvolvimento da atividade matemática produz mudanças no modo como o estudante encara, interpreta e interage com um problema inicialmente posto. Por exemplo, dado um problema sobre crescimento populacional, é comum que os estudantes procurem representar graficamente em algum software os dados fornecidos e, a partir da curva obtida, experimentam diferentes modelos matemáticos, buscando um que se ajuste a mesma.

Sintetizando, estudantes e tecnologias digitais, de acordo Pierre Lévy, constituem o coletivo pensante que produz conhecimento. Do mesmo modo, a resolução de problemas constitui-se em contexto para a produção e apropriação de conhecimentos em matemática, pois, segundo D'Ambrosio (1989), a aprendizagem baseada na resolução de problemas visa a construção de conceitos matemáticos pelo estudante por meio de situações que estimulam a sua curiosidade matemática. Por meio de suas experiências com problemas de naturezas diferentes o estudante interpreta fenômenos matemáticos e procura explicá-lo dentro de sua concepção da matemática envolvida. Assim, a articulação de ambas perpassa a produção de conhecimentos matemáticos, ao tempo que permitem explicar e compreender como aprendemos matemática. Esses aspectos, no escopo desse ensaio, evidenciam a *interface epistemológica* entre tecnologias digitais e resolução de problemas.

Analisando sob um enfoque histórico, verifica-se que a resolução de problemas surgiu na prática social do homem primitivo, favorecendo o desenvolvimento de diferentes tecnologias. Por exemplo, a necessidade de distribuir igualmente partes de terra às margens do Rio Nilo, propiciou o desenvolvimento da Corda Egípcia de doze nós, tecnologia essa bastante primitiva, que permitia medições com relativa rapidez e precisão, ao tempo que mobilizou o surgimento de diversos conhecimentos em Geometria e Álgebra, como o Teorema de Pitágoras. Do mesmo modo, o Último Teorema de Fermat foi resolvido recentemente graças a criação de um programa computacional específico. Analogamente, a aproximação decimal do número irracional pi (razão entre a circunferência e seu diâmetro) deu-se a partir do uso da tecnologia informática.

Nota-se, assim, que a incorporação das tecnologias na resolução de problemas não é recente e tampouco uma adaptação improvisada. Portanto, a resolução de problemas, desde os desafios enfrentados pelo homem primitivo, promoveu o desenvolvimento de diferentes tecnologias, enquanto que o surgimento de novas tecnologias favoreceu a solução de velhos e novos problemas e da matemática como um todo, evidenciando, assim, a *interface histórica* entre essas tendências.

Além disso, consta nos PCN que no decorrer do século XX, novas necessidades tecnológicas advindas da introdução dos computadores nas atividades humanas – que têm uma Matemática Discreta no seu funcionamento – provocaram um grande desenvolvimento dos modelos matemáticos discretos (BRASIL, 2006). Em outras palavras, a tecnologia favoreceu o desenvolvimento da matemática e vice-versa, corroborando a interface aqui destacada.

Ampliando as reflexões, nota-se que a democratização do acesso às tecnologias digitais é hoje prioridade no contexto educacional como uma forma de garantir a inclusão social das pessoas. As recentes políticas públicas nacionais e os programas promovidos pelo Ministério da Educação têm colocado o letramento e a inclusão digital dentre as suas prioridades, pois de acordo com Silveira (2001) a exclusão digital fortalece a exclusão social.

Em relação a esse aspecto, Lemos (2007) entende que o acesso às tecnologias pelo cidadão comum, propicia novas oportunidades no mercado de trabalho, nas relações com outras comunidades, fomento às novas habilidades e à criatividade e, consequentemente, uma nova visão social e exercício da cidadania. E mais, a aprendizagem da matemática articulada à resolução de problemas favorece a inserção/transferência do conhecimento matemático para situações da prática social. Esse aspecto, associado à apropriação de conceitos matemáticos contribui para a participação social das pessoas. A articulação entre ambos propicia uma formação ampla dos estudantes, aspecto esse que pode traduzir-se em práticas sociais qualificadas, críticas e conscientes. Essa apropriação assegura, também, a ampliação da capacidade comunicativa e expressiva das pessoas. Diante das considerações apresentadas, compreendemos que há uma *interface social* entre resolução de problemas e as tecnologias digitais, tanto nas práticas sociais das pessoas quanto no processo de apropriação de conhecimentos em matemática.

Face aos aspectos destacados nessa seção, sublinhamos a importância e a necessidade de se promover reflexões sobre as possibilidades pedagógicas advindas da articulação entre a resolução de problemas e as tecnologias digitais, bem como das demais tendências no ensino da matemática, durante a formação inicial docente, considerando que a mudança de concepção sobre uso educacional de recursos pedagógicos e tecnológicos é essencial na implementação de novas estratégias de aprendizagem, às mudanças na prática docente e, sobretudo, a qualificação da educação nacional pública.

Breves Considerações Finais

Diante do exposto nesse ensaio e vislumbrando o desenvolvimento pleno dos estudantes, evidenciamos a necessidade de que as práticas educativas escolares em

Matemática sejam diversificadas, de modo que sejam promovidas dinâmicas de aprendizagem no contexto das várias tendências no ensino, tais como a resolução de problemas e o uso de tecnologias nos processos de ensino e aprendizagem. Em outras palavras, a diversificação de estratégias pedagógicas na abordagem de conteúdos matemáticos curriculares, propicia situações de aprendizagem que contemplam diferentes ritmos de aprendizagem. Além disso, contribuem para o desenvolvimento matemático do aluno, pois valorizam os conhecimentos prévios que esse dispõe, assim como possibilita ao estudante e ao professor uma visão ampla da matemática, uma vez que aborda a matemática sob diferentes perspectivas.

A mudança na prática docente, preconizada no parágrafo anterior, pressupõe que o professor esteja preparado para promover novas práticas. Sobre isso, sublinhamos que a implementação de mudanças na educação pressupõe, inevitavelmente, a formação de professores, pois é na formação inicial e continuada, que docentes podem desenvolver estratégias pedagógicas e constituir um embasamento teórico e pedagógico, que subsidiem dinâmicas de aprendizagem diferenciadas e propícias à investigação matemática, contribuindo, destarte, à apropriação de conhecimentos em matemática.

Considerando, ainda, que a incorporação das tecnologias digitais aos processos educacionais é uma tendência que vem se consolidando em muitos centros acadêmicos e estabelecimentos de ensino, visto que há um movimento de políticas públicas voltadas a implementação das ações de letramento e inclusão digital na escola pública, novas reflexões acerca do papel do estudante se fazem necessárias, pois é no estudante e na sua aprendizagem que deve estar focada a atenção do professor e do processo de ensino. E ainda, por acreditarmos que a criação de ambientes de aprendizagem, permeados pelas tecnologias e propícios à investigação matemática, podem favorecer a construção do conhecimento em matemática, ressaltamos a necessidade do desenvolvimento de estratégias formativas distintas, baseadas no uso desses recursos, envolvendo diversos segmentos escolares.

Na perspectiva desse entendimento, a apropriação de novas práticas, contemplando diferentes tendências no ensino da matemática, possibilita formas distintas de promover a prática docente, modifica os processos clássicos de ensino e aprendizagem e, principalmente, torna-se condição essencial à adaptação do professor à nova cultura escolar, que é modificada com o movimento de mudanças sociais e políticas em curso no Brasil desde o despontar do século XXI. É nessa perspectiva que concebemos a necessidade de se investir em formação inicial e continuada de professores.

Ainda, a concretização de mudanças educacionais requer que essas estratégias sejam assumidas como importantes, que envolvam todos os agentes escolares e, principalmente, que se realizem no âmbito da escola, levando em conta as vivências e expectativas coletivas.

Referências

ADLER, J. Re-sourcing practice and equity: A dual challenge for mathematics education. In ATWEH, B., FORGASZ, H.; NEBRES, B. (Eds.). **Sociocultural research in mathematics education:** An international perspective. Lawrence Erlbaum Associates. p.185-200, 2001.

BARBOSA, J.C. Modelagem matemática e a perspectiva sócio-crítica. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - SIPEM, 2.,

Anais... São Paulo: SBEM, 2003.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: Ministério da Educação, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Séries Finais do Ensino Fundamental. Brasília: Ministério da Educação, 1998.

D'AMBROSIO, B.S. Como ensinar matemática hoje? **Revista Temas e Debates.** SBEM. Ano II. n.2. p.15-19. Brasília, DF. 1989. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/conteudo/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Beatriz.pdf>. Acesso em: 10. jan. 2012.

FREIRE, P. Pedagogia do Oprimido. 39 ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2004.

HEUTE, J.C.S.; BRAVO, J.A.F. **O ensino da matemática:** fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 2006.

KILPATRICK, W. **Philosophy of education from the experimentalis outlook.** Chicago: University of Chicago Press, 1985.

KRULIK, S.; REYS, R.E. **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997.

LÉVY, P. **A Máquina Universo**: criação, cognição e cultura informática. Tradução de Bruno Charles Magne. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

LÉVY, P. **As Tecnologias da Inteligência**: o futuro do pensamento na era da informática. Tradução de Carlos Irineu da Costa. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

LOURENÇO, M. L. A Demonstração com Informática Aplicada a Educação. In: **Boletim de Educação Matemática (BOLEMA),** Rio Claro, v. 15, n. 18, p. 100-111, set. 2002.

MARINHO, S.P. Tecnologia, educação contemporânea e desafios do professor. In: Joly, M. C. R. A. (Org.). **A Tecnologia no Ensino**: implicações para a aprendizagem. São Paulo: Casa do Psicólogo, 2002.

MUZZI, M. **Etnomatemática, modelagem e matemática crítica**: novos caminhos. Revista Presença Pedagógica, março/abril, 2004.

MALTEMPI, M.V. Novas Tecnologias e Construção de Conhecimento: reflexões e perspectivas. In: Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática-CIBEM, 5., 2005, Porto. **Anais...,** 2005.

NUNES, C.B. A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas: perspectivas à formação docente no contexto da sala de aula. In: REIS, M.J.E. et al. (Orgs.), **Educação e Desenvolvimento: diferentes olhares.** Campinas, S.P.: Pontes Editores, 2015, p 61-79.

ONUCHIC, L.R. A Resolução e Problemas na Educação Matemática: onde estamos? E para onde iremos? In: **Espaço Pedagógico**, vol. 20, n° 1, Passo Fundo, p.88-104, jan/jun. 2013. Disponível em: <www.upf.br/seer/index.php/rep>. Acesso em: 10 mar.2016

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J.P. Investigar a nossa própria prática. In GTI–Grupo de Trabalho de Investigação, (Org.), **Reflectir e investigar sobre a prática profissional** Lisboa, APM, 2002.

POZO, J.I. **A solução de problemas:** aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.

RABELO, H.E. **Textos matemáticos:** produção, interpretação e resolução de problemas. Petrópolis: Vozes, 2002.

RICHIT, A. **Projetos em Geometria Analítica Usando Software de Geometria Dinâmica:** repensando a Formação Inicial Docente em Matemática. 2005. 215 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

RICHIT, A.; MALTEMPI, M.V. A Formação Profissional Docente e as Mídias Informáticas: Reflexões e Perspectivas. **Boletim Gepem** - Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática. n.47, v.2, dez.2005.

SCHOENFELD, A. **Mathematical Problem Solving.** New York, Academic Press, 1985.

SKOVSMOSE O**. Educação Matemática crítica:** a questão da democracia. São Paulo: Papirus Editora, 2001.

SILVEIRA, S. A. **Exclusão digital**: a miséria na era da informação. São Paulo: Fundação Perseu Abramo, 2001.

TOMAZ, V.S.; DAVI, M.M.M.S. **Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem.** São Paulo: Martins Fontes, 1987.

Adriana Richit
Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS) - Brasil
E-mai:l adrianarichit@gmail.com

Célia Barros Nunes
Universidade do Estado da Bahia (UNEB) **-** Brasil
E-mail: celiabns@gmail.com

The LieCal Project and Its Investigation of Problem-Solving Strategies as a Measure of Longitudinal Curricular Effects on Students' Learning

O Projeto Local e sua Investigação de Estratégias de Solução de Problemas como uma Medida de Efeitos Curriculares Longitudinais sobre a Aprendizagem dos Alunos

Jinfa Cai
Steven Silber
Stephen Hwang
University of Delaware-USA

Bikai Nie
Texas State University-USA

John C. Moyer
Marquette University-USA

Ning Wang
Widener University-USA

ABSTRACT

This paper presents a summary of the important middle school findings from the LieCal Project (Longitudinal Investigation of the Effect of Curriculum on Algebra Learning) and examines in detail the longitudinal effects of a middle school reform mathematics curriculum on students' open-ended problem solving in high school. Using assessment data from our large, longitudinal LieCal project, we compared the open-ended problem-solving performance and strategy use of high school students who had used the Connected Mathematics Project (CMP) in middle school with that of students who had used more traditional mathematics curricula. When controlling for sixth-grade state mathematics test performance, high school students who had used CMP in middle school had significantly higher scores on a multipart open-ended problem. In addition, high school students who had used CMP appeared to have greater success algebraically abstracting the relationship in the task.

Key Words: LieCal Project, Problem Solving, Curriculum Effect, Student Learning

RESUMO

Este artigo apresenta um resumo de importantes resultados relativos aos Anos Finais do Ensino Fundamental, obtidos a partir do projeto LieCal (Longitudinal Investigation of the Effect of Curriculum on Algebra Learning19) e examina, detalhadamente, os efeitos longitudinais que essa reforma do currículo de Matemática, neste nível de ensino, provoca nos estudantes do Ensino Médio, ao trabalharem com problemas abertos. Utilizar dados de avaliação deste amplo projeto longitudinal - LieCal, comparamos o desempenho e as estratégias utilizadas pelos alunos do Ensino Médio que tinham estudado Matemática através do CMP (Connected Mathematics Project20) nos Anos Finais do Ensino Fundamental com as de estudantes que vivenciaram um ensino de Matemática por meio de um currículo mais tradicional. Os testes de performance aplicados indicam que, em relação a um grupo de controle de alunos de 6º. ano, alunos do Ensino Médio que já haviam vivenciado o CMP no Ensino

[19] Pode ser traduzido como: Investigação longitudinal acerca dos efeitos do Currículo na aprendizagem de Álgebra.
[20] Projeto Matemática Conectada

Fundamental, apresentaram rendimento significantemente superior ao resolverem problemas abertos. Além disto, os alunos do Ensino Médio que haviam estudado matemática pelo CMP pareciam ter maior facilidade com as abstrações algébricas exigidas pelas tarefas.

Palavras-chave: Projeto LieCal, Resolução de Problemas, Efeitos Curriculares, Aprendizagem.

Introduction

Curriculum is a key lever for influencing the quality of education (BALL; COHEN, 1994; SENK; THOMPSON, 2003; VITHAL; VOLMINK, 2005). Therefore, educational researchers, practitioners, and policy-makers around the globe have sought to understand how to improve the curriculum and how to analyze the impact of curriculum reforms. In the United States, the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) was an early leader in providing recommendations for reforming and improving K-12 school mathematics through its *Standards* documents (1989, 2000). Among many recommendations about the goals for mathematics education, these and related documents emphasized the importance of engaging students in problem solving in the mathematics classroom. To make curricula that aligned with the NCTM standards available to teachers, the U.S. National Science Foundation (NSF) provided support to develop a number of so-called *Standards*-based school mathematics curricula for elementary, middle, and high school students. With the implementation of these curricula came the need to assess their effectiveness at achieving the goals set out in the various standards documents, including their effectiveness at helping students become effective mathematical problem solvers (see Senk; Thompson, 2003, for an overview of the assessments of the NSF-funded curricula).

In this paper, we report on results from the *Longitudinal Investigation of the Effect of Curriculum on Algebra Learning* (LieCal). The LieCal Project sought to longitudinally investigate the effects of the Connected Mathematics Project (CMP), one of the NSF-funded *Standards*-based curricula. The CMP curriculum is a complete middle-school mathematics program, and can be characterized as a problem-based curriculum whose intent is to build students' understanding in the four mathematical strands of number and operations, geometry and measurement, data analysis and probability, and algebra through explorations of real-world situations and problems (LAPPAN et al., 2002b). The LieCal project compared the effects of the CMP curriculum with those of traditional, non-CMP middle school mathematics curricula, both within the middle school grades and into high school. The present study examines the open-ended problem-solving performance and strategy use in high school of former CMP and non-CMP middle school students.

Research on Mathematical Problem Solving

There is a long history of interest in integrating problem solving into school mathematics (CAI; NIE, 2007; SIU, 2004; STANIC; KILPATRICK, 1989). Research in mathematics education has correspondingly attended to multiple aspects of mathematical problem solving and the ways in which problem solving can play a role in school mathematics, ranging from how students learn mathematics, to how teachers teach and assess students' learning of mathematics, to how mathematics is presented in curricula. Looking across the scholarship on mathematical problem solving, six interrelated lines of research stand out.

The first line of research seeks to shed light on the processes involved in problem solving (e.g., FRENSCH; FUNKE, 1995; LESH; ZAWOJEWSKI, 2007; LESTER, 2013; MCLEOD; ADAMS, 1989; SCHOENFELD, 1992; SILVER, 1985). Problem solving is inherently a complex process, and researchers working in this line of research have attended to diverse aspects of the problem solving process, notably affective, cognitive, and metacognitive aspects.

The second line of problem-solving research focuses on the teaching of mathematical problem solving in classrooms (CAI, 2003, 2010; KROLL; MILLER, 1993; LESH; ZAWOJEWSKI, 2007; WILSON et al., 1993). Researchers working in this area have investigated the teaching of mathematics with a focus on problem solving (e.g., HEMBREE; MARSH, 1993; HENNINGSON; STEIN, 1997; HIEBERT et al., 1997; KROLL; MILLER, 1993; STEIN; SMITH; SILVER, 1999). In this work, problem solving is viewed as a learning goal of school mathematics – the aim is to improve students' success at solving problems. This type of teaching is usually called problem-solving instruction, and it has been studied extensively. Cai (2010) and Lester and Cai (2016) have conducted reviews of research in this area.

The third line of problem-solving research is also concerned with teaching, but differs from the previous line of research in that problem solving itself is not the learning goal. Rather, problem solving is a means for teaching mathematics (LESTER; CHARLES, 2003; SCHOEN; CHARLES, 2003; SCHROEDER; LESTER, 1989). Compared to the research on problem-solving instruction, the line of research on teaching mathematics *through* problem solving focuses on a relatively new idea in the history of problem solving in the mathematics curriculum. Even though teaching mathematics through problem solving is a rather new conception, there is widespread agreement that teaching through problem solving holds great promise for fostering student learning (CAI, 2003).

A fourth line of research on problem solving is related to problem posing, which has been recognized as a component of the problem-solving process (CAI; HWANG, 2002; CAI et al., 2013; CAI et al., 2015; SINGER; ELLERTON; CAI, 2015; SILVER, 1994). Although problem-posing research is a relatively new endeavor, it has prospered in recent years. Indeed, there have been efforts to incorporate problem posing into school mathematics at different educational levels around the world.

A fifth line of mathematical problem-solving research is related to research on mathematical modeling, as the modeling process can be viewed as a specific kind of problem solving. Research on mathematical modeling has taken a number of perspectives, including mathematical, cognitive, curricular, instructional, and teacher education (e.g., CAI et al., 2014).

Finally, a sixth line of research on problem solving focuses on using both problem solving and problem posing for the assessment of students' learning (e.g., CAI et al., 2013). The research reported here is of this type. Studies of problem solving in mathematics education have already moved from a focus only on the product (i.e., the actual solution to the problem) to a focus on the process (i.e., the set of planning and executing activities that direct the search for a solution). Individual differences in solving mathematical problems can sometimes be understood in terms of differences in students' uses of various strategies. Proficiency in solving mathematical problems is dependent on the acquisition, selection, and application of both domain-specific strategies and general cognitive strategies (SCHOENFELD, 1992; SIMON, 1979). Thus, competence in using appropriate problem-solving strategies reflects a high degree of performance and proficiency in mathematics. In fact, researchers have long used the examination of problem-solving strategies to assess and evaluate instructional programs and education systems (CAI, 1995; FENNEMA et al., 1998). Therefore, using problem solving to assess mathematics proficiency implies that effective problem-solving assessment tasks should be designed to reveal the various strategies that students employ. Moreover, students' problem-solving strategies can become more effective over time. Therefore, both the examination of the strategies that students apply and the success of those applications can provide information regarding the developmental status of students' mathematical thinking and reasoning.

Whether problem solving is viewed as a process, a learning goal, an instructional approach, modeling, or a means of assessment, it is clear from the research that problem solving should be an integral part of mathematics learning, and a significant commitment should be made to include problem solving at every grade level and with every mathematical topic. A review by Cai (2010) showed that teachers should engage students in a variety of problem-solving activities in order to help students become successful problem solvers and also learn mathematics better through: (1) finding multiple solution strategies for a given problem, (2) engaging in problem posing and mathematical exploration, (3) giving reasons for their solutions, and (4) making generalizations. Cai's review also showed that focusing on problem solving in the classroom not only impacts the development of students' higher-order thinking skills, but also reinforces positive attitudes.

Our findings, which are related to the sixth line of research about problem solving, come from the LieCal project's longitudinal examination of the effect of CMP and non-CMP curricula on students' mathematics learning. The purpose of the present study is to use problem solving as a measure to longitudinally examine the effect of a problem-based curriculum on students' learning of mathematics. More specifically, this study uses the examination of students' problem solving strategies to investigate how the use of different types of middle school curricula affects the learning of high school mathematics for a large sample of students from ten high schools in an urban school district.

The LieCal Project

CMP and Non-CMP Curricula

In examining and understanding the differential effects of the CMP and non-CMP curricula on students' problem-solving performance and strategies, it is necessary to consider the ways in which these curricula diverge in their treatment of key algebraic concepts. An examination of the CMP and non-CMP curriculum materials show clear differences in this regard. In particular, the curricula make use of strikingly different conceptions about algebra – a functional approach in the CMP curriculum and a structural approach in the non-CMP curricula. Below, we describe several examples that illustrate these different conceptions of and approaches to algebra.

Defining and introducing the concept of variables.

Because of the central role of variables in algebra, the contrasting ways in which the CMP and non-CMP curricula introduce variable ideas are of particular note (NIE et al., 2009). The learning goals of the CMP curriculum characterize variables as the representations of quantities in relationships. Though the CMP curriculum does not formally define "variable" until 7th grade, CMP's informal characterization of a variable as a quantity that changes or varies makes it convenient to use variables informally to describe relationships long before the formal introduction of the concept of variables in 7th grade. The choice to define variables in terms of quantities and relationships reflects the functional approach that the CMP curriculum takes.

In contrast, the learning goals in the non-CMP curricula characterize variables as placeholders or unknowns. The non-CMP curricula formally define "variable" in 6th grade as a symbol (or letter) used to represent a number. Variables are treated predominantly as placeholders and are used to represent unknowns in expressions and equations. By introducing the concept of variables in this fashion, the non-CMP curricula support a structural approach to algebra.

Defining and introducing the concept of equations.

Given the functional approach to variables in the CMP curriculum and the structural approach in the non-CMP curricula, it is not surprising that the concept of equation is similarly defined functionally in CMP, but structurally in the non-CMP curricula. In CMP, equations are a natural extension of the development of the concept of variable as a changeable quantity used to represent relationships. At first, CMP expresses relationships between variables with graphs and tables of real-world quantities rather than with algebraic equations.

Later, when CMP introduces equations, the emphasis is on using them to describe real-world situations. Rather than seeing equations simply as objects to manipulate, students learn that equations often describe relationships between varying quantities (variables) that arise from meaningful, contextualized situations (BEDNARZ; KIERAN; LEE, 1996). In the non-CMP curricula, the definition of a variable as a symbol develops naturally into the use of context-free equations with the emphasis on procedures for solving equations. These are all hallmarks of a structural focus. For example, one non-CMP curriculum defines an equation as "…a sentence that contains an equals sign, =" illustrated by examples such as $2+x=9$, $4 = k - 6$, and $5-m=4$. Students are then told that the way to solve an equation is to replace the variable with a value that results in a true sentence.

Defining and introducing equation solving.

In line with their treatment of variables and equations, the means by which the CMP and non-CMP curricula introduce equation solving reflect functional and structural approaches, respectively. In the CMP curriculum, equation solving is introduced within the context of discussing linear relationships between quantities. The initial treatment of equation solving does not involve symbolic manipulation, as found in most traditional curricula.

Instead, the CMP curriculum introduces students to linear equation solving by using a graph to make visual sense of what it means to find a solution. Its premise is that a linear equation in one variable is, in essence, a specific instance of a corresponding linear relationship in two variables. It relies heavily on the context in which the equation itself is situated and on the use of a graphing calculator.

After CMP introduces equation solving graphically, the symbolic method of solving linear equations is finally broached. It is introduced within a single contextualized example, where each of the steps in the equation-solving process is accompanied by a narrative that demonstrates the connection between what is happening in the procedure and in the real-life situation. In this way, CMP justifies the equation-solving manipulations through contextual sense-making of the symbolic method. That is, CMP uses real-life contexts to help students understand the meaning of each step of the symbolic method of equation solving, including why inverse operations are used. As with the introduction of variables and equations, CMP's functional approach to equation solving maintains a focus on contextualized relationships among quantities. Figure 1 below shows an example of equation solving in the CMP curriculum.

The Unlimited Store allows any customer who buys merchandise costing over $30 to pay on the installment plan. The customer pays $30 down and then pays $15 a month until the item is paid for. Suppose you buy a $195 CD-ROM drive from the Unlimited Store on an installment plan, How many months will it take you to pay for the drive? Describe how you found your answer.

Thinking	**Manipulating the Symbols**
"I want to buy a CD-ROM drive that costs $195. To pay for the drive on the installment plan, I must pay $30 down and $15 a month."	195 = 30 + 15N
"After I pay the $30 down payment, I can subtract this from the cost. To keep the sides of the equation equal, I must subtract 30 from both sides	195 – 30 = 30 – 30 + 15N
"I now owe $165, which I will pay in monthly installments of $15."	165 = 15N
"I need to separate $165 into payments of $15. This means I need to divide it by 15. To keep the sides of the equation equal, I must divide both sides by 15."	$\frac{165}{15} = \frac{15N}{15}$
"There are 11 groups of $15 in $165, so it will take 11 months."	11 = N

Figure 1.
An Example of Equation Solving in CMP (LAPPAN et al., 2002a, p. 55).

In the non-CMP curricula, contextual sense-making is not used to justify the equation-solving steps as it is in the CMP curriculum. Rather, the non-CMP curricula first introduce equation solving as the process of finding a number to make an equation a true statement. Specifically, *solving* an equation is described as replacing a variable with a value (called the *solution*) that makes the sentence true. Equation solving is introduced in the non-CMP curricula symbolically by using the additive property of equality (equality is maintained if the same quantity is added to or subtracted from both sides of an equation) and the multiplicative property of equality (equality is maintained if the same non-zero quantity is multiplied by or divided into both sides of an equation). This approach to equation solving is aligned with the non-CMP curricula's structural focus on working abstractly with symbols and procedures.

Cognitive demand of mathematical problems.

In the LieCal Project, the cognitive demand of mathematical problems in both the CMP curriculum and a representative non-CMP curriculum were analyzed (Cai, Nie, & Moyer, 2010). The problems were classified into four increasingly demanding categories of cognition: memorization, procedures without connections, procedures with connections, and doing mathematics (Stein & Lane, 1996). As Figure 2 illustrates, the CMP curriculum had significantly more high-level tasks (procedures with connections or doing mathematics) ($\chi^2(3, N = 3311) = 759.52$, $p < .0001$) than the non-CMP curricula. This kind of analysis of the intended curriculum provides insight into the degree to which different curricula expect students to engage in higher-level thinking and problem solving.

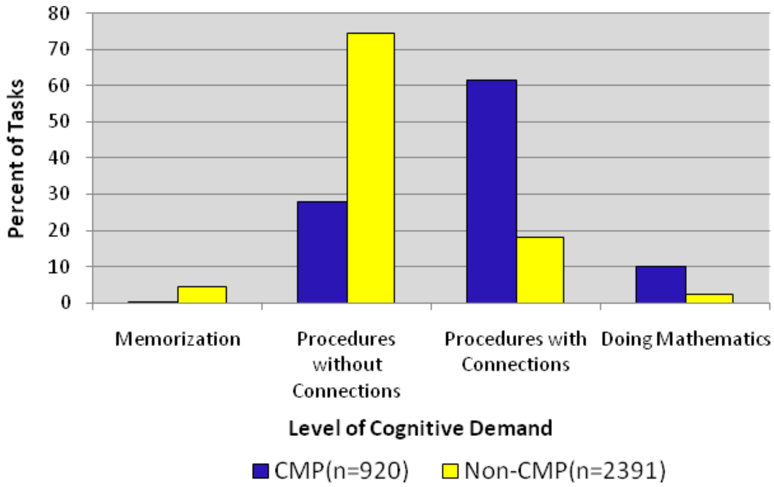


Figure 2.The percentage distributions of the cognitive demand of the instructional tasks intended in the CMP and non-CMP curricula.

Instruction in CMP and Non-CMP Classrooms

In order to better understand how the differences in the CMP and non-CMP curriculum materials play out in actual classrooms, the LieCal Project collected data on multiple aspects of implementation based on 620 detailed lesson observations of CMP and non-CMP lessons over a three-year period. Approximately half of the observations were of teachers using the CMP curriculum, while the other half were observations of teachers using non-CMP curricula. Two retired mathematics teachers conducted and coded all the observations. The observers received extensive training that included frequent checks for reliability and validity throughout the three years (MOYER et al., 2011; NIE et al., 2013).

Each class of LieCal students was observed four times, during two consecutive lessons in the fall and two in the spring. The observers recorded extensive information about each lesson using a 28-page project-developed observation instrument. During each observation, the observer made a minute-by-minute record of the lesson on a specially designed form. This record was used later to code the lesson. The coding system had three main components: (1) the structure of the lesson and use of materials, (2) the nature of the instruction, and (3) the analysis of the mathematical tasks used in the lesson.

The analyses of the data obtained from the classroom observations revealed striking differences between classroom instruction using the CMP and non-CMP curricula. Below, we briefly review the differences that were related to three important instructional variables that could have an impact on students' problem-solving: (1) the level of conceptual and procedural emphases in the lessons, (2) the cognitive level of the instructional tasks implemented, and (3) the cognitive level of the assigned homework problems.

Conceptual and procedural emphases.

The second component of the coding section included twenty-one 5-point Likert scale questions that the observers used to rate the nature of instruction in a lesson. Of the 21 questions, four were designed to assess the extent to which a teacher's lesson had a conceptual emphasis. Another four questions were designed to determine the extent to which the lesson had a procedural emphasis. Factor analysis of the LieCal observation data confirmed that the four procedural-emphasis questions loaded on a single factor, as did the four conceptual-emphasis questions.

There was a significant difference across grade levels between the levels of conceptual emphasis in CMP and non-CMP instruction ($F = 53.43$, $p < 0.001$). The overall (grades 6-8) mean of the summated ratings of conceptual emphasis in CMP classrooms was 13.41, whereas the overall mean of the summated ratings of conceptual emphasis in non-CMP classrooms was 10.06. Since the summated ratings of conceptual emphasis were obtained by adding the ratings on the four items of the conceptual-emphasis factor in the classroom observation instrument, the mean rating on the conceptual-emphasis items was 3.35 (13.41/4) for CMP instruction and 2.52 (10.06/4) for non-CMP instruction. That is, CMP instruction was rated 0.40 points above the midpoint, whereas non-CMP instruction was rated 0.5 points below the midpoint. Thus, on average, CMP instruction was rated about 4/5 of a point higher (out of 5) on each conceptual emphasis item than non-CMP instruction, which was a significant difference ($t = 11.44$, $p < 0.001$).

In contrast, non-CMP lessons had significantly more emphasis on the procedural aspects of learning than the CMP lessons. The procedural-emphasis ratings for the non-CMP lessons were significantly higher than the procedural-emphasis ratings for the CMP lessons ($F = 37.77$, $p < 0.001$). Also, the overall (grades 6-8) mean of summated ratings of procedural emphasis in non-CMP classrooms (14.49) was significantly greater than the overall mean of the summated ratings of procedural emphasis in CMP classrooms, which was 11.61 ($t = -9.43$, $p < 0.001$). Since the summated ratings of procedural emphasis were obtained by adding the ratings on the four items of the procedural-emphasis factor, the mean rating on the procedural emphasis items was 3.62 (14.49/4) for non-CMP instruction and 2.91 (11.61/4) for non-CMP instruction. On average, non-CMP instruction was rated about 7/10 of a point higher (out of 5) on each procedural emphasis item than CMP instruction, which was a significant difference.

Instructional tasks.

As was done (above) with the mathematical problems in the intended curricula, the scheme developed by Stein et al. (1996) was again used to classify the instructional tasks actually used in the CMP and non-CMP classrooms into four increasingly demanding categories of cognition: memorization, procedures without connections, procedures with connections, and doing mathematics. Figure 3 shows the percentage distributions of the cognitive demand of the instructional tasks implemented in CMP and non-CMP classrooms (note that Figure 2 referred to problems from the intended, not the implemented, curricula).

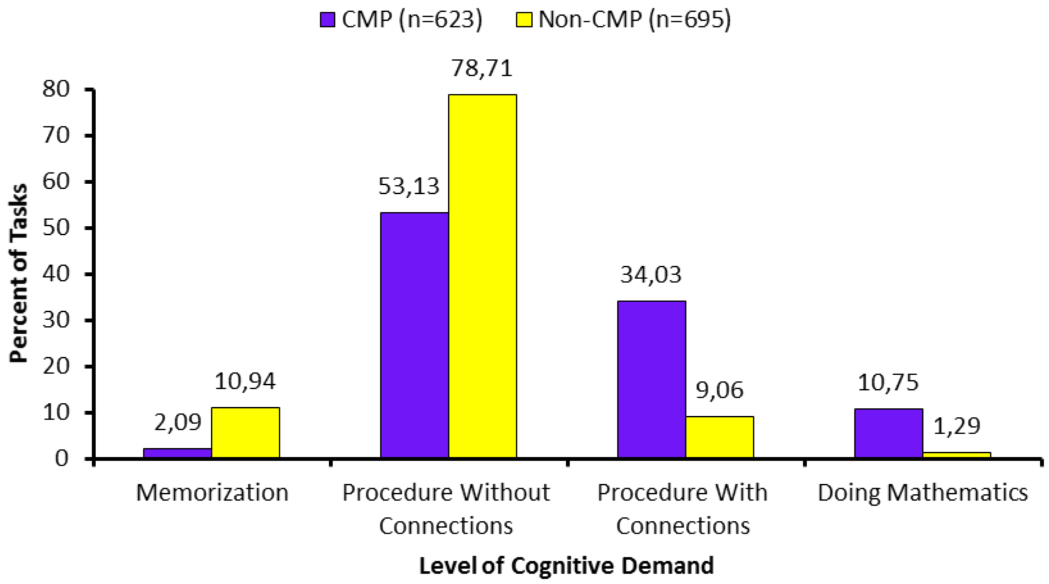


Figure 3.
The percentage distributions of the cognitive demand of the instructional tasks implemented in the CMP and non-CMP classrooms

The percentage distributions in CMP and non-CMP classrooms were significantly different ($X^2(3, N = 1318) = 219.45, p < .0001$). The difference confirms that a larger percentage of high cognitive demand tasks (procedures with connection or doing mathematics) were implemented in CMP classrooms than were implemented in non-CMP classrooms ($z = 14.12, p < .001$). Moreover, a larger percentage of low cognitive demand tasks (procedures without connection or memorization) were implemented in non-CMP classrooms than were implemented in CMP classrooms. In addition, not only did CMP teachers implement a significantly higher percentage of cognitively demanding tasks than non-CMP teachers across the three grades, but also within each grade (z values range from 6.06 – 11.28 across the three grade levels, $p < .001$).

Student Achievement for CMP and Non-CMP Students

In the LieCal Project, we have examined how the use of the CMP and non-CMP curricula have produced differing profiles of student mathematics performance. Looking within the middle school grade band, the LieCal Project found that on open-ended tasks assessing conceptual understanding and problem solving, the growth rate for CMP students over the three middle school years was significantly greater than that for non-CMP students (Cai et al., 2011). At the same time, CMP and non-CMP students showed similar growth over the three middle school years on the multiple-choice tasks assessing computation and equation-solving skills. These findings suggest that the use of the CMP curriculum is associated with a significantly greater gain in conceptual understanding and problem solving than is associated with the use of the non-CMP curricula. However, those relatively greater conceptual gains do not come at the cost of lower basic skills, as evidenced by the comparable results attained by CMP and non-CMP students on the computation and equation solving tasks.

The LieCal Project subsequently followed the students into their high school years. All high schools in the district are required to use the same district-adopted mathematics curriculum. CMP and non-CMP students were mixed into each class in each of ten high schools in the same district. Thus, all of the former CMP and non-CMP students used the same curriculum in high school and were taught by the same teachers in their high schools. As an extension of the results we found in the middle school years, we have been examining whether the superior problem-solving abilities gained by the CMP students in middle school result in better performance on a delayed assessment of mathematical problem solving in high school.

In a previous study, we used problem posing as a measure of middle school curricular effect on students' learning in high school (CAI et al., 2013). Using problem posing as a measure, we found that in high school, students who had used the CMP curriculum in middle school performed equally well or better than students who had used more traditional curricula. The findings from this previous study not only showed evidence of the strengths one might expect of students who used the CMP curriculum, but also demonstrated the usefulness of employing a qualitative rubric to assess different characteristics of students' responses to the posing tasks. Moreover, given the potential role of problem posing within the problem-solving process, this result suggests that the former CMP students might also continue to exhibit enhanced problem-solving strategies and performance in high school than their non-CMP counterparts. Thus, in the present study we use open-ended problem-solving strategies as a measure to examine longitudinal curricular effect on students' learning.

Problem-Solving Strategies as a Measure of Longitudinal Curricular Effects on Students' Learning

Methods

Participants

In the LieCal Project, we followed more than 1,300 students (650 using CMP and 650 using non-CMP curricula) from a school district in the United States for three years as they progressed through grades 6-8. In the 2008-2009 school year, most of these 1,300 CMP and non-CMP students from the middle school study entered high schools as freshmen. We then followed the students enrolled in the 10 high schools that had the largest numbers of the original 1,300 CMP and non-CMP students. As noted above, the former CMP and non-CMP students were mixed into high school classes that used the same curriculum.

Assessment Tasks and Analyses

As part of the LieCal Project, we developed and used 13 open-ended tasks to assess students' learning in high school, specifically the 11th and 12th grades. Students' responses were analyzed in two ways. The first was to quantitatively score each student response using a previously-developed holistic scoring rubric. The second was to qualitatively analyze students' responses with a focus on their solution strategies. In this paper, we mainly draw on results from an analysis of solution strategies to a pattern problem called the doorbell problem (see Appendix). This five-part task assesses students' ability to find regularities of a pattern and make generalizations. We chose to report the results from this task because it is representative of the tasks we used to assess students' generalization skills.

Data Collection and Coding

As part of the larger longitudinal study, we assessed 533 students (321 CMP and 212 non-CMP) in the fall of 11^{th} grade (Fall, 2010), spring of 11^{th} grade (Spring, 2011), and spring of 12^{th} grade (Spring, 2012). The data for the analyses of students' strategies came mainly from the 12^{th} grade spring assessment. In a small number of cases, if a student did not participate in the Spring 2012 assessment but did participate in the Spring 2011 assessment, we used the data from the Spring 2011 assessment. If a student did not participate in either the Spring 2012 or Spring 2011 assessments, but had participated in the Fall 2010 assessment, we used the data from the Fall 2010 assessment. This allowed us to look at the students' most recent attempt at each task.

As noted above, students' responses to the doorbell problem were first scored using a holistic scoring rubric that took into account the students' numerical answers and their explanations of their strategies. The responses were then also qualitatively coded for the types of strategies used. We coded students' solution strategies for parts A, B, C, and E as an abstract strategy, a concrete strategy, an unidentifiable strategy, or no strategy. Students who used an abstract strategy were able to recognize that the number of guests entering for each ring was equal to either two times the ring number minus one (i.e., $y = 2n - 1$) or the ring number plus the ring number minus one (i.e., $y = n + (n - 1)$). Students who used a concrete strategy were able to identify that the number of guests who enter increases by two for each doorbell ring and then sequentially adding two until they reached the desired number of rings, but did not abstract an algebraic formula. An unidentified solution strategy was a strategy that did not particularly make sense for the problem (e.g., $y = [r(100) + 2] - 1$). Lastly, a student was said to have used no strategy if the student did not show work for his or her answer, or if he or she did not attempt to answer the question at all.

Students' strategies for part D were coded in one of five ways. First, the student could have completely abstracted the algebraic formulas $2n - 1$ or $n + (n - 1)$. Secondly, they could have completely abstracted the pattern in a verbal description (e.g. "The number of guests who entered on a particular ring of the doorbell equalled two times that ring number minus one."). Third was an incomplete abstraction that only captured a recursive relationship, such as, "When the bell rings, two more people come." Fourth was an unidentified strategy, which either represented the strategies for students who incorrectly answered the question or had a provided a strategy that did not make sense. Finally, a strategy was coded as "no strategy" if no attempt was made to solve the problem.

Results

Overall Performance on the Doorbell Problem

We first conducted analyses based on the quantitative scoring (using holistic scoring rubric that took into account the students' numerical answers and their explanations of solution strategies) to student responses to the doorbell problem. The analyses indicated significant curriculum effects under two covariates for the doorbell problem. When controlling for overall state math test exam scores for 6th grade, CMP students scored significantly higher than non-CMP students on the doorbell problem (t = 2.09, p = 0.0371). When controlling for scores on the algebra subtest on the overall state math test for 6th grade, CMP students still scored significantly higher than non-CMP students (t = 2.47, p = 0.0141).

Performance on Individual Parts of the Doorbell Problem

Chi-squared tests were performed to look for relationships between curriculum and correctness of answers on each part of the doorbell problem. For part A, there was a significant relationship between curriculum and correct answers ($\chi^2 = 6.5363$, $p < 0.040$). That is, a significantly larger percentage of the CMP students had correct answers than the non-CMP students. For parts B, C, D, and E, there were no significant relationships between curriculum and correct answers. For each of the five parts of the problem, Table 1 provides the percentage of students with correct answers in that part. Note that Table 1 shows a considerable decreasing trend in the number of students who found a correct solution from part A to part E.

	Doorbell Problem Part				
Curriculum	A	B	C	D	E
CMP (n = 321)	80.1	38.6	27.7	18.1	7.5
Non-CMP (n = 212)	74.5	35.4	27.4	16.0	5.2

Table 1
Percentages of CMP and non-CMP students who correctly solved each part of the Doorbell Problem

Concrete and Abstract Solution Strategies

Focusing specifically on the solution strategies of those students who provided correct solutions for parts of the doorbell problem, the results were mixed. For part A (see Table 2), 67.3% of CMP students (n = 257) and 63.9% of non-CMP students (n = 158) used a concrete strategy to find the correct answer, whereas 26.1% of CMP students and 27.8% of non-CMP students abstracted the problem to an algebraic formula. There were no significant differences in proportion between CMP and non-CMP students for each strategy.

However, some differences in strategy use arose between the two groups as well. For part B (see Table 2), 73.4% of CMP students (n=124) and 60% of non-CMP students (n=75) abstracted the problem to an algebraic formula to find the correct solution, whereas 17.7% of CMP students and 24.0% of non-CMP students used a concrete strategy. A significantly greater proportion of CMP students used the abstract strategy than did the non-CMP students (z = 1.97, $p < 0.050$), but there was no significant difference in proportion between CMP and non-CMP students for the concrete strategy.

For part C (see Table 2), 71.9% of CMP students (n=89) and 67.2% of non-CMP students (n=58) abstracted the problem to an algebraic formula, whereas 7.9% of CMP students and 19.0% of non-CMP students used concrete strategies to find a correct solution. A significantly greater proportion of non-CMP students used the concrete strategy than did the CMP students (z = -2.27, p < 0.025), but there was no significant difference in proportion between CMP and non-CMP students for the abstract strategy.

		Type of strategy (%)			
Problem part	N	Abstract	Concrete	Unidentified	None
A					
CMP	257	26.1	67.3	3.5	3.1
Non-CMP	158	27.8	63.9	1.9	6.3
B					
CMP	124	73.4	17.7	3.2	5.6
Non-CMP	75	60.0	24.0	4.0	12.0
C					
CMP	58	71.9	7.9	9.0	11.2
Non-CMP	34	67.2	19.0	5.2	8.6
D					
CMP	58	100.0	0.0	0.0	0.0
Non-CMP	34	100.0	0.0	0.0	0.0
E					
CMP	24	62.5	29.2	4.2	4.2
Non-CMP	11	45.5	36.4	0.0	18.2

Table 2:
Percentages of CMP and non-CMP students who used each type of strategy to correctly answer parts of the doorbell problem

For part D, almost every student who provided a correct solution responded in nearly the same way. All of the 34 non-CMP students and 54 out of 58 CMP students who correctly answered this part generated an algebraic abstraction and provided a mathematical formula. The remaining four CMP students wrote out a verbal description of the mathematical formula, which would still require them to have first abstracted the relationships before translating those relationships into written form.

Part E seemed to be a challenging question for both the CMP and non-CMP students. Only 24 CMP students and 11 non-CMP students provided a correct solution to this part of the doorbell problem. Given these small sample sizes, although there were noticeable group differences in raw percentages of students using algebraic and concrete strategies, with a greater proportion of CMP students than of non-CMP students using algebraic strategies, these differences were not statistically significant.

Discussion

As part of a larger longitudinal study of curricular effect on mathematics learning, the results we have presented above provide a useful perspective on the potential long-term impacts of reform mathematics curricula on students' mathematical thinking and problem solving. Although we have presented data from only one open-ended task, the results suggest that high school students who used the CMP curriculum in middle school were more successful than their peers who used more traditional middle-school curricula at solving the doorbell problem and explaining their solution strategies. This result aligns with those obtained when these students were still in middle school (CAI, et al., 2011). The result is also consistent with our previous findings using problem posing as measure of curricular effect (CAI et al., 2013). Thus, it would appear that the CMP students' problem-solving gains persist well into high school.

The retention of these gains over longer time intervals also parallels the findings from research on the effectiveness of problem-based learning (PBL) in medical education (HMELO-SILVER, 2004). In that context, medical students trained using a PBL approach performed better than non-PBL students on conceptual understanding and problem-solving ability even when assessed at a later time. In a similar fashion, the CMP students in the LieCal project experienced problem-based instruction that focused on developing students' conceptual understanding and problem solving abilities.

In addition, our analysis of the strategies used by the students in this study suggests that the CMP students who correctly solved the parts of an open-ended task were somewhat more likely to make generalizations. This appears to reflect the emphasis in the CMP curriculum on relationships between quantities (i.e., the functional approach). The ability to abstract algebraic relationships from real-world situations appears to also have persisted in the CMP students.

Note that for this analysis, we focused on the strategies of students who correctly answered one or more parts of the doorbell problem. We did not consider the strategies of students who failed to provide correct answers. Future work will include additional analyses to probe the strategies of students who provided incorrect answers to the doorbell problem parts, as well as analyses of student response to other open-ended problems.

Conclusion

Mathematical problem solving continues to be a key feature of mathematics curricula, and consequently a focus of mathematics education research. As we noted at the beginning of this paper, research on mathematical problem solving has pursued many different aspects, including the cognitive processes of problem solving, the teaching of problem solving, components of the problem-solving process including problem posing, mathematical modeling, and the use of problem solving and posing as assessments of students' mathematical learning. The study we have reported in this paper stems from this final line of research into problem solving as assessment. We have explored how students' strategies when solving an open-ended problem can be used to detect the differential effects of curricula that are more or less problem-based. This study is part of the large LieCal Project (CAI, 2014).

The LieCal Project was designed to characterize the differential effects of a problem-based curriculum, CMP, and more traditional middle-school mathematics curricula. Through this longitudinal study of curricular effect, we have found that CMP students show greater growth than their non-CMP counterparts on open-ended tasks that assess conceptual understanding and problem solving, while maintaining similar growth through middle school on computation and equation solving skills. Following these students into their high school years, we have found consistent differences between the former CMP and non-CMP students that appear to reflect the different emphases of the CMP and non-CMP curricula. As a research finding, this continued curricular effect is particularly notable, as it passes beyond the grade band in which students encountered the curricula.

Fundamentally, it is important to assess students' mathematical learning using diverse tasks that reflect different aspects of that learning. In order to measure curricular effect more completely, one must attend to conceptual understanding and problem solving as well as procedural skill and fluency. In particular, for curricula that are designed to be problem based, it is critical to find ways to measure how students' problem-solving capacities develop over time. Here, we have shown that an analysis of problem-solving strategies using students' responses to an open-ended problem can indeed reflect differences in curricular effect, not only in the short term, but also longitudinally as students progress through their schooling.

References

BALL, D. L.; COHEN, D. K. Reform by the book: What is—or might be—the role of curriculum materials in teacher learning and instructional reform? **Educational Researcher**, v. 25, n. 9, p. 6-8, 14, 1996.

BEDNARZ, N., KIERAN, C.; LEE, L. (Eds.). **Approaches to algebra:** Perspectives for research and teaching. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996.

CAI, J. A. cognitive analysis of US and Chinese students' mathematical performance on tasks involving computation, simple problem solving, and complex problem solving. **Journal for Research in Mathematics Education Monographs Series, 7**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1995.

CAI, J. What research tells us about teaching mathematics through problem solving. In: LESTER, F. (Ed.). **Research and issues in teaching mathematics through problem solving**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2003, p. 241-254

CAI, J. Helping students becoming successful problem solvers. In: LAMBDIN, D. V.; LESTER, F. K. (Eds.). **Teaching and learning mathematics**: Translating research to the elementary classroom. VA: NCTM, 2010, p. 9-14.

CAI, J.; HUANG, S. Generalized and generative thinking in U.S. and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 21, p. 401-421, 2002.

Cai, J.; Nie, B. Problem solving in Chinese mathematics education: research and practice. **ZDM: The International Journal on Mathematics Education**, n. 39, p. 459-473, 2007.

CAI, J., CIRILLO, M., PELESKO, J. A., BORROMEO FERRI, R., BORBA, M., GEIGER, V., … KWON, O. N. Mathematical modelling in school education: Mathematical, cognitive, curricular, instructional and teacher education perspectives. In: LILJEDAHL, P.; NICOL, C.; OESTERLE, S; ALLAN, D. (Eds.). **Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Ed*ucation*.** Vancouver, Canada: PME, v. 1, p. 145-172, 2014.

CAI, J.; HWANG, S.; JIANG, C.; SILBER, S. Problem posing research in mathematics: Some answered and unanswered questions. In: SINGER, F. M.; ELLERTON, N.; CAI, J.

(Eds.). **Mathematical problem posing**: From research to effective practice. New York, NY: Springer, 2015, p. 3-34.

CAI, J.; MOYER, J. C.; WANG, N.; HWANG, S.; NIE, B.; GARBER, T. Mathematical problem posing as a measure of curricular effect on students' learning. **Educational Studies in Mathematics,** v. 83, p. 57-69, 2013.

CAI, J.; NIE, B.; MOYER, J. The teaching of equation solving: Approaches in Standards-based and traditional curricula in the United States. **Pedagogies**: An International Journal, v. 5, n. 3, p. 170-186, 2010.

CAI, J.; WANG, N.; MOYER, J. C.; WANG, C.; NIE, B. Longitudinal investigation of the curriculum effect: An analysis of student learning outcomes from the LieCal Project. **International Journal of Educational Research,** v. 50, n. 2, p. 117-136, 2011.

FENNEMA, E.; CARPENTER, T. P.; JACOBS, V. R.; FRANKE, M. L.; LEVI, L. W. A longitudinal study of gender differences in young children's mathematical thinking. **Educational Researcher**, v.27, n. 5, p. 6-11, 1998.

FRENSCH, P. A.; FUNKE, J. **Complex problem solving**: The European perspective. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1995.

HEMBREE, R.; MARSH, H. Problem solving in early childhood: building foundations. In: JENSEN, R. J. (Ed.). **Research ideas for the classroom**: Early childhood mathematics. National Council of Teachers of Mathematics and Macmillan New York, 1993, p. 151-170.

HENNINGSEN, M. A.; STEIN, M. K. Mathematical tasks and students' cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 28, p. 524-549, 1997.

HIEBERT, J., CARPENTER, T. P., FENNEMA, E., FUSON, K. C., WEARNE, D., MURRAY, H., OLIVIER, A.; HUMAN, P. **Making sense**: Teaching and learning mathematics with understanding. Portsmouth, NH: Heimann, 1997.

HMELO-SILVER, C. E. Problem-based learning: What and how do students learn? **Educational Psychology Review**, v. 16, p. 235-266, 2004.

KROLL, D. L.; MILLER, T. Insights from research on mathematical problem solving in the middle grades. In: OWENS, D. T. (Ed.). **Research ideas for the classroom**: Middle grades mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1993, p. 58-77.

LAPPAN, G.; FEY, J. T.; FITZGERALD, W. M.; FRIEL, S. N.; PHILLIPS, E. D. **Moving straight ahead.** Upper Saddle River, NJ: Prentice Halla, 2002a.

LAPPAN, G.; FEY, J. T.; FITZGERALD, W. M.; FRIEL, S. N.; PHILLIPS, E. D. **Connected mathematics.** Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002b.

LESH, R.; ZAWOJEWSKI, J. S. Problem solving and modeling. In: LESTER, F. (Ed.), **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Charlotte, NC: Information Age Publishing, 2007, p. 763-804.

LESTER, F. K. Thoughts about research on mathematical problem-solving instruction. **The Mathematics Enthusiast**, v. 10, n. 1 e 2, p. 245-278, 2013.

LESTER, F. K.; R. CHARLES (Eds.). **Teaching mathematics through problem solving**: Pre-K –Grade 6. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2003.

LESTER, F. K. JR.; CAI, J. Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research. In: FELMER, P.; KILPATRICK, J.; PEHKONEN, E.

(Eds). **Posing and solving mathematical problems**: Advances and new perspectives. New York, NY: Springer, 2016, p. 117-136.

MCLEOD, D. B.; ADAMS, M. (Eds.). **Affect and mathematical problem solving**: a new perspective. New York, NY: Springer-Verlag, 1989.

MOYER, J. C.; CAI, J.; NIE, B.; WANG. N. Impact of curriculum reform: Evidence of change in classroom instruction in the United States. **International Journal of Educational Research**, v. 50, n.2, p. 87-99, 2011.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Curriculum and evaluation standards for school mathematics**. Reston, VA: Author, 1989.

______. **Principles and standards for school mathematics**. Reston, VA: Author, 2000.

NIE, B.; CAI, J.; MOYER, J. How does a Standards-based curriculum differ from a traditional curriculum? **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (The International Journal on Mathematics Education)**, v. 41, n. 6, p. 777–792, 2009.

NIE, B.; FREEDMAN, T.; HWANG, S.; WANG, N.; MOYER, J. C. CAI, J. An investigation of teachers' intentions and reflections about using standards-based and traditional textbooks in the classroom. **Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik (International Journal on Mathematics Education)**, v. 45, p. 699–711, 2013.

SCHOEN, H.; CHARLES, R. (Eds.). **Teaching mathematics through problem solving**: Grades 6-12. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2003.

SCHOENFELD, A. H. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In: GROUWS, D. (Ed.). **Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York: MacMillan, 1992, p. 334-370.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. Understanding mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. (Ed.). **New directions for elementary school mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1989, p. 31-42.

SENK, S. L.; THOMPSON, D. R. (Eds.). **Standards-Based School Mathematics Curricula**: What are they? What do students learn? Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, 2003.

SILVER, E. A. **Teaching and learning mathematical problem solving**: Multiple research perspectives. Mahwah, NJ: Erlbaum, 1985.

SILVER, E. A. On mathematical problem posing, **For the Learning of Mathematics,** v. 14, n. 1, p. 19-28, 1994.

SIMON, H. A. **Models of thought**. New Haven: Yale University Press, 1979.

SINGER, F.; ELLERTON, N.; CAI, J. (Eds.). **Mathematical problem posing: From research to effective practice**. Springer, Dordrech, 2015.

SIU, M. K. Official curriculum in mathematics in ancient China: how did candidates study for the examination? In: FAN, L.; WONG, N.-Y.; CAI, J.; LI, S. (Eds.). **How Chinese learn mathematics: Perspectives from insiders**. Singapore: World Scientific, 2004.

STANIC G.; KILPATRICK J. Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Eds.). **The teaching and assessing of mathematical problem solving**. USA: National Council of Teachers of Mathematics, 1989, p. 1-22.

STEIN, M. K.; LANE, S. Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. **Educational Research and Evaluation,** v. 2, n. 1, p. 50-80, 1996.

STEIN, M. K.; SILVER, E. A.; SMITH, M. S. Mathematics reform and teacher development: A community of practice perspective. In: GREENO, J.; GOLDMAN, S. (Eds.). **Thinking practice in mathematic and science learning**. Mahwah, NJ: Erlbaum, 1998. p. 17-52.

WILSON, J. W.; FERNANDEZ, M. L.; HADAWAY, N. Mathematical problem solving. In WILSON, P. S. (Ed.). **Survey of research in mathematics education**: Secondary school. Reston, VA: NCTM, 1993, p 57-78.

Appendix

Sally is having a party.

The first time the doorbell rings, 1 guest enters.

The second time the doorbell rings, 3 guests enter.

The third time the doorbell rings, 5 guests enter.

The fourth time the doorbell rings, 7 guests enter.

Keep going in the same way. On the next ring a group enters that has 2 more persons than the group that entered on the previous ring.

A. How many guests will enter on the 10^{th} ring? Explain or show how you found your answer.

B. How many guests will enter on the 100^{th} ring? Explain or show how you found your answer.

C. 299 guests entered on one of the rings. What ring was it? Explain or show how you found your answer.

D. How many guests will enter on the n^{th} ring? Show or explain how you found your answer.

E. If we count all of the guests who entered on the first 100 rings, how many would we get in total? Show or explain how you found your answer.

Jinfa Cai
University of Delaware-USA
E-mail: jcai@udel.edu

Steven Silber
University of Delaware-USA
E-mail: spsilber@udel.edu

Stephen Hwang
University of Delaware-USA
E-mail: hwangste@gmail.com

Bikai Nie
Texas State University-USA
E-mail: b_n54@txstate.edu

John C. Moyer
Marquette University-USA
E-mail: john.moyer@marquette.edu

Ning Wang
Widener University-USA
E-mal: nwang@mail.widener.edu

Em direção à Generalização: Contribuições de um Problema com Múltiplas Estratégias de Resolução

Towards the generalization: contributions of a problem with multiple solving strategies

Norma Suely Gomes Allevato
Universidade Cruzeiro do Sul – UNICSUL – Brasil

Gilberto Vieira
Universidade Cruzeiro do Sul – UNICSUL – Brasil

RESUMO

A resolução de problemas, como estratégia de ensino de Matemática, vem se constituindo como uma importante abordagem didática. Neste artigo pretende-se mostrar como a atividade investigativa, decorrente da proposição de um problema envolvendo visualização espacial e análise de padrões, pode contribuir para que alunos do sexto ano do Ensino Fundamental construam generalizações. Trata-se de uma pesquisa de natureza qualitativa, com o foco nas resoluções formuladas e discutidas pelos alunos em sala de aula. A análise dos dados revelou que o problema proposto e a abordagem utilizada pelo professor permitiu que os alunos empregassem diferentes estratégias e procedimentos. A socialização das diversas resoluções por eles formuladas possibilitou o desenvolvimento do pensamento matemático, com destaque para o processo de generalização, característico do pensamento algébrico.

Palavras-chave: Educação Matemática, Resolução de Problemas, Problemas Abertos, Generalização.

ABSTRACT

Problem solving, such as mathematics teaching strategy, is becoming an important didactic approach. This article aims to present how the investigations resulting from the proposition of a problem involving spatial visualization and analysis of patterns can contribute to the formulation of generalizations by students of the sixth grade of elementary school. This is a qualitative research, with a focus on the strategies of problem solving formulated and discussed by students in the classroom. Data analysis pointed out that the proposed problem and the approach used by the teacher allowed the students to employ different strategies and procedures. The socialization of their different resolutions made possible the development of mathematical thinking, highlighting the process of generalization, characteristic of algebraic thinking.

Keywords: Mathematics Education, Problem Solving, Open Problems, Generalization.

Introdução

Atualmente a escola tem se deparado com o desafio de atender novas demandas de formação de crianças e jovens. Esse desafio exige a formação para uma sociedade em transformação, plural, tecnológica e complexa, além de envolver um trabalho com grupos de estudantes cada vez mais heterogêneos, de perfis social, econômico e cultural diversos.

Diante desse cenário, as pesquisas em Educação Matemática têm apresentado avanços significativos no estudo e implementação de estratégias de ensino que possibilitem aos estudantes a construção de conhecimento matemático e o desenvolvimento de habilidades e competências matemáticas exigidas pela sociedade contemporânea. O trabaho de Groenwald, Silva e Mora (2004) exemplifica essa diversidade de estratégias apresentando, como perspectivas atuais de ensino de Matemática, a resolução de problemas, a modelagem matemática, os jogos e curiosidades matemáticas, as novas tecnologias, a história da Matemática, a etnomatemática e o ensino por projetos de trabalho, todas contrapondo-se às práticas de ensino tradicionais de Matemática.

No presente artigo, nos ocuparemos em discutir as potencialidades do trabalho com a resolução de problemas em sala de aula, especialmente a resolução de problemas abertos. Pretendemos, em particular, mostrar como a atividade investigativa, decorrente da proposição de um problema aberto envolvendo a visualização espacial e a análise de um padrão, contribuiu para que alunos do sexto ano do Ensino Fundamental compreendessem e expressasem a generalização implícita na proposta do problema.

A observação de padrões, que no âmbito da resolução de problemas pressupomos envolver sua descrição e generalização, tem sido considerada uma abordagem relevante na transição da aritmética para a álgebra (MASON, 1996, apud VALE; PIMENTEL, 2011) e, longe de ser um tópico de pouco uso no mundo real, o raciocínio envolvido neste tipo de atividade perpassa toda a Matemática e é essencial para torná-la útil na vida cotidiana (VAN DE WALLE, 2009).

O problema que apresentamos integra uma sequência de tarefas elaborada e realizada no âmbito da pesquisa de Vieira (2016) acerca da utilização de tarefas exploratório-investigativas no ensino de Matemática.

Na próxima seção explanamos sobre a concepção de resolução de problemas que orienta nosso trabalho, tipificamos o que são problemas abertos e discutimos algumas de suas potencialidades para o ensino e aprendizagem de Matemática. Trazemos, em seguida, o contexto de realização da pesquisa aqui retratada, bem como os procedimentos metodológicos utilizados. Apresentamos, então, o problema proposto aos estudantes, analisamos e discutimos algumas de suas resoluções. Por fim, tecemos algumas considerações a respeito do trabalho empreendido.

Problemas Abertos como Desencadeadores de Investigações Matemáticas

A temática da resolução de problemas no ensino de Matemática tem se configurado como objeto de estudos e pesquisas há mais de setenta anos, destacando-se como marco inicial a obra intitulada *How to sove it?* (POLYA, 1945). A partir dos trabalhos de Polya, pesquisadores e professores passaram a dar maior ênfase à resolução de problemas nas aulas de Matemática, embora um olhar mais atento às práticas e orientações que se sucederam revele diferentes concepções acerca da expressão *resolução de problemas*.

Compartilhamos da concepção de Allevato e Onuchic (2014) que considera a resolução de problemas como uma metodologia de ensino. Nela, o ponto de partida das atividades de sala de aula é um problema. Esse problema é proposto, aos alunos, antes mesmo de lhes ter sido apresentado o conteúdo ou os recursos matemáticos mais apropriados ou pretendidos para a sua resolução. Assim, partindo de conhecimentos que já possui, o aluno se coloca em um processo que envolve esforço cognitivo na busca pela solução e, nesse percurso, tem a oportunidade de aprender o conteúdo matemático que o professor pretende que ele aprenda e outros conteúdos eventualmente não previstos pelo professor.

Desse modo, o professor deve ter um cuidado especial no processo de seleção e/ou elaboração do problema que pretende propor aos estudantes. Diferentes tipos de problema podem suscitar diferentes abordagens. De acordo com Way (2005), alguns tipos de problema exigem a retomada de fatos e procedimentos, outros estimulam a utilização de diferentes estratégias, outros dependem de raciocínio lógico, outros apresentam múltiplas soluções e outros, ainda, demandam tomada de decisões e criatividade. Em relação aos problemas abertos, a autora afirma que eles apresentam maior potencial em estimular pensamento matemático de ordem superior, por envolverem a procura por padrões e relações entre os seus elementos. Cabe, nesse instante, clarificarmos o que vem a ser um problema aberto.

> Contrapondo-se aos chamados problemas fechados – em que tanto a situação inicial, como o processo de resolução, como o objetivo final (resposta) do problema é pré-determinado –, nos problemas abertos, o processo de resolução é aberto ou o final é aberto ou a formulação de novos problemas é aberta. São problemas que partem de enunciados menos estruturados, permitem a formulação de diversos tipos de questões e possibilitam a realização de explorações em diferentes direções. Assim, os problemas abertos podem ser propostos como desencadeadores de processos de investigação matemática pelos alunos (ALLEVATO; VIEIRA, 2016, p. 121).

Contrastando com os problemas fechados, que apresentam uma única resposta correta e procedimentos de resolução pré-determinados, os problemas abertos caracterizam-se por apresentarem variadas soluções e estratégias de resolução e por propiciarem aos estudantes realizarem investigações.

De acordo com Takahashi (2005), os problemas abertos podem ser tipificados quando: 1) apresentam múltiplos métodos de resolução, ou; 2) apresentam múltiplas soluções, situação em que também são denominados como problemas de final aberto ou *open-ended problems*, ou; 3) possibilitam e direcionam à proposição e formulação de novos problemas, situação também denominada como *problem posing*.

Para Bustamante, Ribeiro e Navarro (2015), os problemas abertos correspondem a situações em que o aluno necessita elaborar diversas formas de resolução, podendo empregar diferentes mecanismos, de modo que a diversidade de estratégias empregadas pelos alunos pode condicionar o desenvolvimento do conhecimento matemático em questão.

O caráter aberto desses problemas possibilita sua associação a um outro tipo de tarefa característica na educação matemática: as tarefas investigativas. Segundo Ponte et al. (1998), as tarefas investigativas correspondem a situações que partem de questões iniciais, de um modo geral, vagas, e que vão sendo trabalhadas e gradativamente tornadas mais precisas pelo aluno. Elas apresentam como uma de suas características mais fortes exatamente o caráter aberto, que coloca o aluno em um processo de elaboração e criação, possibilitando a emergência de diferentes estratégias de resolução.

De fato, existem situações propostas no âmbito do ensino de Matemática que podem ser classificadas tanto como problemas abertos quanto como tarefas investigativas, dependendo do referencial teórico previamente assumido. Way (2005) considera que os problemas abertos podem ser percebidos por apresentarem objetivos mais bem delimitados, estando diretamente relacionados a um conteúdo e/ou habilidade matemática específica que se pretenda trabalhar com os alunos, embora possam apresentar mais do que uma solução e múltiplas formas de resolução; já nas tarefas investigativas os objetivos tendem a ser menos específicos e, muitas vezes, o encaminhamento da atividade, bem como os tópicos matemáticos a serem discutidos durante a sua realização estão condicionados a problemas que são formulados e reformulados no próprio decurso da investigação.[21]

Porém, embora as diferenças entre problemas abertos e tarefas investigativas não se mostrem de forma evidente, é fato que essas tarefas podem levar os alunos a processos de investigação matemática. É importante esclarecermos, para evitar interpretações equivocadas, o uso que fazemos da expressão *investigação matemática*. Ao utilizarmos esta expressão, não estamos nos referindo às tarefas investigativas (modalidade específica de tarefa que pode ser proposta em sala de aula, apresentada na forma textual escrita ou na forma oral enunciada pelo professor), mas ao processo que compreende a procura metódica e consciente e a descoberta através de exame e observação minuciosos.

Pesquisas atuais têm revelado que os problemas abertos podem desencadear processos de investigação matemática em sala de aula, e os contributos dessa atividade têm sido extremamente valorizados por professores. Nos estudo de Ambrus e Barczi-Veres (2016), os professores envolvidos afirmaram que o trabalho com problemas abertos em sala de aula, ao promover o desenvolvimento de diversas estratégias de resolução, possibilitou que os estudantes se defrontassem com diferentes soluções e oportunizou que os estudantes, partindo de situações particulares, chegassem às generalizações que eram esperadas.

No que se refere às contribuições que o trabalho com a resolução de probemas abertos pode apresentar para o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes, Sawada (1997), em seus estudos, já discorria sobre cinco aspectos que considerava relevantes: 1) os estudantes assumem uma postura ativa perante o problema que é proposto e procuram expressar suas ideias com maior frequência; 2) os estudantes têm oportunidade de colocar em prática o conhecimento matemático de que dispõem para escolher a estratégia de resolução que lhes pareçam mais adequada; 3) os problemas abertos propiciam o envolvimento de todos os estudantes; 4) através da comparação e discussão de suas resoluções os estudantes são estimulados a validar seu raciocínio e, consequentemente, desenvolvem seu pensamento matemático, e; 5) os estudantes têm a oportunidade de vivenciar o prazer da descoberta.

Tendo em conta esses cinco aspectos, a proposição de problemas abertos em sala de aula passa a ser uma prática que merece ser considerada. Seu potencial em conduzir os alunos a processos de investigação vem corroborar a ideia de que se aprende matemática, fazendo matemática (ABRANTES et al., 1999; PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009; VAN DE WALLE, 2009).

Um aspecto de suma importância, relacionado ao trabalho com problemas abertos, refere-se ao momento em que os alunos comparam e discutem suas resoluções. Way (2005) aponta que o benefício de múltiplas soluções e estratégias é que elas propiciam uma rica fonte de material para discussão matemática que torna a experiência de aprendizagem mais profícua.

A esse momento de discussão de ideias e socialização de resultados Allevato e Onuchic (2014) também dedicam especial atenção. As autoras orientam que o trabalho com

[21] Maiores esclarecimentos a respeito de relações e diferenças entre problemas e tarefas investigativas em sala de aula são apresentados em Vieira e Allevato (2012).

resolução de problemas deve contemplar um momento em que os alunos são convidados a apresentar, ao professor e aos colegas, suas resoluções (certas, erradas ou feitas por diferentes processos). Nesse momento, ao deparar-se com diferentes soluções e métodos, eles podem comparar estratégias, refletir sobre o trabalho empreendido, reformular hipóteses, defender seu ponto de vista, justificar conclusões e, assim, se colocar em um movimento de construção de conhecimento.

> [...] Diante desse "painel de soluções", o professor estimula os alunos a compartilhar e justificar suas ideias, defender pontos de vista, comparar e discutir as diferentes soluções, isto é, avaliar suas próprias resoluções de modo a aprimorar a apresentação (escrita) da resolução. Em sessão plenária, ou seja, em um esforço conjunto, professor e alunos tentam chegar a um consenso sobre o resultado correto. Esse é um momento em que ocorre grande aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemáticas e relevante construção de conhecimento acerca do conteúdo (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 46).

Salientamos, portanto, que o momento de discussão dos resultados não pode ser desprezado. Esse momento configura-se como uma importante etapa do processo de investigação matemática pois exige do estudante uma postura ativa, colocando-o no centro do processo de construção de conhecimento e possibilitando o desenvolvimento e aprimoramento de importantes habilidades, como as de comunicação (leitura e escrita) matemática, por exemplo.

Considerando o potencial apresentado pelos problemas abertos em promover investigações matemáticas e as contribuições que podem trazer ao processo de desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes, deduzimos que sua proposição em sala de aula pode configurar-se como uma exitosa alternativa metodológica para o ensino de Matemática. Imbuídos desse ideal, realizamos uma pesquisa acerca das investigações realizadas pelos estudantes, na qual elaboramos e propusemos uma sequência de ensino composta por tarefas exploratório-investigativas e problemas abertos. Na próxima seção, apresentamos o contexto de realização dessa pesquisa e os procedimentos metodológicos adotados para, em seguida, discutir a resolução de uma tarefa que configurou-se como um problema aberto devido à diversidade de abordagens que suscitou.

O Contexto da Pesquisa

A pesquisa aqui retratada foi realizada junto a uma turma de 35 alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, com idades entre 11 e 12 anos, de uma escola pública da cidade de São José dos Campos, interior do estado de São Paulo. O trabalho de campo consistiu na realização de uma sequência de tarefas envolvendo resolução de problemas abertos e investigações matemáticas. Abordaremos, neste artigo, a resolução de um problema envolvendo visualização espacial e generalização.

Para a realização da tarefa os alunos foram agrupados em duplas, procurando se estabelecer um ambiente que favorecesse o trabalho colaborativo, a troca de ideias e a argumentação em um movimento propício à produção de conhecimentos matemáticos. A atividade foi realizada em uma aula dupla com duração de aproximadamente 100 minutos.

Após a realização da atividade proposta, os alunos foram convidados a registrar suas soluções na lousa e discuti-las com os demais colegas de classe.

Apesar dos desafios e limitações que o trabalho com todos os alunos da sala poderia condicionar, a opção pelo trabalho com a totalidade dos alunos se deu pelo desejo de analisar um contexto real de ensino, próximo da realidade encontrada por outros professores da Educação Básica em suas aulas. É importante destacar que, nesta pesquisa, o pesquisador também era o professor de Matemática da turma. Segundo Zeichner (1998), a pesquisa realizada por professores revela-se como um importante e distinto meio de conhecer o ensino. Para o autor, os professores estão em situação privilegiada por atuarem diretamente no processo de ensino vivenciado na escola. Se, por um lado, essa proximidade com o objeto de estudo pode influenciar as ações e análises subsequentes (e esse é um cuidado que o professor´pesquisador deve tomar), por outro, pode revelar uma visão diferenciada do processo, destacando aspectos e qualidades que poderiam passar despercebidas a um observador externo.

A coleta de dados foi realizada através de observações (VIANNA, 2003), da gravação dos diálogos entre os alunos nos momentos de resolução e discussão do problema, e da recolha de suas resoluções escritas. Os diálogos foram gravados em áudio e, posteriormente, transcritos. Também foram analisadas as resoluções escritas do problema, registradas pelos alunos na lousa no momento de socialização dos resultados.

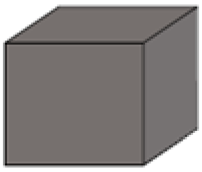
Para a análise dos dados, resultantes de todo o processo de resolução de problemas vivenciado pelos alunos, optamos por uma abordagem de natureza qualitativa, recorrendo a procedimentos de análise textual discursiva (MORAES; GALIAZZI, 2006). A organização e a análise cuidadosa dos diálogos dos alunos e de suas produções escritas possibilitaram-nos construir uma interpretação a respeito das contribuições que um trabalho investigativo decorrente da proposição de um problema aberto pode propiciar para a aprendizagem matemática. Apresentamos, na próxima seção, o problema que foi proposto aos estudantes, bem como descrições e análises do trabalho que se sucedeu.

A Pintura dos Cubinhos

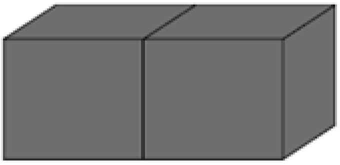
Conforme já explicitado, assumimos a concepção de que o problema é o ponto de partida, o elemento disparador da atividade matemática que será desencadeada em sala de aula. Assim, inicialmente, cabe ao professor selecionar, ou mesmo elaborar, um problema que seja interessante, no sentido de propiciar aos estudantes a oportunidade de resolvê-lo e de aprender Matemática a partir dele. Quanto ao grau de dificuldade apresentado pelo problema, é preciso cautela para não se propor um problema cuja resolução se revele evidente, sob o risco de a tarefa proposta configurar-se como um mero exercício; por outro lado, problemas de resolução demasiadamente complexa podem desestimular e inibir o trabalho dos alunos. O desejável é pensar em um problema que permita aos estudantes, a partir da mobilização dos conhecimentos que já possuem, da reflexão e do diálogo com os pares, construir uma resolução e acessar o conteúdo matemático em questão.

Partindo desse pressuposto, apresentamos, na Figura 1 e nos questionamentos que se seguem, a proposta do problema que é objeto de discussão nesse artigo. Trata-se de um problema envolvendo visualização espacial e generalização, adaptado do trabalho de Cunha (2009):

Deseja-se pintar as faces de cubinhos unitários sempre após a união gradativa de mais um cubinho na direção horizontal. A figura a seguir mostra como devemos proceder.



Um cubinho com todas as faces pintadas de cinza. Aqui temos um total de 6 faces pintadas.



Dois cubinhos acoplados com todas as suas faces visíveis pintadas. Neste caso, teríamos um total de 10 faces pintadas.

Figura 1

A essa introdução seguiram-se os questionamentos:

a) *E se tivéssemos três cubinhos acoplados, quantas faces teríamos para pintar?*
b) *E se tivéssemos quatro cubinhos acoplados, quantas faces teríamos para pintar?*
c) *E se tivéssemos cinco cubinhos acoplados, quantas faces teríamos para pintar?*
d) *E se tivéssemos quinze cubinhos acoplados, quantas faces teríamos para pintar? Explique o seu raciocínio.*

Embora esse problema apresente, para cada questionamento, apenas uma resposta correta, durante sua resolução os alunos empregaram estratégias e procedimentos diversos. Devido à multiplicidade de estratégias de resolução empregadas e, em consonância com o trabalho de Takahashi (2005), tipificamos esse problema como aberto.

A essa situação problema, os estudantes deveriam apresentar suas soluções, bem como os caminhos percorridos para encontrá-las, fosse por meio de um desenho, de um cálculo, ou mesmo com a explicação escrita do raciocínio utilizado.

Por se tratar de um problema aberto, as estratégias para a resolução não estavam determinadas. Percebemos que as duplas dialogavam bastante e procuravam chegar a um consenso quanto à maneira adequada de apresentar sua resolução, o que denotava o envolvimento dos alunos com a resolução dessa tarefa. Ao discutirem e procurarem explicar o seu raciocínio, os alunos assumiam uma postura ativa frente à atividade proposta, ou seja, eles procuravam elaborar suas próprias estratégias de resolução e não estavam preocupados em seguir um modelo pré-determinado. Essa postura contribuiu para a emergência de diferentes procedimentos de resolução.

Após a resolução do problema, os estudantes foram convidados a registrar suas soluções na lousa e a explicar aos colegas o raciocínio empregado na questão (d) relativa aos quinze cubinhos acoplados. Nesse momento, tínhamos os objetivos de que eles comunicassem os resultados a seus pares apresentando suas justificativas e confrontassem as diferentes resoluções. Foi interessante perceber a variedade das resoluções apresentadas e a maneira como cada dupla buscou validar o seu raciocínio.

Um dos recursos utilizados pelos estudantes foi a representação da situação por meio de desenhos (representação pictórica), como podemos observar na Figura 2:

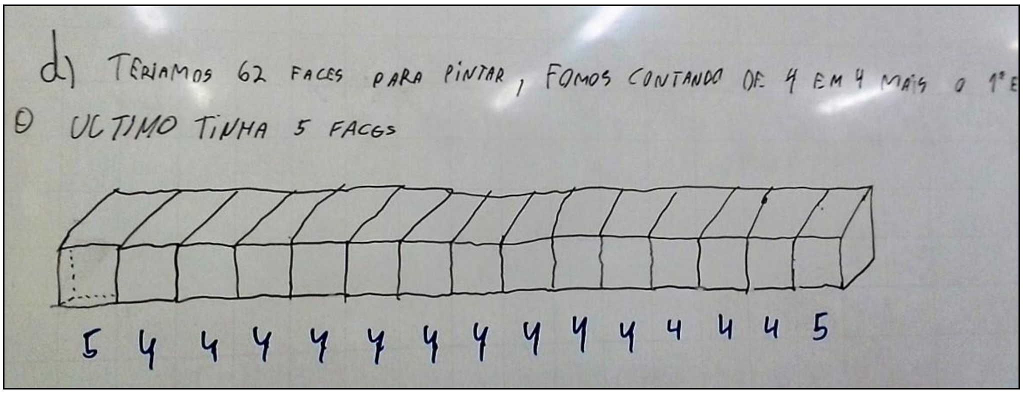


Figura 2

Os alunos, além de apresentarem a resposta correta para a atividade proposta, procuraram explicitar o caminho pelo qual chegaram à solução da atividade, conforme pode ser notado na justificativa do Aluno$_A$:

Aluno$_A$: Primeiro a gente somou 5 com 5 e depois a gente foi somando de 4 em 4, mais 4, mais 4, mais 4... e deu 62.

Ao afirmarem que contaram as faces que deveriam ser pintadas, diferenciando os cubinhos que estavam localizados nas extremidades (no primeiro e no último cubinhos havia cinco faces para serem pintadas; nos demais apenas quatro) e demonstrarem tal situação por meio de um desenho, os estudantes revelaram um raciocínio fortemente apoiado em um recurso visual. Além disso, ao afirmarem "*a gente foi somando de 4 em 4, mais 4, mais 4, mais 4...*" eles justificam a solução apoiados em um procedimento recursivo[22], ou seja, a cada cubinho acoplado acrescentavam quatro faces a pintar. O esboço da situação por meio de um desenho ajudou os alunos a formularem sua resposta.

Outro recurso utilizado pelos estudantes na resolução dessa atividade foi a organização dos dados em formato de "sequência numérica" disposta em colunas, lembrando uma representação tabular, como pode ser visto na Figura 3:

[22] Recursão é o processo pelo qual um dos passos do procedimento em questão envolve a repetição do passo anterior. Um procedimento que se utiliza da recursão é dito recursivo. Uma sequência é definida recursivamente se ela for dada por uma regra que permite calcular um termo qualquer por meio de um ou mais termos anteriores. (OLIVEIRA, 2014).

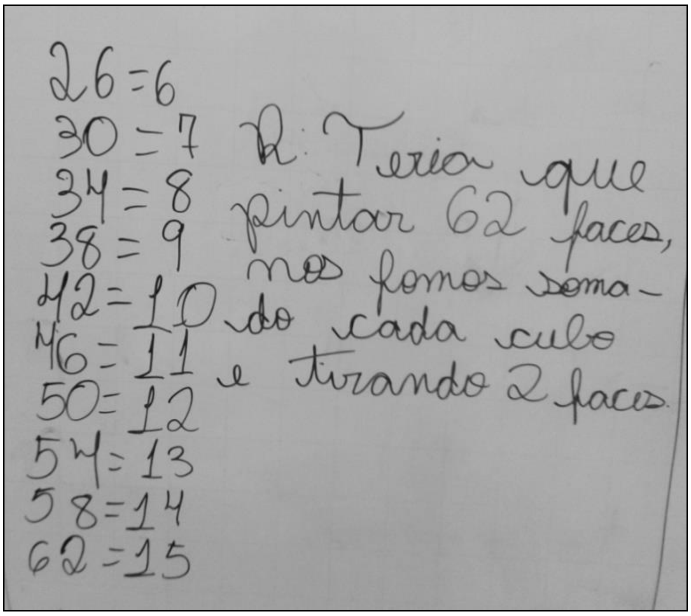


Figura 3

Nesse caso, os estudantes não sentiram a necessidade de esboçar um desenho e utilizaram o recurso da "tabela" para expressar seu raciocínio, conforme explicitado pela justificativa do Aluno$_B$:

> *Aluno$_B$: Nós pegamos os cubos e imaginamos. Nós colocamos na segunda coluna o total de cubos (acoplados) e na primeira coluna a quantidade de faces que nós íamos pintar.*

É importante destacar o uso que os estudantes fizeram do sinal de igualdade. Ao registrarem, por exemplo, que 26 = 6, eles utilizaram o sinal de igualdade de forma inadequada, com a intenção de dizer que com 6 cubos acoplados haveria 26 faces pintadas. Ao serem questionados sobre o significado de sua representação eles justificaram sua resolução afirmando que na primeira coluna (números escritos à esquerda do sinal de igualdade) colocaram a quantidade de faces pintadas e, na segunda coluna (números escritos à direita do sinal de igualdade), a quantidade de cubinhos acoplados.

Nessa resolução, os alunos perceberam a regularidade implícita na tarefa. Porém, eles efetuaram a contagem de cada cubinho (um por um), o que se confirma ao afirmarem que foram somando as quantidades de faces de cada cubo. Assim como a resolução apresentada anteriormente, essa dupla também justifica sua resposta apoiada em um procedimento recursivo. De acordo com Barbosa, Vale e Palhares (2009), a utilização de um procedimento recursivo constitui-se como uma abordagem interessante para lidar com tarefas que envolvam generalizações próximas (que envolvem pequeno número de elementos), mas revela-se insuficiente para a compreensão da estrutura geral do padrão.

Outro aspecto interessante, revelado na justificativa apresentada pelo Aluno$_B$, é a maneira como expressam a percepção visual da situação dos cubinhos acoplados. Quando o Aluno$_B$ afirma "*nós pegamos os cubos e imaginamos*" está fazendo referência à habilidade de visualizar mentalmente objetos e relações espaciais, uma vez que, durante a realização dessa tarefa, os alunos não dispunham de objetos físicos para manipulação. As habilidades de visualização e representação mental de objetos espaciais estão relacionadas ao que Clements e

Battista (1992) e Van de Walle (2009) chamam de senso espacial, um componente importante no processo de desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes.

Houve, ainda, alunos que, utilizando um raciocínio mais elaborado, não sentiram a necessidade de representar a situação por meio de desenhos ou quadros. O direcionamento oferecido pelo próprio enunciado do problema permitiu que alunos percebessem a regularidade implícita na tarefa e generalizassem a forma de calcular a quantidade de faces que deveriam ser pintadas no caso de uma maior quantidade de cubinhos acoplados, como pode ser observado na Figura 4:

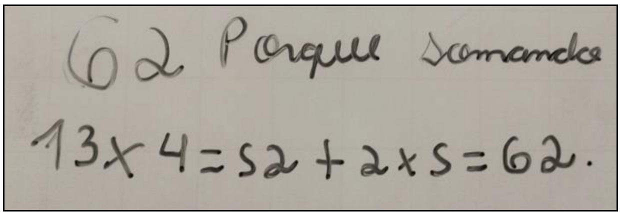


Figura 4

A justificativa apresentada pelos estudantes para essa resolução pode ser observada a seguir:

> *Aluno$_C$: Nós pegamos os treze cubinhos do meio e fizemos vezes 4, porque as partes que estavam grudadas a gente não contou. E depois, nós pegamos os dois cubinhos que ficaram nos cantos, nas duas pontas, que valiam 5 e fizemos duas vezes, e deu 62.*

Não se pode deixar passar despercebido o emprego novamente inadequado do sinal de igualdade nessa representação. Entretanto, os alunos perceberam que, com exceção dos cubinhos colocados nas extremidades, os demais cubos apresentavam quatro faces pintadas (13 x 4 = 52). A esse resultado somam-se as faces dos cubinhos colocados nas extremidades, que têm cinco faces pintadas cada um (5 x 2 = 10), totalizando 62 faces pintadas (52 + 10 = 62). Assim, não obstante o equívoco na utilização do sinal de igualdade, merece destaque o raciocínio empregado pelos alunos nesta resolução.

O desenho (Figura 2) e a sequência numérica (Figura 3) foram estratégias bastante úteis no processo de resolução desse problema, mas foi discutido com os alunos, no momento de socialização dos resultados, que o poder de síntese da solução apresentada pelo Aluno$_C$ (Figura 4) permitia a exploração de uma gama de situações muito maior, sem a inconveniência de se ter que desenhar figuras muito grandes ou construir sequências demasiadamente longas.

Enquanto as justificativas apresentadas por Aluno$_A$ e Aluno$_B$ apoiam-se em procedimentos recursivos, a resolução apresentada pelo Aluno$_C$ notabiliza-se por apoiar-se em um procedimento geral e representar um avanço em direção à generalização da situação proposta. Por se tratar de uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental, não houve, nesse momento, a preocupação em abordar a representação das variáveis do problema por meio de letras, embora fosse possível.

Quanto à linguagem em que são formuladas as generalizações expressas nas falas dos alunos, Ponte (2009) afirma que, em uma primeira etapa, não há outra alternativa, senão utilizar a linguagem natural e, pouco a pouco, começar a introduzir elementos simbólicos para promover o desenvolvimento do domínio da linguagem algébrica e do pensamento algébrico.

Ponte (2009) também destaca a importância da realização de tarefas envolvendo padrões e regularidades, especialmente as tarefas que conseguem conjugar elementos geométricos e aspectos numéricos, em que a representação visual desempenha um papel relevante. Para o autor, esse tipo de tarefa permite aos alunos empregarem diversas estratégias de raciocínio e, conforme se observa nos dados aqui apresentados, estimula o pensamento matemático e promove a aprendizagem matemática.

Considerações Finais

A capacidade de generalizar situações é um elemento fundamental da Matemática e o desenvolvimento dessa capacidade figura como um dos principais objetivos do ensino de Matemática (WARREN, 2009). Nesse sentido, é importante envolver os alunos, desde muito novos, em tarefas que os permitam compreender e expressar generalizações utilizando diferentes sistemas de notação.

Situações que envolvam a análise de padrões, regularidades e a busca por generalizações oportunizam a realização de investigações matemáticas, que se caracterizam por processos de formulação de conjecturas, testes e provas (demonstrações). Muitas das tarefas propostas com padrões e regularidades apresentam o potencial de desencadear processos de investigação. Nessas questões, os alunos deparam-se com situações matematicamente ricas, acerca das quais se podem colocar diversas perguntas, cabendo-lhes formular de forma mais precisa os aspectos a estudar. (PONTE, 2009, p. 171).

A proposição de um problema aberto (assim tipificado por apresentar múltiplos métodos de resolução) envolvendo visualização espacial e generalização possibilitou o surgimento de diferentes resoluções e encaminhamentos para os questionamentos propostos, respeitando os diferentes estilos de aprendizagem dos alunos e possibilitando diferentes abordagens para um mesmo conteúdo matemático.

Ao depararem-se com a diversidade de resoluções apresentadas pelos colegas ao problema, os alunos puderam compará-las e perceber algumas particularidades. Essa diversidade de estratégias de resolução é apontada por Bustamante, Ribeiro e Navarro (2015) como uma das características típicas do processo de investigação matemática propiciado por problemas abertos.

Confrontando suas resoluções, os alunos buscaram validar seu raciocínio, em uma tentativa de convencer o outro de que sua solução estava correta. Diante de diferentes olhares sobre o mesmo problema, os alunos perceberam que, em certos casos, sua forma de pensar era validada por resultados semelhantes encontrados por outras duplas. O exercício de ouvir o outro, ora no momento de investigação em dupla, ora na discussão com as outras duplas da classe colocou os alunos em um movimento de produção de conhecimentos. Hintz (2014) nos coloca que discussões matemáticas em sala de aula ajudam os alunos a desenvolver a compreensão de conceitos e procedimentos matemáticos. Problemas abertos que desencadeiam atividades de exploração e investigação possibilitam esse momento marcado por partilha de ideias, questionamentos, indagações, argumentações e refutações. A descoberta, pelos alunos, de uma variedade de estratégias e procedimentos plausíveis de serem aplicados à resolução do problema revela que os momentos de apresentação e discussão a respeito do que foi observado e produzido nas investigações são especialmente favoráveis à formação do pensamento matemático. Essa constatação corrobora o momento de discussão de ideias e socialização dos resultados como imprescindível em uma abordagem que assuma a resolução de problemas como estratégia de ensino de Matemática.

No que tange às diferentes compreensões suscitadas a partir do problema da pintura dos cubinhos, a comparação entre as diferentes estratégias empregadas possibilitou aos estudantes transitarem por resoluções apoiadas em procedimentos recursivos e procedimentos gerais, avaliarem a conveniência de cada tipo de resolução e refletirem sobre qual tipo de abordagem se mostrou mais adequada ao problema, destacando fragilidades e potencialidades das representações utilizadas. Esse movimento vivenciado pelos estudantes denota o desenvolvimento de seu pensamento matemático, reforça a participação ativa dos estudantes em seu processo de construção de conhecimentos e revela uma transição inicial, do pensamento aritmético para pensamento algébrico.

Outro aspecto característico dos problemas abertos e das investigações matemáticas que se sucedem é a imprevisibilidade do que pode acontecer no desenvolvimento da atividade. No exemplo aqui retratado, apesar de o problema ter sido apresentado aos alunos com a intenção de se discutir aspectos da visualização espacial, percepção de regularidades e generalizações, o fato de algumas duplas apresentarem uma compreensão equivocada do sinal de igualdade é um forte indicativo, para o professor, de um conteúdo matemático que precisa ser retomado com a turma. No ensino de Matemática planejado a partir da proposição de problemas abertos, os alunos acabam revelando compreensões ou (in)compreensões e formulando novos problemas que podem desencadear a abordagem de outros conteúdos matemáticos, não necessariamente planejados para serem trabalhados naquele momento. O professor deve aceitar situações imprevistas, admitindo a possibilidade de novos encaminhamentos para a atividade.

Finalizamos esse artigo destacando que a resolução de problemas e, especialmente, a resolução de problemas abertos, configura-se como uma abordagem que merece maior destaque em sala de aula. As investigações decorrentes desse tipo de abordagem possibilitam o desenvolvimento do pensamento matemático e permitem que os estudantes compreendam não apenas a solução de um problema, mas também os diferentes caminhos que podem ser trilhados durante a sua resolução.

Referências

ABRANTES, P.; PONTE, J. P.; FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L. **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: APM, 1999.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática: por que através da resolução de problemas? In: ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. **Resolução de problemas:** teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 35-52.

ALLEVATO, N. S. G.; VIEIRA, G. Do ensino através da resolução de problemas abertos às investigações matemáticas: possibilidades para a aprendizagem. **Quadrante**, Lisboa, v. XXV, n. 1, p. 113-131, 2016.

AMBRUS, A.; BARCZI-VERES, K. Teaching mathematical problem solving in Hungary for students who have average ability in mathematics. In: FELMER, P.; PEHKONEN, E.; KILPATRICK, J. (Ed.). **Posing and solving mathematical problems:** advances and new perspectives. [S. I.]: Springer, 2016. p. (137-156).

BARBOSA, A.; VALE, I.; PALHARES, P. Exploring generalization with visual patterns: tasks developed with pre-algebra students. In: VALE, I.; BARBOSA, A. (Org.). **Patterns:** multiple perspectives and contexts in mathematics education. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo, 2009. p.137-149.

BUSTAMANTE, J. G.; RIBEIRO, C. M.; NAVARRO, M. M. El conocimiento especializado del profesor de matemática frente a problemas abiertos. In: Conferencia Interamericana de Educación Matemática, 14., 2015, Chiapas, México. **Anais eletrônicos...** Chiapas, México: CIAEM, 2015. Comunicação. Disponível em: <http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem>. Acesso em: 24 jul. 2015.

CLEMENTS, D. H.; BATTISTA, M. T. Geometry and spatial reasoning. In: GROUWS, D. A. **Handbook of research on mathematics teaching and learning.** New York: NCTM, 1992. p. 420-464.

CUNHA, D. S. I. **Investigações geométricas:** desde a formação do professor até a sala de aula de matemática. 2009. 98 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática)-Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

GROENWALD, C. L. O.; SILVA, C. K.; MORA, C. D. Perspectivas em educação matemática. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 6, n. 1, p. 37-55, jan./ jun. 2004.

HINTZ, A. B. Strengthening discussions. **Teaching Children Mathematics,** v. 20, n. 5, p. 318-324, jan. 2014.

MORAES, R.; GALIAZZI, M. C. **Análise textual discursiva.** 2. ed. Ijuí: Editora Unijuí, 2013.

OLIVEIRA, C. A. S. **Recorrência matemática aplicada à resolução de problemas no Ensino Médio.** 2014. 57 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2014.

POLYA, G. **How to solve it?** Princeton, NJ: Princeton University Press, 1945.

PONTE, J. P. Uma agenda para investigação sobre padrões e regularidades no ensino-aprendizagem da matemática e na formação de professores. In: VALE, I.; BARBOSA, A. (Org.). **Padrões:** múltiplas perspectivas e contextos em educação matemática. Viana do Castelo: FCT, 2009. p. 169-175.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; CUNHA, M. H.; SEGURADO, M. I. **Histórias de investigações matemáticas.** Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

SAWADA, T. Developing lesson plans. In: BECKER, J.; SHIMADA, S. (Ed.). **The open-ended approach:** a new proposal for teaching mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1997. p. 1-9.

TAKAHASHI, A. **An overview**: what is the open-ended approach. In: SECONDARY SCHOOL TEACHERS PROGRAM, 2005, Park City. Disponível em: <mathforum.org/pcmi/hstp/sum2005/.../sstp.day1.ppt>. Acesso em: 18 jul. 2016.

VALE, I.; PIMENTEL, T. (Org.). **Padrões em matemática:** uma proposta didática no âmbito no novo programa para o ensino básico. Lisboa: Texto Editores, 2011.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VIANNA, H. M. **Pesquisa em educação:** a observação. Brasília: Plano Editora, 2003.

VIEIRA, G. **Tarefas exploratório-investigativas e a construção de conhecimentos sobre figuras geométricas espaciais**. 2016. 170 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2016.

VIEIRA, G.; ALLEVATO, N. S. G. Tecendo relações entre resolução de problemas e investigações matemáticas nos anos finais do Ensino Fundamental. In: SANTOS, C. A. B.; ALLEVATO, N. S. G.; AMARAL, L. H.; CURI, E. (Org.). **Ensino de ciências e matemática:** a produção discente na pós-graduação. São Paulo: Terracota, 2012. p. 29-47.

WARREN, E. Patterns and relationships in the elementary classroom. In: VALE, I.; BARBOSA, A. (Org.). **Patterns:** multiple perspectives and contexts in mathematics education. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo, 2009. p.29-47.

WAY, J. Problem solving: opening up problems. **NRICH enriching mathematics**, Cambridge, jan. 2005. Disponível em: < nrich.maths.org/2471>. Acesso em: 8 jul. 2016.

ZEICHNER, K. M. Para além da divisão entre professor-pesquisador e pesquisador acadêmico. In: GERALDI, C. M.; FIORENTINI, D.; PEREIRA, E. M. (Org.). **Cartografia do trabalho docente:** professor(a)-pesquisador(a). Campinas: Mercado das Letras, 1998. p. 207-236.

Norma Suely Gomes Allevato
Grupo de Pesquisas e Estudos Avançados em Educação Matemática (GPEAEM) – Universidade Cruzeiro do Sul – São Paulo - Brasil
E-mail: normallev@gmail.com

Gilberto Vieira
Grupo de Pesquisas e Estudos Avançados em Educação Matemática (GPEAEM) – Universidade Cruzeiro do Sul – São Paulo - Brasil
E-mail: gilbertoeducador@yahoo.com.br