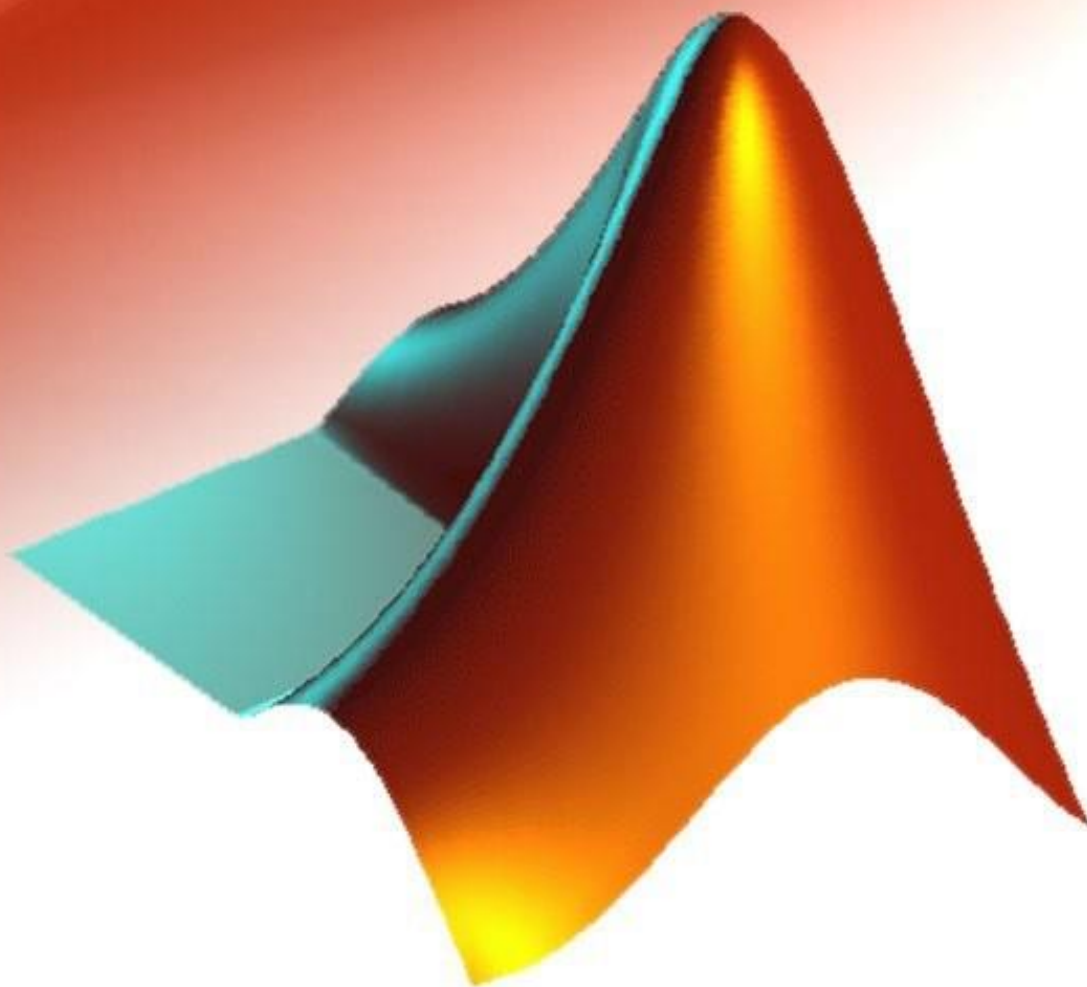


REMMATEC

REVISTA DE MATEMÁTICA, ENSINO E CULTURA

ano 09 | n.17 | set. - dez. 2014

ISSN 1980-3141



Modelagem Matemática



Revista de Matemática, Ensino e Cultura
Grupo de Estudos e Pesquisas sobre Cultura Matemática e suas Epistemologias na
Educação Matemática
Ano 9 | n. 17 | set. - dez. 2014
ISSN 1980-3141

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Reitora: Ângela Maria Paiva Cruz

Vice-reitora: Maria de Fátima Freire de Melo Ximenes

Diretora da EDUFRN: Margarida Maria Dias de Oliveira

Projeto gráfico e capa: Marcelo Miranda Serrão

Supervisão editorial: Alva Medeiros da Costa

Revisão: Os autores

Editor responsável: Iran Abreu Mendes

Editor adjunto: Claudianne Amorim Noronha

Editor assistente: Carlos Aldemir Farias da Silva

Conselho consultivo: Arlete de Jesus Brito (UNESP - Rio Claro), Carlos Aldemir Farias da Silva (UFPA), Cláudia Lisete Oliveira Groenwald (ULBRA), Cláudia Regina Flores (UFSC), Claudianne Amorim Noronha (UFRN), Elivanete Alves de Jesus (UFG), Emmánuel Lizcano Fernandez (UNED - Madri), Fredy Enrique González (UPEL, Maracay - Venezuela), Iran Abreu Mendes (UFRN), Isabel Cristina Rodrigues de Lucena (UFPA), João Cláudio Brandemberg Quaresma (UFPA), John A. Fossa (UEPB), Lucieli Trivizoli (UEM), Luis Carlos Arboleda (Univ. del Valle/Cali - Colombia), Lulu Healy (UNIANSP), Maria Auxiliadora Lisboa Moreno Pires (UCSAL; UEFS), Marcelo de Carvalho Borba (UNESP - Rio Claro), Maria Célia Leme da Silva (UNIFESP), Maria da Conceição Xavier de Almeida (UFRN), Maria Lucia Pessoa Chaves Rocha (IFPA), Maria Terezinha de Jesus Gaspar (UnB), Miguel Chaquiam (UEPA), Pedro Franco de Sá (UEPA), Wagner Rodrigues Valente (UNIFESP)

Divisão de Serviços Técnicos

Catalogação da Publicação na Fonte. UFRN / Biblioteca Central Zila Mamede

REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura / Universidade Federal do Rio Grande do Norte. – Ano 1 n. 1 (jul./nov. 2006). – Natal, RN: EDUFRN – editora da UFRN, 2006. 138p. il.

Descrição baseada em ano 9, n. 17 (set.-dez. 2014)

Periodicidade quadrimestral.

ISSN: 1980-3141

1. Matemática – Ensino - Periódico. 2. Matemática – História – Periódicos. 3. Ensino e cultura – Periódicos. I. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. II. Título.

RN/UF/BCZM

CDD 510.172

CDU 51:37(05)

A responsabilidade pelos artigos assinados cabe aos autores.

Endereço para envio de artigos, resenhas, sugestões e críticas:

contato@rematec.net.br e revistarematec@gmail.com

Todos os direitos desta edição reservados à EDUFRN – Editora da UFRN – Campus
Universitário, s/n Lagoa Nova – Natal/RN – Brasil – e-mail: edufnr@editora.ufrn.br – www.editora.ufrn.br
Telefone: 84 3215-3236 – Fax: 84 3215-3206

Índice

Editorial, 4

Marcelo C. Borba

Ana Paula dos Santos Malheiros

Artigos

Papel da matemática (ou de modelos matemáticos) em ambientes de modelagem: a proposta de Rafael, 5

Jussara de Loiola Araújo; Ana Paula Rocha; Danielle Alves Martins

Repercussões de experiências com modelagem matemática em ações docentes, 24

Maria Isaura de Albuquerque Chaves

Tensões no processo de análise de modelos em um curso de cálculo diferencial e integral, 46

Débora da Silva Soares; Daise Lago Pereira Souto

O sucesso de uma atividade de modelagem matemática, segundo as diferentes formas de participação dos alunos, 77

Bárbara Cândido Braz; Lilian Akemi Kato

Mapeamento do uso de tecnologias e de modelagem matemática no ensino, 109

Rosana Maria Luvezute Kripka; Maria Salett Biembengut; Isabel Cristina Machado de Lara; Lori Viali; Regis Alexandre Lahm

Uma análise do uso da criptografia nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, 135

Beatriz Fernandes Litoldo; Henrique Lazari

Resenhas

Tecnologias na prática docente de professores de matemática: formação continuada com apoio de uma rede social na internet. 157

Paula Rodrigues Magalhães de Barros

A constituição docente em matemática à distância: entre saberes, experiências e narrativas, 162

Aparecida Santana de Souza Chiari



Editorial

Este número temático sobre Modelagem em Educação Matemática apresenta tradições e inovações em textos que trabalham com esta tendência. Há artigos que relacionam modelagem à formação de professores, e outros às tecnologias digitais, temas já tratados em diversos trabalhos. Por outro lado, ainda existem artigos que lidam com autores como Schutz, Lave e Engeström, referências que não são comumente utilizadas nas produções dessa tendência em Educação Matemática.

D'Ambrosio e Borba argumentaram, em 2012, que uma tendência pode ser vista como um movimento de superar um determinado problema. Mogens Niss, já em 1972, apontava que a modelagem visa superar a crise de falta de significado na Educação Matemática. O autor propõe que esta tendência busca relacionar a experiência do aluno em contextos fora da escola, com a matemática apresentada em sala de aula. cremos que é relevante que a modelagem, ao enfatizar a escolha por parte dos estudantes dos problemas a serem estudados, apresente novas perspectivas teóricas para compreender as possibilidades desta tendência em superar a frieza de uma sala de aula com o conteúdo totalmente estruturado.

A ideia de pensarmos a modelagem enquanto uma *Atividade*, que é desenvolvida por *Comunidades de Práticas*, envolvidas em *Experiências*, pode abrir novos olhares para esta tendência em Educação Matemática. Este número traz também a ideia de aplicações em Matemática. Um olhar sobre a literatura internacional em Educação Matemática mostra que junto com a pesquisa há sempre a ideia de trabalharmos com aplicações da Matemática em outros campos de conhecimento. No livro de Stillman et al (2013)¹ tal perspectiva pode ser encontrada. No Brasil, esta tradição não está tão presente, mas neste número incorporamos um artigo que analisa como os livros didáticos lidam com aplicações da matemática feitas em Criptografia.

Cremos que tais novidades - relacionadas aos tradicionais temas já comentados anteriormente, e outros como a relação com a Educação Matemática Crítica e um novo mapeamento de uma parte da pesquisa que relaciona modelagem e tecnologias - podem ajudar a desenvolver o debate destas tendências que se entrelaçam. Esperamos que o leitor aprecie essa combinação de navegar em águas já exploradas anteriormente com essas novas expedições. Caberá ao leitor identificar que parte se mostra mais relevante para sua experiência como educador matemático.

Marcelo C. Borba
Ana Paula dos Santos Malheiros

¹ STILLMAN, G. A. et al. (Org.). *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice*. Dordrecht: Springer, 2013. (International Perspectives on the teaching and Learning of Mathematical Modelling).

**PAPEL DA MATEMÁTICA (OU DE MODELOS MATEMÁTICOS) EM
AMBIENTES DE MODELAGEM: A PROPOSTA DE RAFAEL**

**ROLE OF MATHEMATICS (OR OF MATHEMATICAL MODELS) IN MILIEUS
OF MODELLING: THE PROPOSAL OF RAFAEL**

Jussara de Loiola Araújo
Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG - Brasil
Ana Paula Rocha
Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG - Brasil
Danielle Alves Martins
Escola Estadual Walt Disney - Minas Gerais - Brasil

Resumo

Neste artigo, discutimos o papel da matemática (ou de modelos matemáticos) na proposta feita por um estudante para modelar matematicamente uma situação com referência à realidade e confrontamos a proposta com a perspectiva sociocrítica que orientou o ambiente de aprendizagem de modelagem. Utilizamos uma abordagem qualitativa e crítica de pesquisa e a construção dos dados foi realizada por meio de observações videogravadas e registros de relatórios *on-line*. Na análise dos dados, fizemos uso do estudo de caso, em que o caso focalizado foi a proposta feita pelo sujeito Rafael. Tal proposta consistia em prever as preferências de uma pessoa na compra de um imóvel com base no histórico de vida dela. Concluímos que o papel da matemática (ou de modelos matemáticos), na proposta de Rafael, era fazer previsões sobre o futuro, de forma mais precisa, com menos erros, e que tal proposta estava em conflito com a perspectiva de modelagem que orientou o ambiente de aprendizagem.

Palavras-chave: Educação Matemática Crítica. Modelagem Matemática. Ideologia da Certeza. Situação Arranjada.

Abstract

In this paper, we discuss the role of mathematics (or of mathematical models) in the proposal made by a student to model mathematically a situation with reference to reality and we confront the proposal with the socio-critical perspective that guided the learning milieu of modelling. We used a qualitative and critical approach of research and the construction of data was made by means of video recorded observations and records from online reports. In the analysis, we used case study, in which the case focused was the proposal made by the subject Rafael. Such a proposal consisted in predicting the preferences of a person to purchase a property, based on his/her history of life. We conclude that the role of mathematics (or of mathematical models), in Rafael's proposal, was making predictions about the future, more accurately, with fewer mistakes, and that such proposal was in conflict with the perspective of modelling that guided the learning milieu.

Keywords: Critical Mathematics Education. Mathematical Modelling. Ideology of certainty. Arranged Situation.

Introdução

Modelagem matemática é uma das tendências atuais da educação matemática. Neste artigo, compreendemos modelagem na educação matemática como um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a investigar situações com referência à realidade por meio da matemática (BARBOSA, 2007). Na organização desses ambientes, são considerados desde aspectos logísticos, como o material a ser usado e o tempo previsto para as aulas, até aspectos mais filosóficos, como o referencial teórico que fundamenta a concepção de tal ambiente. Diferenças entre esses vários aspectos levam a uma não homogeneidade de “compreensões de modelagem [na educação matemática] e seus fundamentos epistemológicos na discussão internacional sobre modelagem” (KAISER; SRIRAMAN, 2006, p. 302).

Essas diversas maneiras de compreender modelagem foram analisadas por Kaiser e Sriraman (2006), ao proporem diferentes perspectivas de modelagem na educação matemática: a realística, a contextual, a educacional, a sociocrítica, a epistemológica e uma metaperspectiva, a cognitiva. Cada uma dessas perspectivas coloca ênfase em um diferente objetivo na organização de um ambiente de aprendizagem de modelagem.

Neste artigo, nosso foco são ambientes de modelagem classificados na perspectiva sociocrítica, que têm, como objetivo, o desenvolvimento de uma “compreensão crítica sobre o mundo à nossa volta” (KAISER; SRIRAMAN, 2006, p. 304).

Freitas (2013), ao descrever trabalhos de modelagem na educação matemática desenvolvidos segundo a perspectiva sociocrítica, chama a atenção para o fato de, nesses trabalhos, a crítica se voltar para a situação com referência à realidade investigada (problemas relacionados com o meio ambiente, economia, política, contextos sociais etc.) e que, na maioria das vezes, o tratamento matemático da situação fica de fora dessa crítica.

O estudo aqui descrito teve como contexto o desenvolvimento, por um grupo de cinco estudantes, de um projeto de modelagem² na perspectiva sociocrítica. Com a intenção de focalizar a crítica no tratamento matemático realizado no projeto, nosso objetivo é discutir o papel da matemática (ou de modelos matemáticos)³ na proposta feita por um dos estudantes (o Rafael), para modelar matematicamente a situação com referência à realidade investigada no projeto de modelagem, e confrontar sua proposta com a perspectiva que orientou o ambiente de aprendizagem.

Para tal, iniciamos, na próxima seção, com uma discussão teórica sobre a modelagem segundo a educação matemática crítica (SKOVSMOSE, 2005; ARAÚJO, 2009), vertente sociocrítica da modelagem que escolhemos para orientar o projeto. Depois, na seção 3,

² Vamos utilizar os termos “ambiente de aprendizagem de modelagem” e “projeto de modelagem” como sinônimos, a fim de evitar o uso repetitivo de um mesmo termo.

³ Na seção 2, ficará mais claro porque estamos falando, indiferentemente, de papel da matemática ou de modelos matemáticos.

apresentamos os aspectos metodológicos da pesquisa: construção dos dados para o estudo, o contexto de realização da pesquisa e os sujeitos que dela participaram e os aspectos metodológicos para análise de dados - o estudo de caso. Optamos por realizar a análise dessa forma porque, como ficará claro mais à frente, a proposta de Rafael se configura como um caso que merece uma atenção especial (PONTE, 2006). Apresentamos essa proposta na seção 4 e, logo em seguida, na seção 5, trazemos dados empíricos em que Rafael esclarece e defende sua proposta. Na seção 6, ao construirmos nossa análise, colocamos a proposta de Rafael lado a lado com a perspectiva sociocrítica de modelagem que orientou a organização do ambiente de aprendizagem, para, na seção 7, traçarmos nossas considerações finais.

2. Modelagem segundo a educação matemática crítica

No contexto educacional, "atividades de modelagem matemática assumem, contudentemente, diferentes formas à medida que são institucionalizadas em todo o mundo." (LINGERFJÄRD, 2011, p. 9). Por exemplo, para Blum (2011), modelagem na educação matemática é uma tarefa cuja demanda principal é a tradução entre realidade e matemática e, baseado em Pollak (1979)⁴, entende realidade como o resto do mundo que está fora da matemática. Neves, Silva e Teodoro (2011), por sua vez, enfatizam as qualidades da aprendizagem de ciências e matemática no que eles denominam modelagem computacional exploratória e interativa.

A título de ilustração da diversidade, no contexto brasileiro, citamos Almeida, Tortola e Merli (2012, p. 217), por exemplo, que entendem modelagem matemática como a busca de soluções para problemas por meio de modelos matemáticos. Modelo matemático, para os autores, "é o que 'dá forma' à solução do problema e a Modelagem Matemática é a 'atividade' de busca por esta solução." (ênfases no original). E Borba e Villarreal (2005, p. 29), que voltam sua atenção para os estudantes, ao entenderem modelagem como uma "abordagem pedagógica que enfatiza a escolha, por parte dos estudantes, de um problema a ser investigado na sala de aula."

Neste estudo, trataremos de projetos de modelagem segundo a educação matemática crítica (ARAÚJO, 2009), entendidos como ambientes de aprendizagem (BARBOSA, 2007) orientados por um referencial crítico de educação matemática (SKOVSMOSE, 2005). Essa concepção de modelagem pode ser classificada na perspectiva sociocrítica de modelagem (KAISER; SRIRAMAN, 2006), que tem seus objetivos pedagógicos voltados para a compreensão crítica do mundo.

Levando em conta essas orientações, os estudantes são convidados a investigar, por

⁴ POLLAK, H. O. The interaction between mathematics and other school subjects. In: UNESCO (Ed.) **New trends in mathematics teaching**. Paris: UNESCO, 1979. p. 232-248.

meio da matemática, situações com referência à realidade e, ao mesmo tempo, a refletir sobre, e questionar, a forma como a matemática é usada como instrumento e linguagem de poder (ARAÚJO, 2009; 2012). O objetivo não é, simplesmente, desenvolver habilidades de cálculos matemáticos, mas também promover a participação crítica dos estudantes/cidadãos na sociedade, discutindo questões políticas, econômicas, ambientais, nas quais a matemática serve como suporte tecnológico. Nesse mesmo sentido, Meyer, Caldeira e Malheiros (2011, p. 110) afirmam que “ao se propor um trabalho de modelagem em sala de aula, com base em situações de interesse dos alunos que fazem parte do seu dia a dia, se está possibilitando ao estudante compreender o papel da matemática na sociedade.”

Seguindo essa mesma compreensão de modelagem na educação matemática, Barbosa (2006, p. 294) ressalta que, “à medida que argumentos e decisões na sociedade são baseados em modelos matemáticos, é importante que os estudantes tenham a oportunidade de discutir [na escola] a natureza e o papel de modelos matemáticos”, o que o aproxima do foco deste artigo: o tratamento matemático realizado, por meio de modelos, em um ambiente de aprendizagem de modelagem. Assim, para voltarmos nossa atenção para esse foco, passamos a apresentar como estamos compreendendo o papel de modelos matemáticos em espaços educacionais.

Modelos matemáticos não estão presentes, apenas, na sala de aula de matemática. Exatamente por ter o objetivo de abordar problemas com referência à realidade (o que inclui problemas de outras áreas do conhecimento), modelagem matemática pode fazer parte das aulas de física, biologia, geografia e outras disciplinas. Entendendo modelo matemático como uma representação de fenômenos científicos por meio de elementos matemáticos (funções, gráficos, tabelas etc.), Barbosa (2009) aponta três possíveis papéis para os modelos matemáticos na prática pedagógica da educação científica: i) para justificar a introdução ou apresentação de um novo conceito científico; ii) para definir ou criar um novo conceito científico; e iii) para estruturar algum fenômeno científico, “oferecendo estruturas para serem aplicadas na descrição e prescrição de fenômenos”. (BARBOSA; 2009, p. 79). Assim, com a ajuda de modelos matemáticos nas aulas de física, química ou outras disciplinas, a matemática passa a fazer parte do discurso pedagógico científico e “tal discurso ensina que a matemática oferece bases sólidas para o estabelecimento do conhecimento científico” (BARBOSA, 2009, p. 81). Esse processo fortalece o que Borba e Skovsmose (1997) denominam ideologia da certeza da matemática. Segundo os autores, a ideologia da certeza sustenta o caráter de neutralidade dessa ciência, atribuindo a ela o poder de detentora do argumento definitivo em diversos debates na sociedade. Assim, a matemática é utilizada na produção científica ou na apresentação de decisões políticas sugerindo, por exemplo, que o método ou a decisão tomada apontam o

melhor caminho a ser seguido, sem deixar margens para contra-argumentações, o que caracteriza seu uso como linguagem de poder. Questionar a ideologia da certeza é um dos objetivos da educação matemática crítica.

Parece, portanto, que os atores envolvidos em contextos escolares imprimem, em modelos matemáticos, um papel que carrega em si concepções de matemática enraizadas na sociedade (e questionadas pela educação matemática crítica). Isso nos remete para uma discussão sobre o papel de modelos matemáticos na sociedade.

Apoiado em Davis e Hersh (1988)⁵, Skovsmose (1990) afirma que modelos matemáticos, em nossa sociedade, podem ser construídos com diferentes intenções: i) para descrever aspectos da realidade; ii) para fazer previsões sobre o que pode ocorrer no futuro; e iii) para prescrever ações a serem realizadas na sociedade.

O autor nos alerta, entretanto, para o que pode estar por trás de cada um desses papéis. Se o papel de modelos matemáticos for descrever aspectos da realidade, então devemos refletir sobre que aspectos da realidade podem ser descritos por meio da linguagem matemática. Daí, se a intenção for fazer previsões, elas dependerão dos aspectos que foram descritos por meio da matemática, já que “a confiabilidade de uma previsão depende das bases teóricas [usadas] para a interpretação da realidade” (SKOVSMOSE, 1990, p. 772). Na terceira possibilidade, para a prescrição de ações na sociedade, o autor lembra que grande parte dos recursos tecnológicos e, de maneira geral, dos artefatos, presentes na sociedade, é construída com o apoio da matemática. E a matemática está integrada de uma forma tão natural que, nem sempre, nos damos conta de sua presença. Por isso, é importante discutir sobre os interesses que estão por trás de cada um dos possíveis papéis de modelos matemáticos na sociedade, o que é uma das preocupações da educação matemática crítica.

Embora haja “diferenças entre a modelagem matemática conduzida pelos cientistas e profissionais e aquela que ocorre na arena escolar” (BARBOSA, 2009, p. 74), há algumas similaridades entre o que fundamenta ou o que se espera dos modelos em cada uma dessas práticas. Por exemplo, modelos matemáticos para estruturar fenômenos científicos, em práticas pedagógicas, têm estreitas relações com modelos matemáticos para prescrever ações na sociedade, já que ambos se baseiam na matemática para criar ou dar forma a algo. Ao nosso ver, é natural que seja assim, já que os atores envolvidos em ambas as práticas vivem em uma sociedade que, de certa forma, sustenta uma compreensão da matemática como uma ciência neutra, absoluta e precisa (SKOVSMOSE; BORBA, 1997). Por isso mesmo, tanto Barbosa (2009) quanto Skovsmose (1990) defendem a importância de se discutir e problematizar o papel de modelos matemáticos nas práticas escolares, o que é um

⁵ DAVIS, P. J.; HERSH, R. **Descartes dream: the world according to mathematics**. London: Penguin, 1988.

dos propósitos da modelagem segundo a educação matemática crítica (ARAÚJO, 2009).

Um ambiente de aprendizagem, seguindo tais orientações, foi construído para a realização da pesquisa aqui relatada. Nesse tipo de ambiente, a matemática se faz presente com a intenção de investigar situações com referência à realidade (BARBOSA, 2007), por meio de modelos matemáticos. Assim, em tais ambientes, discutir o papel de modelos matemáticos equivale a discutir o papel da matemática. Caminhamos em direção a esse objetivo por meio dos aspectos metodológicos descritos na próxima seção.

3. Aspectos metodológicos

3.1. Construção dos dados

A pesquisa foi desenvolvida segundo uma abordagem qualitativa e foi utilizada uma triangulação de procedimentos (ALVES-MAZZOTTI, 1998), de tal forma que os dados foram construídos por meio de diferentes ações, visando uma maior consistência no caminho para a análise e conclusões. Três diferentes procedimentos foram utilizados:

1) observações do tipo participante (ALVES-MAZZOTTI, 1998), já que as pesquisadoras atuaram e entrevistaram no ambiente de aprendizagem de modelagem criado para a realização da pesquisa. As observações foram registradas por meio de notas de campo e filmagens.

2) registro das atividades em um editor de texto *online*. Foi solicitado aos sujeitos da pesquisa que registrassem relatórios do desenvolvimento do projeto em um documento compartilhado, por eles e pelas pesquisadoras, no pacote de aplicativos Google Drive⁶.

3) entrevistas coletivas e/ou individuais, para construir compreensões mais profundas sobre episódios criados a partir dos vídeos (procedimento 1) ou sobre o texto produzido *online* (procedimento 2). As entrevistas foram do tipo semi-estruturadas (FONTANA; FREY, 1994), pois havia algumas perguntas planejadas previamente, mas várias outras foram elaboradas ao sabor do andamento da entrevista. O registro das entrevistas também foi feito por meio de filmagens.

Esses procedimentos foram utilizados para a construção dos dados da pesquisa realizada no ambiente de aprendizagem de modelagem desenvolvido especialmente para esse fim. Foi nesse ambiente que atuou Rafael, sujeito da pesquisa, cuja proposta é o caso que será analisado aqui. Mas antes de discutirmos a proposta de Rafael, é necessário descrever o contexto em que este estudo foi desenvolvido, o que faremos a seguir.

3.2. Contexto e sujeitos: o projeto de modelagem

O ambiente de aprendizagem de modelagem, contexto da realização da pesquisa, foi desenvolvido em um laboratório de computadores do Departamento de Matemática do

⁶ drive.google.com



Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais (ICEx-UFMG). A pesquisadora Jussara realizou um convite para que ex-alunos seus participassem voluntariamente da pesquisa, em ambientes de aprendizagem de modelagem realizados fora do contexto de disciplinas formais da universidade. Na verdade, o desenvolvimento de projetos de modelagem orientados pela educação matemática crítica não é comum no cotidiano das aulas de matemática no ICEx. Essas aulas se caracterizam segundo a prática comum de aulas de matemática no ensino superior, com aulas expositivas, exercícios e provas. Esse contexto educacional, já existente antes da realização da pesquisa, é o que Skovsmose e Borba (2004) denominam situação corrente (SC).

Para esses autores, “fazer pesquisa crítica também significa explorar *o que não existe e o que não é real*”, o que significa investigar “*o que poderia ser*. A pesquisa crítica dá atenção especial a situações hipotéticas, embora ainda leve em conta o que é real. A pesquisa crítica investiga alternativas.” (SKOVSMOSE; BORBA, 2004, p. 211, grifos dos autores).

Um ambiente de aprendizagem, inserido nas aulas de matemática do ICEx, no qual os alunos desenvolveriam um projeto de modelagem segundo uma perspectiva crítica de educação matemática, pode ser entendido como uma situação imaginada (SI) (Skovsmose; Borba, 2004). Situações imaginadas são “visões sobre as possibilidades de alternativas” (p. 213) para a situação corrente.

Mas imaginar alternativas para uma situação corrente não significa que elas serão concretizadas da forma como a idealizamos. Desenvolvemos o projeto de modelagem em ambientes de aprendizagem que ocorreram à parte das disciplinas cursadas pelos sujeitos da pesquisa, dando origem ao que Skovsmose e Borba (2004) denominam situação arranjada (AS). Elas são “uma alternativa prática que emerge da negociação envolvendo os pesquisadores e os professores” (p. 214) e também os estudantes. A situação arranjada é uma alternativa à situação corrente, tendo em mente a situação imaginada.

Cinco sujeitos, alunos de três diferentes cursos da área de Ciências Exatas da UFMG, aceitaram o convite para participar da pesquisa: Alberto, do curso de Engenharia de Sistemas; Pedro e Rafael, do curso de Física; Natália e Débora, do curso de Matemática. Além deles, três pesquisadoras também participaram das reuniões para desenvolver a pesquisa: Jussara Araújo, Ana Paula Rocha (autoras deste artigo) e Ilaine Campos. O desenvolvimento da pesquisa ocorreu de outubro de 2012 a junho de 2013, em nove encontros. Esse grupo atuou no ambiente de aprendizagem de modelagem, orientado por questões da educação matemática crítica, para cujo desenvolvimento o sujeito Rafael fez sua proposta de encaminhamento.

3.3. *Análise de dados: estudo de caso*

Nossa opção pelo estudo de caso se justifica na medida em que identificamos na proposta de Rafael um “caso que aparece-nos pela frente, e sentimo-nos obrigados a tomá-lo como objeto de estudo” (STAKE, 2005, p. 16). Ponte (2006) argumenta que o estudo de caso se caracteriza por objetivar a análise de uma situação única ou especial, pelos menos em certos aspectos, buscando desvelar o que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, possibilitar uma compreensão global de certo fenômeno de interesse.

Conscientes das críticas relacionadas à generalização em estudos de casos, salientamos que não temos a intenção de formular generalizações, e sim de produzir conhecimento sobre um caso particular. Na visão de Stake (2005), a partir dos casos particulares, as pessoas podem aprender muitas coisas que são gerais. Yin (1984) argumenta que os estudos de caso não fazem generalizações para uma população mais ampla, mas sim ajudam a fazer surgir novas teorias ou a confirmar, ou infirmar, as teorias existentes.

Neste artigo, utilizamos o estudo de caso para compreender as especificidades da proposta feita por Rafael para modelar matematicamente a situação com referência à realidade investigada no projeto.

Rafael, na época da pesquisa, cursava o 3º período do curso de Licenciatura em Física na UFMG. Atuava como professor de Física e de Matemática em uma escola da rede particular. Rafael manifestou que gostava de ambas as disciplinas, tanto como aluno quanto como professor. Segundo Rafael, sua participação na pesquisa estava vinculada ao desejo de ter contato com um campo de pesquisa, e poder identificar seus erros em relação às ideias expostas e ver o que as outras pessoas envolvidas esperavam dele. A proposta feita por Rafael é apresentada na próxima seção.

4. O projeto de modelagem e a proposta de Rafael

A situação com referência à realidade, abordada no projeto de modelagem desenvolvido pelo grupo, foi a compra de um imóvel. O objetivo era estabelecer uma classificação dos fatores considerados importantes e relevantes por pessoas que pretendem comprar imóveis. Para identificar os fatores que influenciam uma pessoa na escolha de um imóvel, o grupo optou pela elaboração de um questionário. Nesse questionário, foram incluídas perguntas mais técnicas, referentes a nome, cidade em que reside, estado civil etc., e perguntas relacionadas à importância que o indivíduo atribui a morar próximo a hospitais, escolas, centro da cidade, local de trabalho, áreas de lazer, à importância do valor financeiro do imóvel, facilidade de aquisição, dentre outros.

Durante a elaboração do questionário, os integrantes do grupo encontraram dificuldades em selecionar fatores que deveriam ser contemplados nas perguntas, pois foi feito o levantamento de vários (culturais, subjetivos, ambientais, geográficos,



infraestrutura, localização, meios de transportes etc.) e muitos outros poderiam estar incluídos. Diante dessa dificuldade, Rafael lançou uma proposta. Em seu entendimento, sua proposta demandaria, apenas, informações sobre quatro fatores: educacionais, familiares, geo-socio-econômicos e o que ele denominava de fatores “bioquímicos”, que estavam relacionados a características biológicas ou químicas das pessoas.

Segundo a proposta, o questionário deveria levantar informações específicas sobre a vida pregressa do indivíduo e, a partir delas, o grupo poderia fazer inferências sobre as predileções dessa pessoa no que diz respeito à escolha de um imóvel. Por exemplo, se no primeiro questionário o grupo perguntaria sobre o nível de importância que a pessoa atribuiu para o item distância até escolas, no questionário, proposto por Rafael, deveria ser perguntado em quais escolas, e em que períodos de tempo, essa pessoa estudou ao longo da vida. Com essas informações em mãos, o grupo buscaria o valor do IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica) para cada escola, nos respectivos períodos em que o indivíduo lá estudou, e esses dados seriam inseridos no modelo matemático que o grupo criaria.

Após a elaboração e aplicação do questionário, caberia ao grupo criar um modelo matemático que, a partir da inserção dos dados numéricos relacionados à trajetória de vida da pessoa, deveria informar sobre quais seriam suas escolhas futuras.⁷

Descrita essa síntese da proposta de Rafael passamos a apresentar episódios extraídos dos vídeos (filmagem das reuniões) em momentos nos quais a proposta era discutida.

5. Apresentando os dados: Rafael esclarece e defende sua proposta

Para a apresentação dos dados, construímos dois episódios (ARAÚJO, 2002) a partir de trechos das filmagens de dois encontros distintos do grupo: i) o segundo encontro, ocorrido no dia 27/10/2012, com a presença das pesquisadoras Jussara e Ana Paula e dos participantes Rafael, Pedro, Natália e Débora; ii) o sexto encontro, em 23/03/2013, no qual estavam presentes as pesquisadoras Jussara, Ana Paula e Ilaine, e os participantes Rafael, Pedro, Alberto e Natália. A seguir, apresentamos o episódio 1.

⁷ A fim de esclarecer o desfecho ao leitor, relatamos que o grupo não chegou a elaborar um questionário seguindo a proposta do Rafael. Boa parte dos integrantes não concordava com a proposta e Rafael não compareceu aos dois últimos encontros, dedicados à construção de um modelo matemático. O projeto foi finalizado segundo o objetivo inicial: identificar que fatores são relevantes para uma pessoa na compra de um imóvel. Para tal, o grupo considerou a lista de vários fatores, construída por seus próprios componentes, atribuiu pesos a cada fator e realizou uma média aritmética ponderada. Não apresentaremos maiores detalhes do desenvolvimento do projeto por não estar atrelado ao objetivo deste artigo.

Episódio 1: Rafael esclarece sua proposta

Este episódio é composto por trechos dos dois encontros. Nele, o integrante Rafael apresentou sua proposta e esclareceu as dúvidas do grupo quanto à mesma. O episódio iniciou-se com o Rafael definindo, em moldes de dicionário, o que entendia por atitude e por escolha, e defendendo que as escolhas não são autônomas. Em suas palavras:

(1) Rafael: *Atitude: ação tomada pelo indivíduo que define, em um intervalo de tempo, a sua própria vida. [...] Escolha: ato de definir uma atitude. União entre meio, indivíduo, espaço e tempo. Não é algo autônomo [...] As pessoas não escolhem as coisas. Por exemplo, tudo que você é, é interação entre as variáveis que foram condicionadas a você. Se você tivesse mudado o meio geográfico, mudado as condições sociais dos pais, a pessoa teria uma outra individualidade. Então eu estou colocando escolha como algo que a gente não escolhe. O que a gente faz é tomar atitudes. E a escolha é construída na cultura, no meio, no espaço e tempo. [...] O indivíduo tem as influências que ele sofre e as escolhas que ele toma. Considerando que as escolhas que esse indivíduo faz não é ele que toma, ele foi moldado daquela forma, então, na verdade, essas escolhas já estão definidas.* [transcrição vídeo 27/10/2012; 00:20:29]

Assim, para Rafael, as escolhas do indivíduo já estão determinadas a partir da sua trajetória de vida. De acordo com ele, na verdade, o que são variáveis são as influências que esse indivíduo sofreu ao longo da vida. As influências seriam classificadas em quatro fatores: educacionais, familiares, geo-socio-econômicos e bioquímicos. Na visão dele, não precisaríamos fazer nenhuma escala de grau de importância para os fatores, já que tal importância estaria determinada por índices oficiais, como o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) e o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH):

(2) Rafael: *Fatores educacionais, familiares, geo-socio-econômicos e bioquímicos. Por que eu citei eles? A gente não precisa fazer escala nenhuma para estes tipos de fatores, porque existe já a escala para cada fator deste. [...]* [transcrição do vídeo 27/10/2012; 00:40:31]

(3) Rafael: *Fatores educacionais daria para medir por exemplo, claro que a grosso modo [...] Você tem provas o tempo todo que mostram o rendimento de uma pessoa e esse rendimento vai ser o que identifica, em grande parte, se o cara vai ou não se dar bem na vida.* [transcrição do vídeo 27/10/2012; 01:01:33]

Para esclarecer o uso de dados quantitativos, Rafael acabou falando de pesquisas qualitativas e quantitativas, dando pistas sobre qual seria, para ele, o papel de cada uma dessas abordagens metodológicas. Para ele, a preocupação com os dados quantitativos deveria ser algo posterior à análise qualitativa:

(4) Rafael: *Por exemplo, quando o cara esfregou lá o pente no cabelo, ele não tinha proporção nenhuma de quantidade de carga elétrica que tinha ali. Aquele início, de análise quantitativa ali, era fora do comum. Podia, sim, afirmar que atrai ou repele. Passou um tempo e aí a gente começou a calcular [medir] isso [...]*[transcrição vídeo 23/03/2013; 00:35:46]

Ao longo das tentativas do grupo para entender a proposta de Rafael, Alberto fez uma síntese esclarecedora:

(5) Alberto: *Eu tenho a laranja A e a laranja B. Eu vou pegar a laranja A porque eu quero. A ideia é: eu vou pegar a laranja A, porque tudo que eu já vivi vai me influenciar a pegar a laranja A. Entendeu? Assim o foco da pesquisa não seria perguntar que tipo de laranja você quer, mas como foi sua vida até agora, onde você viveu, onde você estudou, o que você faz da vida, como foi sua criação, se sua família é grande, se ela é pequena, se ela é do interior. Aí, com base nessas informações, eu vou falar que você vai escolher a laranja A.* [transcrição do vídeo 23/03/2013; 00:31:42]

Em síntese, a proposta de Rafael consistia em:

- i) perguntar para a pessoa dados relacionados à sua vida, que Rafael classificava em quatro fatores (educacionais, familiares, geo-socio-econômicos e bioquímicos);
- ii) buscar os índices oficiais referentes a esses fatores, nos respectivos períodos de tempo em que a pessoa sofreu a referida influência;
- iii) inserir os índices no modelo matemático a ser construído no projeto;
- iv) obter a resposta dada pelo modelo, a qual diria que escolhas sobre imóveis o indivíduo faria.

Ao grupo, caberia a tarefa de encontrar o modelo matemático para ser usado na proposta. Entretanto, não houve uma aceitação espontânea da proposta de Rafael pelo grupo e ele teve que defendê-la, o que é apresentado no episódio 2.

Episódio 2: Rafael defende sua proposta

Este episódio contém trechos, apenas, do sexto encontro. No início desse encontro, a pesquisadora Jussara realizou a primeira entrevista coletiva com o grupo de participantes. Uma das questões era a seguinte:

(6) Jussara: *Agora nós vamos dar um tratamento matemático aos dados que coletamos. O que vocês esperam dessa parte e como cada um de vocês pretende atuar?* [transcrição do vídeo 23/03/2013; 00:16:05]

A intenção dessa questão era provocar no grupo um momento de reflexão sobre qual era, para cada um, o papel da matemática (ou de modelos matemáticos) no projeto de modelagem. As possíveis respostas dependeriam da decisão de seguir, ou não, a proposta de Rafael, o que levou o grupo a discutir a proposta novamente. Nesse momento, a pesquisadora afirmou que percebia certa resistência por parte de alguns integrantes do grupo à proposta de Rafael. Ele, então, argumentou, em favor de suas ideias:

(7) Rafael: *Então, seria uma maneira, isso é, uma coisa que eu tenho comigo, por isso que eu repassei aqui. [...] esse negócio de falar assim: você é físico, você não pode tratar um dado humano com física. Isso é uma falácia [...] Tratar de uma forma humana [segundo um ponto de vista das ciências humanas] ou uma forma física [segundo um ponto de vista da física], na verdade, é só o tipo de detalhamento que eu vou dar pra minha pesquisa.* [transcrição do vídeo 23/03/2013; 00:33:26]

Ele continuou dizendo que acreditava que uma abordagem humana estaria relacionada à análise qualitativa e que ela não é ruim, mas não dá um bom nível de precisão. Assim, para Rafael, o ideal seria aplicar ideias matemáticas às relações humanas:

(8) Rafael: *Se a gente conseguisse correlacionar essas informações humanas a dados matemáticos, isso seria [...] ao invés de simplesmente ver o que é a tendência estatística.*

(9) Jussara: *O que você está esperando então da matemática?*

(10) Rafael: *O que eu estou esperando da matemática? Eu espero muita coisa da matemática. A matemática é a matemática, você sabe.*

(11) Jussara: *Não sei não. Quero saber.*

(12) Rafael: *Mas como assim?*

(13) Jussara: *Você falou assim: [a análise qualitativa] é meio simplista, mas se você pega essa coisa que a gente já tem, essa percepção qualitativa, e...*



(14) Rafael: ... *adiciona números. Ficaria mais exato.*

(15) Jussara: *E qual é a vantagem disso?*

(16) Rafael: *A vantagem disso? Diminuir o erro.*

(17) Jussara: *Agora aqui, tem você, que quer provar isso, e tem a Ilaine, que quer provar que você está errado. Aí cada um pode forçar para matemática provar o que quer ser provado, o que quer provar. Como é que vocês ficam nisso?* [transcrição do vídeo 23/03/2013; 00:38:23]

O episódio prossegue com o grupo pensativo a respeito do último questionamento e com a pesquisadora Jussara esclarecendo que a pergunta sobre como o grupo pretendia atuar matematicamente estava relacionada a aceitar ou não a proposta do Rafael. O trecho a seguir decorre de tal discussão:

(18) Ilaine: *Eu acho que o que me assustou, na verdade, não foi a ideia de matematizar esses dados e chegar a um resultado, mas é o que se espera disso aí. É como se, depois, a gente fosse, a partir desse modelinho, conseguir prever tudo que vai acontecer.*

(19) Rafael: *A própria ideia do que eu falo já está sendo aplicada a você [Ilaine]. Por exemplo, você tem a opinião de que é complicado você prever ações como essa.*

(20) Ilaine: *As ações humanas.*

(21) Rafael: *Isso. As ações humanas. Isso é um senso comum, onde pessoas falaram isso e você tomou isso como verdade. Então, automaticamente, você está entrando numa linha onde a maioria das pessoas já acredita nisso e não se prova nem que sim nem que não. É neutro.*

(22) Ilaine: *Depende do que você está tomando como provar.*

(23) Rafael: *Uai, prova empírica.*

(24) Jussara: *É a matemática que vai provar isso?*

(25) Ilaine: *Mas Rafael, o que seria o provar?*

(26) Rafael: *Provar é você ver que funciona [...] provar é você ver que é possível matematizar essas informações de uma maneira que se tenha um senso de certeza [...].* [transcrição do vídeo 23/03/2013; 00:42:40]

Neste episódio, a pesquisadora Jussara questionou o grupo sobre como seria realizado o tratamento matemático no projeto de modelagem matemática desenvolvido pelo grupo. Rafael reafirmou sua crença de que a matemática daria respostas com mais certeza, ou com menos erros, aos objetivos do projeto, e defendeu suas ideias em um debate com as pesquisadoras Jussara e Ilaine.

6. A proposta de Rafael e o que foi planejado para o ambiente de aprendizagem de modelagem: confrontando ideias

Nos dois episódios, apresentados na seção anterior, podemos encontrar elementos que mostram qual seria, na proposta feita por Rafael, o papel da matemática ou de modelos matemáticos.

No primeiro episódio, Rafael apresentou sua proposta, composta por definições, na fala (1), e detalhamentos, nas falas (2) e (3), e começou a esboçar suas ideias sobre pesquisas com abordagens qualitativas e quantitativas, na fala (4). Alberto sintetizou a proposta de Rafael, na fala (5).

O assunto abordagens metodológicas na física e em ciências humanas foi retomado na fala (7), do segundo episódio, em resposta à pergunta da pesquisadora Jussara (fala 6). Para Rafael, essa escolha era um detalhe no projeto que o grupo desenvolvia. Rafael destacou o que esperava da matemática, em sua proposta, nas falas (8) a (16), em um diálogo com a pesquisadora Jussara. Na fala (17), a pesquisadora Jussara provocou um debate entre Rafael e a pesquisadora Ilaine, a qual, na fala (18), afirmou que era importante ter clareza sobre a diferença entre modelar matematicamente e as intenções que estão por trás dessa modelagem. Rafael, por sua vez, defendeu suas hipóteses, nas falas (19) a (21), exemplificando sua proposta com as ideias defendidas pela pesquisadora Ilaine. A discussão entre eles tomou um rumo mais abstrato nas falas (22) a (25), quando eles tematizaram a prova científica e o papel da matemática nela. Por fim, na fala (26), Rafael reafirmou sua maior confiança em provas que se baseiam em argumentos matemáticos.

Podemos concluir, então, que, para Rafael, se o grupo se baseasse em ideias matemáticas, sua análise sobre a escolha de imóveis “ficaria mais exat[a]” (fala 14), o que levaria a uma “diminui[ção d]o erro” (fala 16) na solução obtida. Mais que isso, Rafael acreditava que, dessa forma, seria possível fazer previsões mais precisas sobre que imóveis uma pessoa escolheria para comprar, já que “na verdade, essas escolhas já estão definidas” (fala 1). Ou seja, para Rafael, o papel da matemática (ou de modelos matemáticos) seria fazer previsões sobre o que pode acontecer no futuro (SKOVSMOSE, 1990), e a matemática imprimiria uma maior certeza em tais previsões. Essas ideias se alinham com a ideologia da certeza da matemática (BORBA; SKOVSMOSE, 1997).

Mas o que pode ter levado Rafael a elaborar tal proposta? Como Borba e Skovsmose (1997) afirmam, a ideologia da certeza está disseminada na sociedade e, nas escolas, os professores fazem parte de uma cadeia que contribui para difundir tal ideologia. Rafael, além de ser estudante, em formação para ser professor de Física, também atuava como professor, de Física e de Matemática. Por isso, ele era influenciado e, talvez, já atuasse como difusor da ideologia da certeza da matemática. Assim, nos espaços educacionais em

que atuava, Rafael poderia estar propondo um modelo matemático para estruturar um fenômeno social (BARBOSA, 2009), a exemplo do que ele já vivia na educação científica, colaborando para a disseminação da ideologia da certeza.

Devemos lembrar, por outro lado, que o ambiente de aprendizagem no qual a pesquisa foi realizada era uma situação arranjada (SKOVSMOSE; BORBA, 2004) e, embora ele estivesse inserido em um contexto escolar, não estava completamente subordinado às regras que ali imperam. Talvez por isso, o estudante Rafael se sentiu livre para dar asas ao físico Rafael, propondo a estruturação (BARBOSA, 2009) de uma situação com referência à realidade, a fim de fazer previsões (SKOVSMOSE, 1990), por meio da matemática, e expandindo essas ideias para uma discussão sobre metodologia de pesquisa científica (falas 4, 7 e 22 a 26).

Essa discussão foi alimentada pelas pesquisadoras Jussara e Ilaine. Em um paradigma crítico de pesquisa (SKOVSMOSE; BORBA, 2004), os pesquisadores não têm a intenção de não interferir no andamento da pesquisa. Ao contrário, por estarem comprometidos com transformações, os pesquisadores interveem propositadamente no contexto da pesquisa. Foi o que fizeram as pesquisadoras Jussara (falas 6 e 17) e Ilaine (fala 18).

Na fala (17), a pesquisadora Jussara explicitou um choque entre as ideias de Rafael e as da pesquisadora Ilaine, provocando uma discussão entre eles. Sua intenção era detectar tensões, conflitos e contradições, vivenciados pelo grupo no ambiente de aprendizagem de modelagem, a fim de analisar a evolução da postura crítica do grupo por meio de enfrentamento de contradições emergentes.⁸

Essa intervenção da pesquisadora Jussara levou a pesquisadora Ilaine a dar visibilidade, na fala (18), ao confronto entre a proposta de Rafael e a perspectiva sociocrítica (KAISER; SRIRAMAN, 2006), que orientou o ambiente de aprendizagem de modelagem: o que a assustou “*não foi a ideia de matematizar esses dados e chegar a um resultado, mas é o que se espera disso aí.*” Como já afirmamos, uma das preocupações da educação matemática crítica é discutir sobre os interesses que estão por trás de cada um dos possíveis papéis de modelos matemáticos na sociedade (SKOVSMOSE, 1990).

De forma sintética, concluímos que o papel da matemática (ou de modelos matemáticos), na proposta de Rafael, era fazer previsões sobre o futuro, de forma mais precisa, com menos erros, e que tal proposta estava em conflito com a perspectiva de

⁸ Esse é um dos objetivos específicos da pesquisa “Aprendizagem expansiva em projetos de modelagem orientados pela educação matemática crítica”, que deu origem a este artigo e tem a Teoria da Atividade como um de seus fundamentos teóricos. Por uma questão de limitação de espaço, não vamos considerar tal teoria neste artigo. Para efeito de esclarecimento, nos limitaremos a informar que, segundo Engeström e Sannino (2010, p. 7), as “contradições tornam-se forças propulsoras reais da aprendizagem expansiva”. Pretendemos abordar essa discussão em um trabalho futuro.

modelagem que orientou o ambiente de aprendizagem.

7. Considerações finais

Apresentamos, aqui, reflexões sobre uma pesquisa que teve como palco uma situação arranjada, a partir da qual pode ser possível vislumbrar como seria a situação imaginada (SKOVSMOSE; BORBA, 2004). Como descrevemos na seção 3, para nós, a situação imaginada seria a inserção de ambientes de aprendizagem de modelagem nas aulas de matemática do Instituto de Ciências Exatas da UFMG, nos quais os alunos desenvolveriam projetos de modelagem orientados pela educação matemática crítica. É necessário, nesse momento, buscar meios para refletir sobre possibilidades para a situação imaginada a partir do que concluímos sobre a situação arranjada. Para tal, Skovsmose e Borba (2004, p. 215) propõem o raciocínio crítico: “o processo analítico de reconsiderar a situação imaginada à luz de experiências relacionadas com a situação arranjada”, o que passamos a desenvolver a seguir.

A situação arranjada, aqui analisada, aconteceu em um espaço escolar, mas as discussões não se restringiram àquelas que são comuns a esse espaço. Ou seja, o grupo ampliou suas discussões para um escopo social mais amplo, o que está em harmonia com as preocupações da educação matemática crítica. As discussões sobre o papel da matemática na sociedade e sobre metodologia de pesquisa são exemplos dessa situação.

Na universidade, alunos de cursos de graduação da área de ciências exatas não costumam viver tal experiência nas disciplinas curriculares. Apenas alunos que se envolvem com iniciação científica podem ter contato com tais discussões e, mesmo assim, em um nível incipiente. Pensando na situação imaginada, tais discussões poderiam dar um caráter diferenciado à formação desses futuros físicos, engenheiros e matemáticos.

Além disso, essas discussões poderiam levar a uma desestabilização das certezas matemáticas ou, pelo menos, a questionamentos a esse respeito. A ideologia da certeza está presente na sociedade e é difundida nas práticas pedagógicas de matemática e de outras disciplinas escolares. A proposta de Rafael foi criada em uma prática pedagógica, mas carrega em si a intenção de um físico que poderia usar a matemática para fazer prescrições na sociedade, alimentando a ideologia da certeza. Essas discussões e reflexões, nos espaços escolares da situação imaginada, poderiam contribuir para a desestabilização da ideologia pelas mãos dos futuros cientistas/cidadãos.

Neste artigo, vislumbramos algumas possibilidades e esperamos que elas tragam contribuições para discussões sobre modelagem segundo a educação matemática crítica, nas quais o foco da crítica se localiza no tratamento matemático em tais ambientes de aprendizagem.

Agradecimentos

Agradecemos aos sujeitos da pesquisa, por sua participação, e a Célio Melillo, Edmilson Torisu, Francisco Camelo e Ilaine Campos, por sugestões feitas a versões preliminares deste artigo. Agradecemos, também, o apoio financeiro concedido pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq, processo n. 473850/2011-7) e pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG, processo n. PPM 00235/13) para o desenvolvimento da pesquisa.

Referências

- ALMEIDA, L. M. W.; TORTOLA, E.; MERLI, R. F. Modelagem matemática - com o que estamos lidando: modelos diferentes ou linguagens diferentes?. **Acta Scientiae**, v. 14, n. 2, p. 215-239, 2012. Disponível em <<http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/230/226>>. Último acesso em: 21 jun. 2014.
- ALVES-MAZZOTTI, A. J. O método nas ciências sociais. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa**. São Paulo: Editora Pioneira, 1998. parte II, p. 107-188.
- ARAÚJO, J. L. **Cálculo, tecnologias e modelagem matemática: as discussões dos alunos**. 2002. Tese (Doutorado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.
- ARAÚJO, J. L. Uma abordagem sócio-crítica da modelagem matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. **Alexandria Revista de Educação em Ciências e Tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 55-68, 2009. Disponível em <<http://alexandria.ppgeet.ufsc.br/files/2012/03/jussara.pdf>>. Último acesso em: 12 jun. 2014.
- ARAÚJO, J. L. Ser crítico em projetos de modelagem em uma perspectiva crítica de educação matemática. **Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)**, v. 26, n. 43, p. 67-87, 2012. Disponível em <<http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/6890/4973>>. Último acesso em: 12 jun. 2014.
- BARBOSA, J. C. Mathematical modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective. **ZDM – The International Journal on Mathematics Education**, v. 38, n. 3, p. 293-301, jun., 2006. Disponível em: <<http://link.springer.com/article/10.1007/BF02652812>>. Último acesso em: 01 nov. 2014.
- BARBOSA, J. C. A prática dos alunos no ambiente de modelagem matemática: o esboço de um framework. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.) **Modelagem matemática na educação matemática brasileira: pesquisas e práticas**



educacionais. Recife: SBEM, 2007. p. 161-174.

BARBOSA, J. C. Modelagem e modelos matemáticos na educação científica. **Alexandria Revista de Educação em Ciências e Tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 69-85, 2009. Disponível em <<http://alexandria.ppgeet.ufsc.br/files/2012/03/jonei.pdf>>. Último acesso em: 14 jun. 2014.

BLUM, W. Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. In: KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, R. B.; STILLMAN, G. (Eds.) **Trends in teaching and learning of mathematical modelling**. Dordrecht: Springer, 2011. p. 15-30.

BORBA, M. C.; SKOVSMOSE, O. The ideology of certainty in mathematics education. **For the Learning of Mathematics**, v. 17, n. 3, p. 17-23, 1997.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-with-media and reorganization of mathematical thinking**: information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation. New York: Springer Science+Business Media, Inc., 2005.

ENGESTRÖM, Y.; SANNINO, A. Studies of expansive learning: foundations, findings, and future challenges. **Educational Research Review**, v. 5, p. 1-24, 2010. doi: 10.1016/j.edurev.2009.12.002. Último acesso em 02 jul. 2014.

FONTANA, A.; FREY, J. H. Interviewing: The art of science. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (Eds.) **Handbook of qualitative research**. California: Sage Publications, 1994. p. 361-376.

FREITAS, W. S. **A matematização crítica em projetos de modelagem**. 2013. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2013.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **ZDM – The International Journal on Mathematics Education**, v. 38, n. 3, p. 302-310, jun., 2006. Disponível em: <<http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm063a9.pdf>>. Último acesso em: 20 jun. 2014.

LINGERFJÄRD, T. Modelling from primary to upper secondary school: findings of empirical research - overview. In: KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, R. B.; STILLMAN, G. (Eds.) **Trends in teaching and learning of mathematical modelling**. Dordrecht: Springer, 2011. p. 9-14.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

NEVES, R. G.; SILVA, J. C.; TEODORO, V. D. Improving learning in Science and mathematics with exploratory and interactive computational modelling. In: KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, R. B.; STILLMAN, G. (Eds.) **Trends in teaching and learning of mathematical modelling**. Dordrecht: Springer, 2011. p. 331-339.

PONTE, J. P. Estudos de caso em educação matemática. **Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)**, v. 19, n. 25, p. 105-132, 2006. Disponível em

<<http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1880/1657>>. Último acesso em: 14 jun. 2014.

SKOVSMOSE, O. Reflective knowledge: Its relation to the mathematical modelling process. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 21, n. 5, p. 765-779, 1990.

SKOVSMOSE, O. **Travelling through education**: uncertainty, mathematics, responsibility. Rotterdam: Sense Publishers, 2005.

SKOVSMOSE, O.; BORBA, M. C. Research methodology and critical mathematics education. In: VALERO, P.; ZEVENBERGEN, R. (Eds.) **Researching the socio-political dimensions of mathematics education**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2004. p. 207-226.

STAKE, R. E. **Investigación con estudio de casos**. Madrid: Morata, 2005. Tradução do original de 1995, *The art of case study research*, Sage Publications.

YIN, R. **Case study research**: Design and methods. Newbury Park, CA: Sage, 1984.

Jussara de Loiola Araújo

Professora do Departamento de Matemática e do Programa de Pós- Graduação em Educação - UFMG - Brasil

E-mail: jussara@mat.ufmg.br

Ana Paula Rocha

Mestranda do Programa de Pós- Graduação em Educação - UFMG - Brasil

E-mail: anamathematics@ufmg.br

Danielle Alves Martins

Licenciada em Matemática - UFMG - e Professora da Rede Estadual de Minas Gerais - Brasil

E-mail: daniellemartins125@hotmail.com



REPERCUSSÕES DE EXPERIÊNCIAS COM MODELAGEM MATEMÁTICA EM AÇÕES DOCENTES

REPERCUSSIONS OF EXPERIENCES WITH MATHEMATICAL MODELING IN TEACHING ACTIONS

Maria Isaura de Albuquerque Chaves
Universidade Federal do Pará – UFPA – Brasil

Resumo

Este artigo apresenta algumas *repercussões* nas ações docentes, de envolvimento de professores com experiências de Modelagem para o ensino da Matemática, evidenciadas em uma pesquisa de doutorado. Os dados foram originados e construídos a partir das descrições dos professores, efetivadas por meio de entrevistas, acerca de como percebem as mudanças ocorridas em suas práticas de sala de aula, após envolvimento com Modelagem. A análise dos dados revela que após o envolvimento *com experiências de Modelagem para o ensino da Matemática, o professor incorpora em sua prática docente alguns comportamentos típicos do processo de Modelagem.*

Palavras-chave: Modelagem Matemática, ensino, repercussões, prática docente.

Abstract

This article presents some repercussions on their teaching actions of the involvement of teachers with experience of Modeling for Mathematics teaching, evidenced in a doctoral research. Data were originated and constructed from the descriptions of teachers, obtained by interviews, about how they perceive the changes in their classroom practices after involvement with Modeling. Data analysis reveals that after the experiences of involvement with Modeling for Mathematics teaching, the teacher incorporates into their teaching practice some typical behaviors of the Modeling process.

Keywords: Mathematical Modeling, education, repercussions, teaching actions.

Introdução

Desde que nascemos, estamos constantemente aprendendo. Aprender faz parte da natureza humana, que em todos os seus fazeres desenvolve saberes, pois “Nascer é ingressar em um mundo no qual estar-se-á submetido à obrigação de aprender. Ninguém pode escapar dessa obrigação, pois o sujeito só pode ‘tornar-se’ apropriando-se do mundo” (CHARLOT, 2000, p.59). Nesses termos, o professor não passa imune por experiências de Modelagem, algo, certamente, ele aprende. Mas esses saberes, desenvolvidos a partir dos fazeres em Modelagem, repercutem na prática docente, ou seja, no fazer e no saber-fazer cotidiano do professor?

Assim, investigar possíveis relações entre o envolvimento do professor com experiências de Modelagem Matemática e seu respectivo desenvolvimento profissional, constituiu o campo de



interesse de uma pesquisa de doutorado que focalizou investigar repercussões do envolvimento dos professores com experiências de Modelagem.

Considerando-se “envolver” no sentido de “fazer, tomar parte” (cf. FERREIRA), o envolvimento de professores com experiências de Modelagem diz respeito a fazer e tomar parte do planejamento, da organização e no desenvolvimento de atividade de Modelagem visando o ensino e aprendizagem da Matemática. Segundo essa perspectiva de envolvimento, 9 (nove) professores com sala de aula, e que se envolveram com experiências de Modelagem voltadas para o ensino e aprendizagem da Matemática, participaram da pesquisa.

Este artigo tem como objetivo apresentar as análises das descrições dos professores participantes, capturadas por meio de entrevistas em profundidade acerca de como percebem o movimento de suas experiências docentes com Modelagem Matemática para as práticas de sala de aula, ou mais especificamente, da repercussão no ensino da Matemática de saberes desenvolvidos no contexto da Modelagem, independente de se estar usando Modelagem.

Um exame detalhado nas transcrições das entrevistas possibilitou identificar e extrair os trechos que continham elementos da repercussão das experiências com Modelagem, localizados nas descrições dos professores participantes acerca de mudanças incorporadas na prática cotidiana, que digam respeito a comportamentos típicos do processo de Modelagem, bem como mudanças ocorridas nas suas atitudes e nas atitudes dos alunos frente ao processo de ensino e aprendizagem.

Os trechos selecionados foram incorporados no processo de codificação sugerido por Strauss e Corbin (2008) e Charmaz (2009), para em seguida serem analisados por meio do cruzamento do quadro teórico da Modelagem, na perspectiva da Educação Matemática, do quadro teórico de Tardif (2006) e Gauthier (1998) sobre saberes docentes⁹, e de postulados da teoria sociológica fenomenológica de Alfred Schutz.

2. Modelagem Matemática

Considero Modelagem Matemática como um *processo que traduz ou que organiza situações-problema provenientes do cotidiano ou de outras áreas do conhecimento, também dita situação real, segundo a linguagem simbólica da Matemática, fazendo aparecer um conjunto de modelos matemáticos ou de relações matemáticas que procura representar ou organizar a situação/problema proposta, com vistas a compreendê-la ou solucioná-la.*

Assim, por exemplo, em situações-problema resolvíveis via aritmética, tem-se a Modelagem organizando a situação matematicamente, fazendo aparecer relações matemáticas; e, em situações resolvíveis via álgebra ou geometria, tem-se a Modelagem traduzindo a situação para a linguagem matemática, fazendo aparecer modelos matemáticos, tais como equações, gráficos, figuras planas ou espaciais. Observando que,

⁹ Por questões de limitações de espaço, a presente publicação, privilegiando a ação docente pós experiências com Modelagem, deixa apenas implícito as relações com o quadro teórico de Tardif (2006) e Gauthier (1998) sobre saberes docentes, posto que não há fazer docente sem saberes subjacentes. A experiência docente com Modelagem só repercute nas ações do professor, porque antes repercute em seus saberes.



seja traduzindo, seja organizando, o objetivo do processo é compreender ou solucionar um determinado problema real.

Conforme Maaß (2006), modelar matematicamente é transitar entre a realidade e a Matemática, o processo de Modelagem começa com um problema do mundo real que é estruturado matematicamente. Do mesmo modo, Bassanezi (2002) e Biembengut e Hein (2003), ao considerarem Modelagem enquanto arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos, com vistas a serem compreendidas ou solucionadas, também consideram a realidade como propulsora do processo de Modelagem.

Compreendo que Bassanezi (2002), Biembengut e Hein (2003) e Maaß (2006), ao referirem-se ao mundo real ou situações da realidade, estão de acordo com Blum e Ferri (2009, p.45), segundo as quais, realidade é o “resto do mundo” fora da matemática, incluindo natureza, vida cotidiana e outras disciplinas científicas. E, nessa perspectiva, situações da realidade dizem respeito aos problemas propostos pela vida cotidiana, excluindo-se, dessa forma, aqueles propostos pela própria matemática.

Segundo Schutz e Luckmann (2009, p.43), a fonte de toda realidade é subjetiva, logo, tudo o que desperta nosso interesse é real. Chamar um objeto de real significa que esse se encontra em uma relação definida conosco, tendo o mesmo sentido para todos que compartilham a experiência. Como consequência, realidade é considerada como “âmbitos finitos de sentido” que consistem em experiências de sentido compatíveis entre si. Assim, realidade define-se como um objeto de sentido compatível para todos que compartilham da mesma experiência.

Modelagem Matemática, como todo processo, é desenvolvida por meio de etapas, quais sejam: *interação*; *levantamento de hipóteses e conjecturas*; *seleção de variáveis*; *tradução ou organização da situação-problema em símbolos ou relações matemáticas e validação*.

Na *interação*, identifica-se ou constrói-se um problema a ser estudado e faz-se o levantamento de dados qualitativos e quantitativos por meio de pesquisa. A partir de e tais dados, faz-se um *levantamento de hipóteses e conjecturas*, gerando uma *seleção de variáveis* que concorrem para a escrita ou “*tradução*” da *situação-problema* para a linguagem matemática. Chegando-se a um *modelo matemático*¹⁰ ou a uma *organização matemática*¹¹ do problema, resta a *validação* que verifica a adequabilidade do produto do processo de Modelagem à situação que o gerou.

Vale ressaltar que essas etapas representam uma forma simplificada de se descrever como o processo de Modelagem se desenvolve, e não necessariamente precisam ser seguidas na ordem apresentada.

¹⁰ Conjunto de símbolos ou relações matemáticas que representam a situação-problema, como por exemplo: equações, funções, gráficos, tabelas.

¹¹ Conjunto de operações aritméticas devidamente relacionadas entre si, que geram uma solução para a situação-problema.



Na sala de aula, fazer Modelagem significa implementar esse processo, que traduz ou que organiza matematicamente uma situação real, no ensino e na aprendizagem de Matemática. Ou seja, implica que professores, com seus respectivos alunos, devem, a partir de um tema, de uma situação real ou de uma situação com referência na realidade, desenvolver as etapas do processo de Modelagem, quais sejam: escolha do tema; elaboração da situação-problema; coleta e simplificação dos dados; tradução ou resolução do problema; análise crítica da solução ou validação do modelo.

Essas etapas, que precisam ser desenvolvidas estrategicamente, levando-se em consideração o onde e o para quê a Modelagem vai ser implementada, ou seja, o contexto e a finalidade, podem envolver professor e alunos de várias maneiras, gerando várias possibilidades para o processo (cf. CHAVES, ESPIRITO SANTO 2011).

3. As repercussões das experiências com modelagem

As ações humanas somente se tornam compreensíveis ao serem revelados seus *motivos para* e *porque*, que representam, respectivamente, o objetivo da ação ou seu projeto, e a bagagem de conhecimentos disponíveis em termos de gostos, preferências, conceitos e concepções (CAPALBO, 1998; SCHUTZ, 1974; SCHUTZ, 1979d).

No decurso da ação, o ator só tem em mente a realização de seu projeto, ou seja, seu *motivo para*. Somente quando a ação é finalizada, e se o ator fizer uso da reflexividade, ele pode voltar-se a si próprio, compreender suas ações e investigar as circunstâncias que os levaram a agir da forma que agiu e, dessa forma, revelar seus *motivos porque* (SCHUTZ, 1974; SCHUTZ, 1979b).

Os *motivos porque* sendo reflexo de experiências passadas nas ações atuais, são compostos pelo *estoque de experiências anteriores* que, por sua vez forma o *acervo de conhecimento, ou conhecimento à mão*, disponível por ocasião da ação a ser desenvolvida.

O processo de codificação realizado sobre as descrições dos professores revelou os *motivos* que justificam ações docentes pós-envolvimento com experiências de Modelagem, organizados segundo as categorias: **Incorporando características do processo de Modelagem; Se motivando pela repercussão nos alunos; Questionando o tradicional; Percebendo repercussões nos saberes e Características de Modelagem em práticas anteriores.**

A primeira categoria possui subcategorias nomeadas, segundo *tipicidades*¹² de ações do processo de Modelagem, que agregando várias falas correlacionadas dos professores, revelam a presença dessas ações na cotidianidade do trabalho docente. Quais sejam: **Relacionando matemática; Partindo de exemplos de situações do dia a dia;**

¹² O “mundo factual de nossa experiência... é vivenciado, desde o início, como típico” (SCHUTZ, 1979c, p.115). Isto porque os objetos com os quais lidamos aparecem “como coisas de tal ou tal tipo, pertencentes a tal ou tal gênero” (CAPALBO, 1998, p.34). Nosso acervo de conhecimento é integrado por tipificações do mundo da vida. O âmbito das *tipificações* armazenadas no *acervo do conhecimento* contem elementos de conhecimento relacionados com aspectos e atributos *típicos* dos objetos, pessoas e eventos. (SCHUTZ; LUCKMANN, 2003, p.148).

Matematizando; Usando pesquisa; Utilizando tecnologia da informação e Atuando como mediador.

As demais categorias agruparam descrições que, embora não revelem um movimento das experiências docentes com Modelagem Matemática para as práticas de sala de aula propriamente dita, revelam saberes docentes importantes para que esse movimento aconteça. Portanto, fazem parte do fenômeno repercussão.

3.1. Incorporando características do processo de Modelagem

Nove professores participaram desta pesquisa, dos quais, sete declararam ter desenvolvido outras experiências de Modelagem após a primeira, bem como manifestaram a intenção de continuar desenvolvendo, o que já representa repercussão. Entretanto, foi possível perceber na prática cotidiana de todos, conforme suas descrições, características *típicas* do processo de Modelagem.

3.1.1. Relacionando matemática

Ao verificar o uso de diferentes conceitos matemáticos na realização de diversas práticas em variadas situações, é possível considerar que, apesar de a Matemática ser única em termos teóricos, posso adjetivá-la de várias formas, conforme as diferentes formas de manifestação desta ou de uso por grupos sociais.

É assim que, ao considerar a matemática que deve ser ensinada pelos professores e aprendida pelos alunos da Educação Básica, prevista nos programas e planejamentos da escola, defino a “matemática escolar”, que é a mesma utilizada pelas outras áreas do conhecimento, desde que em contexto escolar. Usar a matemática, no contexto da própria aula de matemática, na resolução de problemas de outras disciplinas, como a física, a química ou a biologia, é frequentemente concebido pelos professores como forma de trabalho interdisciplinar.

Por outro lado, a “matemática das situações cotidianas” compreende os conceitos matemáticos que as pessoas usam naturalmente em seus fazeres cotidianos, embasados nos saberes que desenvolvem em seus respectivos meio social e cultural. Inclui também artefatos que tenham embutidos conceitos matemáticos, como termômetro, roda de bicicleta ou outras formas geométricas presentes nos objetos do ambiente. É dessa forma considerada, a “matemática que o aluno já sabe” ou a “matemática do dia a dia” do aluno.

A “matemática escolar” e a “matemática das situações cotidianas” são facetas diferentes de uma mesma matemática que se manifesta de diferentes formas e, como consequência, guardam relações entre si, favorecendo o processo de Modelagem. Já que, relacionar matemática, sejam elas da escola, das situações cotidianas, ou ainda, as relações internas, que se pode estabelecer entre diversos conceitos e conteúdos matemáticos, é um procedimento pertinente para quem quer que use o processo de Modelagem Matemática.

Isso porque, para *traduzir ou organizar situações-problema provenientes do cotidiano ou de outras áreas do conhecimento*, segundo a linguagem matemática com suas regras, propriedades e conceitos, é preciso relacionar a matemática pertinente ao problema, com a que já conheço, de modo a migrar com a situação para o âmbito da Matemática, em que estabeleço outras relações no sentido de compreender, ou resolver a situação-problema em questão, por meio da Modelagem.

Logo, relacionar matemática, a princípio, é um comportamento típico do processo de Modelagem, significando dizer que em toda atividade de Modelagem que se desenvolve, forçosamente, relaciona-se matemática. Esse comportamento típico foi identificado nas descrições dos professores, relacionado com situações de ensino pós-experiência com Modelagem.

... hoje eu consigo ser mais interdisciplinar, isso pra mim é uma mudança muito clara na minha sala de aula, eu já não coloco mais só o conteúdo matemático sempre eu quero abordar alguma coisa diferente, como outro dia ... eu acabei trabalhando com questões de biologia, dentro dos problemas que utilizei pra trabalhar com os alunos e aí a gente viu várias possibilidades, crescimento populacional sempre aparece quando se vai para o lado da biologia ... (José)

... fazendo sempre uns exemplos, quando eu falo por exemplo de números inteiros eu sempre coloco a questão do termômetro, quando eu falo de geometria eu tento levar em consideração as formas do dia a dia deles. (Adne)

... para trabalhar trigonometria eu inventei um ciclo trigonométrico de madeira, pintei os quadrantes, e acrescentei as cordas que eu uso pra fazer as demonstrações junto com os alunos, (...) ai gente pega a roda da bicicleta, que eles exploram e encontram bastante coisa do ciclo... (Beta)

Os *motivos porque* professores relacionam matemática, e ainda tendo como *motivo para* ensinar Matemática por meio dessa relação, estão relacionados com experiências anteriores, em especial de Modelagem, que lhes despertaram para essa relação, que fez com que eles passassem a ver Matemática em diversos contextos de uso, bem como relacioná-la com a matemática a ser ensinada.

3.1.2. Partindo de exemplos de situações do dia a dia

As relações matemáticas desenvolvidas em suas experiências com Modelagem, bem como aquelas que os professores exercitam *a posteriori*, por meio da atitude natural que efetivam no mundo da vida cotidiana, são utilizadas para organizar o ensino a partir de exemplos de situações do dia a dia.

... a forma de introduzir o assunto mesmo, eu não dou o conceito diretamente do livro, mas sim crio a definição a partir de exemplos práticos mesmo ... (Mike)



... logo agora no início [do ano letivo de 2011] a gente estava trabalhando com grandes números (...) então levei revistas e jornais para a sala de aula, pedi que eles folheassem e depois eles folheando lá com os amigos eles verificaram os números grandes... (Ana)

... sempre procurar uma situação problema que exemplifique o conhecimento que quero repassar, deste modo que mudou [meu ensino] depois de meu contato com eles [mediado pela Modelagem] ... (Alfredo)

... antes [da experiência com Modelagem] achava que o aluno tinha que saber o que estava no livro didático, o que tinha que ser repassado era aquilo, pra ele resolver os problemas, porque isso era que ia fazer com que ele passasse no vestibular, e agora sim, eu já consigo perceber que não, que necessariamente eu não tenho que usar o livro didático como uma bíblia como referência pra tudo, mas que sim, eu posso construir a minha prática, posso ou não utilizar o livro didático, nisso eu consegui perceber que o professor tem bastante liberdade em abordar o aluno que (...) tem que ter um conhecimento diferenciado (Daniela)

Organizar o ensino a partir de exemplos de situações do dia a dia guarda similaridade com a situação-problema¹³ na Modelagem, a partir da qual se desencadeia todo o processo.

No processo de Modelagem, é a partir de um problema relacionado com uma situação com referência na realidade, que se buscam dados para organizar ou traduzir a situação que se quer compreender ou estudar e, dessa forma, o problema gera uma motivação, um envolvimento que conduz à solução e a consequente apreensão dos saberes correlacionados.

Isso é reforçado por Schutz e Luckmann (2009), segundo os quais, a aquisição do conhecimento se dá na transformação de situações problemáticas em situações não problemáticas em que, partindo-se de esquemas de interpretação e tipificações, ou seja, de elementos já sedimentados no acervo de conhecimento, perseguem-se explicitações sobre os elementos da situação problemática, até alcançar um nível de clareza, familiaridade e ausência de contradições, que atendam aos interesses determinado pelo plano que, no caso, é resolver o problema proposto.

Nesse sentido, o que leva o professor a organizar seu ensino, a partir de situações do dia a dia, ou seus *motivos porque* age dessa forma, estão relacionados com perceber o quanto o aluno está motivado em transformar situações problemáticas em situações rotineiras, é importante para sua aprendizagem, e que isso deve ser feito a partir de uma matemática que o aluno já sabe.

Eu começo [a aula] mostrando o que eles fazem no dia a dia deles, a partir do que eles vão falando eu vou tentando jogar o conteúdo e quando eles percebem, conseguem fazer a relação que aquilo tem a ver com o que a gente vai estudar, é quando eu começo o conteúdo propriamente dito... (Adne).

¹³ Refere-se a problemas de aplicação que retratam situações reais do dia-a-dia e que exigem o uso da Matemática para serem resolvidos. Desse modo, utilizando-se conceitos, técnicas e procedimentos procura-se matematizar uma situação real, organizando os dados em tabelas, traçando gráficos, fazendo operações, etc.



Segundo Schutz e Luckmann (2009), são nossos interesses pertinentes a um plano, que determinam o que está em aberto nas situações e que deve ser explicitado, explicitação esta que promove a sedimentação de novos elementos no *acervo de conhecimentos*. Ou seja, nossos interesses determinam o que deve ser aprendido.

Assim, outros motivos que levam os professores a organizar o ensino a partir de exemplos de situações do dia a dia, dizem respeito ao perceberem o quanto é importante considerar os interesses dos alunos no processo de ensino e aprendizagem, no caso, seus *motivos para*, ou seus interesses determinado por um plano, em saber para que “serve” o conteúdo matemático a ser estudado e aprendido.

Nesse sentido, os professores argumentam favoravelmente quanto à conferir, por meio do ensino a partir de exemplos de situações do dia a dia, utilidade ao conteúdo matemático, tanto em termos de aplicabilidade nas situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, quanto em termos de levar o aluno a compreender sua realidade, tendo em vista transformá-la.

Das descrições dos professores acerca de organizar o ensino a partir de exemplos de situações do dia a dia, é possível apreender que isso implica também, por parte do professor, um planejamento diferenciado e a elaboração de materiais que propiciem esse planejamento. Com isso, os professores percebem que têm condições de elaborar seus próprios materiais de ensino, conferindo mais autonomia e satisfação ao trabalho docente, porque conseguem atender as expectativas e as necessidades dos alunos.

3.1.3. Matematizando

No contexto da experiência de Modelagem matematizar diz respeito a utilizar conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos para organizar ou traduzir uma situação real, segundo tabelas, gráficos, operações aritméticas ou algébricas, equações ou funções matemáticas. Nesses termos, matematizar se constitui em um processo que parte do “mundo real” para o “mundo matemático”, por meio de relações matemáticas usadas em cada contexto, que sendo uma das etapas pertinentes ao processo de Modelagem, pode ser considerada como *típica*.

Enquanto uma categoria pertinente a presente pesquisa, matematizar resume e qualifica ações dos professores relacionadas com o desenvolvimento de algoritmos, em parceria com o aluno, por meio das interações que promovem, cujo *motivo para* é levar o aluno a construir conceitos, partindo da matemática que já sabe, presente nos exemplos de situações do dia-a-dia, apresentados pelo professor.

Matematizar, enquanto comportamento *típico* do processo de Modelagem, aparece nas descrições dos professores como *típico* das ações de ensino que desenvolvem pós-experiências com Modelagem.



... por exemplo, quero achar a área de um retângulo, então eu uso esse cálculo aproximando da Modelagem, fazendo os números variarem até os alunos perceberem a regularidade, colocar letras e transformar num modelo ... (Nascimento)

... quero extrair limites a partir do modelo de juros compostos ai faço na calculadora, que é pra eles verem o que está acontecendo quando mudo os parâmetros, dai eles veem o que acontece e já conseguem visualizar os limites... (Beta)

Em certos casos a gente faz um algoritmo que responde a questão e depois se cria uma definição, resolvendo o problema tipo passo-a-passo e a partir desse passo-a-passo, observando a regularidade, as variações, se chega na conclusão a definição que se quer. (Mike)

Envolver o aluno em um processo de “criação” de conceitos, pinçado do processo de modelar matematicamente, enquanto arte de transformar um exemplo real em matemática, motiva os professores a incorporarem a matematização em suas práticas cotidianas.

Embora “Matematizando” guarde proximidade com “Relacionando matemática”, no sentido de que a primeira não pode realizar-se sem a segunda, aqui não representam as mesmas ações. O que faz a diferença é, justamente, esse processo de “criação” em parceria com o aluno, pertinente somente à ação de matematizar, nos termos aqui definidos. Dessa forma, é possível ao professor em suas ações, conforme suas descrições, *Relacionar Matemática* e não *Matematizar*, não sendo possível *Matematizar* sem *Relacionar Matemática*.

3.1.4. Usando pesquisa

A pesquisa de informações, e de dados que concorram para estudar ou solucionar um problema proposto pela realidade, é de especial importância para o processo de Modelagem. Problemas de aplicação que retratam situações reais do dia a dia e que exigem o uso da Matemática para serem resolvidos, aqui definidos como situações-problema, em geral, são problemas que exigem pesquisa e levantamento de dados.

No processo de Modelagem a pesquisa se localiza, especialmente, no momento da *interação*, em que se identifica ou se constrói um problema a ser estudado e se faz a coleta de dados qualitativos e quantitativos, não necessariamente nessa ordem. É de posse desses dados e a partir deles, que se faz um *levantamento de hipóteses e conjecturas* gerando uma *seleção de variáveis* que concorrem para a escrita ou “*tradução*” da *situação-problema* para a linguagem matemática.

Pesquisa está sempre relacionada com dúvidas, questionamentos ou perguntas a partir das quais se procura saber algo, ou seja, está relacionada com *interesses determinados em um plano*, e nestes termos, também é possível localizar a pesquisa no momento da *validação*, no qual se lança questionamentos e dúvidas sobre as respostas obtidas como produto do processo de Modelagem, com vistas a verificar se são adequadas ou não à situação-problema que se quer resolver, promovendo-se uma análise crítica das respostas.

A pesquisa, sendo dessa forma parte inerente ao processo de Modelagem, corrobora para um dos comportamentos *típicos* do processo de Modelagem que aparece nas ações cotidianas dos professores.

... a gente estava trabalhando com grandes números ou com números que aparecem em revistas, então levei revistas e jornais para a sala de aula, pedi que eles folheassem e depois eles folheando lá com os amigos eles verificassem os números, (...) eles mesmos foram procurando (Ana)

Na hora que eu via que eles partiam pra pesquisa e voltavam com os resultados via que estavam se envolvendo... (Mike)

O *interesse determinado por um plano*, segundo Schutz e Luckmann (2009), elege os elementos abertos da situação que devem ser determinados com maior detalhe, ao mesmo tempo em que limita a explicitação da situação ao que é pertinente para dominá-la. Os elementos abertos da situação são determinados por meio do *acervo de conhecimento* atual, que podem conter elementos necessários, ou não, ao domínio da situação e, neste caso, devem-se adquirir novos elementos de conhecimentos ou tomar elementos velhos e elevá-los a um nível de clareza suficiente para dominar a situação.

Se entendermos pesquisa como um *interesse determinado por um plano*, os elementos abertos e a situação representam, respectivamente, o objeto e a questão de investigação. Além disso, o “adquirir novos elementos” guiado pela busca de respostas representa o movimento da pesquisa, desde o envolvimento do pesquisador com seu objeto e sua disponibilidade para mobilizar conhecimento, até a produção de “novos” conhecimentos, que alargam e enriquecem seu *acervo de conhecimento*.

A compreensão de que por meio da pesquisa o aluno começa a envolver-se com a situação-problema proposta, de que por meio desta o aluno toma para si o problema em pauta, constitui os *motivos porque* dos professores ao incorporarem a pesquisa em suas ações docentes, tendo em vista seus *motivos para* enriquecer as relações matemáticas que se afigurem, e desenvolver no aluno autonomia para buscar elementos que resolvam seus problemas, bem como criticar os resultados que obtém.

3.1.5. Utilizando tecnologia da informação

A utilização de recursos como computadores ou máquinas de calcular é de grande importância para o processo de Modelagem. Por meio da internet o modelador pode, de forma rápida, buscar dados e informações sobre a situação-problema que quer resolver ou compreender. Além disso, vários programas computacionais podem ser usados na matematização e na modelização dos dados, fazendo o trânsito entre o *mundo da vida* e o mundo da Matemática, pertinente ao processo de Modelagem.



Por seu turno, a máquina de calcular tem a capacidade de executar trabalhosos e extensos cálculos em poucos segundos, liberando mais tempo para o modelador em suas interpretações e análises sobre a situação-problema que tem em mãos. O uso do computador ou da máquina de calcular também confere maior precisão aos modelos ou resultados obtidos no processo de Modelagem.

Normalmente, esses recursos são usados por quem faz Modelagem, e os professores, ao desenvolverem experiências desse tipo, não fogem à regra. Deste modo, conhecer os recursos tecnológicos, seu uso e manuseio, são *saberes* mobilizados e desenvolvidos no contexto das experiências com Modelagem, que depois migram para situações cotidianas de ensino.

Os pais me questionam sobre o uso da máquina de calcular nas aulas, por que no tempo deles não podia. Mas eu explico que sobra mais tempo pro aluno pensar. (Viviane)

Eu procuro usar a informática e a internet, o aluno não tem muito interesse em estar folheando livro e com a internet a gente busca as coisas com mais facilidade...(José)

... quando eles chegam [no modelo de juros compostos] eu faço uso da calculadora que é pra eles verem o que está acontecendo quando eu estou mudando os parâmetros (...) em outra etapa eu já faço uso do laboratório usando software, em geral começo pelo geogebra que é mais simples e depois para o maple, que tem mais artifícios para eles entenderem limite ... quando eu vejo que eles já perceberam então a gente vai para os exercícios que são problemas que eles fazem no laboratório [de informática] ... (Beta)

Ter percebido as vantagens do uso de recursos tecnológicos para o ensino aprendizagem da Matemática, como o emprego do tempo útil da aula para interpretar, pensar, raciocinar, motivar a pesquisa e o envolvimento do aluno com o problema a ser resolvido e relacionar matemática, constituem-se nos *motivos porque* os professores incorporam recursos tecnológicos em suas aulas.

Segundo Schutz e Luckmann (2009), antes de tudo, elegemos os objetos e os processos do mundo ao nosso alcance, que se incorporam à execução de nossos planos como meios e fins, como limites e condições, com os quais nos familiarizamos somente na medida em que são necessários para dominar as situações. Além disso, a vida cotidiana nos concerne, ainda que não exclusivamente, o domínio de situações típicas e recorrentes.

Nesses termos, a familiaridade do professor com tecnologias da informação como meio necessário ao domínio das situações, no âmbito das experiências com Modelagem, leva-o a perceber que poderia usar de novo em situações tipicamente similares àquelas desenvolvidas no âmbito da Modelagem, agora na sala de aula. E como, segundo Schutz e Luckmann (2009), estar familiarizado com um objeto é o mesmo que conhecê-lo, é tê-lo integrado ao *acervo de conhecimento*, o professor incorporar recursos tecnológicos, em suas aulas, está relacionado com *saber* usar a tecnologia como recurso estratégico para o ensino e aprendizagem, aqui em especial, da Matemática.

3.1.6. Atuando como mediador

Em atividades de Modelagem, o professor perde o caráter de detentor e transmissor do saber, para ser entendido como aquele que está na condução ou mediação das atividades, em uma posição de parceiro do aluno. Atuar como mediador, diz respeito a fazer com que os próprios alunos desenvolvam as situações-problemas a partir da elaboração e testagem de hipóteses próprias, bem como descobrir seus erros e acertos.

O mediador coloca os alunos em situações que possam interpretar, explicar, justificar e avaliar as melhores soluções, o que implica, dentre outras coisas, saber ouvir os alunos, em suas interpretações, organizações e explorações e oferecer representações matemáticas úteis às ideias dos alunos, de modo que possam desenvolver suas próprias. Precisa também, para esse momento, que o professor domine seu ímpeto em interferir na resolução do aluno, repreendendo suas conjecturas ou “corrigindo” suas respostas.

Atuar como mediador é um comportamento *típico* do processo de Modelagem, que, depois do desenvolvimento de atividades dessa natureza, se torna também *típico* das aulas cotidianas dos professores participantes, conforme suas declarações.

Então vou conversando com eles até concluírem que uma matriz é uma tabela e depois defino e aplico em mais problemas. (...) agora temos data show na escola então posso mostrar exemplos, como tabelas de jogos. Procuro mostrar pra eles o que é linha o que é coluna, pra depois se chegar a uma definição. Me esforço para que eles concluam que uma matriz é uma tabela. (Nascimento)

... agora procuro deixar que os alunos tentem encontrar as respostas sozinhos, não dou respostas prontas e acabadas logo de imediato, sugiro que eles pensem de que forma poderiam solucionar a situação em questão, os incentivo para que pesquisem sobre o assunto que estamos estudando e a relação desse conteúdo com outras áreas, os oriento para que percebam aplicação da matemática no cotidiano. (Daniela)

A familiaridade se caracteriza pelo fato de que as novas experiências podem ser determinadas com a ajuda de um *tipo* constituído, em experiências anteriores, e esta determinação é útil para o domínio da situação (SCHUTZ; LUCKMANN, 2009). Logo, se o professor atua nas suas “novas” experiências de sala de aula conforme um comportamento *típico* de experiências anteriores, em especial de Modelagem, quer dizer que este professor familiarizou-se com esse comportamento, ou seja, aprendeu a ser mediador.

O professor somente consegue atuar como mediador, porque consegue estabelecer relações entre a “matemática escolar”, a matemática da situação-problema e as elaborações e conjecturas do aluno, bem como conseguir, em parceria com o aluno e matematizar as situações.

Essa estreita relação entre mediar, matematizar e relacionar matemáticas, revela um amálgama de saberes de natureza variada, que desenvolvidos a partir das experiências de Modelagem vivenciadas pelo professor, passam a integrar seu saber-fazer cotidiano.

3.2. Se motivando pela repercussão nos alunos

As experiências de Modelagem voltadas para o ensino da Matemática somente repercutem nas ações do professor, porque antes repercutem nas atitudes dos alunos, ou seja, os *motivos porque* os professores incorporam em suas práticas, saberes desenvolvidos nas experiências de Modelagem, originam-se nos *motivos porque* dos alunos, que os levam a agirem da forma que agem nas experiências de Modelagem, em especial, envolvendo-se de modo ativo com sua própria aprendizagem e formação.

Porque quando eu fiz a atividade durante o curso [de Modelagem] (...) eu vi que os alunos se interessaram ainda mais em trabalhar e o brincar, entre aspas, quando eles foram produzir, eles deram conta que estavam aprendendo matemática sem estar sentado copiando, escutando, então eles foram para a prática e me fizeram ver que só o blá blá blá do dia a dia, aquele cotidiano ele está meio defasado diante de uma metodologia dessa, e eu aprendo junto com os alunos, eu estou aprendendo outro jeito de trabalhar a matemática com meus alunos ... (Ana)

O que mais chamou minha atenção [nas experiências com Modelagem] foi a forma como eles se animam, se motivam para o estudo, não é uma aula daquele tipo conceito, exemplo, exercício. Eles viam que era uma coisa diferente, se animavam, reuniam os grupos, pesquisavam, eu acho que isso foi o que mais deu motivação pra continuar usando Modelagem. (Mike)

Segundo Schutz (1979d), uma ação é social quando envolve atitudes e ações de outras pessoas para as quais é orientada a ação em todo o seu curso, em outras palavras, se age com outros e para outros, motivado por outros e motivando-os. Na ação social, a reação do outro é o *motivo para* da ação a ser realizada.

Nesses termos, o professor, nas suas ações de sala de aula, ao agir em função dos alunos, sendo por eles motivado ao mesmo tempo em que os motiva, desenvolve ações de natureza social, cujos *motivos para* correspondem às reações dos alunos que cooperem com o ensino e suas respectivas necessidades de aprender Matemática, em especial. Conforme a *tese da reciprocidade dos motivos* de Schutz (1979d), se o aluno compreender a intenção do professor, respondendo às suas ações conforme este espera, os *motivos para* do professor se transforma no *motivo porque* do aluno.

Deste modo, no contexto da pesquisa, a finalidade em função da qual o professor incorpora características da Modelagem em suas práticas cotidianas, corresponde ao movimento das reações dos alunos das experiências de Modelagem, para o dia a dia da sala de aula de Matemática. Por outro lado, essa repercussão nas atitudes dos alunos passa a constituir o *motivo porque* os professores incorporam, na sua prática, características da Modelagem. Assim, fecha-se o ciclo da relação social, estabelecida entre professor e alunos, em que um age motivado pelos outros, motivando-os.

3.3. Questionando o tradicional

Nas entrelinhas das declarações dos professores é possível identificar o levantamento de questões quanto à pertinência do ensino da matemática, ainda muito presente nas salas de aula, organizado segundo a sequência definição, exemplo e exercícios, comumente chamado de tradicional.

... eu gostei muito dessa modelagem porque não fica só naquela mesmice (...) de passar assunto, exemplo, exercícios, a aula fica chata... (Alfredo)

... eu acho errado chegar e colocar no quadro logo o assunto e a definição, eu acho tipo assim, vou criar um monstro ... (Nascimento)

... eu não preciso fazer com que o aluno receba já receba aquela fórmula pronta ... (Daniela)

... o blá blá blá do dia a dia, aquele cotidiano ele está meio defasado diante de uma metodologia dessa... [Modelagem] (Ana)

Considerando pressuposto como “Algo que se toma como previamente estabelecido” (JAPIASSU; MARCONDES, 2008, p.225), pode-se dizer que o ensino tradicional da Matemática é um pressuposto da prática cotidiana dos professores, já que, é comumente praticado e condiz com a forma como a maioria deles foi ensinada.

O pressuposto é o âmbito do familiar e apresenta soluções para os problemas que se afiguram nas experiências que vivenciamos. Essas soluções constituem o *acervo de conhecimento*. Se uma nova experiência, em uma situação similar do *mundo da vida*, pode ser classificada sem contradição, em um tipo de experiência anterior, então se confirma a validade do *acervo de conhecimento* referente à experiência (SCHUTZ; LUCKMANN, 2009).

Mas, se ao contrário, a experiência atual não pode ser classificada em um esquema de referência *típico*, isto é, quando seus aspectos são incongruentes com os aspectos *típicos* de experiências e de soluções que temos em nosso *acervo de conhecimento*, então o que era pressuposto passa a ser questionado, interrompendo uma cadeia de evidências e o *mundo da vida* passa a exigir, por assim dizer, re-explicação da experiência com vistas a produzir soluções (SCHUTZ; LUCKMANN, 2009).

É dessa forma que os professores participantes evidenciam, em suas descrições, a forma como vivenciam o pressuposto ensino tradicional, que é tomado, a princípio, como dado à prática cotidiana. Sendo essa, uma prática típica ou familiar a professores de Matemática, estes possuem em seus respectivos *acervos de conhecimentos* soluções *típicas* para os problemas que se afiguram.

Entretanto, se as práticas típicas do ensino tradicional mostram-se insuficientes para alguns dos problemas que aparecem no cotidiano, tais como, motivar o aluno para aprender Matemática, conferir utilidade à matemática que se ensina e aprende na escola,

desenvolver no aluno atitudes que os levem a resolver, de forma autônoma, os problemas que possam lhe afigurar e, de um modo geral, educar para a vida por meio da Matemática, então os professores passam a questionar o ensino baseado em definição, exemplo, exercícios, ligando-se à Modelagem e elencando algumas características *típicas* deste processo, como soluções *típicas* para os problemas da prática cotidiana, incorporando-as em seus respectivos *acervos de conhecimentos*.

É assim que, segundo Schutz e Luckmann (2009), no cotidiano de nossas ações, tomamos consciência das deficiências de nosso *acervo de conhecimento*, quando uma nova experiência não se encaixa no que até o momento é considerado como esquema de referência pressuposto, ou seja, quando não pode ser resolvida rotineiramente com base em *conhecimento habitual*. Situações desse tipo pedem novos conhecimentos ou aprimoramento de antigos, de modo a ser dominada, conforme os interesses de um plano.

Nesses termos, se tomo consciência de lacunas em meus saberes, abre-se um caminho para o desenvolvimento de novos e, assim sendo, o professor ao questionar o ensino tradicional, ao duvidar de sua eficácia na solução de alguns problemas da prática que quer resolver, ao verificar que não apresenta saberes que resolva, rotineiramente, determinadas situações, mobiliza, ao mesmo tempo, em que desenvolve saberes, com vistas a dominar situações de seu interesse.

Mas, se primeiro é preciso consciência das lacunas do *acervo de conhecimento* para o desenvolvimento de novos saberes, então para que o professor incorpore características da Modelagem na prática cotidiana, antes, precisa perceber suas próprias insatisfações no ensino tradicional que pratica. Isso confere ao professor que se interessa por Modelagem uma *tipicidade* de postura que corresponde a *saber-ser* questionador do trabalho que faz, bem como de suas repercussões, numa perspectiva de buscar soluções que aprimorem o seu *saber-fazer*, no sentido de trazer melhoras aos resultados do processo de ensino e aprendizagem.

3.4. Percebendo repercussões nos saberes

Segundo Schutz e Luckmann (2009), todo momento da vida é uma *situação* que se *articula biograficamente*, significando, em especial, que se tem mais ou menos conhecimento de que ela é resultado de situações anteriores. Neste sentido, das descrições dos professores, é possível apreender que eles percebem a *articulação biográfica* de suas situações atuais de ensino, ou seja, que suas práticas diferenciadas atuais são resultado de situações anteriores nas quais vivenciou experiências de Modelagem.



... depois da Modelagem eu enxergo as coisas melhores, eu enxergo as relações [matemáticas] e agora fica mais fácil pra explicar pro aluno (...) eu explorava demonstração, ia demonstrando e não fazia sentido, hoje as demonstrações por mais abstratas que sejam eu já tento dar o sentido concreto tanto pra mim quanto pro aluno, mesmo que dentro da própria matemática. (Beta)

Eu acredito que todas essas práticas diferenciadas que desenvolvo são herança da Modelagem. Acho interessante que se você vai utilizar material concreto nessa aula aqui de geometria, o processo todinho da utilização é da modelagem, você não quer admitir “-ah, eu não estou fazendo modelagem!”, mas vou pedir pros alunos identificarem as formas geométricas na escola, aí eles batem foto e tal e voltam pra sala de aula com aquela coleta e mostram as fotos, identificam as formas, constroem e acaba sendo, porque eles trabalham em grupos, eles discutem e levantam os problemas, (...) não é de fato modelagem mas tem característica do processo, e hoje eu já consigo identificar que tem características sim, não é todo é claro, pra ser modelagem tem que cumprir todas aquelas etapas (Viviane)

O *acervo de conhecimento* se ergue sobre sedimentações de experiências anteriores presentes e vinculadas às situações. Por outro lado, toda experiência se insere no fluir das vivências do indivíduo, segundo um conjunto de *tipos* e *relevâncias* que se encontram no *acervo de conhecimento*. E por fim, cada *situação* é definida e dominada com ajuda do *acervo de conhecimento*, que assim se vincula à *situação* (SCHUTZ; LUCKMANN, 2009).

Nesses termos, para interpretar suas práticas diferenciadas atuais, como resultado de situações anteriores, os professores utilizam seus respectivos *acervos de conhecimento*. É a sedimentação de experiências anteriores, no caso com Modelagem e de sala de aula, referentes à prática docente e as relações que aí se estabelecem, que, organizadas em estruturas de sentidos e significados segundo sua *relevância* e *tipicidade*, levam o professor a explicar as mudanças atuais ocorridas como repercussões das experiências de Modelagem.

É partindo de seu *acervo de conhecimento*, que o professor pode vivenciar, retrospectivamente, sua aula, antes da Modelagem, interpretar suas experiências de Modelagem, bem como o que daí adquiriu em termos de saberes, que depois, nas situações atuais, mobiliza para ensinar.

3.5. Características de Modelagem em práticas anteriores

Das descrições dos professores mestres, participantes da pesquisa, foi possível apreender que eles não só percebem as repercussões das experiências com Modelagem em seus saberes, como, após maior aprofundamento teórico sobre o tema ocorrido por ocasião do mestrado, também percebem a presença do uso de características da Modelagem em suas respectivas práticas docentes, antes da primeira “experiência consciente” de Modelagem.

Na verdade minha primeira experiência de Modelagem eu acho que aconteceu bem antes de eu conhecer Modelagem Matemática, assim refletindo sobre algumas aulas aí eu percebi que

naquele momento eu devo ter usado Modelagem, (...) agora conscientemente, com toda segurança, consciente que era ... que me propus a fazer tudo, com todas as etapas, foi pra coletar os dados da pesquisa de mestrado que aí eu já peguei uma turma de cálculo já predeterminada a fazer todo o processo com todas as etapas. (Beta)

No mestrado foi minha primeira experiência com Modelagem vamos dizer assim consciente, até então eu só fui perceber que já tinha feito alguma coisa de Modelagem quando eu comecei a ler sobre modelagem e a minha primeira experiência que eu vou chamar de experiência consciente quando eu realizei sabendo o que queria que foi durante a pesquisa de mestrado (José)

Segundo Schutz (1979a), o *acervo de conhecimento* existe num fluxo contínuo e muda, em extensão e estrutura, de qualquer *Agora* para o seguinte e, nesses termos, fica claro que qualquer experiência posterior alarga e enriquece o estoque de conhecimento de cada um.

No caso, foi o enriquecimento e alargamento do *acervo de conhecimento* desses professores, por conta do desenvolvimento de saberes, no *Agora* determinado pelo mestrado, em especial pelos estudos acerca da pesquisa em Modelagem, que lhes possibilitou interpretar a primeira experiência “consciente” de Modelagem, como familiar no modo similar à outra já vivenciada, em algumas de suas características, ou no mínimo, que características da Modelagem já vinham sendo por eles utilizadas.

As descrições de experiências docentes, com características de Modelagem em práticas anteriores, indicam que esses professores já se interessavam por situações diferenciadas de ensino, revelando profissionais que buscam pelo desenvolvimento profissional, que buscam constantemente desenvolver *saberes* que alargam e enriquecem seus respectivos *acervos de conhecimento*.

Para professores com esse perfil, cujos *motivos para*, referem-se aprender para ensinar cada vez melhor, as experiências com Modelagem repercutem em práticas cotidianas que se distanciam cada vez mais de práticas tradicionais de ensino. O que revela o potencial do envolvimento com experiências com Modelagem, para o desenvolvimento contínuo e aprimorado da prática docente, revelando suas repercussões.

4. Em síntese

A primeira coisa que se tem a destacar sobre como os professores percebem as repercussões de seu envolvimento com experiências de Modelagem Matemática é que, de fato, as repercussões são percebidas por estes. Por meio de suas descrições, os professores dão indícios de que compreendem que as mudanças em suas práticas docentes, após envolvimento com Modelagem, devem-se ao que vivenciaram nessas experiências.

As repercussões do envolvimento dos professores com experiências de Modelagem, de um modo geral, resumem-se na incorporação de características desse processo em



situações de ensino na prática cotidiana. Mas, conforme preveem Schutz e Luckmann (2009) para as situações de aquisição do conhecimento, as experiências de Modelagem somente foram capazes de desenvolver saberes nos professores, porque antes essas experiências se revelaram problemáticas.

Antes, nas experiências de Modelagem, os professores se viram em situações para as quais não tinham soluções em seu *acervo*, como relacionar matemática para traduzir ou organizar situações-problema, provenientes do cotidiano ou de outras áreas do conhecimento; utilizar e relacionar conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos com vistas a desenvolver o processo de matematização; fazer pesquisa de dados ou informações necessárias ao processo de Modelagem e lançar questionamentos e dúvidas sobre o produto do processo para verificar sua adequabilidade à situação-problema; usar tecnologia da informação como recurso do processo de Modelagem; por fim, desenvolver o processo em sala de aula, em especial, porque precisavam atuar como mediador.

Outras situações problemáticas, oriundas da prática docente, também se mostraram favoráveis à aquisição do conhecimento nas experiências com Modelagem, ou às suas *repercussões*, a exemplo de quando o professor questiona o ensino tradicional da Matemática, e quando percebe as repercussões das experiências de Modelagem, nas atitudes dos alunos.

As soluções encontradas pelos professores, para os problemas de sala de aula, dizem respeito à incorporação de algumas características *típicas* do processo de Modelagem, na prática cotidiana, quando não estiverem fazendo Modelagem, propriamente dita.

Logo, foram as experiências com Modelagem que revelaram respostas ou soluções aos problemas que os professores enfrentavam na prática. Foram nas experiências com Modelagem que os professores desenvolveram *saberes* que depois foram mobilizados e utilizados nas situações de sala de aula, revelando com isso, o movimento das experiências de Modelagem para a sala de aula.

Dessa forma, estar motivado, pragmaticamente, na busca de soluções para alguns problemas que encontra no cotidiano de sala de aula, para os quais as estratégias na perspectiva do ensino tradicional se mostram insuficientes, e perceber que os alunos passam a atuar de forma interessada e participativa, no processo de ensino aprendizagem, formam as condições favoráveis para que as experiências de Modelagem repercutam nas ações docentes.

Os resultados também evidenciaram que os professores, pós-envolvimento com experiências de Modelagem, embora em suas aulas não façam uso regular desse processo, incorporam algumas de suas características na prática cotidiana conforme sejam interessantes ao domínio de situações problemáticas, revelando desenvolvimento de *saberes* e potencialidades da Modelagem no desenvolvimento profissional do professor.



5. Considerações Finais

Com vistas a contribuir com as compreensões já evidenciadas na literatura em Modelagem Matemática, em termos de formação do professor e seu envolvimento com experiências de Modelagem, confronto os resultados apresentados aqui, com aqueles apresentados em Roma (2002), Dias (2005) e Silva (2009), a partir de suas pesquisas desenvolvidas com professores em formação continuada atuantes na Educação Básica, que, assim sendo, puderam descrever para os pesquisadores, ou dar indícios de que houve repercussões de seus envolvimento com experiências de Modelagem.

Segundo Roma (2002, p.187), os professores em suas aulas, após envolvimento com experiências de Modelagem, “trazem para dentro da escola a realidade do educando, a sua vivência, o seu dia a dia, interligando essa realidade aos conteúdos [escolares]”. Além disso, usam tecnologias da informação e outras estratégias metodológicas para motivar o aluno e favorecer o processo de ensino e aprendizagem, o que, conforme as considerações aqui tecidas, pode ser traduzido em incorporar características do processo de Modelagem na prática docente, por meio de relações da matemática, da organização do ensino a partir de situações problema do dia a dia e do uso de tecnologias da informação.

A partir das descrições dos professores participantes de sua pesquisa, Roma (2002, p.177, 186) infere que as apreciações mais significativas revelam “uma mudança de atitude do professor em sala de aula, onde a criatividade, a diversidade, a participação e o envolvimento do educando se fazem presentes”. Um desses professores coloca seu envolvimento com experiências de Modelagem, realizadas no curso de formação, como um divisor de sua vida profissional, já que após esse envolvimento, “mesmo quando não tem possibilidade de trabalhar com Modelagem, sente que suas aulas ‘tradicionais’ possuem uma nova organização”. Além disso, os professores foram unânimes ao afirmarem que o curso de formação em Modelagem “foi essencial para a carreira e prática docente” de cada um. Ou seja, os professores de Roma (2002) não somente incorporam característica do processo de Modelagem, como também percebem as repercussões de suas experiências com Modelagem em seus saberes docentes, porque fica claro que as mudanças ocorridas na prática deve-se ao que vivenciaram nessas experiências.

No caso de Dias (2005, p.78), como seu trabalho visou analisar o envolvimento de um grupo de professores em um programa de formação que sugere a Modelagem Matemática como alternativa de ensino e aprendizagem, não faz qualquer inferência sobre as repercussões desse envolvimento na prática docente. Mesmo porque, segundo a autora, inferir a partir de seus achados acerca do envolvimento desses professores no programa de formação em Modelagem, se estes efetivaram ou não mudança em suas práticas, seria uma “tarefa pretensiosa”.



Com isso, tece apenas algumas considerações. Segundo Dias (2005, p.79), o que representou, em termos do desenvolvimento profissional, o envolvimento dos professores com Modelagem Matemática, contribuiu para que eles pensassem a respeito de seu desenvolvimento profissional e para desenvolverem novos entendimentos sobre Matemática e seu ensino, o que “pode ter impacto na prática de sala de aula”. Logo, a autora, a partir de seus achados na pesquisa, elabora uma hipótese de que pode haver repercussões nos saberes docentes de professores que se envolvem com experiências de Modelagem.

No trabalho de Silva (2009, p.126-127) que objetivou investigar quais concepções de professores de Matemática, que estão em formação continuada, tem sobre Modelagem, também não foi localizada qualquer inferência do autor acerca das repercussões das experiências com Modelagem desenvolvidas pelos professores em suas práticas docentes, entretanto, quando o pesquisador, em entrevista, pergunta aos professores se “A Modelagem Matemática mudou sua ideia de ensino da Matemática?”, as respostas trazem indícios dessas repercussões.

PA: - Mudou ... pois antes via a matemática como uma ciência pronta, e para aprender e ensinar matemática, tinha que absorver as informações encontradas nos livros ou em aulas e depois transcrevê-las ... e não acreditava no processo de construção. Agora, vejo a matemática algo possível para a construção do conhecimento e de relação com as coisas do dia a dia.

PB: - Sem dúvida, pois antigamente transmitia conteúdos hierarquizados. Hoje não tem essa forma de ensinar conteúdos de uma só vez, e a modelagem cria esse clima sem a necessidade de seguir a ordem dos conteúdos. Isso torna desafiador para o professor...

PC: - É assim ... não é que mudou, eu sempre tive aquela ideia da matemática contextualizada uma matemática aplicada, eu acho que firmou essa ideia de que a matemática pode ser ensinada de uma forma mais aplicativa, e a modelagem matemática, eu acho, que ajuda e afirma isso de trabalhar a matemática de uma forma interessante.

Se partirmos do pressuposto que o modo como as pessoas veem as situações, interfere na forma como atuam nessas situações, então PA (professor A) ao ver a Matemática como um conhecimento que pode ser construído e ainda ser relacionado com coisas do dia a dia, oferece indícios de que poderá em suas aulas relacionar matemática e matematizar, nos termos aqui definidos, e ainda atuar como mediador.

PB (professor B) dá indícios de que pode organizar o ensino sem necessariamente seguir a ordem estipulada no planejamento, conforme, normalmente, é proposto pelas escolas, que, ao contrário, o ensino pode ser organizado a partir da Matemática necessária à resolução do problema, conforme ocorre no processo de Modelagem. Revela, com isso, que percebe as relações internas da matemática escolar e como em uma situação de ensino e aprendizagem, elas podem ser trabalhadas nas relações com a matemática do dia a dia.

PC (professor C) revela claramente que seu envolvimento com a Modelagem repercutiu no aprimoramento de seus saberes docentes relacionados com o ensino da Matemática por meio de aplicações.

Assim, ao verificar como as inferências produzidas aqui nesta pesquisa se comportam frente aos dados e resultados apontados por Roma (2002), Dias (2005) e Silva (2009) em suas pesquisas, entendo que a Modelagem não é somente um meio de ensinar e aprender Matemática, mas também é um meio de desenvolvimento de saberes docentes e, dessa forma, vai “sempre” ocorrer alguma repercussão no saber fazer de professores que se envolvem com experiências de Modelagem.

Referências

- BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2003.
- BASSANEZI, C. B. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2002.
- BLUM W.; FERRI, R.B. Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 2009, Vol. 1, No. 1, 45-58. Blumenau: FURB, 2009. Disponível em:
< <http://proxy.furb.br/ojs/index.php/modelling/issue/view/163> >
- CAPALBO, C. *Metodologia das ciências sociais: a fenomenologia de Alfred Schütz*. 2.ed. Londrina: Ed. UEL, 1998.
- CHARLOT, B. *Da Relação com o Saber: Elementos para uma teoria*. Porto Alegre: Artmed Editora, 2000.
- CHARMAZ, K. *A construção da teoria fundamentada: guia prático para análise qualitativa*. Porto Alegre: Artmed, 2009.
- CHAVES, M.I.A.; ESPÍRITO SANTO, A. O. Possibilidades para Modelagem Matemática na sala de aula. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. e BISOGNIN, E. (Org.) *Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática*, Londrina: EDUEL, 2011, p. 161-179.
- DIAS, M. R. *Uma Experiência com Modelagem Matemática na Formação Continuada de Professores*. 2005. 121p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Paraná: 2005.
- FERREIRA, A. B. H. *Novo dicionário da língua portuguesa*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, s/d.
- GAUTHIER, C. et al. *Por uma teoria da Pedagogia: pesquisas contemporâneas sobre o saber docente*. Ijuí: Editora UNIJUI, 1998.



JAPIASSU, H. ; MARCONDES, D. *Dicionário básico de filosofia*, 5.ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2008. 309 p.

MAAß, K. What are modelling competencies? *ZDM. Zentralblatt für Didaktik der Mathematics*, v. 38, n.2, p. 113-142, 2006.

ROMA, J. E. *O curso de especialização em Educação Matemática da PUC- Campinas: Reflexos na prática pedagógica dos egressos*. 2002. 208p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de Campinas, São Paulo: 2002.

SCHUTZ, A. *El problema da realidade social*. Buenos Aires: Amorrortu, 1974.

_____. Bases da fenomenologia. In: WAGNER, H. (Org). (1979) *Fenomenologia e relações sociais: textos escolhidos de Alfred Schütz*. Rio de janeiro: Zahar, 1979a.

_____. Ação no mundo da vida. In: WAGNER, H. (Org). (1979) *Fenomenologia e relações sociais: textos escolhidos de Alfred Schütz*. Rio de janeiro: Zahar, 1979b.

_____. O cenário cognitivo do mundo vida. In: WAGNER, H. (Org). (1979) *Fenomenologia e relações sociais: textos escolhidos de Alfred Schütz*. Rio de janeiro: Zahar, 1979c.

_____. O mundo das relações sociais. In: WAGNER, H. (Org). (1979) *Fenomenologia e relações sociais: textos escolhidos de Alfred Schütz*. Rio de janeiro: Zahar, 1979d.

SCHUTZ, A; LUCKMANN, T. *Las estructuras del mundo de la vida* – 1ª ed., 2ª reimp. Buenos Aires: Amorrortu, 2009.

SILVA, M. N da *Modelagem Matemática na formação continuada: análise da concepção dos professores em um curso de especialização*. 2009. 160p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo: 2009.

STRAUSS, A.; CORBIN, J. *Pesquisa Qualitativa: técnicas e procedimentos para o desenvolvimento da teoria fundamentada*. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.

TARDIF, M. *Saberes docentes e formação profissional*. 6. ed. Petrópolis (RJ): Editora Vozes, 2006.

Maria Isaura de Albuquerque Chaves
Universidade Federal do Pará – UFPA – Brasil

E-mail: isaura@ufpa.br; isaurachaves09@gmail.com



TENSÕES NO PROCESSO DE ANÁLISE DE MODELOS EM UM CURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

TENSIONS IN THE PROCESS OF MODEL ANALYSIS ON A CALCULATION COURSE DIFFERENTIAL AND INTEGRAL

Débora da Silva Soares¹⁴

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Daise Lago Pereira Souto¹⁵

Universidade do Estado de Mato Grosso

Resumo

O objetivo desse artigo é analisar as contradições internas emergentes do trabalho de estudantes com uma proposta pedagógica voltada para o ensino de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) baseada na Análise de Modelos e no uso de tecnologias digitais. A proposta foi desenvolvida com estudantes de graduação em Biologia, cursando a disciplina Matemática Aplicada, cuja ementa inclui o estudo de funções, noções de limites, derivadas e integrais, e suas aplicações. A ideia central da proposta pedagógica é desenvolver alguns dos conceitos de CDI de forma inter-relacionada com a análise de um modelo matemático para um fenômeno biológico. Tomando como pressupostos teóricos o construto teórico seres-humanos-com-mídias (BORBA; VILLARREAL, 2005) e a Teoria da Atividade (ENGESTRÖM, 2001), e com base na análise de extratos de entrevistas realizadas com os estudantes, observamos que a proposta pedagógica constituiu-se na própria fonte de uma contradição interna história e estrutural, assim como foi elemento chave para sua superação.

Palavras-chave: Análise de Modelos. Tecnologias Digitais. Teoria da Atividade. Seres-humanos-com-mídias.

Abstract

The aim of this paper is to analyze the internal contradictions that emerge from students' work with a teaching approach developed to the teaching and learning of Differential Calculus, based on Model Analysis and on the use of digital technologies. The teaching approach was developed with Biology major students taking the discipline Applied Mathematics, whose syllabus includes the study of functions, notions of limits, derivatives and integrals, and their applications. The central idea of the teaching approach is to develop some of Calculus concepts in a way interrelated with

¹⁴ Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, SP, Brasil. Docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Departamento de Matemática Pura e Aplicada, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, RS, Brasil. Membro Associado do GPIMEM. Endereço para correspondência: Av. Bento Gonçalves, 9500, Prédio 43-111, Agronomia, CEP: 91509-900, Porto Alegre, RS, Brasil. Email: debora.soares@ufrgs.br.

¹⁵ Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, SP, Brasil. Docente da Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT), MT, Brasil. Membro do GPIMEM. Endereço para correspondência: Rua. A S/N – Bairro São Raimundo, Departamento de Matemática, CEP: 78390-000, Barra do Bugres, MT, Brasil. Email: daise@unemat.br.



the analysis of a mathematical model for a biological phenomenon. Based on the theoretical construct humans-with-media (BORBA; VILLARREAL, 2005) and on the Activity Theory (ENGESTRÖM, 2001), and analyzing excerpts from interviews developed with the students, we observed that the teaching approach constituted itself in the source of a historical and structural internal contradiction, and it was a key element to overcome this contraction.

Keywords: Model Analysis. Digital Technologies. Activity Theory. Humans-with-media.

1 Introdução

O ensino de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) ainda hoje é um desafio, tanto para a graduação em Matemática como para cursos em que a matemática é uma disciplina de serviço (HOWSON et. al, 1988). A presença do Cálculo nesses cursos justifica-se pelo entendimento de que seus conceitos são relevantes enquanto base teórica e também podem servir de base para a elaboração de modelos matemáticos que representem fenômenos de outras áreas (FRANCHI, 1995). Nesse sentido, consideramos importante que os estudantes compreendam as possíveis relações que podem ser estabelecidas entre a Matemática e sua área de interesse, assim como reflitam criticamente sobre potencialidades e limitações que essa ciência oferece para a análise de fenômenos diversos. Além disso, há um aspecto relacionado à atitude dos estudantes para com a matemática e, em particular, para com o Cálculo que, em geral, apresenta traços de medo, angústia e incompreensão da possível relevância da disciplina para sua área de interesse.

Um possível caminho para atender essas demandas é o trabalho com a Modelagem Matemática. Em Borba, Meneghetti e Hermini (1997) e Malheiros (2004), por exemplo, é possível encontrar o estudo de projetos de modelagem desenvolvidos por estudantes de um curso de graduação em Biologia. Esses estudos discutem alguns aspectos atrelados à elaboração desses projetos, como a reflexão crítica sobre o tema em investigação e sobre a matemática utilizada para modelá-lo; os processos de interpretação; o uso de conteúdos aprendidos na disciplina de Cálculo para a elaboração dos modelos; a necessidade de buscar novos conteúdos matemáticos que os permitam alcançar seus objetivos; o uso de tecnologias digitais para realizar experimentações; o uso de conhecimento biológico para interpretar e avaliar os resultados obtidos a partir do modelo matemático. Outros trabalhos, como os de Ferruzzi (2003) e Almeida et al. (2007), apresentam exemplos de situações de modelagem propostas em disciplinas de Cálculo. Já Araújo (2002) apresenta as discussões de estudantes de Engenharia cursando a disciplina de Cálculo ao desenvolverem um projeto de modelagem, e destaca a potencialidade de trabalhos como esse serem espaços para o desenvolvimento de reflexões vinculadas à Educação Matemática Crítica. De modo geral, esses autores concordam que o desenvolvimento de projetos de modelagem pode contribuir para que os estudantes estabeleçam conexões entre a Matemática e outras áreas científica.

Com o intuito de oportunizar um ambiente de aprendizagem que ofereça reflexões dessa natureza, Soares (2012) elaborou uma abordagem pedagógica voltada para estudantes de um curso de graduação em Biologia (Unesp, Rio Claro, SP), cuja ideia central era propor a análise de um modelo matemático para um fenômeno biológico, de forma interligada com o desenvolvimento de alguns dos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, em particular, funções, derivadas e máximos e mínimos. Estamos considerando “modelo matemático” na perspectiva de Bassanezi (2009, p.20, ênfase do autor): “Chamaremos simplesmente de *Modelo Matemático* um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representem de alguma forma o objeto estudado”. A proposta foi constituída por um conjunto de situações que guiou o trabalho dos estudantes¹⁶, as quais tiveram como objetivos: compreender as informações fornecidas pelas equações do modelo; analisar as hipóteses do modelo e refletir sobre suas limitações; compreender a natureza funcional das soluções do modelo; analisar o comportamento de suas soluções e a influência dos parâmetros nesse comportamento; compreender o conceito de derivada, tanto como taxa de variação instantânea quanto como inclinação da reta tangente, e refletir sobre que informações esse conceito fornece sobre o fenômeno; estudar o conceito de máximo e mínimo e sua relação com o fenômeno e o modelo matemático.

O fenômeno biológico escolhido para o trabalho dos estudantes foi o de transmissão da malária, uma doença ainda presente em várias regiões do mundo, em particular na Região Norte do Brasil. A malária é causada por um parasita do gênero *Plasmodium*, o qual é transmitido ao ser humano por meio da picada da fêmea de mosquitos do gênero *Anopheles*. O modelo matemático estudado foi o de Ross-Macdonald (Fig.1), o qual é um sistema de duas equações diferenciais ordinárias (EDO) não lineares, que procura descrever de que forma as populações de mosquitos e pessoas infectados evoluem ao longo do tempo¹⁷. Dentre as várias hipóteses que embasam o modelo destacamos três: a desconsideração do período de incubação; a suposição de que, uma vez infectado, o mosquito assim permanece até sua morte; e a desconsideração da mortalidade em humanos causada pela doença.

$$\frac{dX}{dt} = \left(\frac{a}{N} \times p \right) \times Y \times (N - X) - g \times X$$

$$\frac{dY}{dt} = \left(\frac{a}{N} \times c \right) \times X \times (M - Y) - v \times Y$$

Figura 1 - Modelo de Ross-Macdonald para a transmissão da malária.

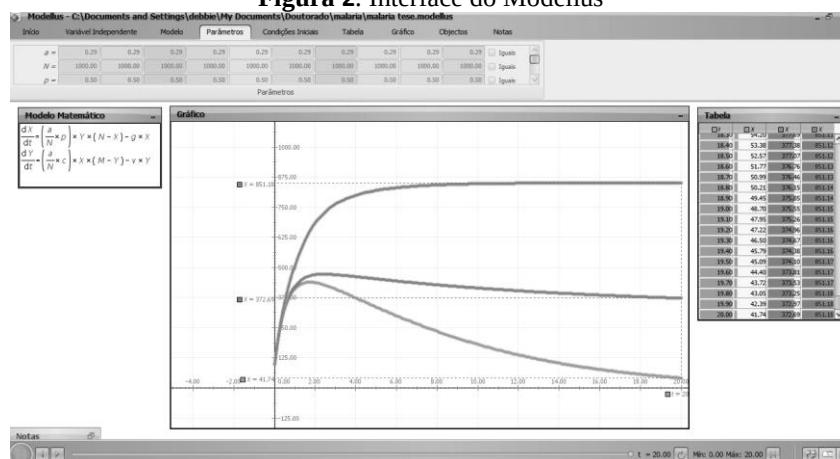
¹⁶ Mais detalhes sobre a proposta podem ser encontrados em Soares (2012) e em Soares e Borba (2011).

¹⁷ Para mais detalhes sobre o modelo matemático veja Soares (2012).



A opção por um modelo envolvendo EDO justifica-se por ser um conteúdo que integra os conceitos de função, derivada e integral. Além disso, considerou-se importante escolher um fenômeno com o qual os estudantes pudessem vir a trabalhar enquanto futuros biólogos, com o intuito de promover um debate que pudesse explicitar possíveis relações entre as duas áreas científicas. Ainda, um aspecto fundamental da proposta, é que os estudantes trabalhassem durante todo o semestre com o software Modellus¹⁸, que permite o estudo de modelos envolvendo funções, equações a diferenças finitas, e equações diferenciais ordinárias. Trabalhando com o software, os estudantes tiveram acesso a representações gráficas e tabulares das soluções do modelo e refletiram sobre as situações propostas. Dentre as possibilidades oferecidas pelo software estão: visualizar as soluções enquanto gráficos de funções, modificar os valores dos parâmetros do modelo e observar o reflexo dessa modificação no comportamento das soluções (Fig.2).

Figura 2. Interface do Modellus



Fonte: Elaboração própria.

Tendo em vista as considerações feitas, o objetivo desse artigo é identificar tensões (contradições internas) que emergem durante o trabalho com uma abordagem pedagógica que procura propiciar uma integração entre a Matemática e a Biologia, área de interesse dos estudantes. O conceito de “contradições internas” é oriundo da Teoria da Atividade (Engeström, 2001), que apresentaremos em mais detalhes na sequência do artigo. Antes, no entanto, discorreremos a respeito do nosso entendimento sobre Análise de Modelos.

¹⁸ Site: <www.modellus.fct.unl.pt/>. Acesso em: 05 Jun. 2014.



2. Análise de Modelos

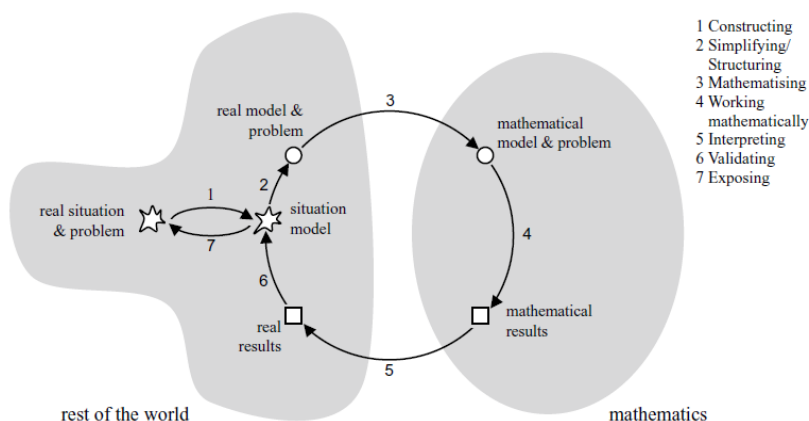
Conforme comentamos na introdução desse artigo, a ideia central da proposta pedagógica é propor o desenvolvimento de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral de forma inter-relacionada com a análise de um modelo matemático para um fenômeno biológico, no caso, a transmissão da malária. Em Soares (2012), Javaroni e Soares (2012), e Soares e Javaroni (2013), discutimos algumas ideias a respeito de relações que podem ser estabelecidas entre esse tipo de abordagem, que denominamos de Análise de Modelos, e a Modelagem Matemática enquanto abordagem pedagógica. A Modelagem¹⁹ já possui tradição na área de Educação Matemática e vários autores discutem suas potencialidades e limitações enquanto estratégia pedagógica no ensino e aprendizagem da Matemática (BASSANEZI, 2009; ALMEIDA et al., 2011; BIEMBENGUT; HEIN, 2007; MEYER et al., 2011).

A literatura em Modelagem na Educação Matemática é bastante variada e apresenta essa tendência sob diferentes vieses ou perspectivas, que se diferenciam em aspectos como a responsabilidade pela escolha do tema e a ênfase no modelo matemático, entre outros. Apesar dessa diversidade, uma característica permeia quase todas as perspectivas, a saber: a elaboração, por parte do estudante, de um modelo matemático para resolver/analisar/representar determinada situação problema oriunda de um tema relacionado ao cotidiano do estudante e/ou de sua comunidade, ou relacionado a outras áreas científicas. Desenvolvendo uma série de encaminhamentos, seguidamente estudados por pesquisadores e organizados em esquemas representativos (BLUM; LEIß, 2007; DOERR; PRATT, 2008), os estudantes desenvolvem o que se chama de um ciclo de modelagem.

A imagem a seguir (Fig. 3) apresenta o ciclo de modelagem sugerido por Blum e Leiß (2007). É possível verificar que o ciclo inicia com uma situação problema real; segue com a elaboração de um modelo para a situação problema, que considera hipóteses e simplificações da mesma; continua com a construção de um modelo matemático, sua resolução e interpretação das soluções em termos da situação problema; finaliza com a validação do modelo. Apesar do aparente caráter linear do esquema, em geral os autores afirmam que as etapas de um ciclo de modelagem não são lineares. De fato, não seria necessário iniciar um ciclo pela situação problema. Conforme afirmam Blomhøj e Kjeldsen (2011), um ciclo de modelagem poderia ser iniciado pelo modelo matemático. Em seu artigo, os autores trazem como exemplo um trabalho desenvolvido com estudantes da Universidade de Roskilde, em que iniciaram com um modelo matemático e o reconstruíram.

¹⁹ Com o intuito de evitarmos repetições, usaremos Modelagem como sinônimo de Modelagem Matemática.

Figura 3. Ciclo de Modelagem sugerido por Blum e Leiß(2007).



Fonte: Blum e Leiß (2007).

Argumentos e considerações como esses abrem possibilidades para diferentes maneiras de trabalho com modelos matemáticos em sala de aula e, além disso, permitem o estabelecimento de relações com a Modelagem. A Análise de Modelos é um exemplo disso. Do mesmo modo como no exemplo de Blomhøj e Kjeldsen (2011), na Análise de Modelos os estudantes partem de um modelo matemático já existente para determinado fenômeno. A partir daí eles buscam compreender suas hipóteses, suas equações e a descrição que faz do fenômeno estudado. Em seguida, eles procuram compreender as soluções desse modelo, seu comportamento e que informações esse comportamento traz sobre a evolução do fenômeno, e a influência dos parâmetros nesse comportamento. Aliado a isso, está o desenvolvimento de conceitos matemáticos subjacentes.

Tomando o ciclo de modelagem da Fig.3 como referência, é possível perceber que no trabalho com a Análise de Modelos não se desenvolve um ciclo completo de modelagem. Para isso, ter-se-ia que reconstruir o modelo, como proposto por Blomhøj e Kjeldsen (2011). Essa é, de fato, uma possibilidade, a qual permitiria uma integração direta entre Análise de Modelos e Modelagem. Conforme apontado em Soares (2012), a discussão das limitações do modelo matemático estudado seria um ponto de partida interessante para que os estudantes construíssem seu próprio modelo matemático, adaptando o modelo estudado conforme suas exigências. Nesse caso, ter-se-ia a construção de um “novo” modelo pelo estudante.

No trabalho desenvolvido com os estudantes de Biologia, fonte de dados para esse artigo, não se propôs a reconstrução do modelo matemático; os estudantes realizaram uma análise semelhante à que foi descrita acima. Nesse caso, o que podemos observar, ainda tomando a Fig.3 como referência, é que há uma ênfase no processo de análise do modelo matemático e de suas soluções, assim como sua interpretação em termos do fenômeno. Também há uma ênfase na análise e discussão das hipóteses do modelo, sua influência no comportamento das soluções, e reflexões críticas sobre possíveis limitações e contribuições

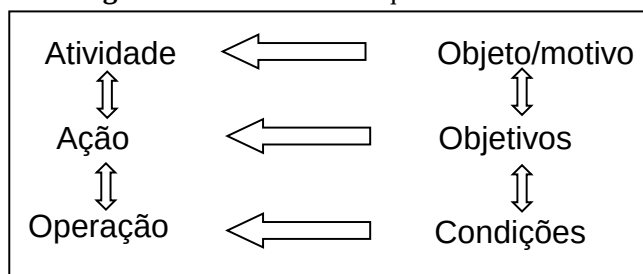
do modelo. A Análise de Modelos, portanto, pode ser relacionada com a Modelagem e traz uma maneira distinta de trabalho com modelos em sala de aula.

3. Aspectos Teóricos

Tendo esclarecido nosso entendimento sobre Análise de Modelos, passamos agora a considerar o conceito de “tensões”. Quando nos reportamos às contradições internas (ou tensões) estamos nos referindo aos princípios de uma das vertentes da Teoria da Atividade, especificamente aos estudos desenvolvidos por Engeström. Essa teoria tem origem nos trabalhos da escola histórico-cultural da psicologia soviética, e considera a atividade como a unidade básica do desenvolvimento humano (SOUTO; ARAÚJO, 2013). Seu desenvolvimento se deu a partir das contribuições de Vygotsky, Leontiev e Luria nas primeiras décadas do século XX, e seu embasamento filosófico está alicerçado nas ideias de Karl Marx e Friedrich Engels. A Teoria da Atividade pode ser entendida como uma teoria em constante mutação, uma vez que seus conceitos e ideias estão em constante debate, com o intuito de refiná-los e aprimorá-los (KAPTELININ, 2005).

Como mencionado anteriormente, nesse artigo, tomaremos como base as conceituações apresentadas por Engeström (1987, 1999, 2001). Esse autor se apoia em algumas teorizações de Leontiev (1978), como por exemplo, a ideia de uma estrutura hierárquica para explicar a atividade, a qual está representada na Figura 4.

Figura 4. Estrutura hierárquica da atividade



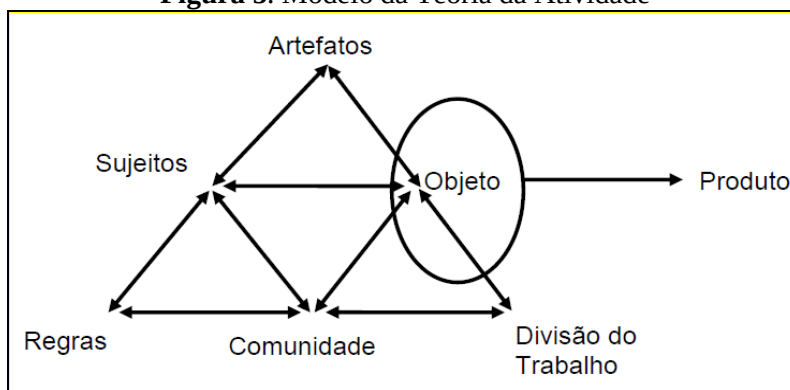
Fonte: Leontiev (1978).

A estrutura hierárquica da atividade representada na figura 3 expressa o esforço de Leontiev (1978) para organizar um modelo com três níveis interdependentes. A atividade é coletiva e está ligada a um motivo; já as ações podem ser executadas por um único indivíduo e estão diretamente relacionadas aos objetivos. Quaisquer que sejam as ações elas dependem de condições materiais e métodos para serem realizadas, as quais se referem aos procedimentos adotados para se alcançar o objetivo, ou seja, as operações. Ao mesmo tempo verifica-se que as ações estão subordinadas a metas (objetivos parciais).

Engeström também apresenta ideias originais para a Teoria da Atividade. Referimos-nos aos cinco princípios propostos por ele. O primeiro princípio indica que a unidade mínima de análise é constituída por um sistema composto por sujeitos, artefatos, objeto, regras, comunidade e divisão do trabalho. Todos esses elementos se relacionam de forma

mediada. O modelo (Fig.5) proposto por Engeström (2001) procura representar essas relações.

Figura 5. Modelo da Teoria da Atividade



Fonte: Engeström (2001).

Segundo esse modelo, sujeitos e objeto se relacionam mediados pelos artefatos, mas também mediados pela comunidade. Já a comunidade se relaciona com os sujeitos de forma mediada pelas suas regras, e relaciona-se com o objeto de forma mediada pela divisão do trabalho. O objeto da atividade, que é entendido como “a ‘matéria-prima’ ou ‘espaço-problema’ para o qual a atividade é direcionada” (ENGESTRÖM; SANNINO, 2010, p.6), sofre transformações ao longo do desenvolvimento da atividade, gerando como resultado um produto.

O segundo princípio indica que um sistema de atividade é multivocal, na medida em que as diferentes experiências, perspectivas e vivências dos sujeitos participantes influenciam no desenvolvimento dessa atividade. Já o terceiro princípio aponta para a necessidade de realização de uma análise histórica da atividade para compreensão de seus problemas e potenciais. O quarto princípio refere-se às contradições internas ou tensões, que são definidas como “tensões historicamente desenvolvidas que podem ser detectadas e com as quais se pode lidar em sistemas de atividade” (ENGESTRÖM, SANNINO, 2010, p.4). Essas tensões são importantes, na medida em que podem ser fonte de mudança e renovação da atividade, podendo gerar, inclusive, transformações expansivas (ou aprendizagem expansiva), as quais se configuram como o quinto princípio da teoria. As transformações expansivas podem ser entendidas como reconceitualizações de elementos do sistema de atividade, em particular, do objeto.

Engeström (1999) refere-se a quatro tipos de contradições que podem afetar um sistema de atividade. A contradição primária ocorre *no interior de cada elemento* do sistema de atividade. Podemos tomar como exemplo quando as regras de participação e envolvimento de cada elemento do sistema de atividade são substituídas pelo cumprimento

mecânico de tarefas. A contradição secundária ocorre *entre os elementos do sistema de atividade e algo novo*. Como as atividades são sistemas abertos, a introdução de um novo elemento, como por exemplo, um novo instrumento, pode provocar contradições no sistema, que, por sua vez, podem impulsionar o sistema para uma mudança. A contradição terciária se estabelece entre as possíveis ações que formam o objeto coletivo, principalmente *entre algo novo que é proposto e algo que é padrão dominante*, ou seja, quando existe a introdução de um novo objeto ou de novos motivos. Por exemplo, novos procedimentos podem ser formalmente implementados, mas existir uma resistência dos participantes. Finalmente, a contradição quaternária surge *entre o sistema de atividade e outros sistemas*²⁰ *interligados*. Esse tipo de contradição pode ser verificado pela forma como um sistema interpõe-se a outro, ou seja, pela interferência de fatores externos à atividade.

As contradições podem ser geradas quando os procedimentos que são parte integrante de nossa prática passam do nível de operação, já automatizados, para o nível de ação, quando passamos a repensá-los. Também podem ser causadas pelo uso que os sujeitos fazem (ou não) de instrumentos, pelas regras e pela introdução de algo novo, que pode ser tanto uma regra ou um instrumento ou ainda uma nova forma de divisão do trabalho.

Para analisarmos as contradições internas emergentes da produção dos estudantes ao trabalhar com a proposta pedagógica baseada na Análise de Modelos, também tomaremos como base um segundo aporte teórico: o construto teórico seres-humanos-com-mídias. Souto e Borba (2013) indicam que as origens dele estão na própria Teoria da Atividade, em particular no trabalho de Tikhomirov (1981) que versa sobre a reorganização do pensamento. No entanto, esse construto também se fundamenta em autores da Etnomatemática e da filosofia da técnica. Os fundamentos desses aportes, somados às ideias originais de Borba (1999) são articulados na tentativa de compreender o papel de mídias no processo de produção de conhecimento, o qual é tido como central. Considerando essas raízes, Souto e Araújo (2013) realizaram um exercício de analisar o próprio construto como um sistema de atividade. As autoras afirmam que o construto seres-humanos-com-mídias pode ser entendido como uma tríade - humanos-mídias-objeto - mas que a exemplo do que ocorreu com a própria teoria da atividade (Fig.5), também pode ser visto de forma expandida com a inclusão de regras, comunidade e organização do trabalho. Desse modo, entendemos que as ideias dessas duas abordagens teóricas se harmonizam e podem enriquecer a análise que nos propusemos a desenvolver, ainda mais porque a proposta pedagógica foi fundamentalmente desenvolvida com base em

²⁰ Sistemas de atividade não se constituem de forma isolada, pois cada um dos participantes de um dado sistema faz parte, de forma simultânea ou não, de mais de um sistema, seja em sala de aula, em grupos de estudos, etc. Todos esses sistemas se relacionam por meio de conexões entre seus elementos formando uma rede complexa (SOUTO, 2013).

simulações de um modelo matemático fornecidas por uma mídia: o software Modellus. Além disso, a visão epistemológica associada a esse construto dá sustentação teórica para nossa visão de conhecimento.

Segundo Borba e Villarreal (2005), a unidade de produção de conhecimento é um coletivo de humanos e mídias. As mídias reorganizam nosso pensamento, isto é, de acordo com as possibilidades e restrições que elas oferecem, organizamos nosso raciocínio (SOARES, 2012). Nesse sentido, ao modificar a mídia com a qual se trabalha, modifica-se qualitativamente a produção de conhecimento, uma vez que as possibilidades e restrições oferecidas serão outras. O *feedback* dado por um *software* matemático, por exemplo, ou então as possibilidades de experimentação ou visualização, são aspectos relacionados ao processo de reorganização do pensamento, uma vez que permitem ao estudante desenvolver encaminhamentos que dificilmente seriam realizados sem essa mídia. O processo de reorganização, de certa forma interpenetra outro processo, que é o da moldagem recíproca. Segundo Borba e Villarreal (2005), não apenas a mídia molda o pensamento do ser humano, mas também o ser humano molda a mídia. Um exemplo disso é o uso de um software de formas diferentes daquelas para as quais tinha sido desenvolvido. Desse modo, se as mídias reorganizam e moldam nosso pensamento, assim como são moldadas por nós, elas não podem ter um papel periférico no processo de produção de conhecimento. Segundo Souto e Araújo (2013), a moldagem recíproca se assemelha à tese Vygotskyana de mediação, base da Teoria da Atividade. A diferença reside na ênfase do construto sobre aspectos relativos às interações dos seres humanos com as mídias como a informática, por exemplo. Em outras palavras, podemos concluir que esses dois aportes convergem para uma mesma ideia de reorganização que abarca questões culturais, sociais, materiais e psicológicas, dentre as quais se inclui a reorganização do pensamento.

Apresentados os aspectos teóricos que fundamentarão nossas análises, passamos a discorrer sobre as questões de cunho metodológico.

4. Aspectos metodológicos

Conforme mencionamos na introdução, nosso objetivo é identificar que contradições internas emergiram no trabalho dos estudantes com a abordagem pedagógica proposta. Para alcançarmos esse objetivo, nos debruçamos sobre alguns dos dados construídos no trabalho de Soares (2012) o qual utilizou uma abordagem qualitativa de pesquisa (LINCOLN; GUBA, 1985) e traços do *design research* (DOERR; WOOD, 2006). O paradigma qualitativo de pesquisa caracteriza-se pelo detalhamento e aprofundamento de compreensões, assim como pelo fato de o pesquisador ser o principal instrumento de pesquisa (BOGDAN; BIKLEN, 1994). Já o *design research* caracteriza-se por voltar-se



para o desenvolvimento e aperfeiçoamento de um produto (no caso, a proposta pedagógica) e pela necessidade de vários ciclos de análise (DOERR; WOOD, 2006).

Com relação ao contexto, a pesquisa foi desenvolvida em três fases. Os dados analisados nesse artigo foram construídos a partir do trabalho com estudantes do curso noturno de Biologia da Unesp, Rio Claro, SP, que cursaram a disciplina Matemática Aplicada no primeiro semestre de 2011. Essa disciplina tem uma carga horária de quatro horas semanais e pode ser entendida como uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, uma vez que sua ementa inclui o estudo de funções e noções de limites, derivadas e integrais. As aulas foram estruturadas em dois momentos. No primeiro momento de aula foram apresentados e discutidos os conteúdos previstos na ementa da disciplina por meio de abordagens variadas (diálogo com os alunos, momentos de exposição, resolução e correção de exercícios, análise de situações com o uso de softwares matemáticos, como o *Geogebra*²¹ e o *Winplot*, em conjunto com os alunos). No segundo momento de aula os estudantes trabalharam com a análise do modelo para a transmissão da malária.

Uma variedade de fontes de dados foi utilizada para permitir a realização da triangulação de dados, apontada por vários autores (LINCOLN; GUBA, 1985; ARAÚJO; BORBA, 2004; GOLDEMBERG, 2004) como uma alternativa para a validação da pesquisa. Dentre as várias fontes utilizadas, três caracterizaram-se como mais relevantes para a pesquisa: caderno de campo; filmagem da sala; gravação da tela do computador e do diálogo dos estudantes com o software Camtasia Studio; e entrevista com os estudantes ao final do semestre. Neste artigo, as entrevistas foram analisadas novamente por nós, sob a ótica da Teoria da Atividade, na busca pela identificação de contradições internas no trabalho dos estudantes. Esse é um primeiro passo no caminho de alcançar o objetivo proposto. No futuro, a análise dos outros dados poderá ser realizada para o aprofundamento de nossas compreensões.

5. Apresentação e Análise dos Dados

Conforme comentamos na introdução desse artigo, um dos motivos para a realização de um trabalho baseado na Análise de Modelos aqui apresentado foi oportunizar um ambiente onde os estudantes pudessem trabalhar conceitos matemáticos de forma inter-relacionada com sua área de interesse. Por outro lado, esse motivo fundamenta-se sob o entendimento de que os processos de ensino e aprendizagem da Matemática em geral, e mais particularmente do Cálculo Diferencial e Integral, ainda desenvolvem-se de forma isolada. Segundo Engeström (2002), já em 1987, Lauren Resnick abordou a questão da descontinuidade entre a aprendizagem escolar e a aprendizagem fora da escola, afirmando que estava cada vez mais claro o isolamento entre uma e outra. Engeström (2002) utiliza o

²¹ Site: <<http://www.geogebra.org>>. Acesso em: 05 jun. 2014.



termo “encapsulação da aprendizagem escolar” para se referir a esse fenômeno, enfatizando o modo como a aprendizagem ocorre de forma compartimentalizada e isolada nas escolas.

O debate sobre a importância de romper essa encapsulação é especialmente presente na Educação Matemática. Autores como D’Ambrosio (2005), por exemplo, destacam as limitações de um conhecimento disciplinar para o entendimento da realidade complexa em que vivemos e que, atualmente, apresenta a sofisticação e renovação constante de instrumentos e da tecnologia. Esse entendimento também perpassa o discurso da Modelagem Matemática, a qual é sugerida como uma abordagem pedagógica com potencial para fomentar a participação ativa dos estudantes, a reflexão crítica (BARBOSA, 2001; JACOBINI, 2004; ARAÚJO, 2002; BORBA; MENEGHETTI; HERMINI, 1997) e o desenvolvimento de competências de modelagem como, por exemplo, interpretar resultados matemáticos em termos do contexto extra-matemático (MAAß, 2006). Nesses trabalhos busca-se, de modo geral, uma educação matemática mais interdisciplinar e menos isolada, pois se entende que uma educação compartimentalizada, empobrece o processo de aprendizagem e de desenvolvimento crítico do estudante.

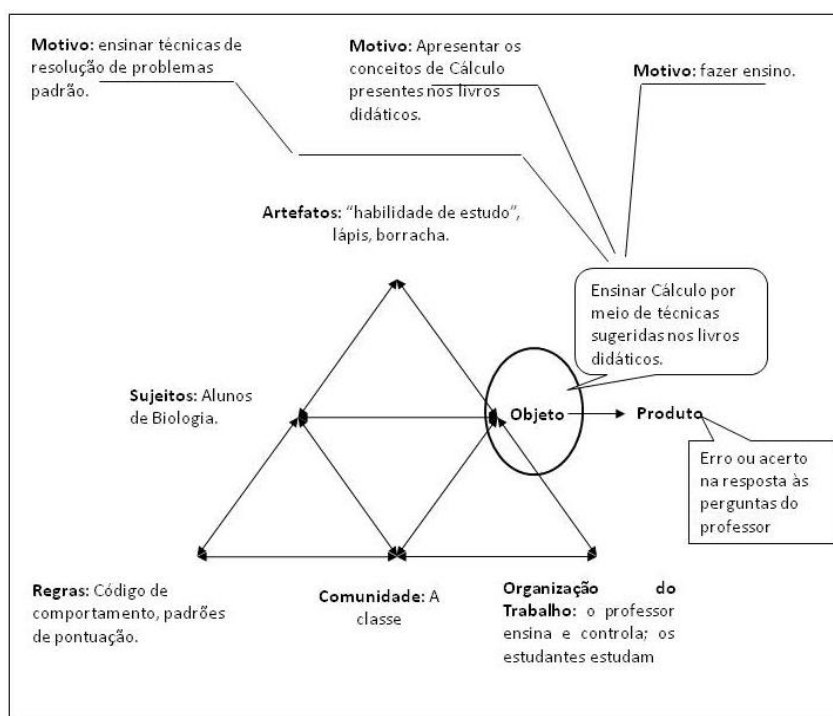
Ao refletir sobre a educação encapsulada, Engeström (2002) afirma que o objeto da atividade pode se reduzir, por exemplo, ao texto do livro didático, empobrecendo os recursos e instrumentos da atividade. Ele sugere uma representação para o sistema de atividade que constitui a aprendizagem escolar tradicional²² do fenômeno das fases da Lua. Adaptamos essa sugestão para interpretarmos como seria um sistema de atividade de aulas baseadas em uma abordagem tradicional encapsulada na disciplina Matemática Aplicada (Fig.6).

Nesse caso, os sujeitos do sistema de atividade seriam os alunos do curso de Biologia. Conforme aponta Engeström (2002), nesse sistema dois elementos se destacam. O primeiro deles é o objeto, que é o próprio texto escolar. Esse texto, em princípio, deveria ser um instrumento para a compreensão do mundo e, conseqüentemente, estar sujeito a críticas e reflexões, mas na abordagem tradicional encapsulada ele se torna o objeto para o qual a atividade de ensino é direcionada. O segundo elemento é consequência do primeiro: os artefatos acabam por ficar empobrecidos, como comentamos anteriormente, restringindo-se ao lápis e papel e às condições dos próprios estudantes em desenvolver o estudo. Completando o sistema temos como comunidade os demais estudantes da sala de aula, que compartilham o mesmo objeto; as regras, que são regidas pelos padrões de comportamento e de avaliação; e a organização do trabalho, que ocorre de forma que o

²² Por abordagem tradicional entendemos aquela que se utiliza apenas de aula expositiva, com uso de lousa, lápis e papel, e o livro texto.

professor tem o controle e o comando de todo o processo, enquanto ao estudante cabe estudar. O produto do sistema é a resposta certa ou não às perguntas feitas pelo professor.

Figura 6. Um diagrama para um sistema de atividade típico em aulas encapsuladas de Cálculo

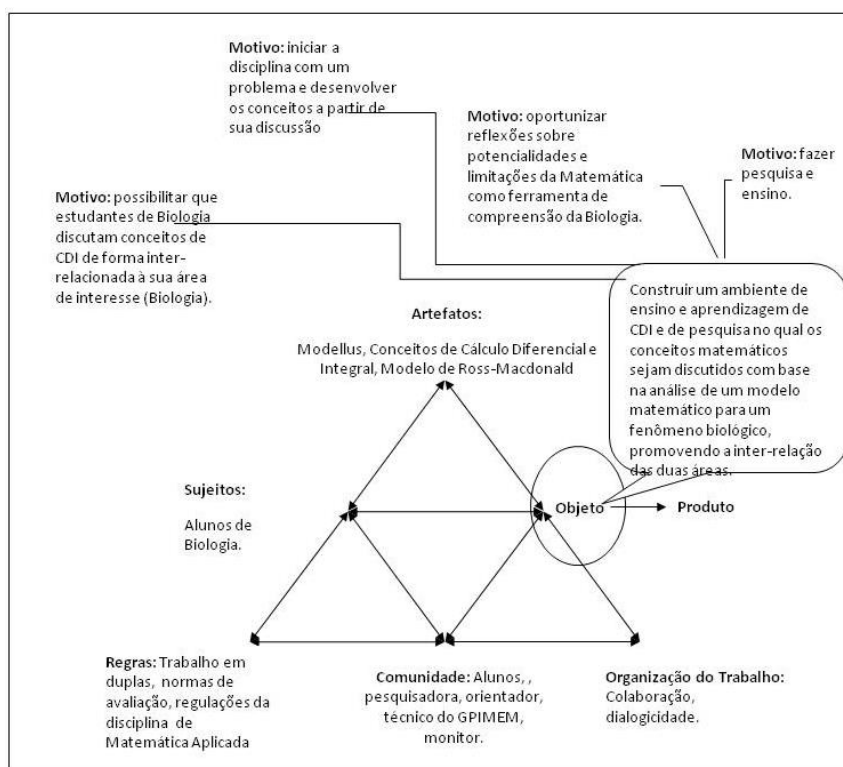


Fonte: Elaboração própria, adaptado de Engeström (2002, p.183).

O diagrama proposto por Engeström (2002) não apresenta motivos para o sistema de atividade, porém decidimos acrescentar ao diagrama possíveis motivos para o sistema. Essa decisão está embasada no trabalho de Souto (2013) que, apoiada em estudiosos da Teoria da Atividade, considera que o objeto é determinado pelos motivos da atividade, os quais seriam, por sua vez, identificados com base nos objetivos que podem ser, implícita ou explicitamente, negociados. Com base nesse entendimento e também no entendimento sobre abordagem tradicional encapsulada, consideramos que possíveis motivos para esse sistema de atividade sejam: fazer ensino, apresentar os conceitos de Cálculo presentes no livro didático, ensinar técnicas de resolução de problemas padrão. Esses são exemplos de motivos possíveis e que são coerentes com o objeto da atividade sugerido por Engeström (2002). Não temos, de fato, o intuito de sermos exaustivos nessa questão, mas achamos importante complementar o diagrama original pois, na sequência, faremos uso desse recurso para pensarmos qual seria o objeto de um sistema para a proposta pedagógica baseada na Análise de Modelos. Uma observação importante, ainda, é a seguinte: no sistema para uma abordagem tradicional, os conceitos de Cálculo não são artefatos, uma

vez que eles não são, em geral, foco de reflexões e críticas por parte dos estudantes. Nesse sentido, eles aparecem no objeto, mas “presos” às considerações do livro didático²³.

Figura 7. Um diagrama do sistema idealizado para a proposta pedagógica baseada na Análise de Modelos.



Fonte: Elaboração própria.

A Fig.7 apresenta um diagrama do sistema para a proposta pedagógica baseada na análise de modelos descrita na introdução desse artigo. Ele foi elaborado tomando como referência as ideias dos autores²⁴ dessa proposta quer dizer, com base em seu planejamento, expectativas e objetivos; nesse sentido nos referimos a esse sistema como o sistema idealizado.

Conforme comentamos anteriormente, para a composição do objeto desse sistema nos baseamos nos motivos (SOUTO, 2013). Identificamos quatro motivos relacionados à elaboração da proposta pedagógica. São eles: possibilitar aos estudantes de Biologia a discussão dos conceitos matemáticos de forma inter-relacionada à sua área de interesse;

²³ Não queremos dizer que todo o trabalho desenvolvido com abordagem tradicional seja reduzido a essas características apresentadas no sistema da Fig.6. De fato, o mais importante em nossa análise é o caráter encapsulado da aprendizagem.

²⁴ Os autores da proposta pedagógica são Débora da Silva Soares, primeira autora desse artigo, e Marcelo de Carvalho Borba. Conforme comentamos na introdução desse artigo, essa proposta foi elaborada com o intuito de oportunizar aos estudantes da disciplina Matemática Aplicada um estudo sobre Matemática que fosse inter-relacionado à Biologia. A proposta pedagógica foi pano de fundo para o desenvolvimento da pesquisa Soares (2012).

oportunizar um ambiente de reflexões sobre potencialidades e limitações da Matemática como ferramenta de compreensão de fenômenos biológicos; desenvolver a disciplina Matemática Aplicada com base em um problema; desenvolver a pesquisa e o ensino. Pautadas nesses motivos, elaboramos uma aproximação do que entendemos que poderia ser o objeto dessa atividade: construir um ambiente de ensino e aprendizagem de CDI e de pesquisa no qual os conceitos matemáticos sejam discutidos com base na análise de um modelo matemático para um fenômeno biológico, promovendo a inter-relação das duas áreas. Reiteramos que esse sistema foi elaborado com base no que foi idealizado e planejado para a proposta pedagógica. Isso significa, portanto, que não necessariamente todos os alunos da disciplina participaram do desenvolvimento desse sistema.

Apesar disso, consideramos plausível o exercício de contrastar esses dois diagramas (Fig.6 e Fig.7) para estruturarmos algumas reflexões. Uma primeira observação é que no sistema da Fig.7 é possível perceber um enriquecimento dos artefatos que medeiam as relações entre sujeitos e objetos. Além do lápis, papel e da “habilidade de estudo”, também temos o software Modellus, o modelo matemático para a transmissão da malária, os próprios conceitos de Cálculo estudados e o texto escolar, que deixa de ser o objeto da atividade e passa a ser um artefato. Além disso, há uma expansão da comunidade, que passa a integrar, além dos colegas de classe, a pesquisadora/professora, o orientador da pesquisa, o técnico do GPIMEM, o monitor da disciplina e o professor. Mudanças também são percebidas nas regras e na divisão do trabalho, uma vez que é introduzido o trabalho em dupla, que exige colaboração e diálogo. Assim, o centro deixa de ser o professor, já que os estudantes trabalham a maior parte do tempo em interação com a dupla. Nesse sentido, os trabalhos em dupla passam a ser uma regra e, além desta, as normas de avaliação da disciplina também regulam o sistema. Um possível produto desse sistema seria a compreensão dos conceitos matemáticos, em particular conceitos de Cálculo, como ferramentas para análise de fenômenos biológicos, refletindo acerca de suas limitações e potencialidades.

Uma segunda observação é que esse enriquecimento nos artefatos está atrelado à introdução de *novos* artefatos no sistema. Em particular, destacamos o software Modellus e o modelo matemático para a transmissão da malária. As regras e a divisão do trabalho também são elementos *novos*, comparados com aqueles que usualmente perpassam o sistema de atividade baseado na abordagem tradicional encapsulada. De acordo com Engeström (1999) a introdução desses *novos* elementos poderia ser fonte de contradições secundárias no sistema. Perguntamos-nos, então: foram esses novos elementos fonte de contradições no sistema de atividade desenvolvido pelos estudantes de Biologia enquanto trabalhavam com a proposta baseada na Análise de Modelos? Complementar à isso, também observamos que, na Fig.7, *novos* motivos foram introduzidos ao sistema o que, segundo Engeström (1999) caracteriza uma potencial contradição terciária. Novamente nos questionamos: esses novos motivos constituíram-se em fonte de contradição no sistema de atividade? Na tentativa de responder a essas perguntas ou, pelo menos, nos aproximarmos de uma resposta, analisamos as entrevistas cedidas pelos estudantes as quais passamos a estudar no que segue.

Das questões feitas aos estudantes na entrevista, investimos especial atenção aos comentários feitos pelos estudantes da disciplina ao responder a seguinte questão: “O que vocês podem destacar, ou o que mais lhes chamou a atenção, sobre o trabalho que foi realizado durante o semestre envolvendo o estudo do modelo da malária?”. O objetivo dessa pergunta foi compreender o modo como eles interagiram com a proposta pedagógica, assim como possíveis impactos positivos e negativos, limitações e potencialidades da mesma. No que segue, apresentamos algumas das respostas dos estudantes já com nossas reflexões.

Keteryne: Foi o que eu escrevi na prova do Borba²⁵ até, que eu achei que ... a sua parte, a parte dos vídeos que ele levou em aula, complementou, né, então a gente pôde ver assim... no dia-a-dia vamos supor como que se aplica aquela... porque é a gente fa... alguns professores até falam pra gente, ah, que os alunos falam, pra que que a gente vai estudar isso? pra que que a gente quer isso? Tem que decorar esse monte de fórmula e a gente pensa, a gente nunca vai usar isso, pra que isso? Eu acho que tanto os vídeos que o Borba trouxe quanto a sua parte deu pra gente ver mais ou menos... as coisas... [Sibeli: A aplicação...] é... onde cada coisa se encaixa. (Trecho da entrevista Keteryne e Sibeli, 25/05/2011).

Kauã: Ah, o que... acho que o que ficou destacado pra mim nesse trabalho, o que ele destacou foi... justamente tipo, uma utilidade da... Matemática pra... Biologia [Débora: Ahã]. Acho que foi isso o principal... [Priscilla: É.] Porque eu acho que se a gente só tivesse tido... a aula, isso ficaria muito vago. Porque é o que acontece com várias outras matérias também [Priscilla: É...] [Débora: Entendi]. Que é, por exemplo... tipo... Física, sabe? [Priscilla: É...] Que a gente até sabe que tem relação, sabe, mas a gente não vê na prática, então...

Débora: Entendi.

Kauã: Mas eu acho que esse foi bem pra gente ligar... ver o... como a Matemática pode ser usada no estudo da Biologia mesmo, tipo, não só pode como deve... (Trecho da entrevista, Kauã e Priscilla, 01/07/2011).

Esses dois primeiros trechos de entrevistas realizados com as duplas Keteryne e Sibeli, e Kauã e Priscilla, sinalizam um aspecto que será destacado também por outros estudantes (conforme se pode ver na sequência) que é a possibilidade de estudar a Matemática de uma forma que pudessem perceber/conhecer possíveis aplicações dessa ciência para sua área de interesse, a Biologia, o que se confirmou uma demanda dos estudantes. Com relação a esse aspecto, ambos os alunos fazem comentários ainda mais gerais, referenciando outras disciplinas que, em princípio, poderiam ter aplicações ou

²⁵ Borba se refere ao Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba, professor da disciplina Matemática Aplicada. Além disso, a aluna se refere a uma questão de uma das provas em que foi pedido para que os alunos, voluntariamente, escrevessem sobre o que aprenderam a respeito de malária na disciplina.

relações com a Biologia, mas que, em geral, não se tornam claras e parecem vagas. Outros dois trechos de entrevista estão a seguir e nos fornecem mais material para reflexões.

Dayane: E eu gostei por causa que tinha esse vínculo, né, com a Biologia, que é... o que eu gosto mesmo, com a parte de Cálculo. Então a parte de... a parte... ficava fácil a interpretação assim. Mesmo nos gráficos, aquelas... aqueles modelos imensos, cheio dos números, cheio das fórmulas, mas... por causa do contexto geral que a gente tinha [Natalia: Dava pra entender...] dava pra entender. Tipo, é você sabe o que que é... o que que é um vetor...

Natalia: Faz sentido, na verdade, [Dayane: Isso...] porque o Cálculo em si não faz sentido, né? [Dayane: É.] [risos] Mas se você coloca alguma coisa da Biologia, daí faz sentido.

Dayane: Tipo, a gente tem noção do que é um vetor, de como é uma infecção, como que funciona uma doença, como que... isso passa de pessoa pra pessoa, a gente sabe toda essa par... esse contexto, então... juntar a análise matemática com isso ficou mais fácil de ser interpretado pra mim pelo menos.

Natalia: É, tipo, eu também nunca imaginei assim, não sei, né, se não pensei nisso, mas eu nunca imaginei que tinha um modelo matemático pra você ver quantidade de picadas essas, enfim tudo, sabe? Eu não sabia que existia uma coisa que estudasse [Dayane: É pra analisar...] da matemática mesmo, mas que estudasse a malária nesse sentido. É interessante por causa disso, porque envolve os dois que é uma coisa que a gente se interessa, né, que é a parte biológica e fica mais fácil porque, né, os dois juntos ali é bem mais fácil de entender. (Trecho da entrevista, Dayane e Natalia, 01/07/2011).

Renato: Ah, eu acho que foi uma experiência muito legal ter... associado, fazer a disciplina de Matemática associando com um problema da Biologia, mesmo assim. Realmente foi Matemática aplicada à Biologia. [Natália concorda com movimentos de cabeça]. E a gente acabou entendendo a Matemática com... a partir de uma aplicação que tinha né, no caso, a taxa de variação... Eu achei bem interessante.

Natália: Desde o começo eu já achava muito legal assim, a gente via uma coisa no Borba, tá a gente falava "não, tudo bem, existe e tal", mas aonde eu vou usar isso, nunca né? Aí a gente... a gente chegava no GPIMEM aqui e você mostrava tal. E eu falava, "Nossa! Pior que usa". Eu achei legal isso, associar um problema que a gente pode tá... de repente tem um projeto, sei lá, do governo envolvendo isso, a gente pode tá ali como biólogo, né, e ter que usar a Matemática.

[...]

Natália: Pra gente que tem uma cabeça bem biológica, facilitou colocar uma coisa biológica no meio da Matemática. Acho que se não tivesse a parte da malária talvez a gente ficasse mais... mais pensando "nossa, que inútil". [risos]

Débora: Sim.

Natália: Ah, porque a gente pensa! Sinceramente, a gente pensa! [risos] A gente olha aquilo, "ah, eu não vou usar...". (Trecho da entrevista, Renato e Natália, 25/05/2011).

Nesses outros dois excertos, novamente é possível identificar o aspecto de estudar Matemática de forma a conhecer possíveis aplicações na Biologia. Entretanto, outros dois



elementos emergem. O primeiro deles é certa “surpresa” registrada nas falas dos alunos com relação à existência de aplicações da Matemática à Biologia que são, num certo sentido, relevantes para a área. Exemplos desse registro são as falas: “Eu não sabia que existia uma coisa que estudasse da matemática mesmo, mas que estudasse a malária nesse sentido” (Natalia) e “Eu achei legal isso, associar um problema que a gente pode tá... de repente tem um projeto, sei lá, do governo envolvendo isso, a gente pode tá ali como biólogo, né, e ter que usar a Matemática” (Natália).

A manifestação dessa surpresa por parte dos estudantes nos incita algumas reflexões. Inicialmente observamos que não se trata de os estudantes estarem surpresos por existirem aplicações da Matemática. De fato, eles afirmam que foram informados em outros momentos de suas vidas escolares sobre essas aplicações. A surpresa nos parece mais focada no fato de que essa aplicação pode ser não trivial e abordar problemas importantes para a Biologia. O trecho a seguir, extraído de outro momento da entrevista com Natália e Renato, parece confirmar nossa interpretação. Em resposta a um comentário de Renato sobre a importância de exercícios de modelagem do livro-texto para o seu conhecimento de aplicações da matemática, Natália observa: “Então é tudo meio por cima assim que eles falam, ah do microorganismo, ah não sei o que... é sempre uma coisa assim que você pensa "ah podia ser qualquer outra coisa, né?", "Podia ser qualquer outro exemplo", mas esse da malária eu achei muito legal” (Trecho da entrevista, Renato e Natália, 25/05/2011). Em sua fala, Natália se refere a situações-problema cujo contexto é pensado para “encaixar” no conteúdo matemático, quer dizer, situações-problema em que, mudando-se o contexto, a forma de resolução permanece a mesma. Parece-nos que, para Natália, situações fictícias e frágeis em termos de contexto não satisfizeram sua demanda por conhecer aplicações da Matemática.

De fato, situações-problema frágeis em contexto podem ser entendidas como exercícios com referência à semi-realidade, isto é, exercícios que se baseiam em situações que envolvem elementos “reais”, porém não se preocupam com sua veracidade ou factibilidade; são situações fictícias em que os dados fornecidos pelo problema são considerados suficientes e exatos e quaisquer outras informações são irrelevantes (SKOVSMOSE, 2000). O foco principal, em geral, é exercitar as técnicas referentes a determinado conteúdo matemático. Quer dizer, não se está interessado em uma reflexão mais profunda sobre o conteúdo matemático e sua relação com o contexto do problema, mas apenas no raciocínio matemático “puro”. Conforme indica Engeström (2002) essa é uma característica da encapsulação da aprendizagem escolar: mesmo que dois fenômenos sejam tratados paralelamente, as relações entre ambos não são explicitadas, e espera-se que o alunos, mais tarde, estabeleçam essas relações por si mesmo, algo que não é possível de garantir.

Engeström (2002) também argumenta que os professores tradicionalmente utilizam o “mundo relativamente fechado dos livros didáticos” e que isso pode contribuir para que a “escolarização” se torne, em um processo histórico, cada vez mais isolada, se tornando um campo fértil para o surgimento de contradições. Isso porque os alunos não chegam à sala de aula como “vasos vazios”. Ao contrário, eles estão em constante contato com os mais diversos tipos de informações que estão disponíveis nas mais diversas fontes, principalmente na internet. Desse modo, quando os alunos têm dificuldade em relacionar as “regras simbólicas” ensinadas na escola com as informações que obtêm fora dela as contradições internas podem emergir.

Desse modo, interpretamos que a surpresa, por parte dos estudantes de Biologia, de que existe uma aplicação da Matemática para um problema de relevância em sua área de interesse de certa forma atesta um desconhecimento dessas possibilidades durante todo o percurso escolar. Quer dizer, historicamente, a Matemática aprendida por estes estudantes parece ter-se delineado como uma ciência isolada, encapsulada. A introdução do estudo sobre o modelo para a transmissão da malária com o software Modellus parece ter incitado-os a novas reflexões sobre possíveis utilidades da disciplina para sua formação e para a compreensão dos fenômenos biológicos.

Algumas crenças sobre a Matemática foram colocadas em “xeque” e passaram a ser foco de questionamentos. Com base nesse movimento, nos perguntamos: seria possível caracterizar esses acontecimentos como elementos de uma contradição terciária? Nos apoiamos nas ideias de Souto (2013) para crer que sim, especialmente se considerarmos a introdução desse tema, com essas características, como algo novo, distinto do padrão dominante no âmbito do ensino de Matemática que vinha sendo vivenciado por estes alunos até então. Além disso, a dificuldade em relacionar a Matemática com outras áreas científicas não parece ser algo que ocorre apenas com estes estudantes. Catapani (2001), por exemplo, explicita a demanda de estudantes de Geologia por relacionar os conteúdos de Cálculo à sua área de interesse. Nesse sentido, nos parece que essa contradição é local, mas também é estrutural e historicamente constituída pela forma como os professores têm ensinado Cálculo (ou a Matemática, mais geralmente).

Considerar que a Matemática vivenciada pelos estudantes de Biologia ao longo de sua carreira escolar tenha sido encapsulada é, de fato, uma possibilidade bastante plausível, na medida em que essa é uma das questões para as quais a Educação Matemática se volta. Pesquisas foram e são conduzidas com o intuito de explorar formas de amenizar esse isolamento, utilizando abordagens que envolvem, entre outros aspectos, a interdisciplinaridade (BORBA et al., 1997; BALDINO, 1995; DEPREZ, 2011). Além disso, autores como Souto (2013) atestam que o processo de aprendizagem da Matemática,



em geral, segue uma organização didática compartimentalizada e hierarquizada. Isso pode levar o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática a uma mera aplicação e “decoreba” de fórmulas e regras que muitas vezes não fazem sentido para os alunos. Engeström (2002), assim como nós, não considera apropriado esse modo de “apresentar” os conteúdos aos alunos. Ele sugere que se estimule em sala de aula o exercício de análises críticas, para que o trabalho escolar não seja realizado em “cápsulas”. Nessa direção é que a proposta pedagógica foi elaborada.

Retomando os excertos das entrevistas, um segundo aspecto que emerge é aquele relacionado com a compreensão dos conceitos de matemática e a relação com a Biologia. Frases como “Faz sentido, na verdade, [Dayane: Isso...] porque o Cálculo em si não faz sentido, né? [Dayane: É.] [risos] Mas se você coloca alguma coisa da Biologia, daí faz sentido” (Natalia); e “Pra gente que tem uma cabeça bem biológica, facilitou colocar uma coisa biológica no meio da Matemática” (Natália), parecem confirmar a importância para esses estudantes de estabelecer relações entre conceitos (novos) de uma área científica, em particular a Matemática, com sua área de interesse para a compreensão desses conceitos. Em outras palavras, parece que os conceitos Matemáticos em si mesmos seriam mais difíceis de serem compreendidos caso não se tivesse estabelecido uma relação com a Biologia.

Podemos relacionar essas mesmas frases à Estrutura Hierárquica da Atividade (Fig.4). Quando Dayane diz que o Cálculo sozinho não faz sentido, acreditamos que ela estava se referindo às suas experiências anteriores com a Matemática, que, a nosso ver, podem ser associadas ao nível de operação, ou seja, algo que já estava automatizado. No entanto, a fala de Natalia sobre a Matemática e a Biologia sugere um movimento de ascensão para o nível de ação, que ocorre quando os indivíduos passam a repensar, a questionar e a analisar criticamente uma dada situação. Esses excertos sugerem que a Matemática e a Biologia foram pensadas juntas pelos estudantes, de modo a estabelecer relações entre as duas áreas. Nesse sentido, a proposta pedagógica baseada na análise de modelos e no uso do software Modellus pode ter incentivado a superação da contradição interna identificada nos parágrafos anteriores.

Outros excertos de entrevista que nos sugerem a superação da contradição interna são os seguintes, que explicitam uma possível consequência da inter-relação entre a Matemática e a Biologia.

Kauã: Ah, eu achei que foi bem... foi uma boa relação, não achei algo forçado, tipo... [...] pra mim foi bom, eu até tinha me... eu, eu tinha medo de Matemática. E até perdi isso... Descobri que eu nem sou ruim em Matemática [risos]. (Trecho da entrevista, Kauã e Priscilla, 01/07/2011).



Natália: A... aquelas tabelinhas também... e um gráfico de barra que tem lá também assim... Parece que, não sei, a gente começa a olhar com mais... mais amor... [risos]

Renato: Um olhar mais matemático.

Natália: É, mais, não olhando "nossa, uma tabela!". A gente até que fala, "ah tá, uma tabela, tudo bem". (Trecho da entrevista, Renato e Natália, 25/05/2011).

Os registros desses estudantes sugerem que o estudo da Matemática entremeada com a análise de um modelo para a transmissão da malária proporcionou certa mudança de atitude em relação à disciplina. Aquele sentimento de medo e insegurança parece ter se dissipado para alguns alunos, dando lugar a uma reação mais tranquila e pró-ativa quando do confronto com registros matemáticos, os quais aparecem constantemente em artigos biológicos. Essa mudança de atitude, junto aos os elementos e aspectos mencionados acima, sugere que houve, por parte dos estudantes, uma reflexão a respeito da Matemática, a qual permitiu uma modificação em seu entendimento a respeito dessa ciência.

Com o intuito de enriquecermos ainda mais nossas observações apresentamos na sequência um trecho do diálogo entre dois estudantes, o qual ilustra o seu trabalho para compreender a influência de um dos parâmetros no comportamento das soluções e a relação desse comportamento com o fenômeno biológico. O parâmetro analisado era o que informava a probabilidade de infecção de um mosquito pelo parasita malário, e a solução era a quantidade de pessoas infectadas na região. A Fig.8 a seguir apresenta os gráficos analisados pelos estudantes.

Priscilla: Qual era mesmo o... o zero um [0.1], zero nove [0.9]... ?

Kauã: Esse é o zero um... não, esse é o zero zero um [0.01], esse é o zero um [0.1] e esse é o zero nove [0.9]. Porque... O que significa... Porque como esse aqui... a taxa de infecção dele é muito pequena, ãh...

Priscilla: Ah, assim...

Kauã: Tipo, como eles [os mosquitos] vão morrendo e vão nascendo saudáveis, e poucos vão se infectando... entendeu? Tipo, como é que a gente pode explicar isso?

Priscilla: ah, é o que ela tá falando, tipo... altamente suscetível.

Kauã: É, mas aqui é a quantidade da população que está sendo infectada. Então peraí, a gente tá no número de pessoas... infectadas. X é a população de pessoas infectadas... [...]

Priscilla: A população não é humana?

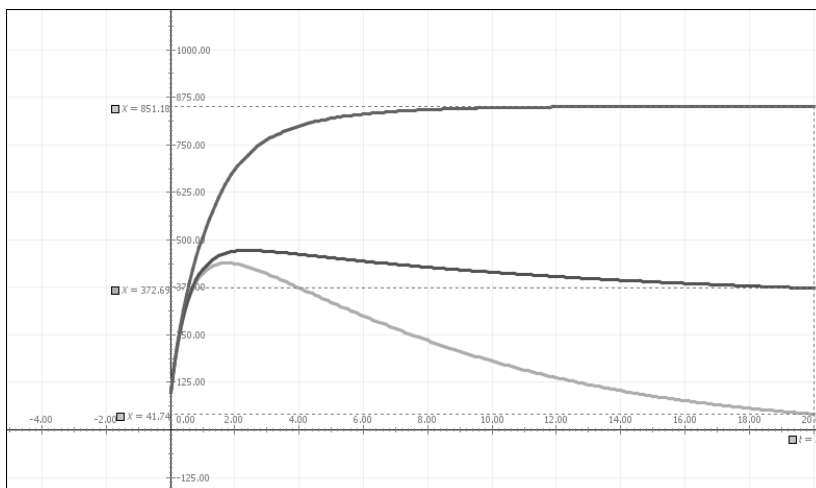
Kauã: É, então, é porque assim, tipo... Essa é a população de pessoas, população de pessoas infectadas aqui no caso, mas com esse mosquito tende a diminuir por quê? Porque esse mosquito vai se infectando muito pouco... e vai ficando... tipo, pelo... eles vão morrendo quando são infectados e nascem saudáveis, e como é muito pequena a taxa de... a taxa de mortalidade, a taxa de infecção deles, a população [de humanos] infectada vai diminuindo também.

(Trecho do diálogo entre Kauã e Priscilla, Tarefa 4).

Conforme podemos observar pelo excerto, inicialmente os estudantes procuram identificar qual gráfico corresponde a qual valor do parâmetro e, em seguida, procuram

compreender porque os diferentes valores para esse parâmetro causam os diferentes comportamentos para os gráficos. Em particular, eles discutem o caso em que a probabilidade de um mosquito se infectar com o parasita malário é 0,01, o que gera o gráfico cinza-claro na Fig.8. O raciocínio apresentado por Kauã é elaborado a partir da combinação de diversas informações, dentre elas o significado do parâmetro e as hipóteses do modelo, que estão relacionadas à dinâmica de ocorrência do fenômeno biológico. Matemática e Biologia se relacionam na medida em que os estudantes interpretam as informações gráficas (representação no plano cartesiano, crescimento/decrescimento) em termos do fenômeno biológico e utilizam-se de uma para justificar a outra.

Figura 8. Gráficos de $X(t)$ para três casos distintos do parâmetro probabilidade de infecção do mosquito.



Fonte: Soares (2012, p.182).

Esse trecho de diálogo ilustra a importância do software para o desenvolvimento da proposta pedagógica. Conforme comentamos na introdução desse artigo, durante todo o desenvolvimento da abordagem pedagógica os estudantes trabalharam com o software Modellus. Esse trabalho foi fundamental para tornar a proposta factível, uma vez que o objetivo não era ensinar os métodos de resolução de sistemas de EDO para os alunos e, para compreenderem o modelo matemático e as informações fornecidas sobre o fenômeno, era necessário que analisassem as soluções do modelo. Nesse sentido, o Modellus permitiu que os alunos tivessem acesso a aproximações dessas soluções sem precisar resolver o sistema.

De acordo com Soares (2012), o Modellus reorganizou os processos de análise do modelo matemático, uma vez que permitiu aos estudantes focarem sua atenção na mudança de comportamento das soluções do modelo de acordo com alterações em seus parâmetros.

A ideia de reorganização está fundamentalmente ligada ao processo de moldagem recíproca, base do construto seres-humanos-com-mídias. De acordo como Souto e Araújo (2013), a moldagem é semelhante à ideia de mediação proposta por Vygotsky, que é base da teoria da atividade. A diferença entre elas encontra-se, principalmente, no papel que o construto seres-humanos-com-mídias atribui às mídias. Para Borba (1999), na informática há uma reciprocidade nos processos de produção de conhecimento, os quais também são mediados por imagens dos monitores, sons e outros recursos que esses equipamentos oferecem. “O computador [software] pode dar *feedbacks* a passos intermediários da atividade humana, que seriam impossíveis de serem dados por observadores externos” (BORBA, 1999, p.287).

Sem o trabalho com o software, para cada valor escolhido para determinado parâmetro, seria necessário esboçar as soluções do sistema, o que envolve a sua linearização, identificação de pontos-fixos, a análise de sua estabilidade e o esboço das trajetórias no plano de fase. Apenas depois da realização desses procedimentos, para cada valor do parâmetro, seria possível fazer a análise do comportamento das soluções. Trabalhando com o software, o pensamento pode se focar apenas na análise do comportamento, uma vez que o software desenvolve os procedimentos de solução numérica do sistema e fornece aproximações para as soluções do modelo. Foi com base nas representações gráficas e tabulares das soluções do modelo fornecidas pelo software que os estudantes puderam analisar as informações sobre o fenômeno e refletir a respeito dos conceitos matemáticos subjacentes, podendo, desse modo, estabelecer relações entre a Matemática e a Biologia.

Assim, interpretamos que as soluções encontradas pelos alunos seriam difíceis de serem construídas com outra tecnologia que não tivesse os mesmos recursos desse aplicativo como, por exemplo, a oralidade ou a escrita. Esse ponto de vista é sustentado por nós tomando como base uma das ideias que fundamentam o construto seres-humanos-com-mídias: diferentes mídias contribuem para a produção de diferentes tipos de conhecimento (BORBA; VILLARREAL, 2005). Implícito nesse processo está, de forma parcial, a moldagem recíproca (BORBA, 1999), uma vez que as informações fornecidas pelo software deram condições para os alunos pensarem de formas distintas, já que seus argumentos eram baseados nas informações visuais geradas pelo aplicativo. Argumentos desse tipo, em geral, não são comuns em abordagens tradicionais e encapsuladas de ensino.

Nesse momento, reiteramos o fato de que o software Modellus é algo novo no sistema de atividade dos estudantes. Conforme comentamos anteriormente, de acordo com Engeström (1999), ele poderia ser, portanto, fonte de contradições no sistema. De fato, a produção Matemática com esse software introduziu estratégias que não eram, até então, usuais para os alunos, o que pode ter contribuído para a explicitação da contradição interna

já mencionada. Ainda, pelo que observamos até o momento, consideramos que os processos de reorganização e de moldagem recíproca gerados pelo software, ao permitirem aos estudantes estabelecerem relações entre a Matemática e a Biologia, também contribuíram para a superação dessa mesma contradição.

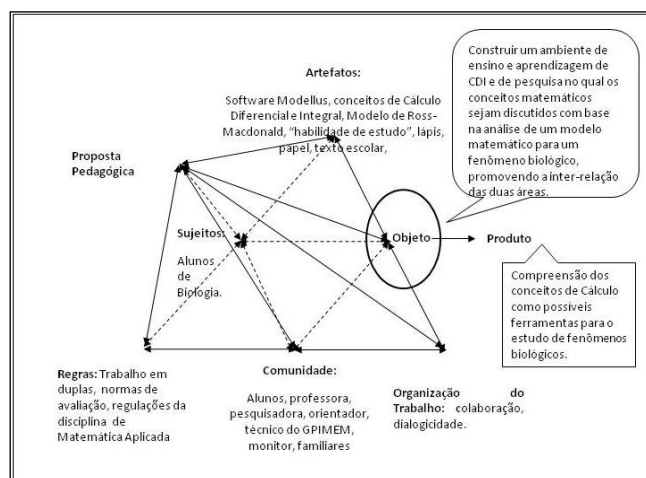
Temos, portanto, até o momento o seguinte panorama: a partir da análise das figuras 6 e 7, observamos que dois novos artefatos foram introduzidos ao sistema de atividade – o estudo do modelo matemático de Ross-Macdonald e o software Modellus. Ambos os elementos contribuíram, cada um a seu modo, para explicitar uma contradição interna ao sistema, qual seja, a não compreensão de relações entre a Matemática e a Biologia e, mais geralmente, outras áreas científicas. Conforme comentamos anteriormente, essa contradição não é apenas local, mas refere-se a um padrão dominante mais geral de ensino de Cálculo. Nesse sentido, entendemos essa contradição como uma contradição terciária. Além disso, também observamos que, segundo nosso entendimento, houve uma superação dessa contradição na medida em que os estudantes conseguiram estabelecer relações entre as duas áreas científicas, conforme observamos por meio das entrevistas.

O que consideramos importante destacar no que segue é que tanto o software Modellus como o estudo do modelo de Ross-Macdonald são elementos de um cenário mais amplo, que é a proposta pedagógica. É importante observar que as situações-problema apresentadas aos estudantes os encorajaram continuamente a refletir sobre as possíveis relações entre elementos matemáticos e biológicos. Ainda, esse processo foi permeado por discussões entre os pares, ou seja, o trabalho se organizou de forma coletiva, dialógica e colaborativa, conforme representado na Fig.7. Entendemos que essa forma de organização do trabalho favorece questionamentos, reflexões e pensamento crítico, uma vez que os estudantes, além de convencerem a si próprios sobre seus argumentos e interpretações, precisam convencer o colega e passar pelo seu crivo. Desse modo, entendemos que a proposta pedagógica como um todo desestabilizou o sistema de atividade dos alunos, fazendo com que eles rompessem o padrão de produção matemática que era dominante para eles. Ao mesmo tempo, ela também foi importante na superação dessa contradição interna que ela própria criou, na medida em que motivou os alunos a vencerem os traços de medo, angústia e incompreensões e, com isso os mobilizou para a busca de soluções, explicações, análises para o modelo proposto.

Nesse sentido, é possível observar que a proposta pedagógica possui um papel de destaque na constituição do sistema de atividade escolar. Nossas análises se alinham com o pensamento de Souto (2013), que propõe novas direções teóricas para as ideias de Engeström, dentre as quais está a inserção do papel de propostas pedagógicas na representação triangular do sistema de atividade. Em seu estudo, Souto (2013) observou que a proposta pedagógica apresentava-se de forma diluída entre os elementos do sistema,

isto é, a proposta aparecia nos artefatos, nas regras, na divisão do trabalho e no próprio objeto da atividade. Na análise que desenvolvemos aqui também podemos observar esse fenômeno, na medida em que é a proposta pedagógica que sugere o uso do software Modellus, o trabalho em dupla, a análise de um modelo matemático, e a inter-relação entre Matemática e Biologia. Sendo assim, ela se relaciona com diversos elementos do sistema, gerando potencial para a criação de contradições internas em diferentes níveis. No caso do sistema que analisamos, observamos que um de seus papéis foi o de fomentar a contradição interna analisada anteriormente, que é histórica e estrutural. Na tentativa de representar a proposta pedagógica e sua relação com o sistema de atividade, propomos o seguinte diagrama tridimensional (Fig.9), em que a proposta se torna um vértice de um tetraedro que possui como uma de suas faces o sistema de atividade. A ideia de uma representação tridimensional é enfatizar a interligação potencial entre a proposta pedagógica e todos os elementos de um sistema de atividade.

Figura 9. Diagrama para o ensino de Cálculo baseado na Análise de Modelos incluindo a proposta pedagógica.



Fonte: Elaboração própria.

Nesse diagrama, não reproduzimos os motivos do sistema de atividade, mas retomando a Fig.7 podemos observar que os motivos desse sistema estão estreitamente relacionados com a criação da proposta pedagógica. Sendo o objeto da atividade passível de ser identificado/aproximado pelos diferentes motivos, concluímos que ele também se encontra estreitamente relacionado à proposta pedagógica. Novamente, conforme observamos anteriormente, a introdução de novos motivos também pode ser fonte de contradições internas. Essa observação corrobora com a discussão que fizemos até o momento e nos incita a buscar compreender, em um futuro próximo, as implicações de

uma proposta pedagógica como essa, não apenas para o ensino de Cálculo, mas também para o pensamento matemático interdisciplinar.

6. Considerações Finais

Propusemos-nos, nesse artigo, o exercício de analisar as contradições internas (tensões) emergentes do trabalho de estudantes de um curso de Biologia com uma proposta pedagógica para o ensino de Cálculo baseada na Análise de Modelos e no uso de software. Os referenciais que fundamentaram esse trabalho foram conceitos da teoria da atividade e o construto teórico seres-humanos-com-mídias. Inicialmente nos apoiamos em Engeström para representar, de um ponto de vista teórico, como seria um sistema de atividade desenvolvido em aulas encapsuladas de cálculo diferencial e integral. Na sequência o contrastamos com o sistema que interpretamos como idealizado para a proposta pedagógica baseada na análise de modelos. Nesse exercício de análise, encontramos alguns nós (laços embaraçados) que indicavam um campo fértil para o surgimento de contradições internas. Para verificarmos a plausibilidade desses indicativos nos debruçamos no exame dos dados empíricos produzidos durante as entrevistas realizadas com os estudantes participantes da pesquisa de Soares (2012). Como resultados, identificamos uma contradição interna e propusemos um segundo diagrama para representar um sistema de atividade desenvolvido com base em uma proposta pedagógica apoiada na análise de modelos.

A contradição interna que identificamos é estrutural historicamente construída, pois está alicerçada na própria vivência escolar dos alunos da Matemática. Nos referimos ao processo histórico de encapsulação do ensino e da aprendizagem da Matemática que se mostrou presente nas falas dos estudantes, que usualmente desenvolviam sistemas de atividade semelhantes ao da Fig.6. A introdução de um fenômeno biológico nas aulas de Matemática e do trabalho com o software Modellus, fomentada pela proposta pedagógica, trouxe modificações a esses sistemas de atividade, as quais evoluíram para a contradição interna, pois romperam com o padrão de produção matemática que até então era usual para os participantes do sistema. Essa contradição foi principalmente verificada em comentários como da surpresa em saber que a Matemática poderia ser utilizada no estudo de fenômenos biológicos relevantes. Além disso, outros aspectos como os conceitos matemáticos fazerem sentido após a introdução de um contexto biológico e a mudança de atitude de alguns alunos com relação à Matemática com base no trabalho realizado, também sinalizam em direção à essa contradição interna, assim como à sua superação. Esse último entendimento é baseado no movimento da estrutura hierárquica da atividade, particularmente quando identificamos a ascensão do nível de operação para o de ação, ou seja, quando os alunos

deixam de focar na reprodução de técnicas e passam a repensar, questionar e analisar de forma crítica o problema proposto.

Assim, cremos que a proposta pedagógica foi responsável pelo surgimento da contradição interna. Outros aspectos como o trabalho em dupla, o uso do Modellus, a colaboração e a análise de um modelo matemático reafirmam nossas considerações. Em particular, o papel desempenhado pelo software, como um novo elemento do sistema de atividade, indicou que ele condicionou (sem determinar) o pensamento dos estudantes propiciando o estabelecimento de relações entre a Matemática e a Biologia e, com isso, ao mesmo tempo em que ele se tornou parte da fonte que potencializou a tensão, também contribuiu para a superação da mesma.

Reafirmamos, desse modo, as sinalizações feitas por Souto (2013) com relação ao papel da proposta pedagógica em um sistema de atividade seres-humanos-com-mídias, especialmente quando verificamos que a proposta pode se interligar com cada um dos elementos de um sistema de atividade, criando potenciais focos de contradições internas. Além disso, observamos que ela também foi responsável pela superação da contradição emergente no sistema, na medida em que pressupunha o uso do software que, como apontamos anteriormente, oportunizou aos alunos possibilidades de analisar e compreender o modelo matemático para a transmissão da malária. Em síntese, a reorganização promovida pelo software Modellus, aparentemente foi peça fundamental dentro da proposta pedagógica para a superação da tensão. Assim, acreditamos que os processos de reorganização do pensamento, bem como os de moldagem recíproca (BORBA, 1999), devem ser analisados como elementos centrais de sistemas de atividade que envolvem em sua unidade atores humanos e não-humanos.

Consideramos oportuno acrescentar que o trabalho aqui desenvolvido se diferencia em alguns aspectos das reflexões iniciadas em Soares (2012), que discutiu o papel do software na produção matemática elaborada durante o desenvolvimento da proposta pedagógica, tendo como um de seus principais referenciais teóricos o construto seres-humanos-com-mídias. Neste artigo, buscamos um olhar mais amplo direcionado para as tensões que surgiram durante o desenvolvimento da proposta pedagógica, o que implicitamente significa compreender suas limitações e/ou potencialidades. As tensões são discutidas não apenas do ponto de vista do desenvolvimento local da proposta, mas também do ponto de vista histórico e estrutural do modo como a matemática tem sido abordada no contexto escolar. As reflexões que ora elaboramos nesse artigo, tomam como base, além do construto, os fundamentos da Teoria da Atividade. Essa expansão teórica nos oportunizou a produção do que consideramos um avanço, embora tímido, do ponto de vista teórico. Referimos-nos à proposição do diagrama representado na Fig.9. Nele, incluímos a proposta pedagógica, buscando uma tridimensionalidade para o sistema de atividade, o

qual poderá ser adotado em outras pesquisas para representar sistemas de atividades escolares. Creemos que futuramente reflexões mais refinadas sobre este diagrama poderão alavancar novos horizontes para o diálogo que vem sendo realizado entre a teoria da atividade e o construto seres-humanos-com-mídias.

Agradecimentos

Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

Referências

- ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. (Orgs.) *Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática*. Londrina: Eduel, 2011.
- ALMEIDA, L. M. W.; FATORI, L. H.; SOUZA, L. G. S. Ensino de Cálculo: uma abordagem usando Modelagem Matemática. *Unisal*, v.10, n.16, p. 1-18, 2007. Disponível em: <<http://www.revista.unisal.br/sj/index.php/123/article/viewFile/17/31>> Acesso em: 22 Out. 2014.
- ARAÚJO, J. L. Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática: as discussões dos alunos. 2002. 173f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.
- ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. Construindo Pesquisas Coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.) *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.
- BALDINO, R. R. Como Integrar Disciplinas sob o Ponto de Vista Epistemológico. In: Encontro Setorial dos Cursos de Graduação da Unesp, 1, 1995, Águas de Lindóia. *Anais... Águas de Lindóia*, 1995. p.30-47.
- BARBOSA, J. C. *Modelagem Matemática: concepções e experiências de futuros professores*. 2001. 253f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.
- BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2009.
- BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem Matemática no Ensino*. São Paulo: Contexto, 2007.
- BLOMHØJ, M.; KJELDSEN, T. H. Students' Reflections in Mathematical Modelling Projects. In G. Kaiser, W. Blum, R. B. Ferri (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling – ICTMA 14*. New York: Springer, 2011. p.385-396.



BLUM, W.; LEIß, D. How do students and teachers deal with modelling problems? In C. Haines et al. (Eds.), *Mathematical modelling: Education, engineering and economic*. Chichester: Horwood, 2007. p.222-231.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto, Portugal: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C. Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização do Pensamento. In: BICUDO, M. A. V.; *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas*. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

BORBA, M. C.; MENEGHETTI, R. C. G.; HERMINI, H. A. Modelagem, Calculadora Gráfica e Interdisciplinaridade na Sala de Aula de um Curso de Ciências Biológicas. *Revista de Educação Matemática*, ano 5, n. 3, p.63-70, 1997.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. New York: Springer, 2005.

CATAPANI, E. C. Cálculo em Serviço: um estudo exploratório. *BOLEMA*, ano 14, n.16, p.48-62, 2001.

D'AMBROSIO, U. Um enfoque transdisciplinar à educação e à história da matemática. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.) *Educação Matemática: pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez, 2005. p.13-29.

DEPREZ, J. Modelling the Evolution of the Belgian Population Using Matrices, Eigenvalues and Eigenvectors. In: KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, R. B. (Eds.) *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling - ICTMA 14*. New York: Springer, 2011. p.467-478.

DOERR, H.; PRATT, D. The Learning of Mathematics and Mathematical Modeling. In: HEID, M. K.; BLUME, G. W. (Eds.) *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics, Vol.1. Research Syntheses*. New York: Information Age Publishing, 2008. p.18-23.

DOERR, H.; WOOD, T. Pesquisa-Projeto (*design research*): aprendendo a ensinar Matemática. In: BORBA, M. C. (Org.) *Tendências Internacionais em Formação de Professores de Matemática*. (Coleção Tendências em Educação Matemática). Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p.113-130.

ENGESTRÖM, Y. *Learning by expanding: an activity-theoretical approach to developmental research*. 1987 (Helsinki, Orienta-Konsultit). Versão online, disponível em: <<http://lchc.ucsd.edu/MCA/Paper/Engestrom/expanding/toc.htm>> Último acesso 04/03/2011.

ENGESTRÖM, Y. *Learning by expanding: ten years after*. 1999. Versão online, disponível em: <<http://lchc.ucsd.edu/MCA/Paper/Engestrom/expanding/toc.htm>> Último acesso 04 Maio 2009.



- ENGESTRÖM, Y. Expansive learning at work: toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, v.14, n.1, 2001. p. 133 - 156.
- ENGESTRÖM, Y. *Non Scolae Sed Vitae Discimus: como superar a encapsulação da aprendizagem escolar*. In: DANIELS, H. (Org.) *Uma Introdução a Vygotsky*. São Paulo: Edições Loyola, 2002. p.175-197.
- ENGESTRÖM, Y.; SANNINO, A. Studies of expansive learning: foundations, findings and future challenges. *Educational Research Review*, v.5, p.1-24, 2010. doi:10.1016/j.edurev.2009.12.002. Acesso em: 05 Out. 2012.
- FERRUZZI, E. C. *A Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos Cursos Superiores de Tecnologia*. 2003. 161f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção e Sistemas) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Santa Catarina, 2003.
- FRANCHI, R. H. De O. L. Cursos de Cálculo: uma proposta alternativa. *Temas & Debates*, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, ano VIII, n. 6, 39-43, 1995.
- GOLDENBERG, M. *A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais*. Rio de Janeiro: Record, 2004. 8ª ed.
- HOWSON, A. G.; KAHANE, J.-P.; LAUGINIE, P.; de TURCKEIM, E. On the Teaching of Mathematics as a Service Subject. In: HOWSON, A. G.; KAHANE, J.-P.; LAUGINIE, P.; de TURCKEIM, E. (Eds.) *Mathematics as a Service Subject*, ICMI study series, Cambridge: Cambridge University Press, 1-19, 1988.
- JACOBINI, O. R. *A Modelagem Matemática como Instrumento de Ação Política na Sala de Aula*. 2004. 225f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas – Unesp, Rio Claro, SP. 2004.
- JAVARONI, S. L.; SOARES, D. S. Modelagem Matemática e Análise de Modelos Matemáticos na Educação Matemática. *Acta Scientiae*, v.14, n.2, p.260-275, 2012.
- KAPTELININ, V. The Object of Activity: making sense of the sense-maker. *Mind, Culture, and Activity*, v.12, n.1, p.4-18, 2005.
- LEONTIEV, A. N. *Activity, consciousness, and personality*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1978.
- LINCOLN, Y. S.; GUBA, E. G. *Naturalistic Inquiry*. Newbury Park: Sage Publications, 1985.
- MALHEIROS, A. P. S. *A Produção Matemática dos Alunos em um Ambiente de Modelagem*. 2004. 180f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.
- MAAß, K. What are modelling competences? *ZDM*, v.38, n.2, p.113-142, 2006.
- MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. *Modelagem em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

SOARES, D. S. *Uma Abordagem Pedagógica baseada na Análise de Modelos para Alunos de Biologia: qual o papel do software?* 2012. 341f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

SOARES, D. S.; BORBA, M. C. Fenômeno Biológico, Sistema Dinâmicos e Noções de Cálculo I: uma proposta. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. *Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática*. Londrina: Eduel, 2011. p.227-247.

SOARES, D. S.; JAVARONI, S. L. Análise de Modelos: possibilidades de trabalho com modelos matemáticos em sala de aula. In: BORBA, M. C.; CHIARI, A. (Orgs.) *Tecnologias Digitais e Educação Matemática*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013. p.195-219.

SOUTO, D. L. P. *Transformações Expansivas em um Curso de Educação Matemática a Distância Online*. 2013. 279f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013.

SOUTO, D. L. P.; ARAÚJO, J. L. Possibilidades expansivas do sistema Seres-humanos-com-mídias: um encontro com a Teoria da Atividade. In: BORBA, M. C.; CHIARI, A. (Eds.) *Tecnologias Digitais e Educação Matemática*, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013. p.71-90.

SOUTO, D.L. P, BORBA, M.C. Transformações expansivas em Sistemas de Atividade: o caso da produção matemática com a Internet. *Revista Perspectivas em Educação Matemática*, Campo Grande: A universidade, v.6, 2013.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. *Bolema*, v.13, n.14, p.66-91, 2000.

TIKHOMIROV, O. K. The psychological consequences of computerization. In: WERTSCSH, J. V. (Ed.) *The Concept of Activity in Soviet Psychology*. New York: M. E. Sharpe Inc., 1981. p.256-278.

Débora da Silva Soares
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
E-mail: debora.soares@ufrgs.br

Daise Lago Pereira Souto
Universidade do estado de Mato Grosso
E-mail: daise@unemat.br



O SUCESSO DE UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA, SEGUNDO AS DIFERENTES FORMAS DE PARTICIPAÇÃO DOS ALUNOS

THE SUCCESS OF A MATHEMATICAL MODELLING ACTIVITY ACCORDING TO DIFFERENT FORMS OF PARTICIPATION OF STUDENTS

Bárbara Cândido Braz

Lilian Akemi Kato

Resumo

Numa perspectiva sociocultural, a aprendizagem escolar da matemática pode ser entendida como o processo de participação em práticas partilhadas na sala de aula. Por este ponto de vista, este texto tem como objetivo investigar o sucesso de uma atividade de Modelagem Matemática, de acordo com as formas de participação dos alunos nela envolvidos. Para tanto, analisamos ações de 12 alunos de um curso de Formação de Docentes, envolvidos numa atividade de Modelagem Matemática, por meio dos pressupostos da constituição de Comunidades de Prática Locais (LCoP). Dentre as conclusões aponta-se que diferentes formas de interesse e engajamento dos alunos numa atividade de Modelagem, levam a participações distintas com apresentação de resultados pertinentes, que nem sempre conduzem à constituição de uma LCoP; o que nos leva a inferir acerca de outros elementos necessários para o sucesso de uma atividade de Modelagem Matemática.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Comunidades de Prática Locais. Comunidades de Prática. Aprendizagem Situada.

Abstract

In a sociocultural perspective, the school learning of Mathematics may be understood as the process of participation in shared practices in the classroom. From this point of view, this paper aims to investigate the success of a Mathematical Modeling activity, according to the forms of participation of the students involved. To this end, we have analyzed the actions of 12 students of a Teacher Training Course involved in a Mathematical Modeling activity, by the assumptions of the constitution of Local Communities of Practice (LCoP). Among the findings, it is pointed out that different forms of interest and engagement of students in a modeling activity led to an undivided interest with relevant results, which do not always lead to the formation of an LCoP. Some inferences are drawn about other necessary elements for the success of a Mathematical Modeling activity.

Keywords: Mathematical Modeling. Local Communities of Practice. Community of Practice. Situated Learning.

1. Apresentação

No âmbito do ensino de matemática, as teorias de aprendizagem acríicas têm dado lugar àquelas que tomam o sujeito social como foco e sugerem que o conhecimento é construído por interações entre os sujeitos, e deles com o mundo em que vivem (BOALER, 2001). Por este entendimento, a Teoria da Aprendizagem Situada, sistematizada inicialmente por Lave e Wenger (1991), direciona uma nova perspectiva a respeito do uso e desenvolvimento do conhecimento.

Para Lave e Wenger (1991), a aprendizagem dos sujeitos se dá pelo seu envolvimento e participação em práticas que se desenvolvem em contextos específicos, denominados de Comunidades de Prática (CoP). Particularmente na sala de aula tais práticas desenvolvem-se de forma mais delimitada, em decorrência das próprias particularidades deste ambiente. Nesse sentido, na sala de aula, Winbourne e Watson (1998) intitulam tais CoP's de Comunidades de Prática Locais (LCoP) e descrevem características a serem analisadas a fim de afirmar a sua constituição na aula de matemática.

Em estudo anterior, Braz (2014) identificou contribuições da Modelagem Matemática para a constituição de LCoP's na sala de aula. A autora concluiu que as características apresentadas por Winbourne e Watson (1998) revelaram-se uma potencial ferramenta para a análise das formas de participação dos alunos no ambiente de aprendizagem da Modelagem Matemática. O uso de tal ferramenta permitiu uma apreciação crítica de todo o processo de constituição deste ambiente de aprendizagem.

Neste texto, apresentamos os resultados de um estudo cujo objetivo foi investigar o sucesso de uma atividade de Modelagem Matemática, de acordo com as formas de participação dos alunos nela envolvidos. Para tanto, descrevemos uma ferramenta de análise desenvolvida para esta apreciação, fundamentada nos pressupostos da constituição de uma LCoP, e discutimos as ações desenvolvidas por uma turma de alunos do terceiro ano de um curso de Formação de Docentes, em nível médio, em uma atividade de Modelagem Matemática.

O texto é organizado de forma que, inicialmente, apresentamos a perspectiva de participação nas aulas de matemática e de Modelagem Matemática assumidas, seguidas da interpretação de uma ferramenta de análise desenvolvida para a apreciação dos dados obtidos. Posteriormente, trazemos discussões provenientes de episódios de sala de aula e as reflexões proporcionadas por tais discussões.

2. Comunidades de prática locais: aprendizagem como participação

Jean Lave²⁶, em estudos desenvolvidos em contextos não escolares, concluiu que os conhecimentos dos indivíduos são construídos de forma particular por meio de experiências situadas (FRADE, 2003); levando a afirmar que o conhecimento é resultante das relações entre as pessoas, na atividade, e com o mundo social (MATOS, 1999; FRADE, 2003). Enquanto aspecto da prática social, a aprendizagem envolve a participação do indivíduo em atividades específicas dentro das comunidades sociais. A partir destes resultados, Lave e Wenger (1991) sistematizaram uma teoria de aprendizagem na perspectiva sociocultural, no qual o processo de aprendizagem é compreendido por meio do processo de participação legítima periférica, PLP, de indivíduos no que os autores denominam de Comunidades de Prática (CoP). Para Lave e Wenger (1991), portanto, aprender está intimamente ligado ao fato de participar do que Lave e Wenger (1991) denominam de Comunidade de Prática.

O conceito de Comunidade de Prática apareceu pela primeira vez no livro *Situated Learning: legitimate peripheral participation* (1991) como o processo de “participação num sistema de atividades acerca das quais os participantes partilham compreensões (significados) relativamente àquilo que estão fazendo e o que isso significa para as suas vidas e para as suas comunidades” (LAVE; WENGER, 1991, p. 98). Neste contexto, o processo de PLP refere-se a uma maneira de entender as relações entre os membros recém-chegados e os mais experientes numa CoP, sobre as atividades, comunidades de conhecimento e práticas envolvidas neste contexto; envolve o processo pelo qual um recém-chegado torna-se um participante pleno na prática sociocultural da CoP.

O conceito de Comunidade de Prática é peculiar e difere-se de outras entidades que possam ser tratadas como tal, como equipes, redes ou mesmo comunidades. Neste sentido, Wenger (1998) detalhou alguns aspectos essenciais que devem ser analisados a fim de identificar uma CoP: um domínio, uma comunidade e uma prática. O primeiro conceito, domínio, refere-se a um conjunto de conhecimentos que cria uma base comum e um sentido de identidade partilhado pelos participantes da CoP. É o que guia a aprendizagem e os significados das ações dos membros que formam um conjunto de pessoas preocupadas com esse domínio. A este conjunto de pessoas, Wenger (1998) denomina de comunidade. A prática, por sua vez, refere-se ao conjunto de ideias, ferramentas, histórias, documentos e todo o conhecimento específico criado e/ou adotado e mantido pela comunidade, enquanto ela existe. A prática criada e mantida por uma CoP ainda deve ser analisada com base: no *engajamento mútuo* dos membros, o que envolve fazer as coisas juntos; nos *empreendimentos articulados*, originado pela responsabilidade mútua na negociação de

²⁶ Tais estudos são apresentados no livro da autora, intitulado *Cognition in Practice* (1988).

empreendimentos; e um *repertório partilhado*, que envolve as ações, discursos, ferramentas criadas e/ou adotadas pela CoP.

Estas dimensões da prática, que se constituem como fonte de coerência da comunidade, tanto formam sua base quanto só podem ser identificadas por meio do processo de negociação de significados estabelecido entre os membros de uma comunidade. Este processo é o que dá o caráter de situatividade para a aprendizagem, pois ela só ocorre quando situada num processo de negociação. De acordo com Wenger (1998, p. 54) “o significado é sempre produto de sua negociação [...] O significado não está em nós, nem no mundo, mas na relação dinâmica de vida no mundo”. Com isso, o autor explicita o caráter de dependência do significado, em relação ao contexto histórico e cultural em que é negociado, assumindo uma posição dinâmica em relação ao tempo.

Este processo de negociação de significados, essencial na constituição de uma CoP, não é simples, pois exige a participação dos sujeitos. Além disso, o conceito de participação na visão de Wenger (1998) implica também no reconhecimento mútuo por uma comunidade em que um sujeito é participante, ou seja, ser legitimado por ela é fundamental nesse processo. Participar, neste sentido, é então tanto um aspecto pessoal, quanto social, pois pressupõe a combinação de fazer, falar, pensar, pertencer (Ibidem), e as relações das outras pessoas, com todas estas ações. Para esclarecer este conceito, Wenger (1998) destaca três aspectos.

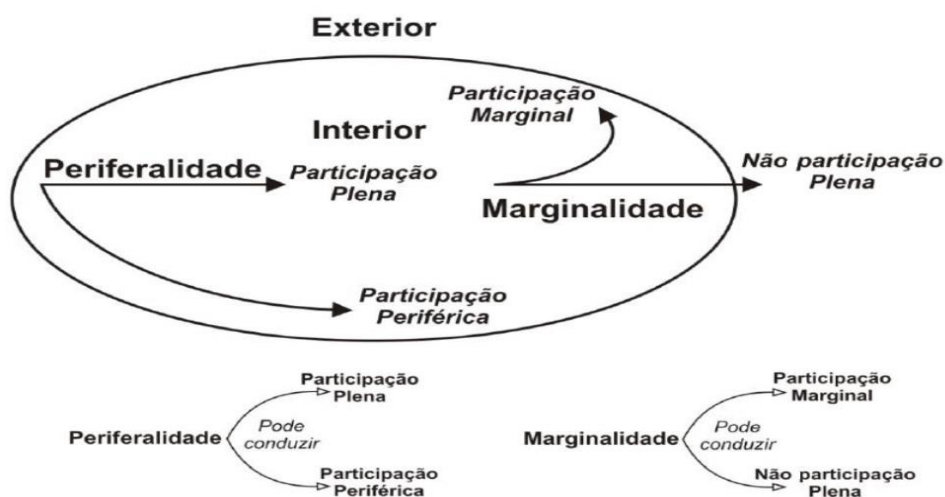
Em primeiro lugar, o processo de participação não é o mesmo que colaboração. Isto porque, participar envolve relações também conflituosas, políticas, competitivas. Logo, a participação numa CoP não pressupõe relações sempre harmoniosas entre os envolvidos. Em segundo lugar, nossa capacidade de desenvolver a prática da comunidade influencia diretamente nossa participação; nossas experiências contribuem não só para a participação individual, mas para o desenvolvimento da CoP como um todo. Por fim, participar vai além de se engajar na prática, em atividades específicas e, com pessoas específicas, porque revela nossas formas de pertencimento a uma comunidade, como participantes mais ou menos plenos.

Sob esta ótica, as formas de participação no processo de negociação de significados influenciam diretamente as formas de participação e não participação dos membros em uma CoP. Se um membro tem sua participação pautada apenas na adoção de significados, sem uma participação na sua produção, ele acaba desenvolvendo uma característica de não participação, que o leva à marginalização na CoP, pois suas experiências tornam-se irrelevantes para os demais membros. Se por outro lado, um membro tem uma participação efetiva na CoP, na negociação de significados, sua participação caminhará rumo a uma participação plena nesta CoP. Ainda, um membro pode desenvolver uma não participação,

mas que garante certo nível de participação no grupo, conduzindo-o a uma participação periférica na CoP.

Da relação entre a não participação e a participação numa CoP, Wenger (1998) diferencia dois casos de interação, a perifericidade e a marginalidade. A perifericidade caracteriza-se pela participação dos membros que, embora pertençam à CoP, têm um nível de não participação que dificulta a participação plena. Na marginalidade, por sua vez, a não participação é predominante, definindo uma participação restrita que não conduz à sua forma plena. Dos dois tipos de interação emergem outros quatro, como indicado na Figura 1:

Figura 1. Relações entre participação e não participação numa CoP.



Fonte: BELINE, 2012, p. 74.

Na Figura 1 são apresentadas os quatro tipos de participações que podem ocorrer numa CoP. A participação periférica pode conduzir a uma participação plena na comunidade, ou manter-se como periférica; a participação marginal por sua vez, pode conduzir ou a uma participação que não é plena (em que a não participação se sobressai), ou a uma participação marginal.

Nesta perspectiva, o foco na análise da evolução de uma CoP e nas formas de participação dos seus membros, permite uma ferramenta para a análise da aprendizagem escolar da matemática, pois como a teoria da aprendizagem situada constitui uma teoria generalizada de aprendizagem, torna-se aplicável a diferentes contextos, incluindo os escolares (BOYLAN, 2005). Boylan (2005), numa análise às práticas escolares, reconheceu que os conceitos analíticos desenvolvidos em relação à constituição de CoP são um meio importante para investigar as formas de pertencimento e participação nas aulas de

matemática. Entretanto, sugere que as aulas de matemática da escola geralmente não constituem CoP's.

Outros educadores matemáticos, Winbourne e Watson (1998), David e Watson (2008), Matos (1999), Frade (2003), pesquisadores da aprendizagem situada, também reconhecem as particularidades do ambiente escolar em relação a outros em que as CoP's possam desenvolver-se e analisam as potencialidades e restrições deste conceito na aula de matemática. Especificamente Winbourne e Watson (1998) assumem as características específicas, decorrentes das próprias peculiaridades do ambiente da sala de aula e denominam as CoP's formadas nas aulas de matemática de Comunidades de Prática Locais (LCoP), pois diferenciam-se das CoP's desenvolvidas em outros ambientes, em virtude do tempo e do espaço que ocupam. Os autores apresentam características que admitem ser necessárias para que uma LCoP seja constituída:

1. os alunos verem-se, a eles próprios, como funcionando matematicamente e para esses alunos fazer sentido 'o ser matemático' como uma parte essencial de quem são naquela aula;
2. por meio das atividades e papéis assumidos há reconhecimento público do desenvolvimento da competência naquela aula;
3. os alunos verem-se a trabalhar conjuntamente, com um propósito, para conseguirem um entendimento comum;
4. existem modos partilhados de comportamento, linguagem, hábitos, valores e uso de ferramentas;
5. a aula é, essencialmente, constituída por participação ativa dos alunos e professor;
6. os alunos e o professor podem ver-se engajados na mesma atividade (WINBOURNE; WATSON, 1998, p. 103).

Concordamos com os autores ao assumirmos que pensar na sala de aula como uma interseção de múltiplas práticas participativas seja uma forma útil de entender o processo de aprendizagem, tomando o indivíduo como foco deste processo. Neste âmbito, o conhecimento é concebido como resultado de uma série de interações entre as pessoas em determinadas situações, e decorrentes das suas práticas.

A fim de analisar a constituição de práticas escolares, Boaler (2001) realizou uma pesquisa com cerca de trezentos (300) alunos, acompanhados nos anos de escolaridade perpassados dos 11 aos 13 anos, e divididos em dois grupos: um em que as aulas de matemática foram tradicionais e outro em que foram pautadas em atividades de resolução de problemas e de Modelagem Matemática. A pesquisadora concluiu que os alunos que passaram pela experiência de desenvolver práticas matemáticas pautadas na resolução de problemas e na Modelagem Matemática, desenvolveram um conhecimento mais

significativo da matemática; reconhecendo tanto os conceitos matemáticos, quanto suas aplicações e significados.

De acordo com Boaler (2001), o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática contribui para a aprendizagem situada da matemática.

3. A modelagem matemática no âmbito da educação matemática

De acordo com Boaler (2001), o uso da Modelagem Matemática contribui para o processo de aprendizagem situada da matemática e permite, aos alunos, a recontextualização do conhecimento proveniente de aprendizagens escolares significativas. O apontamento feito por Boaler (2001) é um dos argumentos articulados por Blum (1993) para justificar a inclusão da Modelagem no currículo das universidades e demais níveis de ensino como favorecedora da aprendizagem de matemática.

De acordo com Blum (1993), podem-se ressaltar argumentos para o uso da Modelagem²⁷ na escola com base em objetivos de formação geral e para o ensino, tais como motivação, desenvolvimento de habilidades de investigação, facilitação da aprendizagem, uso da matemática escolar em outros contextos e a reflexão sobre o papel sociocultural da matemática. Estes diferentes objetivos e argumentos a respeito da inclusão da Modelagem Matemática no ensino têm sido enfatizados de acordo com as diferentes concepções de Modelagem de pessoas e grupos de pesquisa (BARBOSA, 2007; BLUM, 1993) no domínio da Educação Matemática.

Diversamente ao que ocorre no âmbito da Matemática Aplicada, no campo da Educação Matemática a Modelagem concebe diferentes compreensões. No entanto, em relação à sua prática na sala de aula Hermínio e Borba (2010), por exemplo, afirmam que as diversas concepções da Modelagem têm em comum a noção de que o aluno precisa atuar concomitantemente ao professor, participando dos processos de escolha do tema e definição do problema a ser estudado (HERMÍNIO; BORBA, 2010).

Particularmente a escolha do tema em atividades de Modelagem Matemática é uma questão que vem sendo discutida há algum tempo articuladamente ao interesse do aluno pela atividade desenvolvida (JACOBINI, 2004; BASSANEZI, 2002; BURAK, 2004; HERMÍNIO, 2009; HERMÍNIO, BORBA, 2010; SOARES, BORBA, 2012). Neste sentido as pesquisas de Hermínio (2009) e Hermínio e Borba (2009; 2010) destacam-se por discutirem teoricamente a noção de interesse com base em condicionantes sociais, indicando algumas conseqüências deste debate para a Modelagem.

Tal como Hermínio e Borba (2010), Zawojewski, Lesh, e English (2003) assumem a dinamicidade do interesse de alunos em atividades de Modelagem Matemática, e afirmam

²⁷ Neste texto, o termo “Modelagem” é utilizado para denotar a Modelagem Matemática na Educação Matemática.

que os processos interativos mantidos entre os alunos podem ser estimulados pelo interesse dos estudantes, ao mesmo tempo em que a dinâmica do grupo pode retomar o interesse do indivíduo. Ambos os processos discutidos, o de interação e da dinâmica de interesses dos alunos, influenciam o processo de negociação de significados e, conseqüentemente as formas de participação dos sujeitos nas aulas, foco deste texto.

Neste sentido, no estudo desenvolvido, a escolha do tema da atividade de Modelagem foi de responsabilidade dos alunos envolvidos, assim como sugerem, por exemplo, Borba, Meneghetti e Hermini (1999), Burak (2004) e Meyer, Caldeira e Malheiros (2011). Ademais, ante ao objetivo a que nos propomos, assumimos aqui a Modelagem tal como sugerida por Barbosa (2001, 2003, 2007) que a compreende como “um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade” (2001, p. 6). Esta concepção teórica metodológica nos proporcionou encaminhamentos para a análise das ações dos alunos na sala de aula, tendo como foco a mesma unidade analítica considerada por Lave e Wenger (1991), a prática social dos indivíduos.

Para os autores, o termo “prática” refere-se essencialmente a fazer alguma coisa com significado, não em si mesma, mas inserida num contexto histórico e social; dando uma estrutura e significado às ações (WENGER, 1998). Tomar como unidade de análise as práticas desenvolvidas pelos alunos no desenvolvimento de atividades de Modelagem traz implicações importantes quanto à distinção deste ambiente de aprendizagem em relação a outros. Antes de tudo porque, como estas práticas são situadas, não se sabe “a priori” que ações serão desenvolvidas pelos alunos, nem sua ordem (BARBOSA, 2007).

Barbosa (2007) considera a noção de espaços de interação, caracterizados por meio dos discursos produzidos na interação social entre alunos e entre alunos e professor, a fim de definir as fronteiras do ambiente de aprendizagem da Modelagem na sua concepção, da de outros ambientes de aprendizagem que podem ser gerados nas aulas de matemática.

Reconhecer tal interação é essencial, na medida em que no reconhecimento das práticas dos sujeitos envolvidos neste ambiente é possível distinguir as vozes que são legitimadas, secundarizadas ou silenciadas (BARBOSA, 2007) por alunos e professor, definindo condições importantes para as ações dos alunos. Ademais, o reconhecimento das vozes que são mais ou menos legitimadas pode revelar os objetivos didáticos da atividade proposta. Barbosa (2007) e Barbosa e Santos (2007) apontam que algumas discussões podem ser mais ou menos privilegiadas no ambiente da Modelagem Matemática, de acordo com tais objetivos.

As discussões a que os autores se referem são as caracterizadas por Barbosa (2007) para identificar as rotas de Modelagem dos alunos. O conceito de rota de Modelagem é usado para denotar os processos empreendidos pelos alunos no ambiente da Modelagem.

Barbosa e Santos (2007) distinguem quatro tipos de discussões identificadas neste ambiente: técnicas, matemáticas, reflexivas e paralelas. As três primeiras são aquelas relacionadas à construção de um modelo matemático. Entendendo como modelo matemático qualquer representação matemática da situação de estudo.

As discussões técnicas são aquelas mantidas pelos alunos quando assumem hipóteses em relação à situação, e subsidiam a construção das suas representações matemáticas. Ao discutirem que tipo de representação melhor se adequa à situação de estudo, recorrendo a argumentos da matemática pura, as discussões dos alunos e professor são de cunho matemático. No processo de articulação das hipóteses levantadas, os resultados obtidos e sua interpretação em relação à situação-problema de estudo, são desenvolvidas discussões reflexivas. Além disso, Barbosa (2007) identificou um quarto tipo de discussão gerada no ambiente de Modelagem que não se adequa a nenhuma das três apresentadas: as discussões paralelas. Estas não apresentam uma relação clara com a construção de um modelo matemático, mas podem remeter aos alunos à reflexão da vida em sociedade.

A adoção desta concepção de Modelagem Matemática permite articular as ações desenvolvidas pelos alunos, neste ambiente de aprendizagem, às práticas que se desenvolvem de acordo com suas participações na atividade proposta. Isso é possível pelo fato de que as bases da concepção de Modelagem e da perspectiva de aprendizagem adotadas não se confrontam.

4. Percurso teórico metodológico da pesquisa

Considerando o objetivo do estudo e as características que assume, tal investigação insere-se no campo da pesquisa qualitativa, pois buscamos compreensões significativas para a interrogação formulada. Como tem caráter interpretativo, tal estudo não se preocupa em quantificar os resultados obtidos, mas valorizar o caráter processual do seu desenvolvimento (BOGDAN; BIKLEN, 1994). Para tanto nos reportamos a resultados obtidos a partir do desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática por uma turma composta por 12 alunos de um terceiro ano de um curso de Formação de Docentes da Educação Infantil e Anos iniciais do Ensino Fundamental, em nível médio, na modalidade normal, de uma escola pública localizada na região centro-oeste do estado do Paraná.

A atividade foi orientada pela primeira autora do texto e teve duração de 150 minutos (3 horas-aula). Para esta atividade os alunos, cujos nomes atribuídos são fictícios, foram divididos em três grupos – G1, G2, G3 – assim constituídos: G1) Matias, Rosana, Rogério, Antônio; G2) Natany, Paola, Lúcio, Leda; G3) Ana, Raiane, Daiane e Aline. A atividade foi conduzida de forma que, inicialmente a turma realizou uma discussão relativa ao tema da atividade, com a participação de todos e, em seguida, dividiram-se em três grupos. Na



discussão inicial, com toda a turma, foram levantadas hipóteses e determinados os processos matemáticos seguidos pelos grupos, posteriormente.

Ao fim da atividade, realizamos uma entrevista com cada aluno para obter mais informações quanto à participação deles no desenvolvimento da atividade. Dentre estas questões, duas foram essenciais na análise da avaliação das participações dos alunos: 1) como você avalia sua participação em relação à atividade? e 2) como você avalia a participação dos seus colegas de grupo, em relação à atividade desenvolvida?.

Os dados analisados foram coletados no primeiro semestre do ano de 2013 por meio da gravação das aulas em áudio e vídeo. Todas as discussões mantidas nas aulas foram transcritas e, somadas aos registros escritos dos alunos, e às anotações realizadas pelas pesquisadoras constituíram o material que foi analisado à luz de critérios articulados pelas autoras, com referências nas seis características, propostas por Winbourne e Watson (1998).

4.1. Interpretação das características para a constituição de lcop's

Na ausência de uma explanação que embasasse nosso processo de análise com relação às ações desenvolvidas pelos alunos, e com referência nas ideias de Lave e Wenger (1991), David e Watson (2008) e Wenger (1998), realizamos uma análise interpretativa das características apresentadas por Winbourne e Watson (1998) a fim de caracterizar a prática dos alunos como se desenvolvendo numa LCoP. As ideias centrais consideradas em relação a cada característica (C) são apresentadas a seguir.

C1. Os alunos verem-se, a si próprios, como funcionando matematicamente e para esses alunos fazer sentido “o ser matemático” como uma parte essencial de quem são naquela aula.

A primeira característica relacionada à constituição de uma LCoP refere-se às formas como os alunos veem a si próprios no desenvolvimento da aula, em virtude da situação de estudo. De acordo com Wenger (1998), quando estamos inseridos numa CoP onde somos considerados membros, podemos nos desenvolver de forma competente por sermos reconhecidos como tal. Neste sentido, embora exista uma relação de dependência entre os membros da comunidade, existe uma autonomia de cada um para ser responsável por seus próprios empreendimentos, concordar ou discordar dos empreendimentos criados pelos demais membros, sem a necessidade de encaminhamentos diretos por outros participantes.

Para analisar C1, observamos como os alunos assumem para si a responsabilidade pela condução da atividade proposta, e nos utilizamos das entrevistas realizadas a fim de evidenciar como os alunos avaliam suas próprias participações nas atividades.

C2. Por meio das atividades e papéis assumidos há reconhecimento público do desenvolvimento da competência naquela aula.

Para analisar C2, avaliamos de que forma a participação dos alunos é reconhecida pelos demais alunos. De acordo com Wenger (1998), participação refere-se ao processo de tomar parte e também às relações com os demais membros. Além disso, o autor considera que uma característica essencial da participação é o reconhecimento mútuo pela comunidade.

Neste sentido, procuramos evidenciar quais ações dos alunos, relacionadas às atividades desenvolvidas permitem reconhecimento na atividade; como cada membro tem sua participação reconhecida pelos demais. Além disso, recorreremos às entrevistas de forma a evidenciar, por meio das falas dos alunos, se existe ou não um reconhecimento público de competência deles, por meio dos papéis assumidos e atribuídos pelos membros dos grupos.

C3. Os alunos verem-se a trabalhar conjuntamente, com um propósito, para conseguirem um entendimento comum.

Para que possamos entender os conceitos apresentados na C3, tais como trabalhar conjuntamente, propósito e entendimento comum, nos reportamos ao conceito do domínio de uma CoP, pois é por meio dele que seus membros têm uma base comum que os inspira a participar e atribuir sentido às suas ações.

O domínio de uma CoP é o que constitui seus interesses, por este motivo não é fixo, ao contrário, é mutável e deve seguir as mudanças exigidas pelo contexto em que a comunidade está inserida. De acordo com Wenger (2006), ser membro de uma CoP implica num compromisso com o domínio e, portanto, uma competência partilhada que diferencia os membros de outras pessoas.

C4. Existem modos partilhados de comportamento, linguagem, hábitos, valores e uso de ferramentas.

A característica 4, apontada por Winbourne e Watson (1998), abarca parte das características já descritas por Wenger (1998), quando se refere às dimensões da prática como fonte de coerência da CoP, o repertório partilhado. Segundo Wenger (1998), o repertório partilhado abarca as formas de fazer as coisas, os gestos, ações, ferramentas que a comunidade produziu e/ou adotou e que se tornaram parte da sua prática.

Entendemos que no desenvolvimento da atividade de Modelagem, o repertório partilhado engloba todos os registros produzidos pelos grupos no decorrer das atividades. Isto porque, este material é o que expressa as discussões e o conteúdo mantido pelos

membros da comunidade, no decorrer da sua existência. Além disso, inclui as formas como os alunos se organizam para discutir e organizar as tarefas.

C5. A aula é, essencialmente, constituída por participação ativa dos alunos e professor.

Para analisarmos C5, descrevemos a aula nos baseando na seguinte questão: como se caracteriza a participação de professor e alunos no desenvolvimento da atividade de matemática?. A questão que norteia a análise desta característica permite a descrição da participação dos sujeitos envolvidos quanto ao desenvolvimento da atividade de Modelagem. Em relação à C5, analisamos se o direcionamento da aula foi determinado por ações de alunos e professor, ou ainda se foi determinado de forma individual por algum participante da aula (professor ou alunos).

C6. Os alunos e o professor podem ver-se engajados na mesma atividade.

Em relação à C6, nos reportamos ao conceito de empreendimento articulado. Wenger (1998) ressalta que o conceito de empreendimento articulado vai além dos objetivos traçados por uma comunidade, pois envolve a participação dos indivíduos num processo de negociação que pressupõe um comprometimento com a comunidade em si. A necessidade de se analisar os empreendimentos articulados quanto à C6, deve-se ao fato de que afirmando sua existência, podemos indicar que o engajamento de professor e alunos está na mesma direção.

Em relação à interpretação das características concernentes à constituição de LCoP, na aula de matemática, ressaltamos que tal ferramenta buscou contemplar a análise das relações mantidas entre os alunos, entre alunos e professor, a autoanálise da participação, e as formas de participação em relação à atividade proposta. Ainda, ressaltamos que uma LCoP é mais restrita em termos de tempo e espaço em que se desenvolvem quando comparadas a outras CoP's. Sendo assim, ainda que nos reportemos a conceitos referentes à CoP's em geral, estes são mais restritos na sala de aula, visto que suas referências são mais delimitadas.

5. Discussões acerca de um episódio exemplar

A atividade de Modelagem Matemática discutida teve como tema um projeto ambiental, desenvolvido na cidade em que a escola está localizada. O tema escolhido pela turma foi “questões ambientais”. Em consenso estabeleceu-se que este tema deveria abranger questões municipais. Na ocasião da primeira aula, em que o tema foi discutido, questionou-se a turma sobre qual questão ambiental gostariam de estudar. Os alunos lembraram que o município desenvolve vários projetos ambientais e destacaram o Projeto Troca-Verde, cujo objetivo consistia em coletar materiais recicláveis gerados pela

população, oferecendo em troca verduras orgânicas, cultivadas na horta municipal. Nas trocas-verde os habitantes poderiam trocar sacolas com materiais recicláveis, por sacolas com verduras orgânicas, ou por melancias:

Professora: Quais ações existem aqui na cidade, relacionadas a questões ambientais?

Rosana: Projeto Troca-Verde.

Professora: Mais algum?

Matias: A reciclagem também...

Professora: A reciclagem... Esse lixo que vai para a reciclagem vem de qual programa?

Matias: Você sabe Antônio?

Antônio: É ... do Cidade Limpa.

Professora: Ah::²⁸ sim. O programa Cidade Limpa envolve vários projetos, não é isso?

Antônio: É sim. O Troca-Verde, a Coleta Seletiva [...] o Troca agora não está funcionando, mas quando estava, tinha uma cooperativa que recolhia o lixo para ser comercializado.

Professora: Sei. E o que acontece, na cidade, quando as pessoas levam o lixo pra ser trocado no Troca-Verde?

Antônio: Quer dizer, o que era colhido, porque agora não tem mais. Ele ia pra cooperativa, da cooperativa vinha uma firma de reciclagem que comprava o lixo e levava embora pra reciclar.

Aline: Todo mundo queria verdura.

Professora: E em relação ao lixo que era arrecadado?

Antônio: A função era diminuir o acúmulo de lixo lá no lixão.

Ana: É um impacto positivo pra cidade.

No ano de 2013, o projeto não estava vigorando e este fato provocou discussões entre os alunos em relação à sua relevância para o município. Como Paola, Lúcio e Leda residiam numa cidade vizinha, questionou-se se os alunos conheciam o projeto. Diante da resposta de Lúcio, que afirmou não conhecê-lo completamente, Ana, Paola e Natany pediram para que Antônio explicasse sobre o funcionamento do projeto, pois este aluno participava ativamente do Troca-Verde. Por este motivo, foi reconhecido pelos colegas como alguém competente para discutir o assunto:

Antônio: o Troca-Verde é assim, dentro da sua cozinha, você separa o lixo orgânico do reciclável, o que é reciclável você empacota em sacolas, e aí nos dias marcados pela secretaria de meio ambiente você leva as sacolas; sai o anúncio: “olha Troca-Verde, em tal lugar e tal hora”, e aí a prefeitura que tem uma horta, no centro de produção rural; você leva 3 sacolas de recicláveis e ganha uma sacola de verdura [...] É um comércio. Você está comprando verdura, usando o lixo como moeda de troca.

²⁸ Nas transcrições, neste texto, o sinal “::” é utilizado para indicar prolongamento de vogal ou consoante e as palavras em negrito e em itálico, para indicar simultaneidade das diferentes linguagens (oral, escrita, gestual).

Os grupos questionaram o colega em relação ao destino dado aos materiais coletados pelo Troca-Verde. Antônio continuou a explicação: *“Vem uma firma buscar [...] De Campo Mourão buscava os papelões, de Cascavel, os plásticos. Não só de Cascavel. De Campina da Lagoa também. O que eles fazem? Essas sacolinhas eles derretem e fazem as mangueiras de água”*.

Os apontamentos iniciais feitos por Antônio conduziram a uma discussão que abarcou o processo de reciclagem de sacolas plásticas, o tempo de decomposição dos materiais recicláveis e do volume de lixo no aterro sanitário municipal. Nesta discussão, surgiram algumas questões relativas aos impactos do Troca-Verde para a cidade, como: *“Quanto de lixo é arrecadado nas Trocas?”* (LÚCIO); *“Quantas pessoas participam do Troca?”* (PAOLA); *“Quanto de verdura as pessoas recebem?”* (ANA). Algumas respostas para tais questões surgiram, sem argumentos que as fundamentassem: *“Uma tonelada, eu acho (quantidade de lixo arrecadado por Troca)”* (LÚCIO); *“O pessoal que participa das trocas é na base de 100 pessoas só”* (ANTÔNIO); *“Eu acho que são umas 400 pessoas. A gente passa na frente, às oito da manhã, tá lotado”* (ROSANA).

Com base nos apontamentos dos alunos, a professora questionou: *“Quais os impactos do projeto Troca-Verde para a cidade, em termos de resíduos coletados e verduras orgânicas distribuídas?”*, e mais: *“Se o projeto estivesse sendo realizado em 2013 qual seria a previsão de participantes para as Trocas?”*.

Tais questionamentos evidenciam a articulação das questões já levantadas pelos alunos em relação ao tema da atividade; ou seja, os apontamentos feitos pelos alunos direcionaram a formulação da questão diretriz da situação de investigação. Este é um atributo da característica 5 apontada por Winbourne e Watson (1998), pois foi em consequência da participação dos alunos e da professora que a atividade passou a ser constituída. Neste caso, as opiniões dos alunos foram fundamentais para a elaboração das questões de investigação.

Para o desenvolvimento da atividade, buscou-se junto a uma das fundadoras do projeto, enquanto secretária municipal de meio ambiente, os dados necessários para o estudo da situação-problema, apresentados no Quadro 1.

Os dados apresentados no Quadro 1 mostraram que as quantidades de verduras distribuídas apresentavam-se em caixas ao invés de sacolas. Antônio já havia explicado que as trocas se davam entre sacolas de verduras e sacolas de materiais recicláveis, portanto para que pudessem analisar as questões propostas, a turma concordou que em cada caixa caberiam, no mínimo três e no máximo cinco sacolas de verduras. Esta hipótese

foi levantada pela turma com fundamentos nos depoimentos dos alunos participantes do Troca-Verde. Esta informação era importante pela estratégia de estudo que estava sendo formulada pela turma. Matias havia proposto que a análise dos impactos do Troca-Verde fosse realizada em duas partes: “A gente pode calcular separadas, a quantidade de lixo arrecadado e depois a quantidade de verdura distribuída nesses anos” (MATIAS).

Quadro 1 – Dados do Projeto Troca-Verde disponibilizados aos alunos.

Tabela 1: Quantidade de trocas realizadas

Ano	Número de trocas
2008	9
2009	18
2010	22
2011	10
2012	9

Tabela 2: Quantidade de caixas de verduras trocadas anualmente

Ano	Verduras trocadas (quant. de caixas)
2008	813
2009	2160
2010	2640
2011	1240
2012	1299

Tabela 3: Melancias trocadas anualmente

Ano	Verduras trocadas (quant. de caixas)
2009	700
2010	1200
2011	1600

Tabela 4: Quantidade de materiais recicláveis arrecadados (em kg) anualmente

Ano	Materiais recicláveis arrecadados (kg)
2008	1844
2009	8100
2010	11000
2011	10400
2012	4020

Fonte: Relatórios do Projeto Troca-Verde, período de 2008 a 2012, cedidos pela secretária de Meio Ambiente.

A estratégia sintetizada posteriormente, de acordo com a negociação mantida entre professora e alunos, consistiu em delimitar o estudo nas seguintes etapas: a) estudo da quantidade de material reciclável arrecadada nas trocas, anualmente; b) estudo da quantidade de sacolas de verduras orgânicas distribuídas anualmente; c) cálculo da quantidade média de sacolas de verduras orgânicas distribuídas em cada troca no decorrer de cada ano; d) estimativa da quantidade de participantes do projeto segundo os dados obtidos anteriormente. Tal delineamento proposto para a realização do estudo representa parte dos empreendimentos articulados pela turma e professora, pois constituem componentes para atingir objetivos mais gerais traçados pelos alunos.



Os grupos G1 e G2 desenvolveram esta estratégia analogamente, diferindo-se entre si quanto às formas de discussões mantidas em cada grupo. Ambos representaram os dados considerados no estudo por meio de gráficos de barras e de estimativas relacionadas ao crescimento e decrescimento da quantidade de materiais arrecadados e verduras distribuídas, determinaram a quantidade de participantes do projeto, por troca, no ano de 2013. Ao final de tais análises, os grupos ainda estimaram quanto da população da cidade poderia ser atingida com a realização do projeto. Para isso, pesquisaram a população residente na sede do município em questão. G3 por sua vez, embora seguisse os passos determinados na discussão inicial não manteve uma negociação de significados que permitiu a construção de uma prática comum no grupo.

Em G1, o direcionamento dado por Matias fez com que o grupo o reconhecesse como matematicamente competente naquela aula, assim como Antônio também foi, mas por razões diferentes. Estes são traços da característica 2 referente à constituição de LCoP. A estratégia elaborada pelo grupo foi obtida pela negociação de significados entre seus membros e sintetizada por Matias. Rogério não participou das discussões mantidas pelos alunos, por meio da linguagem oral, entretanto suas manifestações escritas e gestuais evidenciaram o engajamento do aluno nas tarefas realizadas pelo grupo. Enquanto Matias, Rosana e Antônio discutiram como deveriam representar matematicamente a situação, Rogério articulava as ideias do grupo e as representava matematicamente, como reconheceu Antônio: *“O Rogério, ele não fala, mas ele faz. O importante é isso, uma pessoa que trabalha [...] Olha lá a folha escrita”* (ANTÔNIO).

Os registros escritos originados pelas discussões do grupo e pertencentes ao seu relatório final foram os realizados por Rogério. Ainda assim, sua ausência nas negociações fez com que sua participação fosse mais periférica do que a dos colegas de grupo, na medida em que mais aceitou as ações negociadas no grupo, do que participou delas. As relações em G1 também não foram sempre harmoniosas. Rosana, Matias e Antônio entraram em conflito, por exemplo, quanto à determinação de quantidade de trocas realizadas no ano de 2012.

No segundo semestre de 2012, poucas trocas foram concretizadas, em virtude da realização de uma gincana ecológica que envolveu todo o município, incluindo seus distritos, comunidades e habitantes de cidades vizinhas. No período de realização da gincana apenas uma troca foi realizada. Matias e Antônio defenderam o uso dos dados referentes à gincana na análise da situação. Rosana, entretanto, lembrou que o lixo coletado pela gincana não foi produzido apenas na sede do município, como haviam definido anteriormente:

Matias: Um pouco (de lixo arrecadado)²⁹ foi da cidade, não seria bom a gente considerar isso? Porque olha só, em 2012, teve só 4020 kg durante o ano? Não tá certo. E isso foi por causa da gincana.

Antônio: É, pode considerar então sim.

Rosana: [...] tem que ver a quantia certo disso. Se não me engano foi 120 mil (Kg de lixo), que foi na região, mas só aqui na cidade, eu não sei. É melhor estimar isso, do que usar os dados da gincana.

A negociação do grupo culminou na decisão de desconsiderar os dados da gincana, pois como pontuou Antônio posteriormente “*o sentido do projeto era que as pessoas levassem o lixo até a troca, e não que esperem alguém ir buscar na sua porta, como foi na gincana*”. Assim como no trecho anterior, a fala de Rosana direcionou os demais membros do seu grupo em outros momentos. A ideia de organizar os dados disponíveis numa tabela para analisar seu comportamento, por exemplo.

Em outro momento, Matias percebeu que a quantidade de lixo arrecadada cresceu até 2010, e decresceu a partir de então. O grupo discutiu e percebeu que os dados poderiam ser representados por meio de uma função polinomial de segundo grau. Rosana questionou: “*E se, por exemplo, a gente estivesse em 2014, e em 2013 essa quantidade de lixo arrecadado tivesse sido maior que o de 2012? Como seria isso? Como eu coloco os dados?*”.

Diante da suposição, o grupo solicitou esclarecimento por parte da professora que direcionou uma discussão a respeito da determinação de uma função definida por partes. A questão levantada por Rosana a legitimou, naquele momento, como matematicamente competente por ter provocado uma discussão de um conceito matemático que poderia ser usado pelo grupo, mas era desconhecido até aquela ocasião. Esta foi uma discussão paralela mantida entre professora e alunos, pois embora se referisse a aspectos matemáticos, não se caracterizou como uma discussão matemática referente à construção de um modelo matemático para aquela situação de estudo. Este foi um dos momentos em que os alunos solicitaram encaminhamento da professora, pois durante a atividade assumiram para si a responsabilidade pelas tarefas, como as descrições indicaram.

A participação da professora, nesta atividade, se deu de modo a suscitar discussões no grupo, levantando questões que os conduzisse a negociações quanto à prática da atividade de Modelagem Matemática que estava sendo construída. Um dos momentos em que a participação da professora foi essencial na atividade ocorreu quando os alunos concluíam-na sem realizar uma interpretação dos dados numéricos obtidos; discussão essencial na perspectiva sociocultural da Modelagem. O grupo concluiu quantas pessoas, em média, participavam das trocas realizadas entre 2008 e 2012, e estimaram quantas

²⁹ Usaremos parênteses simples para indicarmos hipóteses e ou complementações do que ouvimos e parênteses duplos para inserirmos comentários das autoras.

participariam no decorrer de 2013. Por outro lado, não haviam discutido quais os impactos destes resultados para o município.

Nesta ocasião, o incentivo da professora foi o que suscitou a discussão representada pelo trecho a seguir:

Professora: Mas e a interpretação desses dados? O que significa essa quantidade de participantes do Troca-Verde, para a cidade? No que isso implica?

Antônio: Se você considerar a população daqui, que tem cerca de 7000 pessoas, cada troca atenderia, quantos por cento da população?

Matias: Praticamente 70%, porque vimos que atende cerca de 4860 pessoas.

Rosana: Então o projeto atende parte relevante da cidade.

Matias: Muito mais do que eu imaginava, mas isso se cada um levar só uma sacola pra casa. Então esse é o número maior de pessoas que o Troca-Verde poderia atender.

Antônio: É muita gente. Sem contar no tanto de verduras frescas que distribui isso. Dá pra estudar isso ainda.

Matias: [...] impactos são grandes porque muito lixo é arrecadado, mais da metade da população e também distribui verduras pra isso tudo de gente, de famílias.

Antônio: O projeto parou por questões políticas e todo mundo saiu perdendo.

Este trecho refere-se a uma discussão reflexiva dos alunos, pois recorre a hipóteses consideradas anteriormente e analisa a situação-problema, com base no estudo matemático. Tal discussão foi realizada porque houve engajamento mútuo dos alunos e da professora, com um mesmo objetivo, na atividade de Modelagem Matemática proposta. O engajamento de alunos e professora, embasado num mesmo domínio que se constituía, proporcionado pela discussão da situação-problema, favoreceu a construção de um repertório compartilhado neste grupo. Este repertório inclui tanto as formas de organização do grupo, a fim de negociar as suas ações quanto o material produzido pelos alunos. Trata-se do repertório partilhado pelo grupo, e evidencia como a característica 4, apontada por Winbourne e Watson (1998) se fez presente neste grupo.

Em G2, um repertório partilhado também pôde ser identificado, pois as discussões mantidas entre seus membros foram bastante dinâmicas. Os membros de G2 negociaram todas as ações realizadas, desde a forma de organização dos registros escritos até os aspectos reflexivos, matemáticos e técnicos da atividade. Inicialmente, Paola convidou o grupo a representar por meio de um gráfico de barras a quantidade de lixo arrecadado anualmente. Lúcio construiu o gráfico com a colaboração de Leda, Natany e Paola, que observou: *“Agora temos que ver, olha o que está acontecendo: aumenta, aumenta...depois diminui, diminui... [...] nossa que lindo”*.

Ao analisar a representação gráfica, Natany sugeriu que o número de trocas realizadas em 2012 fosse dobrado, visto que a quantidade de trocas referia-se àquelas realizadas em apenas um semestre. Paola discordou de Natany que argumentou que tal

aproximação facilitaria as análises do grupo. As alunas discordaram em outros momentos das aulas, como quando discutiram como as aproximações em relação à quantidade de trocas realizadas em 2012, deveriam ser realizadas. Tal como no G1, G2 discutiu sobre as influências da realização da gincana ecológica no projeto Troca-Verde:

Professora: E como isso (a realização da gincana ecológica) se reflete no projeto? Quanto às trocas, quanto às verduras distribuídas ... quanto ao lixo arrecadado?

Natany: Na verdade esse lixo não foi trocado por verdura, foi trocado por pontos na gincana [...] é melhor dobrar os dados de 2012, assim como a gente fez com 2008.

A justificativa dada por Natany, de que os resíduos coletados foram trocados por pontos para as equipes e não por verduras, convenceu Paola e Leda de que os dados referentes à gincana não deveriam ser considerados. Com referência na organização gráfica dos dados, Lúcio sugeriu que o grupo calculasse as diferenças entre as quantidades de lixo arrecadadas de 2008 a 2012, para que pudessem estimar a quantidade de lixo que poderia ser recolhido nas trocas em 2013. Após o cálculo das diferenças entre as quantidades de lixo arrecadadas anualmente de 2008 a 2012, o grupo concluiu que a mesma decairia até 2013; por meio das aproximações realizadas, estimaram que a quantidade anual de lixo angariado em 2013 seria de aproximadamente, 6020 kg.

Esta negociação foi bastante conflituosa no grupo, pois Paola discordava que a quantidade de lixo recolhida em 2013 seria menor que a coletada em 2012. Lúcio e Natany argumentaram à Leda e Paola recorrendo à análise da representação gráfica da situação:

Lúcio: [...] Eu acho que a tendência de 2012 e 2013 é cair, porque aqui ((na representação gráfica)) já mostra que tá caindo.

Paola: Eu sei, mas espera Lúcio. Se não tivesse tido a gincana, talvez a quantidade de lixo arrecadado em 2012 teria aumentado. Caiu por causa da gincana; se não tivesse gincana, não atrapalharia.

Lúcio: Mesmo assim cairia, *porque aqui em 2011 já caiu*, olha. [...]

Natany: Então vai cair, em 2013!

Lúcio: Vamos ver qual valor seria pra 2013.

Paola: Vai diminuir uns 2000 e poucos (kg).

Natany: 6020? 6010? 6000?

Leda: 6022 (kg)!

Lúcio: Então vai pra 6022? Em 2013 vai pra 6000?

Natany: Não...vai dar... tá diminuindo de 2000 quilos em 2000.

Lúcio: 6022(kg)?

Natany: É 6020 (kg), mas não pinta esse ((a barra que representa o ano de 2013)) no gráfico, deixa em branco.

Este trecho de discussão, mantida entre os membros do G2, ilustra a forma como conduziram o desenvolvimento da atividade de Modelagem. Os alunos discutiram entre si todas as ações que seriam desenvolvidas, evidenciando o engajamento mútuo na atividade de Modelagem, indicando como os alunos trabalharam conjuntamente para conseguirem um entendimento comum. Neste processo nem sempre harmonioso, as negociações contribuíram para que os alunos confiassem uns nos outros no processo de análise da situação.

Da mesma forma que na primeira parte do estudo, a segunda parte foi realizada por meio da participação dos quatro alunos, nas negociações:

Leda: Vou colocar aqui no relatório, que consideramos que cabem 5 sacolas de verduras em cada caixa.

Paola: Foi diminuindo a cada ano.

Natany: A gente tem que saber a quantidade de sacolas distribuídas no ano, depois em cada troca, pra daí a gente saber quantas pessoas ou famílias, participaram do Troca-Verde, pra gente ver os impactos da cidade.

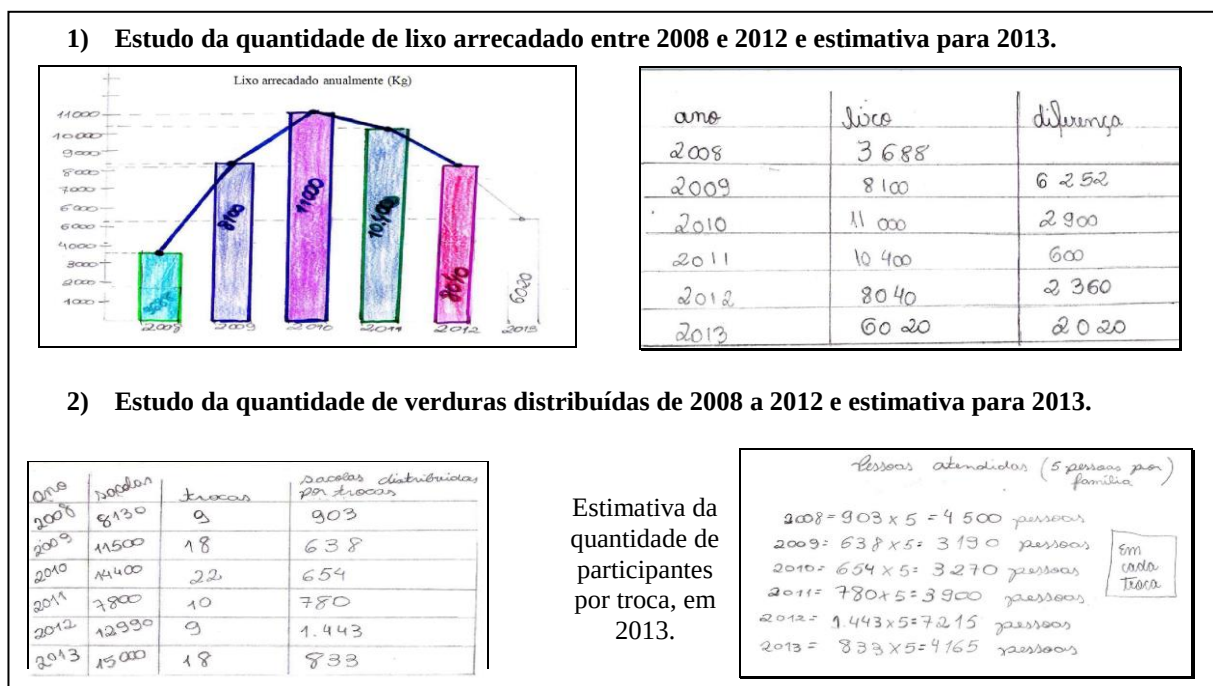
Leda: Ah:: quantas pessoas serão atendidas... depende de quantas sacolas a pessoa leva também; cada 3 de lixo, uma de verdura.

Natany: Pensa numa família.

Lúcio: Pensa numa família com 5 pessoas, em média.

O excerto anterior apresenta algumas conjecturas consideradas pelo grupo: a) em cada caixa são agrupadas cinco sacolas de verduras orgânicas; b) a quantidade máxima, de participantes do Troca-Verde pode ser estimada por meio da quantidade de sacolas distribuídas por troca; c) considera-se uma família com cinco pessoas, para estimar o percentual da população atingida pelo programa. Os processos percorridos pelo grupo 2, que proporcionaram uma interpretação dos dados referentes ao projeto e análise dos seus impactos, estão apresentados na Figura 2:

Figura 2 – Registros do processo percorrido pelo G2.



Fonte: Registros construídos pelos alunos do G2.

As hipóteses assumidas pelo grupo, as negociações que culminaram nas representações matemáticas da situação, e todo o material apresentado na Figura 2, mostra “os modos partilhados de comportamento, linguagem, hábitos, valores e uso de ferramentas” (WINBOURNE; WATSON, 1998, p. 103) do G2. Desse modo, essas ações caracterizaram não somente o interesse dos estudantes pela atividade, mas também o engajamento destes, e da professora, no mesmo domínio determinado pela atividade de Modelagem Matemática proposta. Isso foi essencial para que a atividade fosse constituída por meio da participação dos grupos, e não só pelas ações da professora. Esta preocupação com o desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática, que constitui o domínio da possível LCoP, não pôde ser evidenciado nas ações do G3, nesta atividade.

No G3, as ações das alunas desenvolviam-se apenas com o estímulo da professora. Embora Ana se mostrasse interessada na atividade, e se engajasse nela, não houve um engajamento mútuo do grupo, empreendimentos articulados ou repertório partilhado. O material produzido pelo grupo foi constituído pelo trabalho individual das alunas. Com exceção da representação gráfica feita por Daiane, os registros escritos produzidos no grupo foram feitos por Ana. Além disso, não decorreram da negociação de significados no

grupo. No decorrer de toda a atividade questionamentos foram feitos ao grupo de modo a suscitar negociações, entretanto respostas eram dadas à professora sem uma negociação, ou reflexão sobre elas, como no fragmento a seguir:

Professora: E o que vocês observaram (quanto à quantidade de lixo arrecadado anualmente nas trocas)?

Ana: Diminuiu.

Raiane: Ela foi aumentando né...

Professora: Aumentou ou diminuiu?

Raiane: Aumentou até 2012.

Professora: Até 2012? Será?

Ana: Sobe até 2010, depois decai. Se fosse por reta ((função linear)), tinha que ser duas retas.

A resposta de Raiane pareceu ser dada com apoio nas suas impressões iniciais acerca do funcionamento do projeto Troca-Verde, e não com fundamentos na análise dos dados disponibilizados. Embora as alunas tivessem se mostrado interessadas pelo tema da atividade na discussão inicial, este interesse não foi evidenciado quando a responsabilidade pela condução da atividade passou a ser do grupo, conforme evidenciado em trechos de conversa entre as alunas e Ana, ou entre as alunas e a professora.

Soares e Borba (2012), ao discutirem a perda de interesse de alguns alunos do curso de Ciências Biológicas por um tema abordado por meio da análise de um modelo matemático para um fenômeno biológico, levantaram três conjecturas relacionadas à possível perda de interesse dos alunos: o volume de tarefas, mudanças associadas ao uso de tecnologias e a estrutura da proposta pedagógica utilizada. Nesse caso, a opção por um tema que as alunas já conheciam bem pode ter influenciado negativamente o interesse pelo estudo, ou seja, o aspecto da proposta pedagógica pode não ter contribuído para a manutenção do interesse pelo tema (SOARES; BORBA, 2012).

O extrato a seguir refere-se a mais uma das tentativas da professora em provocar questionamentos que poderiam culminar numa discussão no grupo:

Professora: Será que dá pra gente saber quantas pessoas foram atendidas pelo projeto?

Aline: Que “pergunteiro” professora.

Raiane: Dá, é só saber quantas sacolas foram distribuídas.

Aline e Daiane: Isso.

Ana: Mas quantas sacolas cada pessoa ganha?

A forma como Aline afirmou que a professora faz um “pergunteiro” mostrou sua insatisfação em relação àquela situação. Raiane e Daiane embora respondessem ao questionamento da professora, parecem ter respondido para mostrar um interesse que não foi evidenciado nas suas ações, como se pode exemplificar com o trecho a seguir:



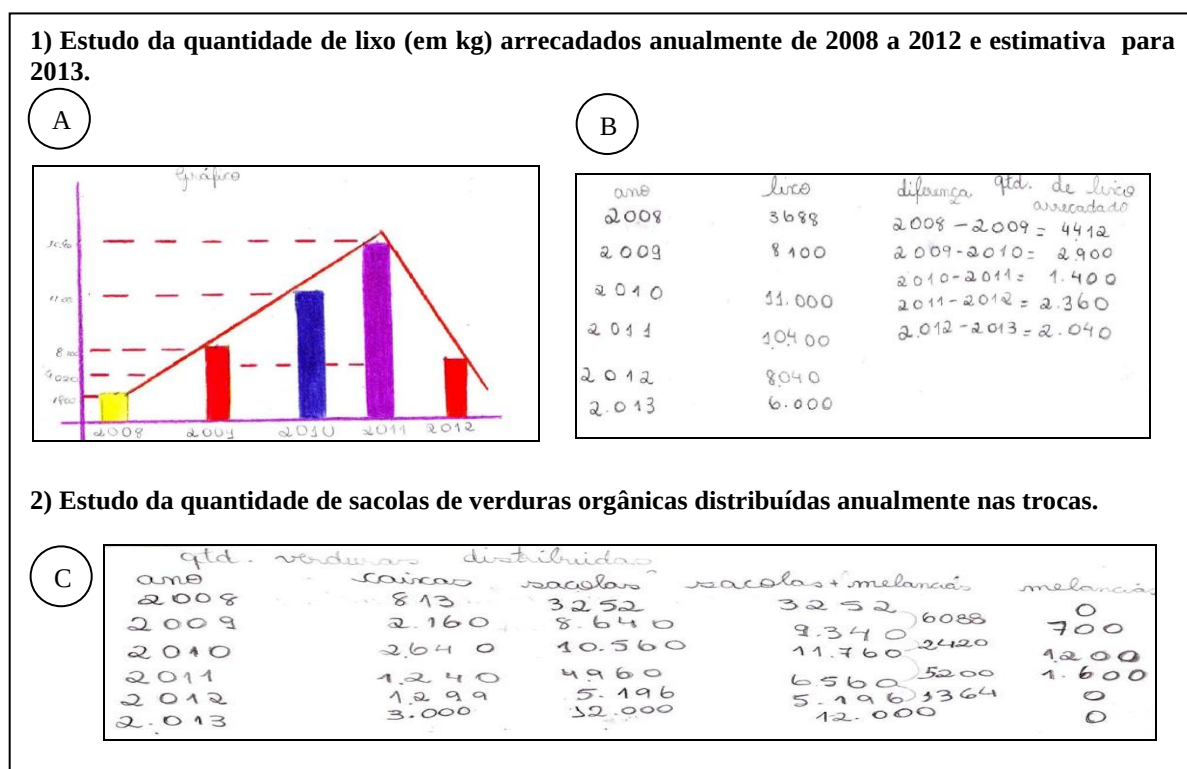
Ana: Professora, eu tô vendo aqui, tô analisando os dados pra organizar na tabela. Vamos me ajudar, por favor (meninas)?

Raiane: Para facilitar... Em 2008, 10 mil e 200...

Ana: Gente, me ajuda!

O excerto transparece a ausência do engajamento mútuo do grupo, apesar da insistência de Ana em trabalhar conjuntamente. Influenciada pelas discussões dos outros grupos, Ana analisou a situação proposta seguindo a mesma estratégia de G1 e G2. A participação das outras alunas foi pequena e pouco contribuiu para a análise da situação. Neste sentido, o material apresentado na Figura 3 representa os processos percorridos por Ana, com alguns apontamentos de Raiane e Daiane, até encontrar uma “resposta” às questões formuladas.

Figura 3 – Registros do processo percorrido pelo G3.



Fonte: Elaborado pelas alunas de G3.

Diferente dos outros grupos, G3 procurava uma resposta para as questões, e não uma análise da situação de estudo. A diferença entre tais interesses culmina na escassez de discussões reflexivas em relação à situação, essencial no desenvolvimento de atividades de



Modelagem, de acordo com Barbosa (2007). Este material produzido no grupo, não pode ser considerado o repertório partilhado por ele, pois não houve o compartilhamento de uma prática construída pelas alunas, ou a criação de empreendimentos articulados entre elas que permitisse a constituição de um repertório partilhado.

Na Figura 3, o registro A foi feito por Daiane, no entanto sua análise e os registros B e C foram feitos essencialmente por Ana, sem negociação de significados do grupo. As alunas desenvolveram ações que evidenciaram uma preocupação em satisfazer o pedido da professora, terminando logo a tarefa proposta, sem uma análise da situação nas suas dimensões extramatemáticas. Isso indica que os interesses da professora e dos alunos não foram os mesmos, nesta atividade.

As discussões reflexivas, por exemplo, não foram realizadas ao fim das análises dos processos matemáticos. As alunas terminam o relatório de estudo ao concluírem que cerca de 12000 sacolas de verduras poderiam ser distribuídas em 2013, sem justificar o critério utilizado para a estimativa da quantidade de sacolas distribuídas, ou o significado desta quantidade para a cidade e para o projeto Troca-Verde. Apesar do esforço da Ana para que o grupo G3 desenvolvesse a atividade, as ações e falas do grupo indicam que as alunas o fizeram sem interesse e mais por obrigação, o que revela que as alunas não tomaram para si o problema posto inicialmente na sala, quando todos os alunos participaram.

6. Discussão

Com base nas descrições e análises realizadas evidencia-se que, diferentemente do que ocorreu em G1 e em G2, as participações das alunas que compuseram G3 caracterizam-se mais quanto a não participação. Ou seja, com exceção de Ana, as participações de Aline, Raiane e Daiane nesta atividade se deram de forma marginal. Este tipo de participação difere-se da participação periférica, como foi o caso de Rogério em G1. No caso de Rogério pode-se identificar um nível de participação que garante sua inclusão no grupo e na atividade, por meio do seu engajamento na aula, já no caso destas alunas não se pode identificar engajamento no decorrer do processo da atividade.

No caso de G3, embora as alunas estivessem aparentemente engajadas na atividade, isto não aconteceu quando a responsabilidade pelos processos de problematização e investigação foi transferida ao grupo. Ana mostrou-se engajada na atividade, mas Aline, Daiane e Raiane não. Este fato impediu que houvesse um engajamento mútuo entre as alunas, ou mesmo a criação de empreendimentos articulados. Consequentemente, não existiu uma prática compartilhada pelos membros, que permitisse a constituição de um repertório partilhado.

Em G1 e G2, os processos de negociação de significados que ocorreram internamente aos grupos também definiram diferentes formas de participação dos seus



membros. Em G1, Matias e Antônio, por exemplo, tiveram uma participação plena desde o início da atividade, em virtude dos seus conhecimentos matemáticos e sobre o projeto Troca-Verde, respectivamente. Rosana, por sua vez, no decorrer da atividade assumiu participação cada vez mais efetiva, na medida em que participava mais ativamente dos diversos tipos de discussões que emergiram no seu grupo. Em G2, os conflitos gerados por seus membros garantiram-lhes tanto o reconhecimento público dos colegas quanto participações que se tornaram plenas no decorrer da atividade, como evidenciado na seção anterior.

No Quadro 2, apresentamos uma síntese do desenvolvimento dos grupos G1, G2 e G3 na atividade de Modelagem Matemática, a fim de evidenciar as discrepâncias entre as ações e participações dos alunos que compuseram G1 e G2, das que constituíram G3, de acordo com as características definidoras de uma LCoP.

Quadro 02 – Síntese das ações da turma na atividade de Modelagem, quanto às características definidoras de uma LCoP.

Características definidoras da constituição de uma LCoP	Ações desenvolvidas pelos alunos nas atividades de Modelagem	
	Grupos G1 e G2	G3
C1) Os alunos verem-se, a si próprios, como funcionando matematicamente e para esses alunos fazer sentido “o ser matemático” como parte essencial de quem são naquela aula.	Os alunos assumiram a responsabilidade pelo direcionamento da atividade, ainda que reconhecessem as dificuldades do processo, como a diferença entre as aulas de matemática às quais estavam habituados das pautadas na Modelagem Matemática: <i>“Eu não gosto muito de Matemática. As aulas me ajudaram, achei mais fácil.”</i> (LEDA, G2). <i>“Eu achei que até eu, sem saber de nada, ajudei eles, e ensinei um monte de coisas que eles não sabiam também né. Não por... não é a área deles.”</i> (ANTÔNIO, G1). <i>“Eu ajudei, participei, colaborei, minhas opiniões fizeram diferença pro grupo”</i> (LÚCIO, G2).	Ana reconheceu-se como funcionando matematicamente naquela atividade, por meio das suas contribuições ao grupo: <i>“Eu conhecia os conteúdos, mas não sabia usar. A gente adquiriu outros conhecimentos deles, que eu não conhecia, com essas aulas. Minha participação foi boa”</i> (ANA). Aline e Raiane, no entanto, reforçaram o que havia sido observado nas aulas: contribuíram pouco para o estudo da situação-problema: “[...] Teve participação diferente. Eu mesma faltei, bem, não foi tão boa...” (ALINE). <i>“Não, acho que foi igual (a participação das alunas), algumas vezes algumas pessoas se destacavam, como a Ana...”</i> (RAIANE).



C2) Por meio das atividades e papéis assumidos há reconhecimento público do desenvolvimento da competência naquela aula.	Os alunos reconheceram-se como membros importantes dentro da atividade proposta, afirmando que a participação de todos foi essencial: <i>“No meu grupo a participação foi muito boa. Não tinha como não participar. E teve uma união entre nós. E outra, eu peguei pessoas que gostam de Matemática, o Rogério, o Matias... pra mim foi bem, porque como eu não vou bem, com eles acabou que eu caminhando junto.”</i> (ANTÔNIO, G1). <i>“Na sala não tem essa coisa de pergunta, todo mundo fazendo junto, a discussão. Isso ajudou.”</i> (ROSANA, G1). <i>“Eu acho que a Natany me ajudou mais, e também ajudou o grupo.”</i> (LEDA, G2).	Tal como evidenciado também em C1, as alunas não reconheceram as participações umas das outras como essenciais para o desenvolvimento da atividade: <i>“Bom, eu tentei levar sempre a sério, mas tem pessoas que não levam tão a sério, tem outras que tem muita dificuldade em Matemática, mas a minha participação foi importante [...] Eu acredito que a Raiane participou bastante. A Dai, participou pouco porque ela tem muita dificuldade e isso não é só nessa aula, é em todas, ela fica fugindo de participar.”</i> (ANA). <i>“A Daiane tem muita dificuldade que acompanha ela, mas a gente ajudou ela igual”</i> (RAIANE).
C3) Os alunos verem-se a trabalhar conjuntamente, com um propósito, para conseguirem um entendimento comum.	A preocupação evidenciada foi a análise dos impactos do Projeto Troca-Verde para a cidade, ou seja, a análise dos problemas formulados pela turma, por meio do ferramental matemático. Tal preocupação estimulou a presença de discussões reflexivas nos grupos além de propiciar aos alunos um entendimento da relação da matemática com temas aparentemente não matemáticos. As ações e falas dos alunos evidenciaram que estavam agindo num mesmo domínio, constituído pela atividade de Modelagem Matemática, no âmbito da Educação Matemática.	A preocupação evidenciada foi finalizar a tarefa proposta pela professora. Neste sentido, as ações realizadas no grupo visavam executar tarefas estabelecidas anteriormente, sem reflexão sobre elas. Desta forma, G3 pareceu atuar no domínio das aulas de matemática nas quais uma prática é construída pelo professor e adotada pelos alunos (aulas tradicionais) em detrimento da proposta da Modelagem Matemática. Este fato dificultou a busca por um entendimento comum da situação de estudo, no grupo.
C4) Existem modos partilhados de comportamento, linguagem, hábitos, valores e uso de ferramentas.	A estratégia de estudo traçada pela turma mostra que a mesma foi decorrente da sua negociação. Posteriormente, cada grupo negociou quais ações seriam necessárias para que a situação fosse analisada. Tais processos decorreram das negociações mantidas pelos alunos, no qual agregaram significados a elas. Neste sentido, o repertório matemático partilhado pelo grupo não foi fruto de ações isoladas e particulares de cada aluno no grupo, mas das ações do grupo. Exemplo do compartilhamento de ideias entre os alunos se deu na discussão inicial, quando a turma negociou qual seria o número de sacolas de verduras orgânicas disponibilizadas em cada caixa. Esta informação foi negociada e utilizada pelos grupos.	Ana mostrou-se engajada na atividade, mas Aline, Raiane e Daiane não. Este fato impediu que houvesse um engajamento mútuo entre as alunas, ou mesmo a criação de empreendimentos articulados. Consequentemente não existiu uma prática que foi compartilhada pelos membros, que permitisse a constituição de um repertório partilhado. Os registros realizados por G3 foram fragmentados, marcado pela divisão de tarefas. Daiane fez a representação gráfica, como foi sugerido por Paola, na discussão inicial; Ana continuou o processo de desenvolvimento da atividade, partindo da representação gráfica, sem a participação das colegas.



C5) A aula é, essencialmente, constituída por participação ativa dos alunos e professor.	O tema da atividade de Modelagem Matemática (Projeto Troca-Verde), assim como os processos de problematização e investigação foram realizados pelos alunos, juntamente com a professora, como os alunos reconheceram: “[...] <i>não tinha nada pronto. A gente que tinha que achar algo pra chegar num resultado e nas outras aulas eles são mais prontos</i> ” (LÚCIO, G2); “ <i>Quando já tem o problema é mais difícil. Do jeito que foi ficou mais fácil.</i> ” (PAOLA, G2).	Nem todas as alunas engajaram-se na atividade de Modelagem Matemática ainda que fossem elas próprias as definidoras do encaminhamento da atividade em questão, como se pôde evidenciar na seção anterior.
C6) Os alunos e o professor podem ver-se engajados na mesma atividade.	O engajamento de G1 e G2 assim como o da professora, efetuou-se no sentido de entender a situação-problema com base numa análise matemática dela. Os empreendimentos articulados nos grupos caminharam neste sentido e podem ser interpretados como as etapas negociadas pelos grupos até chegarem numa reflexão sobre o tema.	Embora as alunas desse grupo tivessem participado da discussão inicial, em que etapas do processo de estudo foram estipuladas, tais etapas não se constituíram como empreendimentos articulados, pois Daiane, Aline e Raiane não se engajaram na atividade. Desta forma, os empreendimentos identificados na atividade, em G3, não foram articulados pelo grupo e professora, mas originados pelas ações, essencialmente, de Ana.

Fonte: Elaborado pelas autoras deste texto.

A guisa de conclusões

A guisa de conclusões retomamos o objetivo deste artigo, que se centrou em investigar o sucesso de uma atividade de Modelagem Matemática de acordo com as formas de participação dos alunos nela envolvidos. Para tanto, analisamos as ações de estudantes convidados a constituir um ambiente de aprendizagem pautado no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem, de acordo com os pressupostos da constituição de uma LCoP.

O processo de análise realizado indicou que o aceite inicial do convite para o ambiente de aprendizagem da Modelagem Matemática, pelos alunos, é insuficiente para alegar seu engajamento e participação plena na atividade. No episódio apresentado, ainda que os próprios alunos fossem os responsáveis pela escolha do tema da atividade, pelo seu delineamento matemático e caminhos seguidos, isto não impediu que as alunas do grupo G3, não se engajassem e constituíssem uma participação marginal nas aulas.

As pesquisas de Hermínio (2009), Hermínio e Borba (2010) e Soares e Borba (2012), por exemplo, discutiram relações entre a escolha do tema e responsabilidade pela condução



do trabalho em Modelagem, pelos alunos, e o seu interesse nela. Além disso, essas pesquisas apontaram dimensões e consequências da escolha dos temas pelos alunos neste tipo de atividade. Esse estudo, entretanto, diferencia-se dos citados na medida em que analisamos de que forma o engajamento dos alunos definiu suas formas de participação em atividades de Modelagem. Nesse sentido, embora a dimensão interesse seja intrínseca aos conceitos estudados, nosso foco está na discussão sobre a participação para além do interesse demonstrado pelos alunos.

As análises apresentadas nos permitem inferir que ainda que o interesse pela atividade de Modelagem ocorra durante todo o seu processo, as formas de participação dos seus membros podem não ocorrer de formas semelhantes. No grupo G1, por exemplo, embora demonstrasse interesse pela atividade, a forma como Rogério engajou-se nos processos de negociações de significados, garantiu-lhe uma participação periférica nela. Matias, Antônio e Rosana, entretanto, participaram de forma plena da atividade de Modelagem, ainda que por caminhos divergentes entre si.

Em G3, embora o primeiro convite fosse aparentemente aceito pelas alunas, na medida em que participaram de forma ativa da discussão inicial, em que o início dos processos referentes ao estudo da situação-problema foram delimitados, a diminuição do interesse de Aline, Daiane e Raiane pela atividade, interferiram negativamente nas suas formas de participação. Do ponto de vista da constituição de uma LCoP, a ausência de posicionamento das três alunas no processo de negociação de significados na atividade, impediu a constituição de empreendimentos articulados, engajamento mútuo e repertório compartilhado, pois apenas Ana mostrou-se engajada. Desta forma, Aline, Raiane e Daiane tiveram participações marcadas pela marginalidade na atividade de Modelagem.

Este fato traz implicações quanto à atividade de Modelagem, pois embora resultados adequados fossem apresentados no fim da atividade pelos três grupos constituídos, as evidências apontadas no desenvolvimento da atividade pelo grupo G3, mostram que as tarefas foram cumpridas de forma mecânica e, seguindo um protocolo característico da aula tradicional, em que o professor constrói uma prática que é adotada pelos alunos.

A principal divergência quanto à participação dos alunos que constituíram G1 e G2 e as que constituíram G3 se deu no sentido de que, em G1 e G2 a prática da aula foi construída por meio das negociações de significados mantidas nos grupos e entre eles e a professora. Este fato permitiu que diversos tipos de participação dos membros fossem identificados, em decorrência da natureza dos processos interativos. Em G3, uma prática foi construída fora do grupo e adotada pelas alunas. Em outras palavras, enquanto G1 e G2 procuraram construir uma prática pautada no domínio da Modelagem Matemática, ou seja, trabalharam num mesmo domínio de conhecimentos, G3 procurou executar tarefas pré-estabelecidas.

Hermínio (2009) discute algumas consequências negativas do trabalho em grupo em atividades de Modelagem apontando que, em alguns grupos, a vontade de determinado aluno pode se sobressair e influenciar o restante, deixando todo o trabalho com quem “teve a idéia do tema” (HERMÍNIO, 2009, p. 60). Particularmente no caso do grupo G3, todo o grupo participou do processo de negociação da escolha do tema, mas somente Ana assumiu a responsabilidade pelo desenvolvimento do problema.

Essas observações suscitam algumas reflexões quanto às diferentes formas de condução da atividade de Modelagem Matemática na sala de aula que favorecem a aprendizagem da matemática com vistas à formação do pensamento criativo, à iniciativa e formas de reconhecimento no trabalho em grupo. Tais ações, implícitas da atividade de Modelagem Matemática são cerceadas quando se privilegia o resultado final em detrimento das ações características da constituição de uma LCoP.

Nesta perspectiva, espera-se também trazer reflexões quanto às experiências que em uma mesma atividade podem ser caracterizadas tanto quanto aos aspectos positivos quanto não positivos³⁰. E, nesse contexto, concordamos com Araújo, Campos e Freitas (2012) que experiências positivas e não positivas coexistem e tanto influenciam a realização de pesquisas e reflexões sobre a prática quanto podem amenizar a distância entre prática e pesquisa.

Referências

- ARAÚJO, J. L.; CAMPOS, I. S.; FREITAS, W. S. Prática Pedagógica e Pesquisa em Modelagem na Educação Matemática. In: V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil. **Anais**, 2012.
- BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática: concepções e experiências de futuros professores**. 2001. 253 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.
- BARBOSA, J. C. Modelagem matemática na sala de aula. **Perspectiva**, Erechim, v. 27, n. 98, p. 65-74, jun. 2003.
- BARBOSA, J. C. A prática dos alunos no ambiente de Modelagem Matemática: o esboço de um framework. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L.; **Modelagem Matemática na Educação Brasileira: pesquisas e práticas educacionais**. Recife: SBEM, 2007, p. 161-174.
- BARBOSA, J. C.; SANTOS, M. A. Modelagem Matemática, perspectivas e discussões. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 9., Belo Horizonte. **Anais...** Recife: SBEM, 2007.

³⁰ Tal como Araújo, Campos e Freitas (2012) consideramos como aspectos não positivos aqueles que se distanciam do que foi planejado pelo professor, quanto às suas práticas pedagógicas.



BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2002.

BOALER, J. Mathematical Modelling and New Theories of Learning. In: **Teaching Mathematics and its Applications**, Vol. 20, Issue 3, 2001 p. 121-128.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Tradução de Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Portugal: Porto Editora, 1994. Tradução de: Qualitative Research for Education: an introduction to theory and methods.

BOYLAN, M. School classrooms: Communities of Practice or Ecologies of Practices?. In: **First Socio-Cultural Theory in Educational Research**, Manchester University UK, 2005.

BORBA, M. C.; MENEGHETTI, R. C. G.; HERMINI, H. A. Estabelecendo critérios para avaliação do uso de Modelagem em sala de aula: estudo de um caso em um curso de ciências biológicas. In: BORBA, M. C. et al. **Calculadoras Gráficas e Educação Matemática**. Rio de Janeiro: MEM/USU, 1999.

BLUM, W. Mathematical modelling in mathematics education and instruction. In T. BREITEIG, I. HUNTLEY, & G. KAISER - Messmer (Eds.), **Teaching and learning mathematics in context**. Chichester, UK: Horwood, 1993, p. 3-14.

BRAZ, Bárbara C. **Contribuições da Modelagem Matemática na constituição de Comunidades de Prática Locais: Um estudo com alunos do Curso de Formação de Docentes**. 2014, 185f. Dissertação (Mestrado em Educação para o Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2014.

BURAK, D. (2004). **Modelagem Matemática e a Sala de Aula**. In: I EPMEM -Encontro Paranaense da Modelagem Na Educação Matemática., 2004, Londrina. Anais do I EPMEM, 2004.

DAVID, M. S.; WATSON, A. Participating in what? Using Situated Cognition Theory to illuminate differences in classroom. In: WATSON, A., WINBOURNE, P. (Ed). **New directions for situated cognition in Mathematics Education**. Melbourne: Springer, 2008, cap. 3, p. 31-57.

FRADE, C. **Componentes Tácitos e Explícitos do Conhecimento Matemático de Áreas e Medidas**. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2003.

HERMINIO, M. H. G. B. **O processo de escolha dos temas dos projetos de modelagem**. 2009. 146 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação Matemática, Departamento de Matemática - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2009.

HERMINIO, M. H. G. B.; BORBA, M. C. A Noção de Interesse em Projetos de Modelagem Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 12, n. 1, p.111-127, 2010.



JACOBINI, O. R. **A Modelagem Matemática como Instrumento de Ação Política na Sala de Aula**. 2004. 225 f. Tese (Doutorado) - Curso de Educação Matemática, Departamento de Matemática - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

LAVE, J.; WENGER, E. **Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation**. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

MATOS, J. F. Aprendizagem e Prática Social: Contributos para a Construção de Ferramentas de Análise da Aprendizagem Matemática Escolar. **Actas da II Escola de Verão**. Sessão de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Santarém, 1999. Disponível em: <http://muitomais.wordpress.com/2009/02/18/aprendizagem-e-pratica-social-contributospara-a-construcao-de-ferramentas-de-analise-da-aprendizagem-matematica-escolar/> . Acesso em julho/

2012.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica; 2011.

SKOVSMOSE, O. Cenários de investigação. *Bolema – Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro (SP), n. 14, p. 66-91, 2000.

SOARES, D. S.; BORBA, M. C. O interesse de alunos de biologia pela análise de um fenômeno biológico e seu modelo matemático. In: V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 28 a 31 de outubro de 2012. **Anais...** Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil, 2012.

WENGER, E. **Communities of Practice: Learning, Meaning, And Identity**. New York: Cambridge University Press, 1998.

WENGER, E. **Communities of Practice: a brief introduction**, 2006. Disponível em: <http://www.ewenger.com/theory/index.htm> . Acesso: maio/2012.

WINBOURNE, P.; WATSON, A. Participating in Learning Mathematics Through Shared Local Practices in the Classrooms. In: A. Watson (Ed.), **Situated Cognition and the Learning of Mathematics**. Oxford: Centre for Mathematics Education Research of the University of Oxford, 1998 pp.93-104.

ZAWOJWSKI, J. LESH, R.; ENGLISH, L. A models and modelling perspective on small group learning activity. In R. Lesh and H. Doerr (Eds.) **Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching**. (p. 337 – 358). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2003.

Bárbara Cândido Braz

Universidade Estadual de Maringá – Brasil

E-mail: babicbraz@gmail.com

Lilian Akemi Kato

Universidade Estadual de Maringá – Brasil

E-mail: lilianakemikato@gmail.com

**MAPEAMENTO DO USO DE TECNOLOGIAS E DE MODELAGEM
MATEMÁTICA NO ENSINO**

**TECHNOLOGY USE OF MAPPING AND MODELING IN MATHEMATICS
EDUCATION**

Rosana Maria Luvezute Kripka
Universidade de Passo Fundo (UPF)
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS)

Maria Salett Biembengut
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS)

Isabel Cristina Machado de Lara
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS)

Lori Viali
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS)
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)

Regis Alexandre Lahm
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS)

Resumo

Neste artigo apresenta-se uma pesquisa teórica cujo objetivo foi identificar possíveis convergências, divergências e potencialidades no uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) em produções de Modelagem Matemática, no contexto da Educação. Utilizou-se o mapeamento como procedimento metodológico para reconhecimento e análise de uma amostra de dez artigos publicados em periódicos nos últimos cinco anos. Como resultados, identificam-se convergências o “uso das Tecnologias em atividades de Modelagem”, na maioria dos artigos analisados, e proximidades entre Modelagem, TIC e aprendizagem por meio de projetos, quando considerados seus usos em atividades de Modelagem no ensino. Foram identificadas divergências em relação às concepções de Modelagem adotadas e, também, na existência, ou não, de proximidades entre Modelagem e outras tendências em Modelagem Matemática. Identificam-se potencialidades entre Modelagem e TIC quando propiciam novas possibilidades de aprendizagem.

Palavras-chave: TIC, Modelagem Matemática, Educação Matemática.

Abstract

In this article we present a theoretical research which aimed to identify possible convergences, divergences and potentialities in the use of Information and Communication Technologies (ICT) in Mathematical Modeling in the context of Education. The Mapping was used as a methodological procedure, which enabled the recognition and analysis of a sample of ten journal articles published in the last five years. As a result, convergences were identified "the use of technology in modeling



activities", in most of the articles analyzed, and proximities between modeling, ICT and learning through projects, when considering their use in modeling activities in teaching. Divergences were identified in relation to the concepts of modeling adopted and in existence, or not, of proximities between modeling with other trends. Potentialities were identified between Modelling and ICT, since they provide new opportunities for learning.

Keywords: ICT, Mathematical Modeling, Mathematics Education.

1. Introdução

A Educação Matemática surgiu no início do século XX, ante a necessidade de (re)novação do processo ensino e aprendizagem da Matemática, uma vez que se buscava (e continua-se a buscar) meios que propiciem conhecimentos matemáticos aos estudantes. Assim, vários professores, buscando contribuir com esse processo, têm realizado práticas ‘inovadoras’, que contribuem as chamadas “tendências matemáticas”, definidas pelas linhas de pesquisa da área da Educação Matemática, ou por produções que surgiram para solucionar os problemas a esta relacionados. Dentre as diversas tendências, destacam-se a “Modelagem Matemática” e a “Informática e a Educação Matemática” (FLEMMING et al., 2005).

Para Biembengut (2012) “ nas diversas atividades da sociedade, a partir das concepções de diversos grupos, surgem tendências que se manifestam de diferentes formas, que se renovam pela coesão de seus elementos, e pela educação e reeducação das pessoas” (p. 197).

Referir-se as Tecnologias no ensino, trata-se em sentido amplo, do uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC). Perrenoud (1999) afirma que as TIC têm provocado mudanças importantes na sociedade, no cotidiano, nas formas de trabalho, na comunicação e no pensamento. Indica que há necessidade de práticas reflexivas inovadoras, visando essa sociedade contemporânea. No uso dessa tendência na Educação Matemática, destacam-se as produções de: (1) Bennemann e Alevatto (2012) que apresentam estudo teórico sobre o uso das TIC no ensino e na aprendizagem matemática, identificando focos de interesse e abordagens didáticas existentes para integração das TIC nas práticas escolares; (2) Borba e Chiari (2013) cujo livro traz coletânea de pesquisas sobre a interação das TIC com a Educação Matemática; (3) Borba, Malheiros e Zulatto (2007), que tratam da Educação a distância.

Em relação às perspectivas do uso das TIC no ensino, estas pesquisas indicam contribuições ao processo de aprendizagem, ao serem utilizadas como recursos didáticos em sala de aula, mas sublinham alguns elementos, como: (4) Ponte (2000) apresenta desafios da formação profissional inicial e continuada em relação à integração do uso das TIC nos ambientes escolares; (5) Borba e Villarreal (2005) apresentam a noção de seres-

humanos-com-mídias e (6) Valente (1993, 1988) argumenta sobre as diferentes possibilidades do uso do computador.

Ao referir-se sobre “Modelagem Matemática” destaca-se o processo de pesquisa e soluções possíveis para problemas simples e complexos da sociedade; o método alternativo para o ensino da matemática, que visa possibilitar a aprendizagem em sala de aula, estimulando a curiosidade, a criatividade e a análise crítica de procedimentos utilizados (ALMEIDA, ARAÚJO e BISOGNIN, 2011; BARBOSA, 2001; BASSANEZI, 2002, BIEMBENGUT, 2014; MEYER, CALDEIRA e MALHEIROS, 2011; SCHEFFER, 1999).

A Modelagem Matemática e as TIC, por possibilitarem a aproximação das realidades vivenciadas dos estudantes em contextos de ensino e aprendizagem, são perspectivas que têm sido utilizadas por pesquisadores na área da Educação Matemática, visando implantar práticas pedagógicas, nas quais o professor atua como mediador no processo, orientando atividades, instigando os estudantes a se envolverem em pesquisas sobre os temas tratados. Desde que a ‘tecnologia’ e a ‘modelagem matemática’ têm sido recorrentes nas discussões de Educação Matemática há mais de três décadas, concepções e tendências sobre a utilização de ambas na Educação, ‘tendem’ a se modificar. Nestes termos, acredita-se haver diferentes concepções e, portanto, diferentes tendências.

Nesse sentido, em razão das diversas contribuições dessas tendências para o ensino de matemática, emergem os questionamentos: existem convergências e divergências no uso das tendências “uso de TIC” e “Modelagem Matemática” no Ensino de Matemática? Quais as potencialidades identificadas pelos autores?

De acordo com esse enfoque, apresenta-se um mapeamento realizado sobre a vertente de pesquisa Modelagem e TIC, visando compreender diferentes concepções, enfoques, abordagens e sinergias existentes com outras tendências da Educação Matemática.

1. Procedimentos e métodos

O procedimento metodológico utilizado foi o mapeamento teórico, realizado segundo a concepção de Biembengut (2008), que consiste no levantamento, na organização e na análise de documentos, de modo a possibilitar uma perspectiva sobre um assunto ou tema. A autora afirma que:

O mapeamento nos propicia entender um fato, uma questão dentro de um cenário, servir do conhecimento produzido e reordenar alguns setores deste conhecimento. Quanto mais nos inteiramos dos entes e dos diversos fatores que levam à resultante, mais nos habilitamos em aplicar conhecimentos e, por recorrência, mais conhecimentos dispomos para construir um mapa que ainda não existe, para situar, contextualizar a

pesquisa de forma a mostrar, descrever, narrar, circunscrever o problema, explicando e justificando sua legitimidade (p. 136).

Os aspectos relativos à análise dos documentos envolvem conceitos e definições relativas aos termos escolhidos. Assim, a primeira etapa do mapeamento teórico consiste na busca por definições e conceitos relativos às palavras centrais relacionadas ao mapeamento, como *Tecnologia*, *Informação*, *Comunicação*, *Modelagem*, *Matemática* e *Modelagem na Educação*. A segunda etapa consiste na descrição do mapa das pesquisas acadêmicas, onde são apresentadas a identificação e a descrição dos artigos considerados. A terceira etapa consiste no reconhecimento e na análise dos dados.

1.1 Conceitos e definições

Tecnologias da Informação e da Comunicação (TIC) envolve a ideia de uma linguagem particular de transmissão de conhecimento, teórico ou prático, que possibilita o acesso à informação e à construção do conhecimento, sendo um meio pelo qual as ideias e sentimentos podem ser desenvolvidos e transmitidos, os quais são viabilizados por meio da interação sociocultural.

Verasztó et al. (2008, p. 3) afirmam que é difícil precisar uma definição para a palavra *tecnologia*, pois, ao longo da história, ela foi interpretada de diferentes formas, por teorias divergentes, ao ser utilizada em diferentes contextos sociais. Os autores consideram que “a tecnologia abrange um conjunto organizado e sistematizado de diferentes conhecimentos, científicos, empíricos e intuitivos. Sendo assim, possibilita a reconstrução constante do espaço das relações humanas” (VERASZTO et al., 2008, p. 26).

Associado a esse conceito emerge o termo *Tecnologia da Informação*, para o qual, dentre vários conceitos destacam-se o de Cruz (1997, p. 160): “É o conjunto de dispositivos individuais, como *hardware*, e *software*, telecomunicações ou qualquer outra tecnologia que faça parte ou gere tratamento da informação, ou ainda, que a contenha” e o de Schuning et al. (1999) : “o grande veículo, o meio que proporciona a enorme alteração cultural em todos os povos de nossa civilização é sem dúvida o universo composto pelas Tecnologias de Informação e as redes mundiais de comunicação”, o que remete ao conceito de *Tecnologias da Informação e da Comunicação* (TIC), amplamente utilizado na literatura.

Cabe ressaltar que muitos autores referem-se especificamente ao termo “tecnologias digitais de informação e comunicação”, que, segundo Santos:

[...] se caracterizam por uma nova forma de materialização. A informação que vinha sendo produzida e difundida ao longo da história da humanidade por suportes atômicos (madeira, pedra, papiro, papel, corpo), atualmente circula pelos *bits* – códigos digitais universais (0 e 1). As

tecnologias da informática, associadas às telecomunicações, vêm provocando mudanças radicais na sociedade por conta do processo de digitalização. Digitalizada, a informação se reproduz, circula, se modifica e se atualiza em diferentes interfaces (2009, p. 5660-5661).

O conceito de Modelagem Matemática no Ensino é encontrado em publicações científicas, diversas concepções, com diferentes propostas de abordagens pedagógicas. Bassanezi afirma que:

[...] modelagem matemática é um processo dinâmico utilizado para obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual (2002, p. 24).

Em relação ao ensino, o autor afirma:

a modelagem é o processo de criação de modelos onde estão definidas as estratégias de ação do indivíduo sobre a realidade, mais especificamente, sobre a sua realidade, carregada de interpretações e subjetividades próprias de cada modelador.(...) A utilização da modelagem na educação matemática valoriza o “saber fazer” do cursista, desenvolvendo sua capacidade de avaliar o processo de construção de modelos matemáticos nos diferentes contextos de aplicações dos mesmos, a partir da realidade de seu ambiente (2002, p. 207).

Dalla Vecchia (2012) destaca três perspectivas da Modelagem Matemática no ensino, diferenciando-as por:

Modelação; Projetos e Sociocrítica:

- Modelação, proposto por Biembengut (2014), refere-se ao uso da Modelagem na educação como um método de ensino com pesquisa, que pode ser usado desde os anos iniciais até o ensino superior. Afirma que “na modelação, atuamos em duas abordagens: uma do *ensino*, que nos permita desenvolver o conteúdo curricular e, ao mesmo tempo, apresentar o processo de Modelagem e, noutra frente, *pesquisa*, em que orientamos os estudantes a modelar. Essas abordagens ocorrem integradas, simultâneas, [...]” (2014, p. 41, grifo da autora). A autora propõe que o processo seja realizado em três fases: percepção e apreensão, compreensão e explicação e significação e expressão. Assim, em cursos nos quais existem programas que devem ser cumpridos, os temas podem ser escolhidos pelos professores ou pelos estudantes e devem levar em consideração o conteúdo a ser abordado, tendo em vista a obtenção de um modelo matemático que represente de forma simplificada a realidade sendo investigada.



- Projetos, considerada por Borba e Vilarreal (2005) como uma estratégia pedagógica a ser utilizada em sala de aula, na qual se propõe que, preferencialmente, a escolha do tema seja realizada pelos estudantes. Essa participação ativa do aluno na definição do tema, que emerge do interesse pelo que está sendo proposto, justifica a associação que os autores fazem entre a Modelagem Matemática e a Aprendizagem Baseada em Projetos, indicando também a forma como são conduzidas as atividades. Borba, Malheiros e Zulatto afirmam que, de acordo com essa concepção, a Modelagem Matemática seria:

[...] uma estratégia pedagógica que privilegia a escolha de temas pelos alunos para serem investigados e que possibilita aos estudantes a compreensão de como conteúdos matemáticos abordados em sala de aula se relacionam com as questões cotidianas (2007, p. 100).

Segundo os autores, nessa concepção, a liberdade de escolha do tema pode levar a temas interdisciplinares, o que possibilita aos estudantes perceber relações entre a matemática e outras áreas do conhecimento. Indicam que a Modelagem não ocorre por meio de etapas, mas que o professor atua como mediador, orientando o desenvolvimento.

- Sociocrítica, para a qual Barbosa (2001) afirma que: *“modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade.”* (p. 6, grifo do autor). A compreensão do autor considera o conceito de ambiente de aprendizagem proposta por Skovsmose (2000), que se refere às condições para que os estudantes possam desenvolver suas atividades, as quais são definidas pelo professor. O enfoque nesta abordagem consiste na reflexão e análise crítica, visando evidenciar o caráter social e cultural da matemática presente nos problemas reais tratados. Para Barbosa, “[...] ultrapassa os aspectos da matemática e da arte de modelar para assumir o caráter político destes, abrangendo o ‘lugar’ da matemática nas práticas sociais” (2001, p. 20).

Ainda quanto às diferentes abordagens da Modelagem Matemática na Educação, cabe ressaltar que existe uma classificação proposta por Kaiser e Sriraman (2006), visando caracterizá-las por meio de suas diferentes perspectivas, sendo definidas como: realística (ou aplicada), epistemológica (ou teórica), contextual, sociocrítica, cognitivista e educacional. Dalla Vecchia, ao descrever estas caracterizações, afirma:

[...] a realística, na qual as situações analisadas são retiradas da indústria e da ciência e foca sua atenção para o desenvolvimento de habilidades relacionadas com a resolução de problemas aplicados; a epistemológica, cujo objetivo está relacionado com o desenvolvimento de teorias matemáticas; a educacional, que em termos gerais associa a realística e a epistemológica integrando situações-problema autênticas visando a teorias matemáticas; a contextual, na qual as situações se destinam à

construção de conceitos matemáticos, mas são sustentadas por estudos psicológicos; e a sócio-crítica, que procura desenvolver situações nas quais o papel dos modelos na sociedade possa ser discutido (2012, p.25).

Após definir e conceituar os termos utilizados, apresenta-se o mapa teórico elaborado para responder as questões consideradas na pesquisa.

1.2 Mapa de pesquisas acadêmicas

Apresentam-se, nesta seção, os procedimentos utilizados para a elaboração do mapa de pesquisas acadêmicas, que consiste no registro da identificação dos artigos selecionados, da classificação e organização dos dados, da análise e do reconhecimento de possíveis convergências e divergências entre o uso de TIC e de Modelagem no Ensino de Matemática.

1.2.1 Identificação

Para realizar o estudo teórico proposto, procedem-se, com auxílio dos recursos de busca do Google Acadêmico, a uma coleta de textos científicos publicados entre os anos 2009 e 2014, nos quais aparecessem os termos/expressões “Tecnologias” ou “TIC”, conjuntamente com os termos “Modelagem Matemática” e “Ensino”. Foram encontrados 261 resultados gerais. Desses, foram selecionados apenas os que continham todos os termos considerados, resultando em 41 documentos, entre teses, dissertações e trabalhos finais de especialização, artigos em periódicos e em eventos, conforme apresentado no Mapa 1³¹. Dentre eles, optou-se por analisar apenas artigos publicados em periódicos, com Qualis A ou B, na área de Ensino, tendo em vista que seriam mais objetivos, na descrição de suas pesquisas, do que teses, dissertações e trabalhos finais de especialização e, ainda, que supõe-se que teriam uma avaliação mais criteriosa do que artigos enviados para eventos. Desses 16 artigos, publicados em revistas, foi realizada a leitura de todos e foram selecionados dez que supostamente possibilitariam identificar relações entre o uso de Tecnologias e a Modelagem Matemática no Ensino e, assim, foram selecionadas apenas dez publicações para análise.

³¹ A palavra “Mapa” é utilizada conforme a proposta de mapeamento de Biembengut (2008), com intuito de representar os dados coletados, gerando um modelo que serve como guia para a pesquisa.

Mapa 1: Distribuição dos 41 trabalhos selecionados

Tipo de Publicação	Total	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Teses	3				2		1
Dissertações	11	3	3		2	3	
Monografias	2		1			1	
Artigos em periódicos	16			5	5	6	
Artigos em eventos	9	1	4	2	2		

Fonte: Elaboração dos autores.

1.2.2 Classificação e organização

Nesta seção, apresentam-se as citações bibliográficas (Mapa 2), organizadas em ordem cronológica, dos dez artigos analisados, bem como é registrada a análise comparativa realizada em relação aos objetivos, métodos e resultados apresentados em cada artigo considerado.

Mapa2: Relação das citações bibliográficas dos artigos selecionados para o mapeamento

Nº	Ano	Citação bibliográfica
1	2009	ARAÚJO, Jussara de Loiola. Uma Abordagem Sócio-Crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. ALEXANDRIA: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia , v.2, n. 2, p. 55-68, jul. 2009.
2	2011	MALTEMPI, Marcus Vinicius; JAVARONI, Sueli Liberatti; BORBA, Marcelo de Carvalho. Calculadoras, Computadores e Internet em Educação Matemática: dezoito anos de pesquisa. Bolema , Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 43-72, dez. 2011.
3	2011	OLIVEIRA, Eloiza da Silva Gomes de. Indicativos para a formação continuada de professores incentivadora da apropriação das Tecnologias. Múltiplas Leituras , v. 4, 1, p. 99-114. 2011.
4	2012	KLÜBER; Tiago Emanuel BURAK, Dionísio. Sobre os objetivos, objetos e problemas da pesquisa brasileira em Modelagem Matemática na Educação Matemática. Práxis Educativa , Ponta Grossa, v. 7, n. 2, p. 467-488, jul./dez. 2012.
5	2012	DALLA VECCHIA, Rodrigo; MALTEMPI, Marcus Vinicius. Modelagem Matemática e Tecnologias de Informação e Comunicação: a realidade do mundo cibernético como um vetor de virtualização. Bolema , Rio Claro (SP), v. 26, n. 43, p. 963-990, ago. 2012.
6	2012	DINIZ, Leandro do Nascimento; BORBA, Marcelo de Carvalho. Leitura e Interpretação de <i>Dados Prontos</i> em um Ambiente de Modelagem e Tecnologias Digitais: o mosaico em movimento. Bolema , Rio Claro (SP), v. 26, n. 43, p. 935-962, ago. 2012.
7	2012	JAVARONI, Sueli Liberatti; SOARES, Débora da Silva. Modelagem Matemática e Análise de Modelos Matemáticos na Educação Matemática. Acta Scientiae . Canoas, v. 14, n.2, p. 260-275, maio/ago. 2012.
8	2012	MALHEIROS, Ana Paula dos Santos. Pesquisas em Modelagem Matemática e diferentes tendências em Educação e em Educação Matemática. Bolema , Rio Claro (SP), v. 26, n. 43, p. 861-882, ago. 2012.
9	2013	SCHELLER, Morgana. BIEMBENGUT, Maria Salett. A utilização de Tecnologias digitais nos primeiros passos na arte da pesquisa: uma experiência de Modelagem. Renote: Novas Tecnologias na Educação , Porto Alegre (RS), v. 11, n 3, p. 1-11, dez. 2013.
10	2014	ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de. Jogos de linguagem em atividades de Modelagem Matemática. Vidya , v. 34, n. 1, p. 241-256, Santa Maria, jan./jun. 2014.

Fonte: Elaboração dos autores.



Na sequência, apresentam-se indicações decorrentes do entendimento destes artigos, visando relacionar pontos comuns convergentes, divergentes e potenciais. As citações desta seção se referem às citações dos artigos analisados e, por esse motivo, não constam nas referências bibliográficas do presente artigo.

(i) Citação de uso ou de relações de tecnologias em contextos da Modelagem Matemática

Ao mapear a maneira como foram utilizados, bem como, as contribuições, aproximações e potencialidades identificadas pelos autores, verifica-se:

- No artigo 1 a autora não apresenta e nem cita atividades específicas sobre uso das tecnologias em contextos de Modelagem, porém, destaca a crise da sociedade relativa ao uso de recursos tecnológicos onde a matemática está presente, muitas vezes, por meio da Modelagem Matemática, o que evidencia sua importância na construção da sociedade tecnológica.
- No artigo 2, os autores citam vários exemplos de usos das duas tendências e as sugerem como abordagens complementares para o ensino. Informam que as pesquisas relacionadas à Modelagem Matemática realizadas pelo Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM) dizem respeito a uma disciplina do Curso de Ciências Biológicas, chamada Matemática Aplicada, na qual são investigadas pedagogias e o uso de tecnologias. Afirmam que a concebem a Modelagem Matemática como estratégia pedagógica de ensino de conteúdos, que aparece vinculada ao uso de TIC e à formação de professores ou à educação matemática crítica e formação do aluno. Destacam o uso de TIC no ensino de matemática; recursos tecnológicos que proporcionaram possibilidades de aprendizagem; elaboração de conjecturas relacionadas à visualização das TIC que propiciaram entendimentos sobre objetos matemáticos. Na Educação à Distância pesquisaram como o conhecimento matemático é produzido e como devem ser utilizados *softwares* já existentes. Também citam pesquisa sobre o processo de elaboração de projetos de Modelagem, desenvolvidos à distância por professores de Matemática e afirmam que as TIC foram protagonistas na pesquisa e comunicação, onde a orientação foi imprescindível em todas as fases desta modalidade.
- No artigo 3, que se dedica ao estudo da integração das TIC e das práticas promovidas pela formação continuada, não há citações sobre uso das TIC em processos de Modelagem especificamente.
- No artigo 4, que apresenta uma análise teórica de produções científicas sobre Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática, o enfoque foi citado na primeira categoria considerada, chamada “Metaestudo em Modelagem Matemática”, na qual se verificou a

utilização recorrente de tecnologias e de outras teorias em abordagens de ensino por meio da Modelagem. Os autores afirmam que essa categoria indica um movimento de reflexão possível sobre a própria produção e uma demanda da área. Na terceira categoria, “Articulação entre modelagem e outras teorias”, os autores constataram aproximações da Modelagem matemática com as TIC, citando Borba e Penteado (2001) e Borba e Villarreal (2005), mas não explicitaram formas de utilização.

- No artigo 5, que apresenta uma discussão teórico-filosófica sobre relações entre Modelagem Matemática e a realidade cibernética, os autores afirmam que o relacionamento entre Modelagem e TIC tem sido evidenciado por diversos autores, citando Diniz (2007), Araújo (2002), Borba, Malheiros, Zulatto (2007), Dalla Vecchia e Maltempi (2009; 2010) e Javaroni (2007), Sinclair e Jackiw (2010), Chao, Empson e Shechtman (2010), Kazak (2010), Hills (2010) e Campbell (2010), e indicam que existe relacionamento entre modelagem e TIC e potencialidades dessa relação, em consolidação na área da Educação Matemática. Não apresentam como foram utilizadas, nem quais foram as suas contribuições. Apresentam uma atividade de modelagem realizada em sala de aula, sobre o problema da corda, para ilustrar a fundamentação da argumentação que a realidade do mundo cibernético pode ser vista como um vetor de virtualização. Relatam que utilizaram recursos tecnológicos para observar o movimento da corda, num mundo diferenciado do físico, em tempo e espaço distinto. Indicam que a compreensão desta realidade “cibernética” pode ser entendida como um vetor de virtualização, por possibilitar criar situações problema, com a exploração e uso de seus recursos tecnológicos; que a tecnologia também pode ser entendida como um dos vetores de virtualização; que percebem uma grande potencialidade das relações entre a Modelagem Matemática e o contexto da realidade “cibernética”, por possibilitarem diferentes percepções e compreensões, influenciando no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

- No artigo 6, os autores afirmam que no grupo GPIMEM, onde atuam, existe a perspectiva do uso de TIC no processo de modelagem, desde o início, identificação do tema e abordagem matemática são utilizados recursos disponíveis no laboratório de informática. Ressaltam que a escolha do tema é aspecto relacionado aos propósitos do professor, assim como suas concepções sobre o uso da tecnologia. Apresentam síntese sobre possibilidades entre Modelagem e TIC, com enfoque nos processos pedagógicos, visando harmonizar o uso das mídias, vantagens e potencialidades. Afirmam que a interação TIC/Modelagem tem sido um traço marcante das pesquisas do grupo; que o acesso à internet favorece alternativas de uso de seus recursos em processos coletivos de interação de seres humanos-com-mídias, como uma biblioteca virtual interativa de consulta, publicação e comunicação; nos processos de modelagem, após a escolha do tema os estudantes são convidados a coletar dados e geralmente usam os chamados “dados prontos”. Comentam sobre a

utilização de dados prontos em projetos de modelagem na educação estatística, salientando a importância da leitura e interpretação dos dados. Fazem uma análise de atividades de com tema “câncer de próstata” escolhido pelos estudantes, visando abordar o conteúdo de cálculo, com estratégia pedagógica experimental-com-tecnologia, projetos de modelagem e exposição de conteúdos. Apesar das Tecnologias propiciarem a visualização gráfica, as análises das atividades indicam que a leitura é complexa e incorporar dados na pesquisa, sem reflexões, pode indicar falta de aprofundamento, indicando a importância do professor como mediador no processo, de modo que possibilite a compreensão dos dados coletados. Indicam que o uso da internet na sala de aula pode ser aceito, desde que sejam acompanhadas por discussões reflexivas sobre os temas tratados; que as discussões entre TIC e modelagem precisam ser aprofundadas devido às mudanças que o acesso à *internet* acarreta e que cada vez mais a diferença entre dados prontos ou dados gerados ficará mais tênue e que compreender esta relação é tão importante como compreender como os seres humanos estão se modificando por influências das transformações das mídias. Ressaltam a importância de se pensar como a Modelagem está sendo transformada pelas TIC, em especial, pela internet.

- No artigo 7, as autoras, ao apresentarem uma proposta pedagógica denominada Análise de Modelos visando identificar relações dessa abordagem com Modelagem Matemática e uso de Tecnologias Digitais, não se referem ao uso das TIC em atividades de Modelagem, mas se referem o uso das TIC na análise de modelos. Concordam que existe proximidade das Tecnologias Digitais com a Modelagem e sugerem que existe proximidade do uso de Tecnologias Digitais com a Análise de Modelos- No artigo 8, onde apresenta-se um ensaio teórico sobre pesquisas em Modelagem Matemática e sua relação com diferentes tendências entre educação e em Educação Matemática, a autora identifica relações da modelagem com outras tendências em Educação Matemática, como: Formação de professores, TIC, Etnomatemática, Pedagogia de Projetos, perspectiva CTS (Ciência, Tecnologia e Sociedade), interseções e possibilidades entre diferentes linhas de pesquisa. Identificou sinergias entre Pedagogia de Projetos, TIC e Modelagem e o uso das TIC, em diferentes níveis de utilização e possibilidades de modelagem com o uso das TIC, por meio de experimentação e de simulações. Ressalta o uso da visualização como recurso “bastante presente” em atividades de modelagem quando se trabalha com as TIC, pois possibilita conjecturar sobre os problemas tratados. Cita outro trabalho que indica que as Tecnologias estão a serviço da modelagem, pois, existe uma incorporação natural das TIC nesses contextos. Informa que avaliou trabalhos que visavam relacionar Modelagem e Etnomatemática, onde foram identificadas convergências ou divergências, o que indica a necessidade de novas pesquisas para avaliação desses resultados.

- No artigo 9, as autoras, ao apresentarem um processo investigativo da Modelagem Matemática, afirmam que o uso das Tecnologias Digitais assume importância natural ao propiciar habilidades, como representação, compreensão, pesquisa e comunicação, e o conhecimento sócio cultural de realidades, em diferentes disciplinas. Sugerem que a Modelagem Matemática tem abordagem relacionada com projetos e que ambas têm recebido contribuições significativas quanto ao uso Tecnologias Digitais. Sobre uso de Tecnologias destacam suas percepções sobre a evolução do conhecimento por meio de Tecnologias da Inteligência; a importância do coletivo, considerando os diferentes saberes, na formação de redes e da inteligência e que o uso de computadores como instrumentos em projetos favorece à aprendizagem. Indicam que em práticas escolares de modelagem, as Tecnologias podem potencializar o ensino. Citam diversos artigos que indicam que o uso das TIC em atividades de Modelagem facilita a resolução de problema, são indispensáveis para validação do modelo matemático, possibilitam investigação e coleta de dados, a simulação ou avaliação dos modelos. Afirmam que o uso das tecnologias digitais pode facilitar a visualização de modelos e estimular o surgimento de hipóteses, o que pode contribuir com novas descobertas e que o uso da *internet* motiva os estudantes, ajuda a desenvolver a intuição, a flexibilidade mental e possibilita adaptação a ritmos diferentes de aprendizagens. Apresentam uma proposta de atividade de modelagem, informando que foi realizada em Instituto Federal Catarinense em ambiente extraclasse. Salientam que na atividade de Modelagem a opção pelo uso de Tecnologias Digitais foi espontânea; que os estudantes utilizaram *internet* para investigação do tema, bem como calculadoras e planilhas *Excel* para exploração, compreensão e explicitação do modelo; que Modelagem e Tecnologias Digitais se complementam, na construção do conhecimento por meio da pesquisa; que ao ser concebida como um método de ensino com pesquisa possibilitou aos estudantes a aquisição de conhecimentos científicos, potencializados por meio das Tecnologias Digitais, entendidas como instrumentos de apoio ao trabalho; que os resultados não seriam os mesmos, se não fossem utilizadas as duas abordagens, pois entendem que ambos possibilitam reflexão e compreensão de relações da matemática com a realidade. Afirmam que as Tecnologias Digitais e Modelagem possibilitaram motivação, participação ativa dos estudantes em todo o processo e o entendimento sobre as realidades sociais e políticas, o que contribuiu para a aquisição de conhecimentos e formação de cidadanias.

- No artigo 10, que trata sobre jogos de linguagem em atividades de Modelagem em Matemática, a autora afirma que apenas na terceira atividade de Modelagem apresentada foi utilizado o ajuste de curvas por meio do *software Curve*, onde utilizaram a hipótese de que modelo matemático poderia ser representado por meio de uma função exponencial.

Afirma que os dados já haviam sido disponibilizados e a proposta possibilitou aos alunos fazer bons exercícios de matemática, com uso de tecnologias, para encontrar a resposta. Não ressalta vantagens ou potencialidades no uso do recurso tecnológico.

(ii) Em relação ao uso específico das tecnologias e à forma como essas potencializaram o ensino

Sobre este tópico apenas os autores do artigo 2, 3, 6 e 7 fizeram citações sobre este tema e verifica-se:

- No artigo 2, que trata do relato de pesquisas do grupo GPIMEM, os autores ressaltam que a inserção de tecnologias implica mudanças no ambiente de ensino e aprendizagem e destacam o uso de TIC no ensino de matemática, onde recursos tecnológicos proporcionaram possibilidades de aprendizagem; elaboração de conjecturas relacionadas à visualização das TIC e entendimento sobre objetos matemáticos. Na Educação à Distância destacam a pesquisa sobre como o conhecimento matemático é produzido e como devem ser utilizados *softwares* já existentes neste processo. Destacam também a teoria seres-humanos-com-mídias como uma das principais contribuições do grupo; que, nas pesquisas com foco na construção do conhecimento, a visualização foi muito privilegiada em ambientes propiciados pelas TIC e que, no ensino de matemática, potencializam o raciocínio na resolução de problemas. Sugerem que a visualização de conceitos de matemática, em diferentes representações, pode ser facilitada pelo uso das TIC. Afirmam que possibilidades com uso de *internet* se ampliaram; que o uso de linguagens que combinam vídeos, animações e texto se tornaram comuns e que a comunicação multimodal se tornou viável em ambientes presenciais e virtuais, o que pode gerar novas formas de comunicação.

- No artigo 3, que trata sobre a integração das TIC e das práticas promovidas pela formação continuada, a autora indica dificuldades e expectativas nos processos de formação, a necessidade de constituição de cultura, habilidades e competências em TIC na prática docente e salienta que a inserção das TIC em práticas pedagógicas significa inovação no processo de ensino. Destaca a importância das TIC no mundo atual e de seu impacto na educação. Afirma que a sua inserção nas práticas pedagógicas é um desafio, pois não consiste apenas em “alfabetização digital”, mas em inovação no processo de ensino, considerada como fundamento que possibilita aprendizagem, não a compreendendo como mero instrumento. Sugere que recursos das TIC devem ser utilizados em processos de formação, por serem instrumentos educacionais facilitadores da aprendizagem e para que haja apropriação e incorporação das TIC é preciso cuidados especiais que promovam a capacitação efetiva para o uso adequado das TIC.

- No artigo 6, os autores apresentam suas concepções sobre como seres humanos interagem com as TIC; que as mídias são Tecnologias da Inteligência e que ao pensarem em matemática, o fazem de forma conjunta a mídia e em possibilidades de interação; que o conhecimento é produzido por coletivos e que as TIC possibilitam a reorganização do pensamento e do conhecimento, mediada por ação coletiva.

- No artigo 7, as autoras informam que propuseram, em suas teses de doutorado, abordagens pedagógicas para desenvolvimento de conteúdos específicos de disciplinas realizadas por meio da análise de modelos matemáticos, onde os estudantes utilizaram diversas Tecnologias para entender as soluções e comportamentos dos modelos. Ressaltam a importância dos recursos tecnológicos como facilitadores da aprendizagem, pois possibilitaram a ampliação da memória e, em alguns casos, a reorganização dos pensamentos dos estudantes. Salientam a importância das planilhas eletrônicas, da visualização dos gráficos e dos campos de direções, que facilitaram e potencializaram o aprendizado. Destacam a importância das Tecnologias Digitais no processo de análise do modelo e afirmam que o uso das Tecnologias tem que estar em consonância com a perspectiva de aprendizagem do professor.

(iii) Concepções adotadas sobre Modelagem matemática e à preocupação com classificação.

Sobre este tópico, verifica-se que os autores do artigo 3, 4 e 7 não se referiram a elas e que:

- No artigo 1, a autora explicita sua concepção, como uma abordagem fundamentada nas concepções da Educação Matemática Crítica (EMC), segundo pressupostos de Skovsmose (1994) e defende que o desenvolvimento de projetos de modelagem propicia formação política, relações dialógicas e espaço democrático em sala de aula. Refere-se a desenvolvimento de projetos devido à incerteza dos processos da modelagem. Concebe a Modelagem Matemática como abordagem por meio da matemática de problemas não matemáticos, escolhidos por grupos de estudantes, orientados segundo concepções da EMC, e que são privilegiados questionamentos filosóficos, que promovem a compreensão da matemática, que depende da realidade pela qual é concebida. Sugere que trabalho em grupo favorece discussão, diálogo e interação de ideias, identificando sua proposta como democrática para se trabalhar questões políticas na micro-sociedade da sala de aula, o que viabiliza a discussão sobre a importância da matemática em questões sociais. Classifica sua concepção segundo a “Perspectiva Sócio-Crítica”, proposta por Kaiser e Sriraman (2006).

- No artigo 2, os autores afirmam que o grupo a concebe como estratégia pedagógica de conteúdos vinculada ao uso de TIC e à formação de professores ou à Educação Matemática Crítica. Porém, a conceituação não fica clara, tendo em vista que não se referem a um

trabalho específico, mas do grupo, indicando apenas que a abordagem adotada seria a perspectiva por projetos de Modelagem.

- No artigo 5, ao tratarem sobre uma discussão teórico-filosófica sobre relações entre Modelagem Matemática e a realidade do mundo cibernético, os autores também não classificam a abordagem adotada, mas conceituam informando que compreendem a Modelagem Matemática como processo dinâmico, não sequencial, que se modifica pela condução da pesquisa, o que possibilita percebê-la em transformação.

- No artigo 6, os autores apresentam diferentes concepções do grupo sobre modelagem: (1) enfoque pedagógico ao visar a aprendizagem de conteúdo específico, onde o tema a ser definido deve estar diretamente relacionado a ele, ficando a critério do professor; (2) escolha do tema pelos estudantes, que identifica um tópico matemático a ser explorado.

- No artigo 8, que trata de um ensaio teórico sobre pesquisas em Modelagem Matemática e sua relação com diferentes tendências entre educação e em Educação Matemática, ao ser realizada a análise da concepção sobre Modelagem, utilizadas pelos autores consultados em sua pesquisa, afirma ter identificado diferentes perspectivas e abordagens. A autora cita as concepções de Bassanesi (2002) e Burak (2005), que se referem à uma perspectiva para o desenvolvimento da Modelagem em etapas na sala de aula, a partir da escolha de um tema, e os estudantes são convidados a buscar soluções para o problema, considerando a resolução de problemas como natural no contexto da modelagem. Outros autores, como Borba e Villareal (2005), defendem que na modelagem a escolha do tema deve ser feita pelo aluno e propõem o desenvolvimento de projetos, se diferenciando da resolução de problemas. Indica que sua concepção se aproxima da aprendizagem baseada em projetos, na qual o estudante escolhe um tema de seu interesse e usa conhecimentos matemáticos para investigá-lo e o professor se torna o orientador ao longo do processo. A autora também identificou que, em muitos trabalhos, a modelagem é apresentada com caminho para o ensino de matemática na Educação, mas que esta participação é pequena no âmbito da escola, devido à falta de conhecimento ou dificuldade em cumprir conteúdos. A autora não faz menção à classificação das abordagens adotadas.

- No artigo 9, as autoras apresentam as concepções de Bassanezi (2006), que define Modelagem como um processo que envolve teoria e prática, seja no ensino ou na pesquisa, que possibilita ao pesquisador interagir com a realidade buscando compreendê-la e de Biembengut (2009), que considera a Modelagem, no contexto da educação, como um método de ensino com pesquisa, que pode ser utilizado no ensino de ciências. Afirmando que é concebida com método, pois as etapas utilizadas na investigação científica se assemelham às três fases propostas por Biembengut (2009) para o desenvolvimento do processo de Modelagem, que consistem em: percepção e apreensão; compreensão e explicitação e significação e expressão. As autoras não fazem menção à classificação das

abordagens adotadas, mas sugerem uma proximidade do trabalho apresentado com a perspectiva do desenvolvimento por projetos.

- No artigo 10, a autora apresenta três compreensões diferenciadas da Modelagem para os cenários apresentados, mas, não explicita sua concepção sobre Modelagem Matemática no ensino.

(iv) Referencial teórico utilizado nos artigos analisados

No mapeamento também se buscou reconhecer quais foram os principais autores considerados nas fundamentações teóricas consideradas e verifica-se:

- No artigo 1 a autora adota pressupostos de Skovsmose (1994) para fundamentar sua abordagem sociocrítica da Modelagem Matemática.

- No artigo 2 os autores usam em pesquisas sobre inserção de tecnologias em ambiente de ensino e aprendizagem a fundamentação teórica de John Dewey (1959; 1965; 1978), Tikhomirov (1981), Pierre Lévy (1993) e Papert (1985, 1994).

- No artigo 3, na fundamentação teórica para as TIC, são indicados Vygotsky e Pierre Lévy (1999).

- No artigo 4 citam David Ausubel (1968) e Raymond Duval (2003) quando indicam articulações das teorias da Modelagem com outras teorias.

- No artigo 5 os autores utilizam Pierre Lévy (1996) na fundamentação teórica da discussão teórico-filosófica sobre relações entre Modelagem Matemática e a realidade do mundo cibernético.

- No artigo 6 os autores usam Lévy (1993) como fundamentação teórica para o uso de TIC.

- No artigo 7 citam como referencial teórico Bassanezi (2002), Hubbard (apud HABRE, 2000) e Kallaher (1999) para fundamentação teórica da abordagem pedagógica de análise de modelos.

- No artigo 8, a autora afirma que os suportes teóricos encontrados em Modelagem citam Ole Skovsmose, que trata sobre Educação Matemática Crítica, ou John Dewey, que trata do “interesse” pelo aprendizado, apesar de não terem desenvolvido prioritariamente pesquisas sobre Modelagem ou sobre Educação matemática.

- No artigo 9 as autoras citam na fundamentação teórica sobre Modelagem Matemática os autores Bassanezi (2006) e Biembengut (2004) e quanto ao uso de tecnologias destacam as contribuições de Lévy (1993) e Papert (1985).

- No artigo 10 a autora apresenta a ideia de jogos de linguagem, fundamentadas segundo a filosofia de linguagem de Ludwig J. J. Wittgenstein.

(v) Existência de proximidades das TIC com outras tendências ou da Modelagem com outras tendências

Em relação a esse tópico verifica-se:

- No artigo 1 a autora apresenta comparativos entre percepções de diferentes autores sobre distanciamentos e proximidades entre Modelagem Matemática, Etnomatemática e EMC, afirmando não existir consenso. Destaca proximidade da abordagem sociocrítica da Modelagem Matemática com a Etnomatemática, apesar de indicar que isso não seria consenso entre os pesquisadores da área. Acredita que esta discordância se deve pelas diferentes concepções que estas tendências têm na Educação Matemática. Afirma que Barbosa (2006), Kaiser e Sriraman (2006), Caldeira (2007) e Rosa e Orey (2003) identificam proximidades e que Scandiuzzi (2002) e Passos (2008) acreditam que não há proximidade entre elas.
- No artigo 4, sobre análise teórica de produções científicas sobre Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática, os autores indicam que na categoria “Meta estudo em Modelagem Matemática” perceberam a utilização recorrente das Tecnologias e de outras teorias nas abordagens por meio da modelagem, o que indica proximidade com as TIC. Na terceira categoria “Articulação entre modelagem e outras teorias” identificaram propostas de como articular a abordagem da Modelagem Matemática com teorias de aprendizagem, como a da Aprendizagem Significativa e a das Representações Semióticas ou com tendências em Educação Matemática, o que indica uma busca pela superação do distanciamento entre Modelagem e Aprendizagem Matemática, citando que identificaram aproximação com as tendências denominadas Investigação Matemática.
- No artigo 5, que apresenta discussão teórico-filosófica sobre relações entre Modelagem Matemática e realidade cibernética como uma possibilidade de virtualização, influenciando na compreensão de problemas da modelagem, os autores indicam que existe relacionamento entre modelagem e TIC e potencialidades dessa relação, na consolidação na área da Educação Matemática.
- No artigo 6 os autores apresentam síntese sobre possibilidades entre Modelagem e TIC, com enfoque nos processos pedagógicos, visando harmonizar o uso das mídias, vantagens e potencialidades, afirmando que a interação TIC/Modelagem tem sido um traço marcante das pesquisas do grupo.
- No artigo 7, as autoras apresentam entre abordagens de ensino pela proposta de análise de modelos proposta e pela Modelagem Matemática, utilizada em sala de aula, proposta por diferentes autores, com diferentes concepções. Indicam que a proposta apresentada não seria considerada uma Modelagem Matemática, pois propõem a análise de modelos já existentes para a compreensão dos conceitos. Porém, entendem que existem interseções entre elas e que poderiam ser utilizadas de forma conjunta ou complementar. Afirmam que



na análise de modelos muitas das concepções da Modelagem Matemática são utilizadas, tais como propiciar reflexões sobre o fenômeno, visando dar significados aos conceitos estudados por meio de problemas reais estudados e análise crítica de suas limitações. Concordam que existe proximidade das Tecnologias digitais com a Modelagem, indicada por Borba e Villarreal (2005) e sugerem que existe proximidade do uso de Tecnologias Digitais com a Análise de Modelos. Destacam a importância das Tecnologias Digitais no processo de análise do modelo e afirmam que o uso das Tecnologias tem que estar em consonância com a perspectiva de aprendizagem do professor. Sugerem que apresentaram uma análise inicial sobre as relações entre Modelagem Matemática e Análise de Modelos, que julgam que precisa ser amadurecida, e esperam ter contribuído ao apresentarem um trabalho diferenciado para se trabalhar com modelos em sala de aula.

-No artigo 8, que trata de um ensaio teórico sobre pesquisas em Modelagem Matemática e sua relação com diferentes tendências entre educação e em Educação Matemática, a autora identifica relações da modelagem com outras tendências em Educação Matemática, como: Formação de professores, TIC, Etnomatemática, Pedagogia de Projetos, perspectiva CTS (Ciência, Tecnologia e Sociedade), e interseções e possibilidades entre diferentes linhas de pesquisa. Na análise, identificou ser usual, em pesquisas desenvolvidas sob a perspectiva da Modelagem, a existência de abordagens realizadas por meio de outras tendências, como o uso da Modelagem aliada à pedagogia de projetos, pois afirma ter sido citada por diversos autores que as consideram com pressupostos e características semelhantes. Identificou que existem relações entre Modelagem e Etnomatemática, mas que na pesquisa foram identificadas convergências e divergências entre elas, o que indica ser necessário o desenvolvimento de novas pesquisas para o esclarecimento destas. Afirmar que a modelagem tem sido utilizada em conjunto com outras tendências na Educação Matemática, assim como em outros campos do conhecimento, o que indica que possui similaridades com outras áreas e linhas de pesquisa e que depende de como é concebida; destaca relações evidenciadas entre Modelagem Matemática e Pedagogia de Projetos. Indica que existem vários tipos de relações entre Modelagem e as demais tendências, seja em Educação Matemática ou entre áreas afins, que podem ser pesquisadas. Sugere que seu trabalho visa contribuir com subsídios que fundamentem o debate sobre a identificação das interações da Modelagem com as demais tendências educacionais.

3.3. Reconhecimento e análise

No mapeamento realizado, foram identificados quatro artigos referentes a pesquisas teóricas (1, 2, 4 e 8) e seis artigos referentes a pesquisas aplicadas (3, 5, 6, 7, 9 e 10).

Para reconhecer convergências e divergências e potencialidades no uso das Tecnologias em contextos de Modelagem, inicialmente os artigos foram agrupados por

enfoques, ou seja: os artigos 1, 4, 7 e 10 com abordagem na tendência Modelagem Matemática; o artigo 3, com abordagem na tendência do uso de Tecnologias e os artigos 2, 5, 6, 8 e 9 com abordagens nas duas tendências.

3.3.1. Análise dos artigos com enfoque na Modelagem Matemática

Nos artigos 1 e 7, houve convergência na análise dos “objetivos”, pois ambos apresentam “concepções sobre abordagens de ensino”. No artigo 1, a autora apresenta sua concepção de ensino de matemática segundo a Modelagem Matemática por meio da abordagem sociocrítica, e no artigo 7 as autoras apresentam uma abordagem para o ensino por Análise de Modelos que afirmam ser diferente das concepções da Modelagem Matemática.

Também nos artigos 1, 4 e 7, houve divergência na identificação de “relações entre a Modelagem Matemática e outras tendências” da Educação Matemática, a qual aparece inclusive nos objetivos dos artigos 1 e 7.

Na análise do artigo 1, a autora indica que sua concepção de Modelagem Matemática, por meio da abordagem sociocrítica, tem proximidade com a Etnomatemática, pois ambas propiciam um aprendizado crítico e contextualizado de matemática, mas indica que essa proximidade não é consenso entre pesquisadores.

No artigo 7, as autoras identificam interseções da sua proposta de Análise de Modelos com as propostas de Modelagem Matemática, pois afirmam que ambas propiciam o estudo de fenômenos por meio de processos reflexivos, visam-no intuito de significar os conceitos matemáticos abordados, bem como propiciam análise crítica de limitações. Também afirmam existir proximidades da sua proposta e da Modelagem Matemática com as Tecnologias Digitais.

No artigo 4, apesar de não constar explicitamente nos objetivos o propósito de verificar proximidades com outras tendências em Educação Matemática, elas emergem na categoria “Articulação entre modelagem e outras teorias”, indicando proximidade da Modelagem Matemática com tendências Investigação Matemática e com as TIC.

Assim, dos quatro artigos (1, 4, 7 e 10) com enfoque em Modelagem, dois citaram a existência de proximidades das tendências da Modelagem Matemática e do uso das Tecnologias.

Também é possível identificar como ponto convergente o fato de todos os artigos citarem quais foram as “tecnologias relacionadas aos processos de ensino”, sendo que três (de quatro artigos) citam ou remetem à “importância do uso das tecnologias”, o que indica uma potencialidade desta tendência no ensino.

No artigo 1, a autora destaca a crise da sociedade relativa ao alto uso de recursos tecnológicos, em um contexto no qual a matemática está muito presente, remetendo à



importância do uso das tecnologias, mas não descreve possibilidades de uso, nem potencialidades desses, em atividades de Modelagem.

No artigo 4, as autoras citam proximidades da Modelagem Matemática com as TIC, indicando a importância do uso dos recursos tecnológicos em atividades de Modelagem, tendo em vista que o artigo apresenta resultados de um estudo teórico sobre artigos de eventos da área. Mas não se referem a potencialidades.

No artigo 7, as autoras indicam a importância das Tecnologias Digitais no processo de Análise do Modelo, afirmando que os estudantes as utilizaram para compreender soluções e comportamentos dos modelos. Ressaltam a importância dos recursos tecnológicos como facilitadores do processo, indicando que possibilitaram a ampliação da memória e, em alguns casos, a reorganização dos pensamentos dos estudantes. Também indicam a importância das planilhas eletrônicas, da visualização dos gráficos e dos campos de direções, que facilitaram e potencializaram o aprendizado. Afirmam que o uso das tecnologias tem que estar em consonância com a perspectiva de aprendizagem do professor. Conforme afirmado anteriormente, indicam proximidades entre o uso das Tecnologias não somente na Análise de Modelos, mas também em relação à Modelagem Matemática, o que indica a importância do uso das Tecnologias como recursos no processo de aprendizagem.

No artigo 10, a autora se refere ao uso de tecnologia apenas em um dos cenários de Modelagem e informa que os dados já foram disponibilizados e a proposta aos estudantes consistiu apenas em bons exercícios de matemática, com uso de Tecnologias, para encontrar a resposta. Nesse caso, verifica-se que o uso da Tecnologia não foi valorizado, apesar de terem sido citados em uma atividade de Modelagem.

3.3.2. Análise do artigo com enfoque em Tecnologias

O artigo 8 aborda ao grande impacto da evolução das TIC na sociedade e, em especial, na educação. A autora indica que inserir as TIC no ensino implica mudanças no ambiente de ensino e aprendizagem. Esse tema emerge com muita clareza, indicando a importância e a necessidade de formação continuada que promovam essa preparação para integração das TIC no cotidiano escolar. Também indica que, na pesquisa exploratória realizada, essa é uma necessidade, evidenciada pelos próprios professores de matemática, que atuam no ensino, que se referem à atualização e à capacitação quanto ao uso das TIC nos ambientes escolares, que possibilite a familiarização com tais recursos de modo a viabilizar seu uso em práticas pedagógicas cotidianas. Relata, ainda, que foram desenvolvidos vários trabalhos sobre formação continuada, relacionados à Modelagem, com objetivo de divulgação da proposta, de forma que pudesse ser incorporada à prática,

visando ao ensino reflexivo e colaborativo, onde se ressalta a necessidade do saber prático, que possibilite a familiarização com a proposta e a prática efetiva.

Uma informação importante dessa pesquisa, que colabora com a análise do presente mapeamento, se refere ao seguinte fato: de 30 professores consultados, apenas dois conheciam a proposta de Modelagem Matemática para o Ensino, o que é um indicativo da necessidade de ampliação da divulgação e de capacitação de propostas na linha de pesquisa dessa tendência da Educação Matemática.

3.3.3. Análise dos artigos com enfoque no uso de Tecnologias e na Modelagem Matemática

O primeiro ponto de convergência identificado nos cinco artigos (2, 5, 6, 8 e 9) com enfoque nas duas abordagens se refere à citação de identificação de “relações entre tendências do uso de Tecnologias digitais ou TIC e Modelagem Matemática”. Nessa análise, verificou-se que todos os textos fizeram referência à temática, tendo os artigos 2, 5, 6 e 8 identificado a existência de relações entre as TIC e a Modelagem e apenas o artigo 9 se referido às relações entre tecnologias digitais e Modelagem.

Também foi identificada, em todos os artigos, outra convergência, que se refere “às opiniões favoráveis sobre o uso das TIC em ambientes de Modelagem”, indicando que os recursos das TIC facilitam a apreensão de conceitos e a aprendizagem, citando, como exemplo, a visualização como um recurso importante quando se trabalha com as TIC na Modelagem, que propicia aprendizagem pela abordagem gráfica (ou visualização das TIC), identificados nos cinco artigos com enfoque nas duas abordagens.

Outra convergência identificada sobre o uso das duas tendências foi “necessidade de investigações futuras” sobre como a Modelagem está sendo transformada pelas TIC, em especial, pela Internet, foi verificada nos artigos 2, 5 e 6, a exemplo de suas pesquisas.

As três convergências anteriormente apresentadas indicam potencialidades no uso das TIC em atividades de Modelagem para o Ensino de Matemática.

Quanto à análise de “relações da Modelagem Matemática com outras tendências” nesse recorte, outro ponto de convergência foi a proximidade com a perspectiva da Pedagogia de Projetos evidenciada nos artigos 4, 6, 8 e 9. Apenas o artigo 5 não faz referência a ela.

Um ponto de divergência verificado no mapeamento relaciona-se às “concepções adotadas sobre Modelagem Matemática”. Os artigos 2, 6 e 8 apresentam suas concepções vinculadas às perspectivas da TIC e da Modelagem por Projetos e, no artigo 9, as autoras apresentam sua concepção definida por Modelação.

4. Considerações finais

Esta pesquisa consistiu no mapeamento de dez artigos publicados em periódicos Qualis A ou B entre os anos 2009 e 2014, visando reconhecer convergências, divergências e potencialidades no uso de Tecnologias e de Modelagem no Ensino de Matemática.

As análises indicam que existem proximidades da Modelagem Matemática com outras tendências e quando o enfoque do artigo aborda as tendências Modelagem Matemática e TIC a convergência emerge como algo natural, no que diz respeito à aprendizagem por meio de problemas vinculados às realidades dos estudantes. A aproximação ocorre tanto no processo de reconhecimento do problema e coleta de dados, como no processo de formulação, resolução e validação, por meio de *softwares* matemáticos. Ressalta-se que a convergência identificada no presente mapeamento confirma a proximidade sugerida, entre as duas tendências, indicada pela pesquisa de Borba e Villarreal (2005) há nove anos.

Nesse enfoque, também foi possível identificar, como convergência, a proximidade da Modelagem e das TIC com a Aprendizagem Baseada em Projetos. Apenas no artigo 8, a autora cita ter encontrado sinergias entre a Aprendizagem Baseada em Projetos, a Modelagem e as TIC. Essa aproximação se confirma, neste mapeamento, sendo uma importante contribuição dessa pesquisa.

As aproximações entre as tendências indicam possibilidades de busca por novos caminhos para aprendizagem de matemática, considerando que existem relações identificadas entre a Modelagem Matemática no ensino e o uso das TIC que podem ser exploradas. Assim, o mapeamento indica a necessidade de pesquisas futuras que visem explorar novas possibilidades de usos dos recursos tecnológicos, tendo em vista a transposição de problemas da Modelagem Matemática para as TIC e novas formas de compreensão e de apropriação de conceitos.

Considerando o indicativo “citação de uso das tecnologias”, verificou-se pela análise das produções com enfoque apenas em Modelagem, que essa foi unânime. A maioria ressalta a importância do uso das tecnologias, especialmente as digitais, onde apenas o artigo 10 não se referiu à sua importância no processo de aprendizagem do estudante. Quando as produções consideraram tendências Modelagem e TIC a opinião é favorável e unânime. O mapeamento também permitiu perceber que, mesmo nos casos em que os artigos não apresentavam o uso das duas tendências como abordagens complementares no ensino, ao citarem o “uso das TIC” em práticas pedagógicas, os autores indicaram como vantagens, no uso das tecnologias digitais, a possibilidade da visualização gráfica, a coleta de dados por meio da pesquisa *on-line* e citaram a possibilidade da realização de simulações, em análises dos problemas abordados. Dentre esses recursos ressaltam a

potencialidade da visualização gráfica, que possibilita elaboração de novas conjecturas e ilustra o papel ativo das tecnologias no pensamento, onde o conhecimento resulta do processo interativo entre o ser humano e a mídia. Também sinaliza que o uso das TIC pode facilitar a compreensão de conceitos matemáticos por meio da transição entre diferentes representações semióticas, potencializando o aprendizado, em contextos de Modelagem. Assim, “citação de uso das tecnologias” foi identificada como uma convergência no mapeamento realizado e o “uso das TIC em atividades de Modelagem” como uma potencialidade na aprendizagem.

Pontualmente, os relatos das atividades indicam diversas contribuições e potencialidades no uso das duas abordagens, quando utilizadas como propostas complementares para o ensino de matemática, especialmente no que diz respeito à coleta de dados por meio da rede mundial de computadores, explorações de conjecturas, por meio de visualizações e simulações e, também, na validação dos modelos matemáticos elaborados. Nesses, foi possível identificar a importância da mediação nas atividades, tanto na orientação do professor, como em ações coletivas, na reorganização do pensamento e do conhecimento.

Quanto às concepções adotadas em relação à Modelagem Matemática identificou-se que há divergência, o que é comum em pesquisas dessa linha, devido à existência de diferentes compreensões do processo de ensino aprendizagem de seus idealizadores. Constatou-se que a compreensão da realidade interfere na perspectiva da abordagem de Modelagem Matemática adotada, bem como na escolha de outras tendências em Educação Matemática, visando favorecer o processo de ensino e aprendizagem. Também se verificou que não existe a preocupação dos autores quanto à classificação de sua concepção, pois a maioria não o fez.

De modo geral, foi possível verificar que as inovações tecnológicas têm provocado transformações importantes na sociedade e têm suscitado inovações em abordagens de ensino, especialmente segundo o enfoque da Modelagem Matemática, o que indica novos desafios, novas propostas e, conseqüentemente, novas abordagens educacionais. Devido ao grande impacto da evolução das TIC na sociedade e, em especial, na Educação, os autores indicam que a sua inserção no ensino, além de ser uma necessidade, implica em mudanças nos processos de aprendizagem, não apenas em contextos de Modelagem Matemática, mas de modo geral. Inclusive o artigo 3 esclarece sobre a importância e a necessidade de formação continuada que promovam esta preparação para integração das TIC no ensino, sendo essa necessidade indicada pelos próprios professores, para familiarização e capacitação quanto ao uso adequado de tais recursos, viabilizando-os em suas práticas pedagógicas. Além disso, um indicativo apresentado no artigo 3 é que a Modelagem

Matemática é uma prática pouco conhecida nos ambientes escolares, o qual salienta a necessidade de cursos de formação que divulguem essa tendência.

Quanto às fundamentações teóricas consideradas, o mapeamento indica que houve uma grande diversidade de autores, sendo que apenas na abordagem com uso de TIC, o autor Pierre Lévy foi citado em um número significativo de trabalhos (metade deles).

A importância desse mapeamento consiste na identificação de convergências, divergências e potencialidades envolvendo as abordagens das tendências Modelagem Matemática e o uso das TIC no ensino de matemática, o que pode vir a contribuir com novas pesquisas que visem explorá-las. Salienta-se que esse foi um recorte sobre esse tema e as conclusões resultam da análise dos indicativos reconhecidos nos artigos considerados, que poderiam resultar em percepções e conclusões diferentes, caso fossem analisados outras produções.

Referências

- ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. (Orgs.). **Práticas de Modelagem Matemática na educação matemática**: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina: Editora da Universidade Estadual de Londrina, 2011. p. 141-158.
- BARBOSA, J. C. **MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CONTRIBUIÇÕES PARA O DEBATE TEÓRICO**. IN: ANAIS DA REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24. 2001, CAXAMBU.
- BASSANEZI, C. R. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.
- BENNEMANN, M.; ALLEVATO, N. S. G. **TIC nos artigos do Bolema nos últimos 10 anos**. 2011. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (XIII CIAEM). In: XIII CIAEM.
- BIEMBENGUT, M. S. **Mapeamento na Pesquisa Educacional**. Editora Ciência Moderna: Rio de Janeiro. 2008.
- BIEMBENGUT, M. S. 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **ALEXANDRIA: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.2, n.2, p.7-32, jul. 2009.
- BIEMBENGUT, M. S. Concepções e Tendências de Modelagem Matemática na Educação Brasileira. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Año7. Número 10. p 195-204. Costa Rica. 2012.
- BORBA, M. C., CHIARI, A. (Orgs.) **Tecnologias Digitais e Educação Matemática**. São Paulo: Editora da Física, 2013.
- BORBA, M. C.; MALHEIROS, A. P. S.; ZULATTO, R. B. **Educação a Distância online**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.



- BORBA, M. C., PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. 4ª ed., Coleção Tendências em Educação Matemática – Belo Horizonte: Autêntica, 2010.
- BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking**: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. New York: U.S.A., Springer, 2005.
- DALLA VECCHIA, R. *A Modelagem Matemática e a Realidade do Mundo Cibernético*. São Paulo: UNESP, 2012. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.
- FLEMMING, Diva Marília; LUZ, Elisa Flemming; MELLO Ana Cláudia Colloço de. **Tendências em educação matemática**. 2. ed. - Palhoça : UnisulVirtual, 2005. 87 p.
- KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **The International Journal on Mathematics Education**, London, v. 38, n. 3, p. 302 - 310, 2006.
- MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIRO S, A. P. S. *Modelagem em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.
- MICHAELIS. **Dicionário Online - Dicionários Michaelis – UOL**. Disponível em: <<http://michaelis.uol.com.br/>>. Acesso em 12 de jun. de 2014.
- PAPERT, S. A. **Máquina das Crianças**: Repensando a Escola na Era da Informática. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.
- PONTE, J. P. Tecnologias de informação e comunicação na formação de professores: Que desafios? **Revista Iberoamericana de Educación**, 24, 63-90. 2000.
- SANTOS, E. **Educação Online para além da EAD: um fenômeno da Cibercultura**. In: Actas do X Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia. Braga: Universidade do Minho, 2009.
- SCHEFFER, N. F. Modelagem Matemática: uma abordagem para o ensino-aprendizagem da matemática. **Educação Matemática em Revista – RS**. SBEM-RS. nº1, p. 11-16, 1999.
- SKOVSMOSE, O. Cenários de investigação. **Bolema**– Boletim de Educação Matemática, RioClaro (SP), n. 14, p. 66-91, 2000.
- VALENTE, J. A. **Computadores e Conhecimento: repensando a educação**. Campinas: UNICAMP/NIED, 1993.
- VALENTE, J. A. **Diferentes usos do computador na educação**. In: **Diferentes usos do computador na educação. O uso inteligente do computador na educação**. Palestra realizada em Belo Horizonte em 28 jan. 1998.
- VERASZTO, E. V.; SILVA, D.; MIRANDA, N. A.; SIMON, F. O. Tecnologia: Buscando uma definição para o conceito. **PRISMA.COM**, 7, p. 60-85, 2008.

Rosana Maria Luvezute Kripka

Universidade de Passo Fundo (UPF); - Brasil

E-mail: rkripka@upf.br

Maria Salett Biembengut - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS) - Brasil

E-mail: maria.salett@pucrs.br

Isabel Cristina Machado de Lara - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS) - Brasil

E-mail: isabel.lara@pucrs.br

Lori Viali - Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) - Brasil

E-mail: viali@pucrs.br

Regis Alexandre Lahm - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS)

E-mail: lahm@pucrs.br

UMA ANÁLISE DO USO DA CRIPTOGRAFIA NOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO

AN ANALYSIS OF THE CRYPTOGRAPHY USE IN MATHEMATICS TEXTBOOKS OF HIGH SCHOOL

Beatriz Fernandes Litoldo
Henrique Lazari

RESUMO

A proposta deste artigo é apresentar uma análise dos Livros Didáticos selecionados pelo PNLD 2012 acerca da inserção do tema Criptografia nos conceitos matemáticos do Ensino Médio, verificando se este tema é abordado, como é feita essa abordagem e em que conceitos matemáticos ele é utilizado. Tal análise se deu a partir de uma leitura dos livros das coleções, dando mais atenção aos conteúdos de álgebra. O tema foi encontrado em duas das cinco coleções analisadas, sendo utilizado como uma aplicação da teoria abordada em seções como *Saiba Mais* e *Contexto*. Este artigo ao estudar um tipo de aplicação utilizada em livros didáticos, visa possibilitar que projetos de modelagem sejam desenvolvidos, utilizando a Criptografia e conceitos matemáticos associados.

Palavras-chaves: Educação Matemática. Livro Didático. Criptografia. Ensino Médio.

ABSTRACT

The purpose of this article is to present an analysis of the textbooks selected by the PNLD 2012 regarding the inclusion of the topic Cryptography in mathematical concepts taught in high school to verify whether this topic is addressed, how it is approached and in which mathematical concepts it is used. This analysis was performed based on a reading of books of the collections, giving more attention to the content of algebra. The theme was found in two of the five collections analyzed, being used as an application of the theory discussed in sections as *Saiba Mais* and *Contexto*. This article, while studying a type of application used in textbooks, aims to enable modeling projects to be developed using Cryptography and mathematical concepts associated with it.

Keywords: Mathematical Education. Text Book. Cryptography. High School.

Introdução

As pessoas estão cada vez mais conectadas com as tecnologias digitais e como consequência tiram proveito delas das mais diferentes formas. Tais tecnologias constantemente em evolução, proporcionam às pessoas a comodidade e facilidade de acessar a internet e navegar por inúmeros *sites* a qualquer hora. Atividades *on-line*, como compra e venda, transações bancárias, auditorias eletrônicas, entre outros, são exemplos de

situações da vida moderna que necessitam o uso da Criptografia. Logo, embora a maioria desconheça, a Criptografia faz parte de sua vida.

Por ser um assunto interessante que está intimamente vinculado ao cotidiano das pessoas, este tema pode ser, segundo Groenwald, Franke e Olgin (2009, p. 42) “motivador e gerador de situações didáticas que permitam o aprofundamento da compreensão dos conceitos matemáticos [...] e também, servir como um instrumento de ensino e aprendizagem no ensino básico”.

Desse modo, além de permitir a aprendizagem da Criptografia em si, a inserção desse tema dentro das salas de aula propicia a conexão entre o cotidiano dos alunos e de suas famílias em relação à segurança de informação de cartões bancários, compra e venda *on-line*, entre outros, a temas como números primos, congruência módulo p , matrizes, funções lineares, exponenciais, logarítmicas, etc. A Criptografia ainda permite ao professor o desenvolvimento de atividades diferenciadas com seus alunos. Seu uso motiva e incentiva os alunos a estudarem matemática em sala de aula, contribuindo para que eles pesquisem, estudem e utilizem essa ciência em suas vidas (FINCATTI, 2010). Os argumentos levantados por Fincatti (2010) vêm ao encontro do que se propõe a Modelagem Matemática. Na concepção de Bassanezi (2002, pg. 16) a Modelagem Matemática consiste na “arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. Entretanto, como trazer para dentro da sala de aula a Criptografia e suas aplicações na matemática por meio dessa concepção?

A resposta a esta pergunta será dividida neste artigo em duas vertentes. A primeira vertente leva em conta o conhecimento do professor em relação à Criptografia e de toda sua flexibilidade em ser relacionada com os conteúdos do ensino básico, além de conhecer e compreender as concepções da Modelagem Matemática. A segunda seria a apresentação da Criptografia e suas aplicações na matemática por meio dos livros didáticos, e é neste ponto que daremos mais ênfase, pois a primeira opção não aborda a realidade dos professores atuantes na escola, já a segunda contempla todos aqueles atuantes no ensino escolar. Deste modo, apresentar a Criptografia e suas aplicações para os alunos, explorando o seu potencial como ferramenta de ensino, se apresenta conveniente quando atividades envolvendo este tema estão inseridas nos livros didáticos de matemática. Mais ainda, ao apresentar uma aplicação não utilizada regularmente nos projetos de modelagem no Brasil, espera-se que no futuro tal área possa se transformar em projetos de modelagem desenvolvidos por pesquisadores e professores.

Neste sentido, observa-se que o livro didático aparece no cenário escolar como uma ferramenta que auxilia o professor a compartilhar seus conhecimentos com os alunos, assumindo o papel de coadjutor da prática docente, mediando a construção do

conhecimento. Ele se constitui no principal recurso de direcionamento de professores e alunos em sua prática pedagógica e atividades escolares (SILVA e CARVALHO, 2004), sendo utilizado pelo professor como o principal manual de orientação e instruindo os alunos na realização de suas tarefas (exercícios, pesquisas, estudos) em sala de aula, bem como se tornando um referencial de pesquisa fora dela (SILVA e CARVALHO, 2004). O livro didático possibilita ainda que o aluno estabeleça novas ideias, complemente ou finalize o entendimento dos conteúdos abordados pelo professor, além de uma melhor fixação da matéria estudada (GONÇALVES, 2007). Assim sendo, além do livro didático auxiliar o professor nas atividades dentro da sala de aula, ele permite aos alunos a busca dos conteúdos sempre que sentirem essa necessidade.

Pensando especificamente nos livros didáticos de matemática, Gonçalves (2007, p. 24) afirma que estes devem “promover a compreensão dos conteúdos e levar o aluno a investigar, refletir, concluir, generalizar e aplicar os conhecimentos, através de problemas matemáticos ligados a realidade”. De acordo com Borba (2013) os autores e editores exercem um papel fundamental na escolha dos conteúdos a serem ensinados e a maneira como estes devem ser aprendidos, bem como a ordem e ênfase dada a cada área do conteúdo. As atividades a serem desenvolvidas, propostas nos livros didáticos dependem muito da relevância que autores e editores atribuem ao conteúdo, levando em consideração a opinião direta e indireta de sujeitos externos.

Tendo em vista que os autores e editores de tais livros vivem em uma constante busca de novos recursos para o ensino e contextualização de seus conceitos em situações da vida moderna e que as abordagens diferenciadas desses conteúdos são cada vez mais essenciais para estimular o interesse dos alunos em aprender matemática, acredita-se que o tema Criptografia, vinculado aos conceitos matemáticos sob uma concepção da Modelagem Matemática, apresenta-se como um excelente recurso que pode ser incorporado nos livros didáticos de matemática como ferramenta para o ensino de tais conceitos. Nesse sentido, este artigo apresenta uma pesquisa realizada acerca da inserção da Criptografia com conceitos matemáticos nos livros didáticos de matemática do Ensino Médio e como tal inserção é feita olhando sob a luz da Modelagem Matemática. Essa pesquisa concentrou-se em analisar com que frequência a Criptografia é utilizada como recurso para o ensino ou aplicação de algum conceito matemático, de que maneira isso ocorre e em quais conceitos estão sendo utilizados. Cabe ressaltar que essa pesquisa faz parte de um projeto maior coordenado pelo segundo autor deste artigo, que vincula Criptografia e suas aplicações à Educação Matemática do Ensino Médio e Universitário.

Criptografia

Etimologicamente a palavra Criptografia, deriva das palavras gregas *kriptós* que significa escondido, oculto e *gráphein* que significa escrever, e pode ser considerada a arte ou a ciência de escrever mensagens em cifras ou em códigos, possibilitando exclusivamente apenas à pessoa autorizada decifrar e ler as mensagens (TAMAROZZI, 2000).

Há milhares de anos a Criptografia permeia as trocas de mensagens humanas de maneira sigilosa. Tais trocas sempre foram indispensáveis na história da humanidade, principalmente para os governantes, que dependiam de meios de comunicação eficientes para governar seus territórios, comandar seus exércitos, etc. Sua importância se intensificava em épocas de guerra, quando a eficiência e o sigilo na comunicação poderiam determinar a glória ou a ruína de um povo. Toda essa importância impulsionou o desenvolvimento de técnicas para camuflar as mensagens, de modo que somente o destinatário pudesse ler seu conteúdo, levando ao surgimento das cifras, que são maneiras de codificar as mensagens permitindo que apenas a pessoa que tenha o “segredo” para decifrar tal código possa ler as mesmas.

A Criptanálise, arte de tentar descobrir o texto cifrado e/ou a lógica utilizada na cifração, surge na história como uma contrapartida da Criptografia. Uma cifra deixava de ser segura quando alguém a decifrava, impulsionando assim, a criação de uma nova cifra. Esse embate entre Criptógrafos e Criptoanalista tem ocorrido desde a antiguidade até os dias de hoje.

Atualmente a Criptografia assume uma função também importante, nesta que é conhecida como a Era da Informação – uma era pós-industrial na qual a informação é a mercadoria mais valiosa. A utilização da informação digital cresce a cada dia, tornando-se parte de nossa sociedade. Tiramos proveito da internet trocando e-mails, efetuando compra e venda, realizando transações bancárias, entre outras atividades que podem exigir um nível de segurança maior ou menor. O sucesso e a eficiência de tais transações dependem essencialmente da capacidade de proteger essas informações enquanto elas fluem ao redor do mundo e isso depende principalmente do poder da Criptografia.

De acordo com Singh (2010) os matemáticos assumem na atualidade um papel extremamente importante nessa Era da Informação, já que estes se encontram à frente da criação e desenvolvimento das cifras para a proteção de informações militares e também estão no comando da decifração das mesmas. Ele observa que, se a Primeira Guerra Mundial foi atribuída aos químicos, devido ao gás de mostarda e ao cloro, e a Segunda Guerra Mundial aos físicos devido à bomba atômica, é aos matemáticos que é conferida

uma possível Terceira Guerra Mundial, já que a próxima grande arma de guerra será o controle e acesso a informação.

O poder de segurança da informação sempre esteve em evolução, a partir do momento que a cifra era quebrada, novas técnicas criptográficas eram desenvolvidas a fim de continuar a proteger as informações. Um grande salto na história da Criptografia em termos de proteção de mensagem ocorreu por volta de 1977 através dos cientistas de computação Rivest e Shamir e do matemático Adleman. Utilizando as ideias publicadas por Diffie e Hellman em 1975³² acerca da busca por uma função de mão única, que se enquadrasse nos critérios exigidos para uma cifra assimétrica³³ é que o pesquisador Rivest se empenhou até descobrir a função apropriada para esse tipo de cifra. Shamir e Adleman contribuíram com essa descoberta, desenvolvendo então o sistema conhecido como RSA.

Este sistema, chamado RSA (Rivest, Shamir e Adleman), é um sistema de Criptografia assimétrica, também conhecido como *criptografia de chave pública*³⁴. Hoje em dia a Criptografia RSA é altamente empregada, podendo ser encontrada em vários locais como, por exemplo, nos sistemas de correios eletrônicos, já que esse sistema permite um bom nível de segurança. A Criptografia de Chave Pública garante aos remetentes e aos destinatários a garantia da privacidade das mensagens juntamente com a assinatura das mesmas.

Como o sistema RSA é constituído basicamente das propriedades dos números inteiros, a principal segurança desse sistema é dada pela dificuldade em se conseguir fatorar números inteiros com grande velocidade. A partir do momento que esta fatoração passar a acontecer de forma rápida o sistema RSA se tornará inútil. Entretanto, por muitos anos os matemáticos vêm buscando o aumento nessa rapidez de fatoração, porém até então nenhum avanço nesta direção foi obtido. Assim, a fatoração ainda continua sendo um cálculo muito trabalhoso e em certos momentos uma tarefa muito difícil, logo o sistema RSA estará seguro por um bom tempo.

Livro Didático

Segundo Azevedo (2005, p. 5) “o livro didático no Brasil se estabeleceu no processo de ensino e aprendizagem de tal forma que adquiriu centralidade na transmissão do conhecimento para a grande maioria do professorado”. Gonçalves (2007, p. 14) afirma que

³² DIFFIE, Whitfield; HELLMAN, Martin E. **New directions in cryptography**. IEEE Trans. Inform. Theory, IT22, p. 644–654, Nov1976. Disponível em: <
<http://www.cs.berkeley.edu/~christos/classics/diffiehellman.pdf> >.

³³ Utilização de chaves diferentes para cifração e decifração. Para mais informações ver em: RIVEST, R. L.; SHAMIR, A.; ADLEMAN, L. **A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems**. CACM, 121, p. 120–126, 1978. Disponível em: <
<http://people.csail.mit.edu/rivest/Rsapaper.pdf> >.

³⁴ Para mais informações ver Souza (2013) – Criptografia de Chave Pública, Criptografia RSA.



“devido às políticas públicas brasileiras, o livro didático foi produzido a fim de atender a parcela carente que correspondia e ainda corresponde à maioria da população, com a intenção de compensar as desigualdades sociais”. O livro didático também foi tomado como um recurso pedagógico destinado a promover melhorias na organização, apresentação e complementação nos conteúdos curriculares, além de proporcionar uma orientação para o professor acerca do seu planejamento de aula e ter se tornado um recurso para pesquisas escolares (GONÇALVES, 2007).

Antigamente, os livros didáticos eram vistos apenas como uma ferramenta pedagógica secundária na prática do professor, entretanto atualmente esse material passou a ser um instrumento pedagógico essencial na sala de aula e fundamental na escolarização e letramento de nossos alunos. A relação de interdependência entre professor, aluno e livro didático interfere diretamente no ensino, sendo o livro impresso a principal fonte de informação utilizada em grande parte pelos professores e alunos de nosso país (LIMA, 2012; AZEVEDO, 2005).

Em qualquer disciplina, a utilização do livro didático é fundamental, visto que, em muitos casos este é o único instrumento pelo qual os alunos têm acesso à leitura e à cultura letrada (Guia de Livros Didáticos – PNLD³⁵ 2012) e, em diversas circunstâncias, é o único material pedagógico utilizado pelo professor em suas aulas (AZEVEDO, 2005). Borba (2013) ainda ressalta que o livro didático contribui na continuidade de formação dos professores acerca da construção de seus conhecimentos conceituais, didáticos e pedagógicos em relação ao ensino e aprendizagem da matemática.

Mesmo em tempos modernos, onde novos e diversos recursos tecnológicos designados à transmissão do conhecimento estão cada vez maiores, no ambiente escolar “o livro impresso ainda é o material que melhor atende às necessidades dos professores e alunos das escolas públicas brasileiras” (Guia de Livros Didáticos – PNLD 2012, p. 7). Com o objetivo de auxiliar na formação educacional, social e cultural do indivíduo o livro didático ainda traz muitas vantagens e é por causa delas que sua utilização continua crescendo e se devolvendo a cada dia (GONÇALVES, 2007).

Dentre as vantagens de se ter um livro impresso, que pode ser portado com a pessoa, de modo que esta pode consultá-lo sempre que julgar necessário, Gonçalves (2007) ressalta que a utilização do livro didático amplia expressivamente a capacidade de leitura, desenvolvendo no aluno o hábito de ler. A autora ainda complementa que o livro didático proporciona ao aluno a possibilidade de rever o conteúdo estudado, ressaltando os pontos importantes e elaborando ideias com maior facilidade, além de exercer um papel informativo ao leitor, podendo ao mesmo tempo diverti-lo também.

³⁵ Programa Nacional do Livro Didático

Em meio a essas vantagens, o livro didático assume um papel essencial na construção do aprendizado, pois através dele pode se formar uma conexão entre o trabalho do professor e dos alunos em sala de aula. Ele é um meio no qual se pode transmitir e se transferir conhecimento, vincular ideias e difundir valores, além de relacionar conhecimentos de senso comum a conhecimentos cientificamente aceitos (SILVA e CARVALHO, 2004).

Neste sentido, o professor precisa estar atento à sua prática docente, tendo consciência de que através de sua prática, aliada ao livro didático, ele deve proporcionar aos alunos o desenvolvimento da criticidade, da investigação, da reflexão, da criatividade e de sua capacidade de raciocínio. Para isso, o professor também precisa contar com um bom livro didático que, para assim ser considerado, deve atender a algumas características como, por exemplo, conteúdo objetivo, linguagem de fácil compreensão e relacionada à realidade do aluno, com exercícios que auxiliam no aprendizado, entre outros (GONÇALVES, 2007).

Visando disponibilizar livros didáticos de boa qualidade nas escolas públicas brasileiras, o Ministério da Educação do Brasil (MEC) iniciou em 1929 um programa do governo voltado à distribuição de livros didáticos a estudantes de escola pública. Anos mais tarde este programa foi intitulado como Programa Nacional do Livro Didático – PNLD (PNLD)³⁶. No início do programa, apenas livros voltados para o ensino fundamental eram analisados e avaliados pelo PNLD, mas em 2004 este programa se ampliou, passando a analisar e a avaliar também livros didáticos para o ensino médio (Guia de Livros Didáticos – PNLD 2012).

O PNLD tem como principal objetivo contribuir com os professores na escolha de livros didáticos de qualidade, dentre os disponíveis no mercado, que serão distribuídos aos alunos da educação básica. Após a avaliação das obras, um Guia de Livros Didáticos é publicado pelo MEC oferecendo aos professores as resenhas das coleções aprovadas pelo programa. O Guia de Livros Didáticos visa auxiliar o professor na escolha do mesmo, sendo considerado como um instrumento de apoio a este processo. Após sua publicação, o guia é encaminhado às escolas para que possam escolher, dentre as obras apresentadas, aquelas que melhor se enquadram no seu projeto político pedagógico. Essa avaliação ocorre em períodos trienais, sendo que a cada ano o MEC adquire e distribui livros didáticos para todos os alunos (Portal MEC). Em sua edição atual, sete coleções foram aprovadas pelo PNLD 2012³⁷. Os livros do PNLD 2012 selecionados pelos professores

³⁶ Para maiores informações sobre a história do PNLD ver em: < <http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/livro-didatico-historico> >.

³⁷ PNLD 2012 / Matemática. Disponível em: < <http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/guia-do-livro/item/2988-guia-pnld-2012-ensino-m%C3%A9dio> >.



serão válidos para os anos 2013, 2014 e 2015, sendo que em 2015 uma nova avaliação será feita para selecionar os livros para os próximos três anos.

Criptografia, Livro Didático e Modelagem Matemática

De acordo com Bassanezi (2002, pg. 36) “o desenvolvimento de novas teorias matemáticas e suas apresentações como algo acabado e completo acabam conduzindo seu ensino nas escolas de maneira desvinculada da realidade”. O esquema:

“enunciado $\rightarrow$ demonstração $\rightarrow$ aplicação”,

representa claramente essa estrutura tradicional de ensino, entretanto, a construção dessa ordem, segundo esse autor, deveria ser invertida, isto é, partir de sua motivação (externa ou não a matemática), ocorre-se a formulação de hipótese, permeando entre suas validações e de novos questionamentos, chegando finalmente em seu enunciado (BASSANEZI, 2002). Assim, por esse novo fio condutor, é que o processo da modelagem aconteceria e juntamente com ele, o ensino e aprendizagem.

Meyer, Caldeira e Malheiros (2011) corroboram com essa inversão de abordagem. Segundo eles, a Modelagem Matemática segue um procedimento dividido em três passos principais, a saber, o da formulação, o do estudo de resolução e o de avaliação, sempre se apoiando em um diálogo, em uma negociação e acordo entre os alunos a respeito de tais passos. Algumas perguntas como: “Pra que serve isso” e “Pra que serve a Matemática” são frequentemente feitas pelos alunos. Como resposta, a Modelagem Matemática se insere no contexto da sala de aula para que os alunos possam fazer uso dela, e, a partir disso, compreender mais sua realidade e sua situação de vida (MEYER, CALDEIRA e MALHEIROS, 2011). Essa compreensão da realidade destacada por esses autores vem da maneira como os conteúdos são trazidos, abordados e desenvolvidos em sala de aula. De acordo com eles, o processo de ensino e aprendizado na Modelagem Matemática, se inicia somente quando são os próprios alunos que trazem os problemas da realidade a serem trabalhados em sala de aula.

A autonomia e liberdade dada aos alunos para em conjunto, escolherem um tema de sua realidade e a partir dele desenvolver os conteúdos matemáticos do currículo, contribui para desenvolver a curiosidade e motivação dos alunos para levá-los à compreensão da matemática e de seu uso no cotidiano. Entretanto, quando se volta para o material didático essa liberdade de escolha infelizmente desaparece, pois seu conteúdo e a maneira como ele será apresentado já está estabelecida. Porém, o livro didático pode constituído na concepção de Modelagem Matemática olhar para as aplicações e para as matemáticas que tais aplicações necessitam.

Demonstrar aos alunos que a matemática é utilizada por todas as pessoas por diferentes razões e propósitos e ajudar a fornecer significado e interpretações para problemas reais que utilizam a matemática são concepções da Modelagem Matemática da qual o livro didático pode ser constituído. Segundo Niss, Blum e Galbraith (2007) essas concepções promovem a “motivação dos alunos para se empenhar nos estudos de matemática, pois ajuda a moldar suas crenças a atividades em relação a ela”³⁸. Assim, o ponto de partida no processo de ensino e aprendizagem da Matemática deve ser dado na busca do elo entre o interesse do aluno e sua formação cidadã.

O currículo de matemática deve levar em consideração uma abordagem a fim de proporcionar ao aluno a visualização da aplicação dos conteúdos matemáticos em situações da história ou do cotidiano, dentro e fora da escola. Escolher temas que propiciem atividades pedagógicas, que possibilitem uma abordagem de ensino e aprendizagem da Matemática que desencadeiam o processo de criticidade matemática e autonomia durante a aprendizagem, que estimule a curiosidade do aluno e que o leve à construção do conhecimento de forma a desenvolver suas competências e habilidades, são desafios que a Educação Matemática vem tentando superar (GROENWALD, FRANKE e OLGIN, 2009; OLGIN, 2011). Neste sentido, a Criptografia pode ser um tema que consegue relacionar os conteúdos desenvolvidos ao longo do ensino básico com situações práticas. Este tema, também proporciona ao professor diversas atividades e jogos de codificação que podem ser usados para a fixação e exploração dos conteúdos matemáticos (TAMAROZZI, 2001).

Certamente muitos alunos já ouviram falar em Criptografia, pois além de seu uso prático, ela também está presente em obras literárias³⁹ e cinematográficas⁴⁰. Deste modo, pode-se utilizá-la como um tema diferenciado para atrair e cativar o interesse dos alunos, já que ela está intrinsecamente ligada aos sistemas de segurança eletrônicos da vida moderna. Assim, além de enriquecer o ensino de matemática, ela pode despertar a curiosidade e aguçar a imaginação dos estudantes (BORGES, 2008) contribuindo para diminuir a existência de aulas mecânicas de um ensino maçante da matemática tradicional (OLIVEIRA e KRIPKA, (2011); PAROLINE e TOSINI, (2009)).

A flexibilidade que este tema oferece para ser trabalhado com os conceitos matemáticos do currículo escolar, pode servir como um aliado para o ensino e

³⁸ “providing motivation for students to engage in the study of mathematics by helping to shape their beliefs and attitudes towards it”.

³⁹ Júlio Verne em *Viagem ao centro da Terra*; Sir Arthur Conan Doyle nas aventuras de *Sherlock Holmes*; Edgar Allan Poe em *O escaravelho de ouro*, entre outros.

⁴⁰ Ver mais em Eiras, Luiz. C. S.; **Criptografia na Ficção** – Técnicas antigas e fantasias modernas. Revista: Prodemge – Tecnologia de Minas Gerais. p. 14-15, 2004..



aprendizagem no Ensino Médio, contribuindo para um enriquecimento das aulas de matemática. Os conceitos de aritmética, funções lineares, quadráticas, exponenciais, logarítmicas, matrizes, entre outras, podem ser abordados em contextos criptográficos envolvendo um mistério atraente para os alunos, podendo ser então, um gerador de motivação e interesse, instigando, desafiando e convidando os alunos a “brincar” com a arte de cifrar/ decifrar mensagens e, dessa maneira, aprender/fixar o conceito envolvido.

Alguns trabalhos como: Currículo de Matemática no Ensino Médio: atividades didáticas com o tema Criptografia (GROENWALD e OLGIN, 2011), Criptografia e os Conteúdos Matemáticos do Ensino Médio (OLGIN, 2011), Criptografia e o Currículo de Matemática no Ensino Médio (GROENWALD e OLGIN, 2011) abordam o tema Criptografia vinculados a alguns conceitos matemáticos do Ensino Médio. Esses trabalhos apresentam como sugestões ao professor, atividades didáticas para serem trabalhadas e desenvolvidas com os alunos. Segundo esses autores, tais atividades, além de possibilitarem aos alunos um trabalho sobre o conceito de Criptografia, podem ser usadas para exercitar, aprofundar, fixar e revisar conteúdos matemáticos, contribuindo com o desenvolvimento das capacidades de concentração, trabalho em grupo e estratégias de raciocínio, concluindo que existe uma grande relevância deste tema quando acoplado a alguns conceitos matemáticos no ensino e aprendizagem. Oliveira e Kripka, (2011) afirmam que, com o entrelaçamento deste tema aos conteúdos matemáticos em sala de aula, é possível proporcionar ao aluno uma ponte entre os acontecimentos da atualidade com fatos importantes da história e suas contribuições, além de poder tornar o aprendizado da matemática mais fácil, produtivo e significativo, contribuindo para a formação e desenvolvimento da vida escolar, social e pessoal do aluno.

Nesse sentido, levando em conta que o livro didático é uma ferramenta que apoia e auxilia a tarefa do professor na formação de seus alunos, a inserção do tema Criptografia como ferramenta de ensino/aplicação através dos livros didáticos de matemática torna-se extremamente conveniente, visto que isso poderia ampliar o potencial do livro didático como ferramenta de apoio. Do mesmo modo, considera-se que os livros didáticos de matemática podem ser o vínculo que leve o professor e os alunos ao tema Criptografia, apresentando possíveis atividades pedagógicas que envolvam conceitos matemáticos do Ensino Médio, como funções, matrizes, entre outros e que sejam relacionadas à Criptografia, difundindo assim esse tema que apesar de tão presente em nossas vidas, é tão pouco conhecido e explorado.

Metodologia

Este trabalho foi desenvolvido em três etapas. A primeira se deu através de estudos e discussões a respeito da Criptografia e seus possíveis alinhamentos com os conteúdos matemáticos. Na segunda etapa ocorreu a seleção dos livros didáticos que seriam analisados. Como o intuito é analisar os livros que estão ou estarão disponíveis na rede pública de ensino, recorremos ao material sugerido pelo PNLD. Visto que a análise dos livros para o ano que vem foi feita esse ano, escolheram-se para análise as coleções⁴¹ aprovadas no PNLD 2012. A terceira etapa foi marcada pela leitura e análise das coleções apresentadas pelo PNLD 2012, verificando se o tema Criptografia era abordado e de que maneira essa abordagem ocorria.

Dentre as coleções aprovadas pelo PNLD 2012, por questões de logística, foram analisadas apenas aquelas que estavam disponíveis no acervo da Biblioteca da UNESP⁴² de Rio Claro/SP, as quais estão descritas mais detalhadamente na tabela abaixo (Tabela 1) e ilustradas na figura 1.

Tabela 1 - Coleções aprovadas pelo PNLD 2012 que foram utilizadas nessa pesquisa.

Título	Autor	Edição	Cidade	Editora	Ano
Matemática – Contexto & Aplicações	Luiz Roberto Dante	v. 1 – 4º v. 2 – 4º v. 3 – 3º	São Paulo	Ática	2007
Matemática Ciência e Aplicações	David Degenszajn, Gelson Iezzi, Nilze de Almeida, Osvaldo, Roberto Périgo	v. 1 – 5º v. 2 – 5º v. 3 – 5º	São Paulo	Saraiva	2010
Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia	Jackson Ribeiro	v. 1 – 1º v. 2 – 1º v. 3 – 1º	São Paulo	Scipione;	2010
Novo Olhar – Matemática	Joamir Souza	v. 1 – 1º v. 2 – 1º v. 3 – 1º	São Paulo	FTD	2011
Conexões com a Matemática	Juliane Matsubara Barroso	Volume único - 1º	São Paulo	Moderna	2012

Fonte: Organizada pela autora a partir das coleções dos livros didáticos aprovadas pelo PNLD – 2012.

⁴¹ Entende-se aqui por coleção, todo(s) (os) livro(s) que contempla(m) os conteúdos do Ensino Médio de cada autor.

⁴² Universidade Estadual Paulista.



Figura 1 - a) Jackson Ribeiro. v. 2; b) Joamir Souza. v.1 e c) Joamir



A coleção *Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia* de Jackson Ribeiro faz uso do tema Criptografia no volume 2 do capítulo 4, mais especificamente no estudo de matrizes nas páginas 152-153. A seção selecionada para tratar desse assunto é o *Saiba mais* (Figura 2), que é um espaço no final de cada capítulo destinado a complementar o conteúdo estudado.

Figura 2 - Imagem da seção *Saiba Mais*, onde a Criptografia é utilizada como uma ferramenta para se trabalhar as propriedades multiplicativas e inversas de matrizes.

Saiba mais

Criptografar mensagens utilizando matrizes

O envio e o recebimento de informações sigilosas é uma necessidade antiga. Com o advento da internet, que propicia a troca de informações de maneira precisa e ágil, a criptografia tornou-se importante para que essa troca seja extremamente confidencial.

A criptografia consiste em um conjunto de princípios e técnicas para cifrar uma mensagem, tornando-a incompreensível, de forma que somente o remetente e o destinatário possam lê-la (decodificá-la). Para isso, define-se um **protocolo**, que deve ser conhecido apenas pelo remetente e pelo destinatário, denominado "chave".

Vocabulário

protocolo: conjunto de normas e especificações técnicas que regem a transmissão de dados entre computadores.

Remetente (T) → chave → algoritmo → texto cifrado → algoritmo → chave → Destinatário (T)

texto original

Muitas invenções contribuíram no processo de criptografia, dentre elas, a Enigma, famosa máquina de cifragem dos nazistas utilizada na Segunda Guerra Mundial. Desenvolvida pelo inventor alemão Arthur Scherbius (1878-1929), tornou-se o mais complexo sistema de cifragem de sua época.

Veja na imagem a máquina Enigma e alguns de seus componentes.

Unidade contendo três misturadores

Painel de tomadas

Teclado

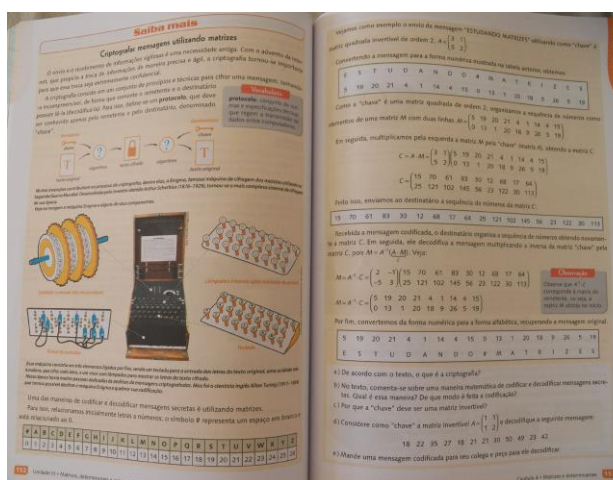
Lâmpadas (visíveis após remoção do painel)

Essa máquina consistia em três elementos ligados por fios, sendo um teclado para a entrada das letras do texto original, uma unidade misturadora, que cifra cada letra, e um visor com lâmpadas para mostrar as letras do texto cifrado.

Nessa época havia muitas pessoas dedicadas às análises de mensagens criptografadas. Mas foi o cientista inglês Allan Turing (1911-1954) que tornou possível decifrar a máquina Enigma e quebrar sua codificação.

Este autor introduz o tema para o aluno apresentando a sua importância na segurança das transmissões de mensagens via ciberespaço. Em seguida ele traz uma definição básica sobre a Criptografia exibindo um esquema criptográfico e apresenta a máquina Enigma⁴³ através de uma imagem fiel descrevendo todo o seu sistema de funcionamento de modo resumido (Figura 3).

Figura. 3 - Introdução do tema Criptografia, apresentado logo em seguida um esquema criptográfico e a máquina enigma com seu funcionamento.



Dando continuidade a proposta da seção, em seguida ele argumenta que as matrizes podem ser uma das maneiras de se criptografar mensagens secretas. Para isso, é preciso fixar o alfabeto, relacionando as letras a números e designando o símbolo # para representar o espaço entre as palavras (Figura 4).

Figura 4 - Relação estabelecida entre letras e números.

Uma das maneiras de codificar e decodificar mensagens secretas é utilizando matrizes.

Para isso, relacionamos inicialmente letras a números; o símbolo # representa um espaço em branco e está relacionado ao 0.

#	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

⁴³ Enigma foi uma famosa máquina de cifragem utilizada pelos militares alemães durante a II Guerra Mundial. Criada pelo inventor alemão Arthur Scherbius (1878-1929) esta máquina se tornou o sistema mais sofisticado de cifração de sua época.



Para exemplificar este processo, o livro propõe a cifração da mensagem “ESTUDANDO MATRIZES” através de uma matriz A quadrada invertível de ordem 2. A matriz A utilizada como “chave” para essa cifração será $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Na Figura 5 observa-se todo o processo de codificação e de decodificação da mensagem. Esse exemplo apresenta o método de cifração e decifração por matrizes destacando consideravelmente suas operações e atentando-se ao conceito de matriz invertível.

Figura 5 - Processo de cifração e decifração utilizando matrizes.

Convertendo a mensagem para a forma numérica mostrada na tabela anterior, obtemos:

E	S	T	U	D	A	N	D	O	#	M	A	T	R	I	Z	E	S
5	19	20	21	4	1	14	4	15	0	13	1	20	18	9	26	5	19

Como a “chave” é uma matriz quadrada de ordem 2, organizamos a sequência de números como elementos de uma matriz M com duas linhas. $M = \begin{pmatrix} 5 & 19 & 20 & 21 & 4 & 1 & 14 & 4 & 15 \\ 0 & 13 & 1 & 20 & 18 & 9 & 26 & 5 & 19 \end{pmatrix}$

Em seguida, multiplicamos pela esquerda a matriz M pela “chave” (matriz A), obtendo a matriz C .

$$C = A \cdot M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 19 & 20 & 21 & 4 & 1 & 14 & 4 & 15 \\ 0 & 13 & 1 & 20 & 18 & 9 & 26 & 5 & 19 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 15 & 70 & 61 & 83 & 30 & 12 & 68 & 17 & 64 \\ 25 & 121 & 102 & 145 & 56 & 23 & 122 & 30 & 113 \end{pmatrix}$$

Feito isso, enviamos ao destinatário a sequência de números da matriz C :

15	70	61	83	30	12	68	17	64	25	121	102	145	56	23	122	30	113
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	----	----	-----	----	-----

Recebida a mensagem codificada, o destinatário organiza a sequência de números obtendo novamente a matriz C . Em seguida, ele decodifica a mensagem multiplicando a inversa da matriz “chave” pela matriz C , pois $M = A^{-1}(A \cdot M)$. Veja:

$$M = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & 70 & 61 & 83 & 30 & 12 & 68 & 17 & 64 \\ 25 & 121 & 102 & 145 & 56 & 23 & 122 & 30 & 113 \end{pmatrix}$$

$$M = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 19 & 20 & 21 & 4 & 1 & 14 & 4 & 15 \\ 0 & 13 & 1 & 20 & 18 & 9 & 26 & 5 & 19 \end{pmatrix}$$

Por fim, convertemos da forma numérica para a forma alfabética, recuperando a mensagem original.

5	19	20	21	4	1	14	4	15	0	13	1	20	18	9	26	5	19
E	S	T	U	D	A	N	D	O	#	M	A	T	R	I	Z	E	S

Observação

Observe que $A^{-1} \cdot C$ corresponde à matriz do remetente, ou seja, a matriz M obtida no início.

Por último, a seção termina propondo ao aluno algumas questões (Figura 6) que abordam tanto o conceito sobre o que é criptografia, assim como a importância das matrizes serem invertíveis. O livro também apresenta um problema de decodificação e ainda convida os alunos a cifrarem e enviarem uma mensagem para algum colega para que este a decifre.

Figura 6 - Atividades para o aluno sobre a Criptografia, cifração e decifração de mensagens por meio de matrizes.

- a) De acordo com o texto, o que é a criptografia?
- b) No texto, comenta-se sobre uma maneira matemática de codificar e decodificar mensagens secretas. Qual é essa maneira? De que modo é feita a codificação?
- c) Por que a "chave" deve ser uma matriz invertível?
- d) Considere como "chave" a matriz invertível $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e decodifique a seguinte mensagem:
- 18 22 35 27 18 21 21 30 50 49 23 42
- e) Mande uma mensagem codificada para seu colega e peça para ele decodificar.

Na seção *Prepare-se - Atividades, testes e questões para você aplicar o conhecimento construído*, o autor apresenta uma questão na página 157 da UFMT - MT⁴⁴ (Figura 7) na qual o aluno precisa decifrar uma mensagem codificada por uma matriz. Este problema traz consigo a matriz utilizada como chave para a codificação e ainda argumenta sobre como se utilizar a matriz invertível para se decifrar a mensagem. Uma curiosidade deste problema é que todas as alternativas formam frases com sentido, dificultando ainda mais uma decodificação superficial. Assim, para se chegar à frase original é preciso realmente empregar a multiplicação da matriz decodificadora. Deixarei para o leitor se aventurar neste enigma a fim de descobrir qual é a mensagem do referido problema.

Figura 7 - Problema apresentado pela UFMT – MT envolvendo cifração e decifração de uma mensagem por uma matriz.

111 (UFMT – MT) Uma das maneiras de codificar ou decodificar uma mensagem é utilizando a multiplicação de matrizes. Para tanto, associam-se as letras do alfabeto e alguns símbolos aos números, segundo a correspondência a seguir.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

U	V	W	X	Y	Z	.	,	#
21	22	23	24	25	26	27	28	29

O símbolo # indica um espaço entre as palavras.
A mensagem codificada a ser enviada

63 20 42 12 113 44 15 32 11 84

está representada pela matriz

$$N = \begin{pmatrix} 63 & 20 & 42 & 12 & 113 \\ 44 & 15 & 32 & 11 & 84 \end{pmatrix},$$

obtida do produto entre a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e a matriz M , que contém a mensagem original decodificada ($N = A \cdot M$). Para decodificar a mensagem, multiplica-se a matriz inversa de A por N , obtendo-se a matriz M ($M = A^{-1} \cdot N$). Assim, a mensagem, após decodificada, é:

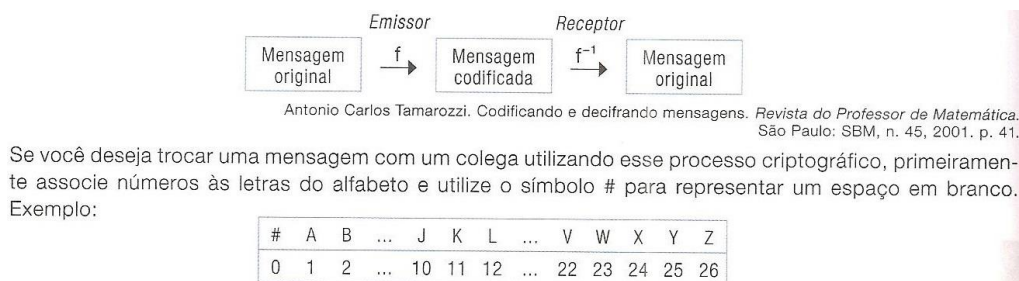
a) AME O BEM d) SEJA FELIZ
b) SONHE ALTO e) VIVA A PAZ
c) CANTE ALTO

⁴⁴ Universidade Federal de Mato Grosso.

Já a coleção, *Novo Olhar – Matemática* de Joamir Souza, embora não apresente em nenhuma seção de testes ou questões de vestibular, problemas que envolvam Criptografia vinculada a algum conceito matemático, utiliza o tema Criptografia em dois de seus três volumes. No volume 1 o tema aparece no capítulo 2, página 72, o qual foi atribuído o conceito de função e no volume 2 o tema aparece no capítulo 4, página 139 designado a matrizes e determinantes. Em ambos os livros a associação do tema Criptografia com o conceito matemático ocorreu em uma seção chamada *Contexto*, aparecendo sempre no espaço designado a *Atividades*, posteriormente à teoria utilizada na atividade proposta nessa seção.

Nos dois volumes, juntamente com uma introdução sobre a utilização da Criptografia nos dias de hoje, o livro traz uma breve explicação sobre o significado da Criptografia, além de abordar problemas e atividades acerca da cifração e decifração de mensagens por meio do conceito de função e de matrizes. No volume 1 um esquema criptográfico é apresentado, exemplificando um sistema de cifração e decifração. Em seguida o texto sugere que para se trocar mensagens, uma relação entre números e as letras do alfabeto deve ser estipulada, assim como o espaço entre as palavras (Figura 8).

Figura 8 - Esquema criptografia e associação estabelecida entre letras e números.



Para elucidar como utilizar o esquema criptográfico o livro escolhe a frase “ESTUDE MATEMATICA” para cifrar e, para isso, define uma função f real como sendo $f(x) = 3x - 1$. Na Figura 9 encontra-se o processo de cifração desta mensagem junto com uma argumentação de sua decifração. Como atividade para o aluno, o texto questiona em que outras situações há a necessidade de se usar a Criptografia, bem como seu objetivo. Também apresenta um problema de decodificação de uma mensagem e lança aos alunos o desafio de criptografar uma mensagem escolhida através de uma determinada função e distribuir para algum colega a mensagem e a função para que este descubra a função inversa e consequentemente a mensagem original (Figura 10).

Figura 9 - Cifração e decifração da mensagem “ESTUDEMATEMÁTICA”

Depois, defina a função por meio da qual a mensagem será criptografada. Suponha que seja f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, cuja lei de formação é $f(x) = 3x - 1$. Em seguida, escolha a mensagem a ser transmitida e associe cada letra da mensagem ao seu número correspondente. A mensagem ESTUDE MATEMÁTICA, por exemplo, é representada do seguinte modo:

$\begin{matrix} 5 & 19 & 20 & 21 & 4 & 5 & 0 & 13 & 1 & 20 & 5 & 13 & 1 & 20 & 9 & 3 & 1 \\ E & S & T & U & D & E & \# & M & A & T & E & M & A & T & I & C & A \end{matrix}$

Para transmiti-la ao seu colega, obtenha então a imagem de cada um desses valores por meio da função f , ou seja,

$\begin{matrix} 14 & 56 & 59 & 62 & 11 & 14 & -1 & 38 & 2 & 59 & 14 & 38 & 2 & 59 & 26 & 8 & 2 \\ f(5) & f(19) & f(20) & f(21) & f(4) & f(5) & f(0) & f(13) & f(1) & f(20) & f(5) & f(13) & f(1) & f(20) & f(9) & f(3) & f(1) \end{matrix}$

Ao receber a mensagem, ele terá de determinar, primeiramente, a imagem desses números pela função inversa de f , que neste caso é f^{-1} de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$, e, em seguida, associar cada número obtido às letras do alfabeto para poder decifrá-la.

Por exemplo:

$$f^{-1}(14) = \frac{14+1}{3} = 5, \text{ e o número } 5 \text{ corresponde à letra } E.$$

No fim do processo, ele obterá a mensagem original que você enviou.

Figura 10 - Atividades propostas aos alunos sobre o a Criptografia e sobre o processo de cifração e decifração de mensagens através de uma função real

- Apresente exemplos de situações que necessitam da criptografia para a comunicação confidencial de informações.
- Qual o objetivo em um processo criptográfico?
- Suponha que você esteja recebendo a mensagem abaixo criptografada por meio da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada por $f(x) = 2x + 1$, na qual as letras do alfabeto estão associadas conforme apresentado anteriormente. Determine a mensagem original que lhe foi enviada.

45 19 3 15 11 27 1 39 3 5 3 9 31

- Escolha uma mensagem, determine uma função por meio da qual ela possa ser criptografada e escreva todos os passos do processo criptográfico. Depois, entregue a um colega a mensagem criptografada e a função utilizada, para que ele determine a função inversa e decifre a mensagem.

No volume 2 para dar início a exemplificação da cifração de uma mensagem por meio de matrizes o livro fixa, como exemplo, as letras do alfabeto com os números primos (Figura 11).

Figura 11 - Fixação das letras do alfabeto com os números primos.

#	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103

Com essa relação estabelecida à mensagem escolhida pare ser cifrada é “CÓDIGO SECRETO” e a matriz quadrada invertível escolhida para ser a “chave” de cifração é

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

A Figura 12 apresenta o processo de conversão e organização dos números em uma matriz B de ordem 2 e, em seguida o livro argumenta como obter a matriz codificada e depois de recebida como decodificá-la.

Figura 12 - Conversão da mensagem “CÓDIGO SECRETO” em uma matriz e o processo de cifração e decifração da mensagem.

Convertendo a mensagem CÓDIGO SECRETO para a forma numérica mostrada nos quadros acima, obtemos:

C	O	D	I	G	O	#	S	E	C	R	E	T	O
7	53	11	29	19	53	2	71	13	7	67	13	73	53

Suponha que a chave utilizada seja uma matriz quadrada invertível $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Como essa matriz é de ordem 2, organizamos a sequência de números como elementos de uma matriz B com duas linhas, ou seja:

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 53 & 11 & 29 & 19 & 53 & 2 \\ 71 & 13 & 7 & 67 & 13 & 73 & 53 \end{bmatrix}$$

Ao realizar a multiplicação $A \cdot B$, obtemos a matriz C , que será enviada ao receptor. Recebida a mensagem, ele a decodifica multiplicando a inversa da chave por C , ou seja, $A^{-1} \cdot C = B$. Por fim, o receptor, utilizando a associação entre letras e números, poderá obter a mensagem original.

O trabalho de encontrar a matriz codificada e verificar a sua veracidade é deixada para o aluno como atividade. Uma das questões propostas ao aluno é em relação ao significado dos números primos, já que neste exemplo, esse tipo de número foi utilizado. Para fechar esta seção o livro propõe ao aluno que escolha outros tipos de relação entre o alfabeto e números e que codifique uma mensagem através de uma matriz, para distribuir essa mensagem para um amigo e pedir que sua decifração seja realizada (Figura 13). Neste volume, a imagem de uma máquina Enigma é apresentada junto com pequeno texto informativo sobre ela e sua utilização. Vale ressaltar que, na análise desta coleção, pode-se observar certa preocupação em parte do autor em trazer para os alunos em ambos os volumes a definição da palavra Criptografia e uma pequena discussão sobre sua utilização e importância nos dias de hoje.

Figura 13 - Questões apresentadas aos alunos para uma maior fixação e exploração do conteúdo desenvolvido nessa seção.

- a) Determine a matriz C enviada ao receptor no exemplo apresentado.
- b) Mostre que a mensagem codificada no item a, ao ser decodificada, gera a mensagem original.
- c) Nos quadros foram relacionados números primos às letras do alfabeto. Explique o que são números primos.
- d) Escolha outra maneira para relacionar letras a números, defina uma matriz chave e escreva uma mensagem a ser codificada por meio de uma matriz. Envie essa matriz a um colega, disponibilizando a ele a matriz chave e a relação letra/número. Peça a ele que decodifique a mensagem. Por fim, verifiquem se a mensagem secreta foi obtida.



Como conclusão desses resultados observa-se que essas duas coleções se preocuparam em trazer para os alunos uma definição sobre o termo Criptografia, bem como uma breve introdução sobre sua utilização nos dias atuais. Os problemas abordados sobre funções inversas e matrizes invertíveis foram fortemente trabalhados em conjunto com suas propriedades de operação. Esses problemas possibilitam que os alunos trabalhem individualmente ou em grupos e permite ao professor explorar e aprofundar questões sobre matrizes e funções, bem como alguns conjuntos numéricos como, por exemplo, números primos, números pares, entre outros.

Considerações Finais

Ponderando a forte presença do tema Criptografia em atividades da vida diária das pessoas, bem como o vínculo do assunto com fatos administrativos e políticos, é possível considerar que a inserção adequada de atividades ligadas a este tema pode ter um impacto positivo no processo de ensino e aprendizagem dos alunos. Em uma primeira abordagem, propriedades de funções como injetividade e sobrejetividade e famílias específicas de funções como logaritmos, por exemplo, podem ser um ambiente adequado para testar esta proposta.

Entretanto com a presente pesquisa conclui-se que embora o tema Criptografia esteja presente nos sistemas eletrônicos digitais da vida moderna e que a segurança destes depende exclusivamente da capacidade de proteção da cifra usada para se Criptografar, este assunto encontra-se pouco presente nos Livros Didáticos.

Conforme já citado, o PNLD 2012 aprovou sete coleções, que para a análise deste artigo, apenas cinco foram encontradas no acervo da Biblioteca de Rio Claro/SP. Dentre as cinco coleções apenas duas apresentaram seções envolvendo a Criptografia com um conceito matemático. A coleção, *Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia* de Jackson Ribeiro, apresenta em sua seção *Saiba Mais*, do volume 2 nas páginas 152-153, o tema Criptografia envolvendo as propriedades de multiplicação e inversão de matrizes, tendo na página 157 um problema de aplicação de matrizes na cifração de uma mensagens pela UFMT-MT. A coleção, *Novo Olhar – Matemática* de Joamir Souza aborda o tema na seção *Contexto* em dois de seus três volumes. No volume 1, na página 72, o livro utiliza a Criptografia para fixar e complementar o aprendizado de função, dando ênfase na propriedade da função inversa. Já no volume 2, na página 139, o livro proporciona ao aluno uma atividade envolvendo matrizes e suas operações de multiplicação e inversão.

Nota-se que o tema considerado nestas coleções não ocorre de forma significativa, nunca como parte de algum programa, raramente como conhecimento conexo a algum conteúdo e a sua importância nos dias de hoje. A Criptografia vem tendo destaque nas



notícias da atualidade, aproximando ainda mais os alunos, e a população em geral deste tema, o que pode estimular a difusão entre os autores dos Livros Didáticos da sua conexão com alguns conceitos matemáticos. Esta pesquisa possibilitará que o professor - ao conhecer o que se encontra no livro didático - possa desenvolver projetos de modelagem envolvendo temas e alguns tópicos de matemática que não tem sido utilizado em projetos de modelagem.

Referências

AZEVEDO, Edeílson Matias de. Livro didático: uma abordagem histórica e reflexões a respeito de seu uso em sala de aula. **Cadernos da FUCAMP**, Monte Carmelo, v. 4, n. 4, 2005.

BASSANEZI, Rodney C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

BLUM, Werner; GALBRAITH, Peter L.; HENN, Hans-Wolfgang; NISS, Mogens. **Modelling and Applications in Mathematics Education**. New ICMI Study Series. v. 10. Springer. 2007.

BORBA, Rute.; SELVA, Ana. Analysis of the role of the calculator in Brazilian textbooks. **The International Journal on Mathematics Education**. v. 45, n. 5, p. 737 – 750, 2013.

BORGES, Fábio. Criptografia como Ferramenta para o Ensino de Matemática. In: XXXI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 31, 2008, Belém. **Anais...** Belém, 2008. Disponível em: <
http://www.sbmec.org.br/eventos/cnmac/xxxi_cnmec/PDF/189.pdf > Acesso em: 22 nov. 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. Guia de livros didáticos: PNLD 2012: Apresentação / Brasília, Secretaria de Educação Básica, 2011. Disponível em: <
<http://www.fnede.gov.br/programas/livro-didatico/guia-do-livro/item/2988-guia-pnld-2012-ensino-m%C3%A9dio> > acesso em: 14 ago. 2013.

BRASIL, Ministério da Educação. Disponível em: <
http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12391&Itemid=668 > Acesso em: 23 nov. 2013.

CARVALHO, Marlene A.; SILVA, Robson C. O livro didático como instrumento de difusão de ideologias e o papel do professor intelectual transformador. In: III Encontro de Pesquisa em Educação da UFPI/II Congresso Internacional em Educação, 3/2, 2004. **Anais...** 2004. Disponível em: <
http://www.ufpi.br/subsiteFiles/ppged/arquivos/files/eventos/evento2004/GT.2/GT2_24_2004.pdf > acesso em: 29 out. 2013

FINCATTI, Camilla Á. **Criptografia como agente motivador na aprendizagem da matemática em sala de aula**. São Paulo: Universidade Presbiteriana Mackenzie/ Centro de Ciências e Humanidades, 2010. 82 p. Trabalho de Conclusão de Curso.

GONÇALVES, Ruth G. **O emprego do livro didático de matemática no ensino fundamental da rede pública estadual**. Criciúma: Universidade do Extremo Sul Catarinense (UNESC). 2007. 39 p.

GROENWALD, Claudia L. O.; FRANKE, Rosvita F.; OLGIN, Clarissa A. Códigos e Senhas no Ensino Básico. **Educação Matemática em Revista**, Rio Grande do Sul, v. 2, n. 10, p. 41–50, 2009.

GROENWALD, Claudia L. O.; OLGIN, Clarissa A. Currículo de Matemática no Ensino Médio: atividades didáticas com o tema Criptografia. In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, 13, 2011, Recife. **Anais...** Recife, 2011. Disponível em: < <http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/files/conferences/1/schedConfs/1/papers/691/submission/review/691-1818-1-RV.pdf> > Acesso em: 03 nov. 2013.

GROENWALD, Claudia L. O.; OLGIN, Clarissa A. Criptografia e o Currículo de Matemática no Ensino Médio. **Revista de Educação Matemática**: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, São Paulo, v. 13, n. 15, p. 69 – 78, 2011.

LIMA, Elício G. Para compreender o Livro Didático como objeto de Pesquisa. **Educação e Fronteiras On-line**, Dourado, v. 2, n. 4, p. 143–155, 2012. Disponível em: < http://www.periodicos.ufgd.edu.br/index.php/educacao/article/viewFile/1563/pdf_116 > Acesso em: 22 nov. 2013.

MEYER, João F. C. A.; CALDEIRA, Ademir D.; MALHEIROS, Ana P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

OLGIN, Clarissa A. Criptografia e os conteúdos matemáticos do Ensino Médio. In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, 13, 2011, Recife. **Anais...** Recife, 2011. Disponível em: < <http://lematec.net/CDS/XIIICIAEM/artigos/2092.pdf> > Acesso em: 03 nov. 2013.

OLIVEIRA, Daiane de; KRIPKA, Rosana M. L. O uso da criptografia no ensino de Matemática. In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, 13, 2011, Recife. **Anais...** Recife, 2011. Disponível em: < <http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/files/conferences/1/schedConfs/1/papers/1817/submission/review/1817-4607-1-RV.pdf> > Acesso em: 23 nov. 2013.

PAROLIN, Radael S.; TOSINI, Fernando. Criptografia no Ensino de Matemática. X Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 2009. Disponível em: < http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/MC/MC_24.pdf > Acesso em: 23 nov. 2013.

RIBEIRO, Jackso. **Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia**. São Paulo: Scipione, 2010.

SINGH, Simon. **Livro dos Códigos: a ciência do sigilo do antigo Egito para a criptografia quântica**. 7º ed. Rio de Janeiro: Recorde, 2010.

SOUZA, Joamir. **Novo Olhar – Matemática**. São Paulo: FTD, 2011.

TAMAROZZI, Antônio C. Codificando e decifrando mensagens. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo v. 45, p. 41 – 43, 2000.

Beatriz Fernanda Litoldo

Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho –
UNESP/Rio Claro - Brasil

E-mail: beatrizfernanda_rc@hotmail.com

Henrique Lazari

Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho –
UNESP/Rio Claro - Brasil

E-mail: hlazari@rc.unesp.br



RESENHAS

BARCELOS, G. T. **Tecnologias na prática docente de professores de matemática: formação continuada com apoio de uma rede social na internet.** 211. 332f. (Doutorado em Informática na Educação) - Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2011 (Orientadora: Prof. Dra. Liliana Maria Passerino).

Por Ana Paula Rodrigues Magalhães de Barros

A presente resenha apresenta a tese de doutorado sobre formação continuada com apoio de uma Rede Social da Internet (RSI). Gilmar Teixeira Barcelos Peixoto investiga o cenário da formação continuada de professores de Matemática e a importância do uso das TIC para a aprendizagem da Matemática. Considerando a formação de professores de Matemática um processo contínuo, o objetivo geral do trabalho foi desenvolver e analisar uma proposta de formação continuada para apoiar a integração das TIC à prática docente, com auxílio de uma RSI. Tal proposta, denominada de T-PROIM (Tecnologias na Prática docente de **P**rofessores **I**niciantes de **M**atemática), foi aplicada na modalidade *blended learning*, que é entendida pela autora como um estudo que mescla encontros presenciais e a distância, para alunos egressos do Instituto Federal Fluminense (IF Fluminense). A abordagem da formação foi a sistêmica, a qual teve como foco o estudo dos componentes, do ambiente e da estrutura dos sistemas de interesse da pesquisadora. A autora considera a pesquisa interdisciplinar, pois envolve Educação, Matemática e Informática.

No capítulo 1, Barcelos apresenta a problemática decorrente das dificuldades dos alunos em aprender Matemática e da formação e prática de professores iniciantes desta disciplina. Também ressalta a necessidade de coerência entre a formação que ocorre nas licenciaturas e nos cursos de formação continuada, e a prática docente esperada do futuro professor. Formação continuada é entendida na pesquisa como toda intervenção que provoca qualquer tipo de alteração nas atitudes dos professores em exercício. Ainda neste capítulo, a autora salienta que o fato do professor vivenciar, no mínimo 16 anos, experiências como aluno no seu futuro campo de trabalho (escola), reforça que a vivência dos professores, como aluno em sua formação, é constitutiva do papel que exercerá na futura prática docente. Portanto, é preciso que ocorram mudanças na prática pedagógica na formação dos futuros docentes e tais mudanças devem envolver as TIC, não somente pelas potencialidades das tecnologias, mas também para que os professores tornem-se autores de recursos digitais e assim estejam preparados para trabalhar com os jovens letrados digitais ou nativos digitais que serão seus alunos.

No capítulo 2, ela apresenta a definição do objetivo da pesquisa, suas justificativas e o contexto no qual a pesquisa está inserida. O objetivo da pesquisa foi justificado devido à pouca existência de obras que têm como foco a formação inicial e continuada do professor,



tendo as TIC como eixo norteador e problematizador. Os participantes foram egressos do curso de licenciatura em Matemática do IF Fluminense. Devido ao fato de no início da carreira a prática ser confrontante com a realidade e ser o período em que as bases dos saberes profissionais são construídas, a proposta de formação T-PROIM se desenvolveu nos seis primeiros meses da prática docente dos participantes. A pesquisa foi orientada pela questão: De que forma uma proposta de formação continuada para a integração das TIC ao processo de aprendizagem de Matemática, apoiada por um RSI influencia a prática docente de professores iniciantes?

Nos capítulos 3, 4 e 5 a autora aborda os aportes teóricos da pesquisa. No capítulo 3, ela aponta conceitos importantes sobre o contexto social e a mediação na visão vygotskyana. Segundo a autora, Vygotsky introduziu na psicologia o fator histórico-cultural, ou seja, a mudança individual do ser humano tem raiz na sociedade e cultura. Assim, a interação entre os indivíduos exerce um papel fundamental na construção do ser humano. Ela também destaca que os instrumentos (e/ou signos) se transformam em processos internos de mediação, o que é chamado por Vygotsky de processo de internalização. A utilização de sistemas simbólicos, por exemplo, a linguagem, organiza os signos em estruturas complexas e articuladas. Barcelos considera relevantes os aspectos de mediação levantados neste capítulo e salienta que se embasou neles para a implementação e elaboração da proposta T-PROIM.

No capítulo 4, a pesquisadora levanta aspectos importantes sobre formação de professores, destacando a formação continuada. Ela acentua necessidades de novas propostas para práticas de formação, apontando na literatura o que ainda não havia sido contemplado nessas práticas. A partir desses apontamentos, Barcelos (2011, p. 62) destaca os seguintes pontos que foram considerados para a formação T-PROIM:

- i) reflexão sobre a prática num contexto determinado; ii) criação de redes de inovação, de comunidade de prática formadora e de formas de comunicação entre os professores; iii) possibilidade de maior autonomia na formação com participação direta dos professores; iv) considerar os projetos da escola como ponto de partida para que os professores decidam a formação de que necessitam para avançar na elaboração, no desenvolvimento e na avaliação do projeto; v) potencializar a formação capaz de disponibilizar espaços de reflexão e participação para que os professores aprendam com a reflexão e análise de situações problemas dos cursos de formação de professores.

Ainda no capítulo 4, aborda aspectos importantes das TIC e da formação de professores para a aprendizagem da Matemática. É ressaltada neste capítulo a necessidade de práticas de letramento digital para o uso pedagógico das TIC no contexto docente.

Segundo a autora, o letramento vai além das habilidades e conhecimentos necessários para o uso de mídias, também é relevante a capacidade do usuário da internet questionar e compreender a força do desenvolvimento tecnológico nos meios sociais, políticos e econômicos. O capítulo é finalizado com um estado da arte sobre programas de formação continuada que buscam integrar as TIC. Quatro programas são apresentados e brevemente caracterizados. A autora salienta que pretendeu na pesquisa preencher as lacunas deixadas pelos programas e propôs mais uma alternativa de formação.

No capítulo 5, a autora apresenta a visão de diversos autores sobre redes sociais e comunidades. Nessa direção, ao apresentar uma reflexão sobre redes sociais, destaca os laços sociais e capital social. Cinco dimensões de capital social são destacadas: Relacional (CSR), Cognitivo (CSC), Normativo (CSN), de Confiança no Ambiente Social (CSCA) e Institucional (CSI). Em seguida, ela traz uma discussão sobre os *Personal Learning Environments* (PLEs) e embasada em alguns autores cita características⁴⁵ desses PLEs. Para a autora um PLE propicia mais responsabilidade e independência ao aluno. Em um PLE o usuário tem acesso a um conjunto de ferramentas, o qual é personalizado conforme as necessidades e preferências dele. Assim, a plataforma Elgg pode ser considerada um PLE, pois possui um conjunto de ferramentas integradas⁴⁶ e o usuário tem grande parte do controle sobre elas. Ela finaliza o capítulo ressaltando a escolha pela plataforma Elgg para o curso de formação continuada T-PROIM.

No capítulo 6, Barcelos descreve a metodologia adotada e a trajetória da pesquisa. A pesquisa foi de cunho qualitativo por meio do estudo de caso. Para a coleta de dados a autora utilizou as técnicas de observação sistemática, observação participante, questionários, entrevistas semiestruturadas e registros dos usuários na RSI na qual ocorreram as interações *online*. Três grupos de sujeitos participaram da pesquisa: Professores da licenciatura em matemática do IF Fluminense (Grupo 1), egressos da Licenciatura em Matemática que estavam atuando na Educação Básica no segundo semestre de 2009 (Grupo 2) e egressos da Licenciatura em Matemática que estavam atuando na Educação Básica no primeiro semestre de 2011 (Grupo 3).

A primeira etapa da pesquisa, denominada pela autora como **preparação** contou com a revisão bibliográfica, levantamento dos sujeitos e elaboração dos questionários, das entrevistas e das categorias de análise, das transcrições das entrevistas e da observação. Nesta etapa o Grupo 1 de sujeitos foi investigado a fim de ser identificado como os professores da licenciatura fizeram uso das TIC em suas aulas. Na segunda etapa, **desenvolvimento**, ocorreu a aplicação dos instrumentos de coleta de dados: distribuição e

⁴⁵ Os PLEs representam princípios do e-Learning 2.0, permitem ao usuário autonomia e colaboração, e são potenciais espaços de socialização e de aprendizagem.

⁴⁶ Blog, perfil, RSS, partilha de ficheiros, permissões finas, grupos, etc.

coleta dos questionários (Grupo 1), realização das entrevistas e observação das práticas docentes (Grupo 2), experimentação da plataforma Elgg e elaboração e experimentação da proposta T-PROIM (Grupo 3). Na terceira etapa, **análise de dados**, os dados foram analisados com base nos referenciais teóricos e nas categorias da análise.

No capítulo 7, ela analisa e discute o estudo de implementação. Assim, no referido capítulo são apresentadas as análises das respostas dos questionários, das transcrições, das entrevistas e das observações de práticas docente. Com base nestas análises, a autora verificou limitações para a integração das TIC nas aulas de Matemática. Também verificou que os recursos mais utilizados pelos professores são processadores de textos, seguidos da Internet e softwares educacionais, no entanto, constata que as TIC ainda não estão integradas às práticas de sala de aula dos professores. Apesar de o uso das TIC ter sido superficial, a autora observou que os professores consideram as potencialidades desses recursos. Ressalta ainda que o uso das TIC despertou interesse dos alunos, melhorou o comportamento deles e ajudou na resolução de exercícios. Ainda no capítulo 7, a autora aponta as causas observadas para o pouco uso das TIC.

No capítulo 8, a autora descreve a proposta de formação T-PROIM e apresenta a análise da mesma. Tal análise é feita com base nos referenciais teóricos da pesquisa. A proposta de formação ocorreu em dez encontros presenciais, uma palestra online e muitas interações por meio da RSI. Os obstáculos a serem superados, encontrados nas literaturas, conforme mencionado no capítulo 4, foram transformados em metas para serem atingidas na proposta de formação T-PROIM.

Também no capítulo 8, a autora evidencia alguns resultados e os discute com base nas dimensões do capital social e nas práticas de letramento digital. Barcelos destaca as dimensões do capital social que foram identificadas na proposta de formação. Segundo a autora, tais dimensões englobam "relações e interações que os professores estabelecem com os demais autores de sua prática (CSR e CSC); as obrigações e normas as quais o trabalho se submete (CSN e CSA) e a instituição enquanto meio organizado e composto de funções diversificadas (CSI)" (BARCELOS, 2011, p.187). O capítulo é finalizado com a descrição das dimensões identificadas e das práticas que sinalizaram letramento digital dos participantes.

No capítulo 9 a autora traz os resultados da pesquisa e destaca aqui alguns deles. Apesar dos professores do Grupo 1 considerarem as TIC como recursos importantes para o processo de ensino e aprendizagem, eles não fazem uso de forma integrada das TIC em suas práticas docentes. As aulas dos professores do Grupo 2 são na maioria das vezes tradicionais com raras exceções, e os participantes deste grupo afirmaram que os cursos de formação continuada não preparam para a realidade que eles enfrentam na sala de aula. Os professores se sentiram mais seguros no uso das TIC com as práticas de letramento digital

vivenciadas em toda a formação continuada. Toda a trajetória da pesquisa exerceu uma grande influência direta na prática docente e ao contexto escolar da pesquisadora, mesmo antes da conclusão da pesquisa.

O assunto abordado na tese é de grande importância tanto para a Educação Básica quanto para o Ensino Superior, uma vez que trata da integração das TIC nas aulas de Matemática. Concordo com a preocupação da autora em verificar como esta integração ocorre nos cursos de formação e na prática docente, pois entendo que o letramento digital é constituído das nossas vivências como aluno e como professor. A tese está bem escrita, com um objetivo de pesquisa bem justificado e aporte teórico coerente.

Segundo a pesquisadora, existem muitas plataformas na internet que representam RSI, pois as redes em si são criadas a partir das interações, dos laços sociais e do capital gerado. Como exemplo, a autora cita algumas delas e salienta que quatro foram analisadas na pesquisa: Facebook, Orkut, Ning e Elgg. Assim, a título de reflexão, concordo com os motivos acentuados na tese pela escolha da plataforma Elgg, entretanto, os motivos pelos quais as demais não foram escolhidas não estão claros na tese.

Um segundo ponto que destaco diz respeito ao que a autora apresenta sobre o uso de RSI no contexto educacional, ela ressalta que é interessante do ponto de vista pedagógico. Considerando que muitas pesquisas têm apontado para características importantes de plataformas como o Facebook para o âmbito educacional, esta poderia ter sido também explorada na proposta de formação T-PROIM. Considero que a pesquisa ocorreu no auge da exploração do Facebook, inclusive no contexto educacional, segundo apontam as pesquisas.

De maneira geral a pesquisa incita a reflexão sobre aspectos importantes que devem ser considerados em cursos de formação, principalmente no que tange a integração das TIC. O foco da tese foi a formação do professor, evidenciando a necessidade da formação continuada ser flexível para atender as particularidades de cada docente em seu contexto e a influência da formação sobre a integração das TIC na prática docente.

A constituição docente em matemática à distância: entre saberes, experiências e narrativas⁴⁷

Por Aparecida Santana de Souza Chiari⁴⁸

Diva Souza Silva⁴⁹ inicia sua tese com uma apresentação que traz aspectos subjetivos e pessoais em relação à construção de sua investigação. Em uma seção intitulada “O cenário de investigação e a organização do relato da pesquisa”, ela apresenta cada capítulo e faz um breve relato do que o leitor irá encontrar em cada um deles.

No capítulo 1, a autora narra sua experiência de constituição docente e as relações entre os campos de investigação que a levaram até a elaboração da problemática de pesquisa e seus objetivos. Ela inicia o relato falando sobre seus pais, seu lugar de origem e sobre o incentivo que seus pais deram ao estudo dos filhos. Fala de sua relação com a docência e com a matemática, além de experiências profissionais com formação de professores do ensino superior. No final do capítulo, ela apresenta sua questão norteadora e seus objetivos, que são: 1) identificar, narrar e analisar a trajetória de ingresso de um grupo de alunos-professores na licenciatura em Matemática, em uma universidade pública, ligada ao programa da UAB; 2) buscar e narrar o processo de formação docente e de apropriação dos saberes da atividade profissional desses professores anteriormente ao ingresso na licenciatura em Matemática a distância; e 3) narrar e analisar a experiência da formação profissional em serviço, via EaD, e a relação dos saberes privilegiados nesse curso com aqueles produzidos e mobilizados pelos alunos-professores em suas práticas profissionais. No capítulo 2, Silva diz buscar, a partir de tópicos, descrever os indicativos históricos que engendram a formação de professores (de Matemática) no Brasil, situando as pesquisas na área da Formação de Professores de Matemática e também na modalidade a distância, justificando a necessidade da investigação. Ela articula os campos temáticos entre os saberes em movimento na constituição do professor e finaliza com o sentido da experiência/práxis, numa perspectiva histórico-cultural em que se apóia para compor a discussão.

⁴⁷ Referência completa: SILVA, D. S. *A Constituição docente em matemática à distância: entre saberes, experiências e narrativas*. 2010. 278 f. Tese (Doutorado em Educação) - Departamento de Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

⁴⁸ Doutoranda em Educação Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus Rio Claro/SP e professora do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Contato: cidach@gmail.com.

⁴⁹ Diva Souza Silva é graduada em pedagogia (1995), mestre em comunicação social (2002) e doutora em Educação - UFMG (2010). Atualmente, é professora adjunta na Universidade Federal de Uberlândia - UFU (2011). Possui experiência na área de educação, formação de professores, didática, gestão educacional, educação a distância, educação matemática, TIC, interação, interatividade e metodologias. Pesquisa na área de saberes docentes, formação de professores e educação a distância. Texto extraído do Currículo Lattes da pesquisadora.

Todo este arcabouço teórico é feito a partir de uma divisão do capítulo em algumas seções. Na primeira, chamada “Trilhas do ofício”, ela faz uma descrição histórica abordando aspectos legislativos da formação de professores no Brasil e caminha para o foco da educação a distância. Na seção intitulada “A formação de professores de Matemática”, a autora comenta as Diretrizes Nacionais de Formação de Professores como documento legal, atual, que referencia a organização de Projetos Político-Pedagógicos que pretendem legitimar a formação de professores em suas respectivas instituições de oferta. A partir disso, situa as pesquisas sobre o tema, afirma que há tentativas de pesquisadores da área de formação de professores de Matemática tanto em analisar as práticas de construção dos cursos quanto em trabalhar por diminuir as tensões de fragmentação da formação do licenciando e apresenta, então, um histórico de pesquisas nessa área.

Na seção seguinte, chamada “A modalidade de educação a distância”, a pesquisadora faz uma interessante descrição do desenvolvimento da área de EaD, em particular da Educação a Distância, como alternativa para processos de formação. Ela menciona, ainda, as possibilidades que as tecnologias da informação e comunicação (TIC) trouxeram para a área, fomentando a compreensão da EaD como contribuição metodológica efetiva para responder aos desafios de formação, como a grande demanda e as desigualdades regionais do país. Após algumas considerações, a autora faz um panorama das pesquisas sobre a educação a distância na formação inicial e continuada de professores de matemática e sobre o uso dessa modalidade no ensino de Matemática, verificando registros de investigações sobre esse tema na pesquisa brasileira.

Na seção sobre os saberes docentes, ela busca referenciais teóricos nos quais identifica os conceitos que se propôs a trabalhar. Dentre eles, destaco as concepções de aprendizado de professores frente às diferentes imagens que as circundam, de Cochran-Smith e Lytle (1999)⁵⁰, os diferentes saberes elencados e descritos por Shulman (1986)⁵¹, além das concepções de saber docente de Tardif (2002)^{52,53}.

Na última seção do capítulo, Silva apresenta sua visão de práxis, que abrange não só a atividade prática, essencialmente, como também o terreno em que se opera a unidade do pensamento e da ação. A partir da abordagem histórico-cultural assumida na pesquisa, ela busca dar sentido à experiência docente a partir de ideias de Freire (1996)⁵⁴, Larrosa

⁵⁰ COCHRAN-SMITH, M.; LYTLE, S. L. (1999). Relationships of knowledge and Practice: teacher learning in communities. In: *Review of Research in Education*. USA, 24, 1999, p. 249-305. Tradução: GEPPFM (Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Formação de Professores de Matemática (FE/UNICAMP).

⁵¹ SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge Growth in teaching. *Educational Researcher*, v.15, n.2, 1986, p.4-14.

⁵² TARDIF, M. *Saberes docentes e formação profissional*. 2 ed. Petrópolis: Editora Vozes, 2002.

⁵³ Por limitações de espaço, estas concepções não serão descritas nesta resenha.

⁵⁴ FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. Rio de Janeiro, Paz e Terra, 1996.

(2001)⁵⁵, Clandinin e Connelly (2000)⁵⁶ e Vazquez (2007)⁵⁷. Fazendo um gancho para o próximo capítulo, ela encerra o capítulo 2 com considerações sobre a pesquisa narrativa e seus movimentos para trás e para frente através do tempo e ao longo de um “continuum” de considerações sociais e pessoais.

No terceiro capítulo, a autora apresenta o processo metodológico desenvolvido durante a investigação. Ela descreve as adaptações da questão norteadora de seu trabalho e justifica as mudanças pelo design emergente característico das investigações qualitativas, como a dela. Além de ser uma pesquisa qualitativa, sua investigação segue o paradigma interpretativo, pois buscou entender e compreender os sujeitos em sua constituição docente a partir de suas trajetórias, saberes e narrativas. O método utilizado é o da pesquisa narrativa, pensada, neste caso, como um modo de compreender a experiência.

Depois das definições teóricas acerca de sua abordagem metodológica, a pesquisadora descreve os procedimentos metodológicos que utilizou para captar, ao máximo, segundo ela, o movimento de formação que a investigação pretendia. Os procedimentos utilizados foram: diário de campo, questionário, entrevistas, memorial de formação, observação e, por fim, análise de documentos, a saber, o projeto político pedagógico do curso e as mensagens eletrônicas trocadas.

Após uma difícil inserção no campo de pesquisa, ela conseguiu seis pessoas que de certa forma se enquadravam no perfil requerido pelo tema geral da investigação. Todas participaram de todos os procedimentos de coleta de dados. Destas, três foram escolhidas como sujeitos por terem perfil mais próximo dos objetivos da pesquisadora.

O quarto capítulo é chamado de “Trilhas de Análise”. Nele, a autora percorre um trajeto que busca permitir ao leitor acompanhar os meandros conectados à temática, à perspectiva teórica, à abordagem metodológica e à narrativa que ela construiu sobre cada sujeito da pesquisa, tentando compreender o movimento de sua formação.

Neste capítulo, que, a meu ver, traz uma análise intermediária dos dados, a pesquisadora apresenta seus eixos de interpretação. Os eixos e as narrativas emergiram de seus dados. Para construí-los, ela utilizou dossiês que fez para cada sujeito, em uma espécie de compilação do grande volume de dados. Neles, estão incorporados dados da empiria: respostas ao questionário, transcrições de duas etapas de entrevistas, anotações referentes às observações, trechos de mensagens eletrônicas, memorial do curso e anotações do diário de campo. Ela apresenta, então, as três narrativas que construiu, uma

⁵⁵ LARROSA, J. Lenguaje y educación. *Revista Brasileira de Educação*. N. 16, p. 68-80, jan/fev/mar/abr, 2001.

⁵⁶ CLANDININ, D. J.; CONNELLY, F. M. *Narrative inquiry: experience and story in qualitative research*. San Francisco: Jossey-Bass Publishers, 2000.

⁵⁷ VÁZQUEZ, A. S. *Filosofia da práxis*. Buenos Aires: Consejo Latinoamericano de Ciencias Sociales – CLACSO; São Paulo: Expressão Popular, Brasil, 2007.

para cada sujeito de pesquisa. A análise final envolvendo todos os sujeitos é feita no capítulo posterior.

Embora não seja possível resumir as narrativas construídas, dada sua densidade, julgo importante ressaltar os eixos escolhidos pela autora para construí-las, padrão que foi seguido para os três sujeitos de pesquisa. Os eixos foram: as motivações em relação à Matemática nas vidas dos sujeitos pesquisados; as especificidades da Educação Matemática em suas formações; o contexto da Educação a Distância e os saberes da constituição docente (saberes da experiência, saberes do curso e o possível encontro entre um e outro).

No quinto capítulo, chamado de “Amálgama de Análises”, a autora se propõe a unir metaforicamente pessoas e histórias, trajetórias e narrativas, tendo como referência as categorias de análise que emergiram dos dados da pesquisa e de sua interpretação sobre elas. Ao refinar sua análise, ela apresenta três eixos descritivos e analíticos sobre a constituição docente em Matemática dos sujeitos de pesquisa: 1) de sentidos e motivações: a relação com a Matemática nas vidas, mostrando o que leva os sujeitos da investigação a estabelecerem uma relação e um sentido com esta ciência; 2) dos sentidos de ser professor de Matemática: entre saberes e encontros, afirmando que esses sujeitos se constituem docentes no encontro dos saberes que Tardif (2002) afirma se integrarem; e 3) dos sentidos da formação em Matemática a distância: a busca da presença na ausência, mostrando, por exemplo, que os sujeitos investigados sentiram necessidade de encontrarem-se presencialmente para realizarem estudos em grupo. Foi neste tipo de encontro, mas não apenas nele, que a pesquisadora percebeu uma possível relação entre os saberes experienciais e os saberes do conteúdo. Esta relação também poderia se dar, de acordo com a autora, na busca de sentidos para a conexão midiática que os sujeitos estabeleciam com o curso. Além disso, ela estaria relacionada a aspectos característicos e constitutivos do trabalho colaborativo.

O sexto e último capítulo, denominado “Cais Provisório”, traz as considerações finais sobre a investigação. Nele, a autora retoma a problemática da investigação e destaca apontamentos conclusivos sobre a pesquisa realizada frente aos objetivos propostos. Ressalta, ainda, que outras questões emergiram na relação com os sujeitos e o campo de pesquisa, levando-a a discutir aspectos sobre a presença na ausência e a colaboração em cursos a distância, o que foi abordado em um dos eixos descritivos e analíticos apresentados no parágrafo anterior.

Por fim, ela conclui que a experiência de constituição docente se dá ao longo da vida a partir de diferentes experiências da própria discência e, em particular para os sujeitos desta investigação, na relação docente estabelecida antes mesmo da formação superior na área. Afirma também que a EaD pode ser vista, além de provocadora da



autonomia por parte dos alunos, como uma modalidade possível de aprender a ser professor(a) de Matemática articulando os diferentes saberes e práticas vivenciadas.

Vejo as contribuições do trabalho sob quatro aspectos distintos. Em primeiro lugar, a tese traz uma revisão bibliográfica atualizada e densa sobre o tema pesquisado, podendo ser tomada como norte para o leitor que quer conhecer a área além de fornecer um amplo panorama para consulta e aprofundamento de leitura. Em segundo lugar, enalteço a densidade teórica bem como o diálogo com autores realizado no trabalho. Em terceiro lugar, destaco a cativante narrativa construída para abordar a constituição docente. Além de o leitor ter a oportunidade de conhecer com profundidade os sujeitos narrados, as narrativas constituem um exemplo para outros pesquisadores que utilizem métodos de pesquisa similares. Por fim, cito a contribuição para a área, tanto no que refere à pesquisa em si, contribuindo para a discussão das abordagens de formação de professores em exercício, quando no que se refere ao aspecto social, a partir do momento em que a pesquisadora assume o compromisso com um processo de educação a distância de qualidade.

As propostas de artigos devem obedecer às seguintes normas de publicação

- 1) O texto de artigo deve ser inédito e não deve ter sido publicado em outra revista ou estar sendo submetido para publicação em outro periódico. Em caso de artigos já apresentados em congressos ou eventos similares a versão submetida a esta revista deve ser significativa e comprovadamente ampliada em termos teóricos e/ou metodológicos.
- 2) O artigo deve ser enviado por via eletrônica para revistarematec@gmail.com, aos cuidados dos Editores, e ser encaminhado em duas versões, uma delas com a identificação completa dos autores e, a outra “cega” para os trâmites de avaliação.
- 3) O texto deve ser elaborado em Microsoft Word (extensão.doc) atendendo às seguintes especificações de formatação e composição:
 - a) O texto deverá ser formatado em fonte Times New Roman, corpo 10, recuo 0, espaçamento 0, alinhamento justificado e espaço simples entrelinhas.
 - b) O texto deverá ter entre 10 e 15 páginas (A4), margem esquerda 3cm; margens superior, inferior e direita 2,5 cm. Apresentar quatro palavras-chave, título em português e inglês, além de resumo e abstract que não ultrapasse 10 linhas.
 - c) O texto deverá conter título centralizado com no máximo 16 palavras incluindo conectivos. Os nome(s) do(s) autor(es) e da(s) respectiva(s) instituição(ões) devem ser alinhados à direita, logo abaixo do título.
 - d) No final do texto, em ordem alfabética, devem ser incluídas as referências bibliográficas, obedecendo as normas atuais da ABNT.
- 4) O texto submetido já deve ser apresentado à Revista com revisão vernacular e ortográfica realizada previamente.
- 5) O texto que tiver imagens deverá ter as mesmas enviadas em documento separado, além daquelas presente no próprio texto. As imagens devem ter resolução formato TIF ou JPEG com 300DPIs.
- 6) Os textos publicados nesta Revista representam a expressão do ponto de vista de seus autores e não a posição oficial da revista ou dos editores.
- 7) O texto que não obedecer às normas de formatação será devolvido ao seu autor para reformulação e reenvio.