Um Estudo sobre o Ensino de Poliedros por Atividades

A Study on Teaching Polyhedra by Activities

João Nazareno Pantoja Corrêa
Universidade Federal do Pará – Pará – Brasil

Ducival Carvalho Pereira
Universidade do Estado do Pará – Pará – Brasil

RESUMO

Este trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa desenvolvida com discentes do 3º ano do ensino médio de uma escola pública federal no município de Tucuruí no Estado do Pará no Brasil, que objetivou analisar a validade de conclusões elaboradas por estudantes sobre aspectos de Poliedros a partir da realização de atividades experimentais sem que o professor tivesse apresentado o assunto anteriormente. O experimento obedeceu aos seguintes momentos: diagnóstico, elaboração das atividades, aplicação das atividades e análise dos resultados. A análise dos resultados obtidos apontou que o ensino por atividade juntamente com uso de materiais manipuláveis possibilitou que os discentes enunciassem conclusões válidas sobre propriedades dos Poliedros. Além disso, foi observado que no experimento em questão, ocorreu uma maior compreensão na aprendizagem dos discentes durante a descoberta de relações/propriedade na exploração do objeto matemático estudado e as conclusões produzidas pelos participantes foram comparadas com resultados encontrados em livros didáticos do ensino médio.
Palavras-chave: experiência didática, poliedros, ensino por atividade, manipuláveis.

ABSTRACT

This work presents the results of a research developed with students of the 3rd year of high school at a federal public school in the municipality of Tucuruí in the state of Pará in Brazil, which aimed to analyze the validity of conclusions drawn by students on aspects of Polyhedra from the carrying out experimental activities without the teacher having previously presented the subject. The experiment followed the following steps: diagnosis, preparation of activities, application of activities and analysis of results. The analysis of the results obtained showed that teaching by activity together with the use of manipulable materials enabled students to make valid conclusions about the properties of Polyhedra. In addition, it was observed that in the experiment in question, there was a greater understanding of the students' learning during the discovery of relationships / property in the exploration of the studied mathematical object and the conclusions produced by the participants were compared with results found in high school textbooks.
Keywords: didactic experience, polyhedra, teaching by activity, manipulable.

Introdução

O processo de ensino e aprendizagem de Matemática, não só no ensino médio, mas de modo geral, ou seja, nos vários níveis educacionais, são notórias as dificuldades no entendimento de conceitos estudados e suas respectivas aplicabilidades de forma concreta, demonstrando a carência talvez de metodologias que proporcionem a minimização deste problema, uma vez que o ensino que valoriza apenas a mecanização de exercícios e conjunto

Submetido em: 19 de setembro de 2020
Aprovado em: 19 de novembro de 2020
DOI: http://dx.doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2020.n15.p228-244.id295

de regras que devem ser obrigatórias, ainda é muito utilizado nas metodologias, porém vem se mostrando pouco eficaz em relação a maioria dos conteúdos matemáticos estudados.

A geometria como ramo da matemática em que se dedica ao estudo das propriedades e das medidas das figuras no espaço ou no plano, presente na vida do ser humano desde períodos mais remotos, é uma excelente ferramenta para materializar conceitos matemáticos, pois considera o espaço em volta do educando, podendo desse modo formalizar matematicamente a realidade contribuindo com a construção de capacidades e habilidades intelectuais, sendo de suma importância para o desenvolvimento da capacidade de abstração, resolução de problemas práticos do quotidiano, estimar e comparar resultados, reconhecer propriedades das formas geométricas.

Durante o ensino de poliedros, conteúdo pertencente a geometria espacial, a possibilidade de manipulação favorece a visualização, a qual é um aspecto imprescindível no estudo da geometria, uma vez que potencializa o entendimento das propriedades destes. Neste sentido, existem muitas pesquisas enfatizando a importância da visualização, bem como do raciocínio visual no ensino e aprendizagem de matemática.

Os estudos relacionados ao ensino de poliedros, categorizados por Corrêa (2019) como estudos diagnósticos, teóricos e experimentais, convergiram em suas conclusões que uma diminuição significativa das dificuldades pode ser alcançada através da utilização de metodologias que enfatizem o uso de materiais manipuláveis e softwares de maneira dinâmica e interativa, isto é, favorecendo a visualização e o manuseio, onde os discentes tendem a ser mais participativos, e até colaborativos entre si nas atividades propostas, se sentindo inseridos de forma mais ativa em seu aprendizado.

Nesta perspectiva, o Ensino por Atividades como metodologia tem o potencial de transformar o discente em autor principal do seu aprendizado, de forma a construir seus conhecimentos através de atividades de forma ativa, bem como a sua divisão didática através dos seus respectivos momentos levará a construção do conhecimento através de um processo de ensino e aprendizagem mais significativos.

Dessa forma, com a finalidade de contribuir para uma possível reversão do cenário de dificuldades no ensino de geometria, mas especificamente ao ensino de poliedros, no qual os alunos do ensino médio demonstram dificuldades e baixos rendimentos educacionais, esta pesquisa tem como objetivo analisar a validade de conclusões elaboradas por estudantes sobre aspectos de Poliedros a partir da realização de atividades experimentais sem que o professor tivesse apresentado o assunto anteriormente.

Metodologia

A pesquisa foi desenvolvida no Instituto Federal do Pará (IFPA), campus de Tucuruí, e contou com a participação efetiva de 26 (vinte e seis) discentes do 3º ano do turno da manhã da turma técnico em edificações integrada ao ensino médio. Para o desenvolvimento do experimento seguimos as respectivas etapas: **diagnóstico, elaboração das atividades, aplicação das atividades e análise dos resultados**.

Diagnóstico

Para construir o perfil dos discentes e diagnosticar seus respectivos desempenhos acerca da resolução de questões envolvendo poliedros aplicamos um questionário a turma e seus 26 (vinte e seis) discentes presentes, contendo questões referentes ao perfil socioeconômico destes, bem como a relação dos participantes com a matemática na vida escolar.

Os resultados obtidos demonstraram que a turma era composta por 07 discentes do sexo masculino e 19 discentes do sexo feminino, com idades entre 16 e 19 anos, dos quais 61% responderam que já haviam ficado em dependência em alguma disciplina, sendo 12% só em Matemática e 27% Matemática e outras disciplinas.

O diagnóstico apontou que a maioria dos discentes (65%) afirmou ter afinidade com a matemática, gostando um pouco da disciplina. E que 69% dos discentes pesquisados estudam matemática somente em períodos ligados a prova. No que se refere ao entendimento dos discentes nas aulas de matemática, as respostas obtidas indicaram que os discentes em sua maioria, sendo 54%, conseguem chegar as vezes ao entendimento nas aulas.

A respeito das formas de avaliação de matemática que os discentes geralmente são submetidos, estes responderam em sua maioria (92%), que as formas mais comuns de avaliação são provas ou simulados.

O diagnóstico também revelou que 92% dos discentes apontaram que as aulas de matemática iniciaram pela definição seguida de exemplos e exercícios, e ainda que a forma que o professor costumava praticar os conteúdos eram apenas duas: solicitar que os estudantes resolvessem os exercícios do livro didático, o que foi apontado por 54% dos pesquisados; e apresentar aos discentes uma lista de exercícios para serem resolvidos por estes (citado por 46% dos discentes). Por fim, 62% dos discentes pesquisados afirmaram que as aulas de matemática despertam seu interesse apenas “as vezes”.

Elaboração das atividades

O Ensino por Atividade é uma metodologia pautada na construção da autonomia do aluno na construção do seu conhecimento, sendo esta a principal peculiaridade desta metodologia, onde os conteúdos propostos possam ser descobertos pelo próprio aluno durante o processo de aprendizagem, tendo o professor apenas como orientador (MENDES e SÁ, 2006, p. 13).

Essa metodologia, busca apresentar os conteúdos matemáticos através do encontro de leis gerais, ou ainda de generalizações, sem a intervenção do professor, no que diz respeito a oferecer informações iniciais, fazendo com que o aluno construa sua aprendizagem por meio de descobertas (SÁ, 2009, p.18).

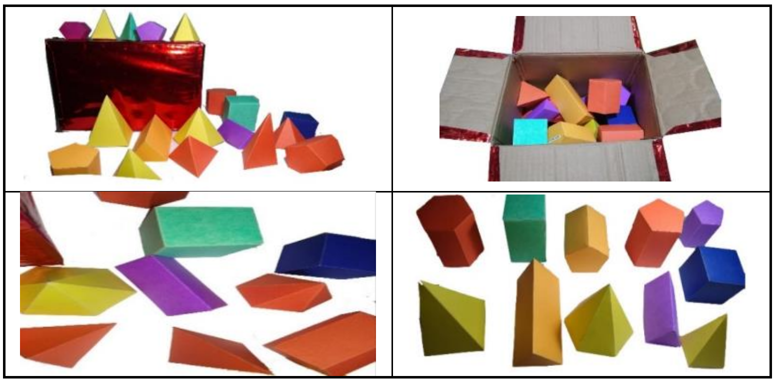
Segundo Sá (2019) o ensino por atividades pode ser realizado por dois tipos básicos de atividade que são a de conceituação e a de redescoberta, as quais possuem características distintas. Em linhas gerais, enquanto atividade de conceituação visa a construção do conhecimento durante a definição do objeto matemático, a atividade de redescoberta tem o enfoque na construção do conhecimento a partir da descoberta das relações/propriedade durante a exploração do objeto matemático.

Apesar da distinção entre os objetivos de uma atividade de conceituação e de uma atividade de redescoberta, o ensino de matemática por meio de uma aula por ambos os tipos de atividade, podem ser divididos didaticamente em seis momentos a saber: organização, apresentação, execução, registro, análise e institucionalização (SÁ, 2019).

Desse modo, embasados no Ensino de Matemática por Atividades e nos seus respectivos Momentos elaboramos nossas atividades, sendo um total de onze atividades, das quais abordaremos os resultados de somente três atividades de redescoberta neste momento, dada a grande extensão destas.

As três atividades que serão abordadas são: Atividade 01, sobre a relação entre as Arestas e os Vértices de um poliedro; a Atividade 02, tratando da relação entre Arestas e os Polígonos das faces de um poliedro e a Atividade 03 que traz a Relação de Euler. É importante destacarmos aqui, que as atividades utilizaram kits de sólidos geométricos construído para que os discentes manuseassem os poliedros durante a realização destas, os quais apresentamos a seguir:

Figura 1: Kit de Sólidos Geométricos



Fonte: Corrêa, 2019.

Figura 2: Poliedros construídos para Kit

Fonte: Corrêa, 2019.

No decorrer das atividades o nome da caixa onde ficam os sólidos do kit foi modificado de acordo com o que era proposto no desenvolvimento de cada respectiva atividade de modo a buscar ajudar na identificação e classificação dos sólidos presentes no decorrer do processo.

Para uma melhor compreensão no desenvolvimento das atividades que propomos, recomendamos uma leitura minuciosa dos momentos do ensino por atividade de autoria de Sá (2019).

Aplicação das atividades

Para iniciarmos as atividades primeiramente organizamos a turma em equipes, as quais foram formadas de maneira espontânea pelos discentes, de no máximo quatro integrantes, como a turma possuía 26 (vinte e seis) alunos, então foram formados sete grupos, sendo cinco contendo quatro alunos e dois com três alunos respectivamente. Informamos a todos que permaneceriam nas mesmas equipes no decorrer de todas as atividades.

Logo em seguida, distribuímos o kit de sólidos geométricos para cada um dos sete grupos formados, posteriormente apresentamos o referido kit e distribuímos envelopes contendo as atividades acordo com o número de integrantes de cada equipe.

As atividades eram constituídas com um roteiro contendo os seus respectivos procedimentos, bem como possuía o espaço destinado as respostas, e outro para posterior conclusão, a qual buscamos chegar juntamente com os participantes.

De modo geral, os procedimentos descritos nas atividades solicitavam que os discentes manuseassem os sólidos do kit, e a partir das características observadas conseguissem chegar em uma conclusão sobre um conceito ou relação envolvendo poliedros.

Para tanto, após a realização dos procedimentos determinados por cada atividade, bem como as discussões internas entre os grupos, solicitamos que um representante de cada equipe fizesse a leitura de suas conclusões, instigando desse modo uma discussão com toda a turma sobre o conceito ou relação encontrados, e posteriormente entrar com a formalização construída a partir das respostas dos discentes.

Após cada atividade, é importante ressaltamos que solicitamos que os participantes devolvessem ao envelope a folha referente a esta, o qual recolhíamos, e logo em seguida distribuíamos outros envelopes contendo questões referentes ao conteúdo proposto em cada respectiva atividade.

No momento em que os discentes terminavam de resolver as questões solicitávamos que devolvessem as folhas para os envelopes. E após todos os grupos terem concluído as resoluções, iniciávamos outra atividade. É importante registrar que durante a resolução os discentes consultaram o kit de sólidos geométricos com frequência.

Análise dos resultados

Para a análise dos resultados obtidos utilizamos as construções das equipes descritas nas folhas de atividades, classificando as observações e conclusões de cada grupo como: Características inválidas, parcialmente válidas e válidas, relacionadas a Poliedro, e atribuindo as cores vermelha, amarela e verde, respectivamente para cada uma delas. A seguir apresentamos nossa primeira atividade de redescoberta:

Quadro 1: Roteiro da Atividade 01

ATIVIDADE 01

Titulo: Arestas e os Vértices de um poliedro
Objetivo: Descobrir uma relação entre as arestas e os vértices de um poliedro

Material: Roteiro da atividade, Kit de sólidos geométricos caneta ou lápis

Procedimentos:

01. Identifique os poliedros do kit contidos na Caixa dos Poliedros.
02. Determine o total de vértices, arestas e faces nos poliedros identificados.
03. Determine quantas arestas se encontram em cada vértice do poliedro
03. Preencha o quadro a seguir:

Nº	Poliedros	Total de arestas (A)	Total de vértices (V)	Quantas arestas se encontram em cada vértice? (n)	(V) . (n)
1	Cubo				
2	Prisma quadrangular				
3	Pirâmide pentagonal				
4	Prisma triangular				
5	Icosaedro				
6	Dodecaedro				
7	Octaedro				

OBSERVAÇÃO

CONCLUSÃO

Fonte: Corrêa, 2019.

Esta atividade teve como objetivo a descoberta de uma relação entre as arestas e os vértices de um poliedro através dos procedimentos descritos na folha da atividade, os quais eram: identificar os poliedros da atividade presentes na caixa; determinar o total de vértices, arestas e faces destes; determinar a quantidades arestas presentes em cada vértice; e preencher o quadro.

De forma geral, a maioria dos participantes executaram de maneira efetiva a atividade proposta, uma vez que conseguiram perceber sem dificuldades as características dos sólidos presentes dentro da caixa, e até mesmo começaram a comentar sobre as características dos que estavam fora da mesma, a seguir apresentamos as características encontradas pelos discentes e as análises destas:

Quadro 2: Resposta dos Discentes sobre Arestas e os Vértices de um poliedro

ALUNOS	**OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES**	**ANÁLISE**
(GRUPO 01) **A20, A22 e A26**	**OBSERVAÇÃO** *O resultado de "v . n" são o dobro do número de arestas.* **CONCLUSÃO** *O número de arestas de cada vértice multiplicado pelo total de vértice é igual ao dobro do total de arestas de um poliedro.*	Observação e Conclusão válidas sobre a relação ente arestas e vértices dos poliedros
(GRUPO 02) **A1, A2, A11 e A23**	**OBSERVAÇÃO** *A aresta é a metade do valor multiplicado de vértices com as arestas que encontram os vértices no polígono.* $A = \frac{V.n}{2}$ **CONCLUSÃO** *O número de arestas de cada vértice multiplicado pelo total de vértice é igual ao dobro do total de arestas de um poliedro.* $A = \frac{V.n}{2}$ $A = \frac{V_1.n_1+V_2.n_2}{2}$	Observação e Conclusão válidas sobre a relação ente arestas e vértices dos poliedros
(GRUPO 03) **A7, A9, A13 e A18**	**OBSERVAÇÃO** *O número de vértices vezes a quantidade de arestas encontradas em cada vértice é igual ao dobro do número total de arestas.* $V \times n = 2A$ **CONCLUSÃO** $V \times n = 2A$	Observação e Conclusão válidas sobre a relação ente arestas e vértices dos poliedros
(GRUPO 04) **A10, A17 e A24**	**OBSERVAÇÃO** *Todos os "V.(n)" são o dobro do número de arestas.* **CONCLUSÃO** *Em um poliedro convexo o númermo de arestas cada vértice multiplicado no total de cada vértice é igual ao dobro no total de arestas.* $A = \frac{V.n}{2}$ $V \times n = 2A$	Observação e Conclusão válidas sobre a relação ente arestas e vértices dos poliedros
(GRUPO 05)	**OBSERVAÇÃO** *O número de vértices multiplicado pelo número de arestas em um vértice sempre dará o dobro do número de arestas. Poliedro*	Observação e Conclusão válidas sobre a relação ente

A3, A5, A15 e A16	$\begin{array}{cccc} A & V & n & V.n \\ 12 & 8 & 3 & 24 \end{array}$ **CONCLUSÃO** *O nº de arestas de cada vértice × total de vértice é igual ao dobro do total de arestas do poliedro.* $V \times n = 2A \quad A = \frac{V.n}{2} \quad A = \frac{V_1.n_1+V_2.n_2}{2}$	arestas e vértices dos poliedros
(GRUPO 06) **A6, A14, A19 e A25**	**OBSERVAÇÃO** *A multiplicação do número de vértices pelo número de arestas em cada vértice , sempre sera o dobro do número de arestas.* **CONCLUSÃO** $2A = V \times n$ *ou* $A = \frac{V.n}{2}$	Observação e Conclusão válidas sobre a relação ente arestas e vértices dos poliedros
(GRUPO 07) **A4, A8, A12 e A21**	**OBSERVAÇÃO** *O número total de arestas (A) é sempre metade do produto do total de vértices (V) e o número de arestas que se encontram em cada vértice do poliedro.* **CONCLUSÃO** *O número de arestas de cada vértice multiplicado pelo total de vértice é igual ao dobro do total de arestas de um poliedro.* $V \times n = 2A \Rightarrow A = \frac{V \times n}{2}$	Observação e Conclusão válidas sobre a relação ente arestas e vértices dos poliedros

Fonte: Corrêa, 2019.

Para verificarmos a respectiva validade das observações e conclusões obtidas nos embasamos em Lima e outros (2006) que afirma que o número de arestas também pode ser contado através da observação dos vértices do poliedro, através da contagem do número de arestas que ocorrem nestes, e que bastaria multiplicarmos por três o vértice com gênero V_3, multiplicarmos por quatro o vértice com gênero V_4, multiplicarmos por cinco o vértice com gênero V_5, e assim sucessivamente, somando seus respectivos resultados, e por conta de cada aresta ter sido contada duas vezes, esta soma deverá ser igualada ao dobro do número de arestas. Logo,

$$\boxed{2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + 6V_6 + \ldots + jV_j = \sum_{m=3}^{j} mV_m}$$

No desenvolvimento desta atividade, como previsto, os discentes tiveram certa dificuldade no princípio, no que se refere ao preenchimento do quadro, posteriormente na observação e na conclusão, levando assim um tempo superior ao que planejamos para a realização da atividade pelos grupos.

Porém, como podemos observar com as análises das conclusões obtidas das equipes, mesmo existindo dificuldades no desenvolvimento da atividade, estas foram possivelmente superadas, uma vez que todos os estudantes conseguiram possivelmente chegar ao entendimento da relação existente entre os elementos dos poliedros a qual a atividade se referia.

Desse modo, acreditamos que todos os participantes conseguiram a partir dos procedimentos descritos na atividade que levou ao preenchimento do quadro, a observação e posterior conclusão, chegar à relação entre o número arestas e o número vértices em um poliedro.

Ao final da realização dos procedimentos descritos na atividade, solicitarmos que um representante de cada equipe fosse até o quadro e expusesse sua conclusão, em seguida fizemos a análise das conclusões de todas as equipes presentes no quadro, e tomando por base as conclusões de cada equipe produzimos a conclusão oficial da turma.

A Atividade 02 tinha como objetivo a descoberta de uma relação entre os polígonos que formam a face e o total de arestas de um poliedro regular através dos procedimentos descritos na folha da atividade, sendo estruturada da seguinte forma:

Quadro 3: Roteiro da Atividade 02

ATIVIDADE 02

Título: Arestas e as Faces de um poliedro regular
Objetivo: Descobrir uma relação entre o polígono que forma a face e o total de arestas de um poliedro regular
Material: Roteiro da atividade, Kit de sólidos geométricos caneta ou lápis

Procedimentos:

01. Identifique os poliedros do kit contidos na Caixa dos Poliedros.
02. Determine o total de arestas e faces nos poliedros identificados.
03. Determine qual ou quais polígonos formam as faces do poliedro identificado
04. Preencha o quadro a seguir:

Nº	Poliedros	Total de arestas (A)	Total de faces (F)	Qual ou quais polígonos formam as faces do poliedro?	Quantos lados tem esse(s) polígono(s)? (n)	Quantas vezes o(s) polígono(s) se repete no poliedro? (R)	(R) . (n)
1	Tetraedro						
2	Prisma triangular						
3	Pirâmide hexagonal						
4	Cubo						
5	Icosaedro						
6	Pirâmide quadrangular						
7	Octaedro						

OBSERVAÇÃO

CONCLUSÃO

Fonte: Corrêa, 2019

Todos os participantes executaram de maneira efetiva a atividade proposta, conseguindo enumerar várias características dos sólidos que estavam dentro da caixa, a seguir apresentamos as características encontradas pelos discentes:

Quadro 4: Resposta dos Discentes sobre Arestas e os Polígonos das faces de um poliedro

ALUNOS	OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES	ANÁLISE
(GRUPO 01) **A20, A22 e A26**	**OBSERVAÇÃO** *O número de lados do polígono das faces de um poliedro multiplicado pelas vezes que se repete é igual ao dobro do número de arestas.* **CONCLUSÃO** $F \times n = 2A \; ou \; A = \frac{F.x}{2}$	Observação e Conclusão válidas sobre a relação ente arestas e as faces dos poliedros
(GRUPO 02) **A1, A2, A11 e A23**	**OBSERVAÇÃO** $A = \frac{n.F}{2}$ **CONCLUSÃO** *O dobro do número de arestas é igual ao número de lados do plígono das faces multiplicado pelas vezes que ele se repete.* $A = \frac{n_1.F_1 + n_2.F_2}{2}$	Observação e Conclusão válidas sobre a relação ente arestas e as faces dos poliedros
(GRUPO 03) **A7, A9, A13 e A18**	**OBSERVAÇÃO** *O número de lados das faces multiplicado pelas vezes que se repete igual ao dobro do número de arestas.* **CONCLUSÃO** $n.F = 2A \; ou \; A = \frac{n.F}{2}$	Observação e Conclusão válidas sobre a relação ente arestas e as faces dos poliedros
(GRUPO 04) **A10, A17 e A24**	**OBSERVAÇÃO** *O número de arestas é igual metade do número de lados do polígono das faces pelas vezes que se repete.* **CONCLUSÃO** *Assim, temos:* $A = \frac{n \times F}{2} \; ou \; F \times n = 2A$	Observação e Conclusão válidas sobre a relação ente arestas e as faces dos poliedros
(GRUPO 05)	**OBSERVAÇÃO** *O número de faces multiplicado pelas vezes que repete é igual ao dobro do nº de arestas.* **CONCLUSÃO**	Observação e Conclusão válidas sobre a relação ente

A3, A5, A15 e A16	*O nº das arestas de uma face × pelo nº de vezes que se repete.* $F \times n = 2A \text{ ou } A = \frac{F \times n}{2}$	arestas e as faces dos poliedros
(GRUPO 06) **A6, A14, A19 e A25**	**OBSERVAÇÃO** $A = \frac{n.F}{2}$ **CONCLUSÃO** *O número de arestas é igual a metade do multiplicado do número de lados do polígono das faces pelas vezes que se repete.* $A = \frac{n.F}{2}$ $A = \frac{n_1.F_1 + n_2.F_2}{2}$	Observação e Conclusão válidas sobre a relação ente arestas e as faces dos poliedros
(GRUPO 07) **A4, A8, A12 e A21**	**OBSERVAÇÃO** *O número de arestas é igual a metade do número de lados do polígono das facesmultiplicado pelas vezes que ele se repete.* **CONCLUSÃO** $F.n = 2A \Rightarrow A = \frac{F.n}{2}$	Observação e Conclusão válidas sobre a relação ente arestas e as faces dos poliedros

Fonte: Corrêa, 2019

Para examinarmos a respectiva validade das observações e conclusões construídas, também nos fundamentamos em Lima e outros (2006) que apresenta a relação entre as arestas com as faces de um poliedro, por meio de um exemplo onde imaginamos um poliedro qualquer totalmente desmontado com suas respectivas faces sobre uma mesa ou qualquer outra superfície plana.

Neste cenário, notaríamos que cada uma de suas faces é representada por um polígono, de modo que se quiséssemos saber a quantidade de lados de cada um destes, bastaria multiplicarmos o número de triângulos por três (F_3), o número de quadriláteros por quatro (F_4), o número de pentágonos por cinco (F_5), o número de hexágonos por seis (F_6) e assim sucessivamente, e depois realizar a soma de todos os resultados obtidos. Porém, por conta de cada aresta do poliedro ser lado de exatamente duas faces, esta soma deverá ser igualada ao dobro do número de arestas do poliedro, assim:

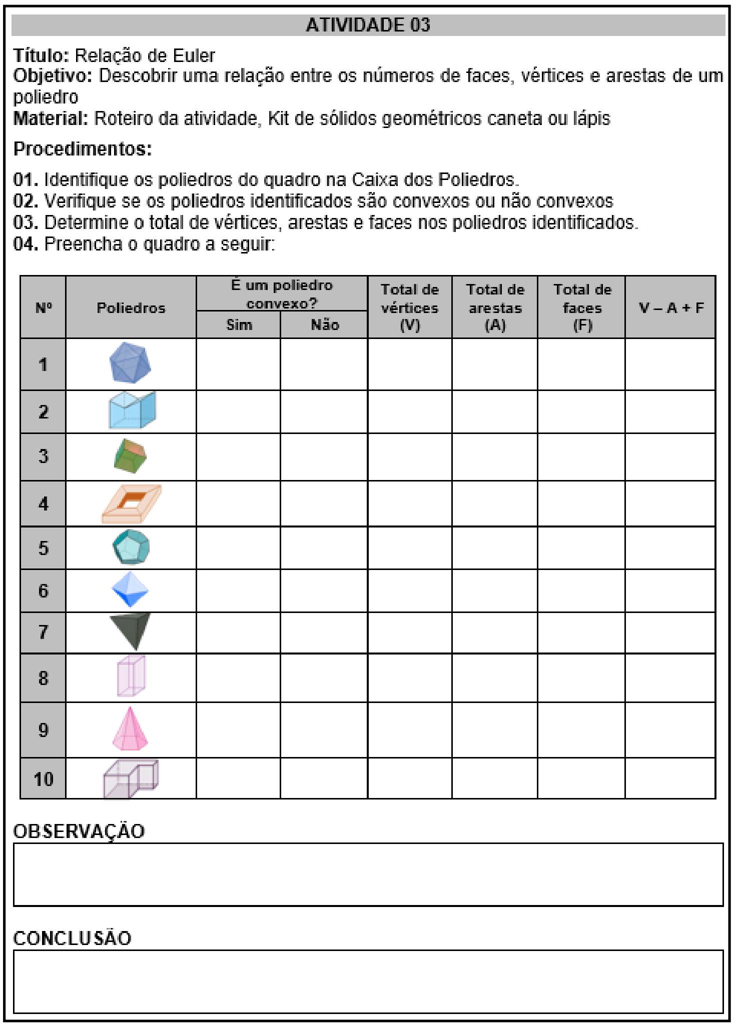
$$\boxed{2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + \ldots + iF_i = \sum_{n=3}^{i} nF_n}$$

Ao observarmos as análises das conclusões das equipes, podemos inferir que mesmo existindo dificuldades durante o desenvolvimento da atividade, estas possivelmente foram superadas, uma vez que todas as equipes conseguiram chegar a construção da relação existente entre os elementos dos poliedros que a atividade propunha entre as arestas e as faces de um poliedro.

Novamente ao final da realização dos procedimentos descritos na atividade, solicitarmos que um representante de cada equipe fosse até o quadro para expor para a turma sua conclusão, em seguida fizemos a análise das conclusões de todas as equipes, e a partir de cada uma destas produzimos a conclusão oficial da turma.

A Atividade 03 abordava a Relação de Euler, e estava estruturada da seguinte forma:

Quadro 5: Roteiro da Atividade 03



ATIVIDADE 03

Título: Relação de Euler
Objetivo: Descobrir uma relação entre os números de faces, vértices e arestas de um poliedro
Material: Roteiro da atividade, Kit de sólidos geométricos caneta ou lápis

Procedimentos:

01. Identifique os poliedros do quadro na Caixa dos Poliedros.
02. Verifique se os poliedros identificados são convexos ou não convexos
03. Determine o total de vértices, arestas e faces nos poliedros identificados.
04. Preencha o quadro a seguir:

Nº	Poliedros	É um poliedro convexo?		Total de vértices (V)	Total de arestas (A)	Total de faces (F)	V – A + F
		Sim	Não				
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							

OBSERVAÇÃO

CONCLUSÃO

Fonte: Corrêa, 2019

Com a execução do preenchimento do quadro pelos grupos, estes começaram as discussões internamente sobre as observações e conclusões, as quais destacamos a seguir:

Quadro 6: Resposta dos Discentes sobre a Relação de Euler

ALUNOS	**OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES**	**ANÁLISE**
(GRUPO 01) **A20, A22**	**OBSERVAÇÃO** *A relação V-A+F é igual a 2 em todos os poliedros convexos e para alguns não convexos.* **CONCLUSÃO** *A relação V-A+F=2 em todos os poliedros convexos*	Observação e Conclusão válidas sobre a relação de Euler

e A26		
(GRUPO 02) **A1, A2, A11 e A23**	**OBSERVAÇÃO** *A relação V-A+F é igual a 2 nos poliedros convexos e alguns poliedros não convexos.* **CONCLUSÃO** *V-A+F=2 é válido em todos os poliedros convexos e alguns não convexos*	Observação e Conclusão válidas sobre a relação de Euler
(GRUPO 03) **A7, A9, A13 e A18**	**OBSERVAÇÃO** *A relação V-A+F é igual a 2 em todos os poliedros convexos e para alguns não convexos.* **CONCLUSÃO** *Em todos os poliedros convexos a relação V-A+F=2*	Observação e Conclusão válidas sobre a relação de Euler
(GRUPO 04) **A10, A17 e A24**	**OBSERVAÇÃO** *A relação V-A+F é igual a 2* **CONCLUSÃO** *A relação V-A+F=2 é válido em todos os poliedros convexos, e para alguns não convexos.*	Observação e Conclusão válidas sobre a relação de Euler
(GRUPO 05) **A3, A5, A15 e A16**	**OBSERVAÇÃO** *A relação V-A+F é igual a dois em todos os poliedros convexos.* **CONCLUSÃO** *A relação V-A+F é igual a dois em todos os poliedros convexos, sendo paraalguns não convexos.*	Observação e Conclusão válidas sobre a relação de Euler
(GRUPO 06) **A6, A14, A19 e A25**	**OBSERVAÇÃO** *V-A+F é igual a 2.* **CONCLUSÃO** *A relação V-A+F=2 é válida em todos os poliedros convexos e para alguns não convexos*	Observação e Conclusão válidas sobre a relação de Euler
(GRUPO 07) **A4, A8, A12 e A21**	**OBSERVAÇÃO** *A relação V-A+F=2* **CONCLUSÃO** *A relação V-A+F=2 em todos os poliedros convexos e para alguns não convexos*	Observação e Conclusão válidas sobre a relação de Euler

Fonte: Corrêa, 2019

Para verificarmos a validade das observações e conclusões desta atividade, também nos baseamos em Lima e outros (2006), que apresenta por meio de demonstração adaptada do professor Zoroastro Azambuja Filho, publicada na RPM nº 3 (1983) a relação Euler, a saber: “Em todo poliedro com A arestas, V vértices e F faces, vale a relação V – A + F = 2”, e ainda afirma que os poliedros para os quais é válida a relação de Euler, são conhecidos por poliedros eulerianos, e como consequência da existência de poliedros não convexos que satisfazem esta relação, e assim toma como a Propriedade que “Todo poliedro convexo é euleriano, porém nem todo poliedro euleriano é convexo”.

De acordo com as análises das conclusões das equipes, podemos inferir que os participantes possivelmente conseguiram construir o entendimento da validade da relação de Euler para poliedros. E como nas demais atividades semelhantes a esta, isto é, contendo campos para observações e conclusões, solicitamos que um representante de cada equipe registrasse no quadro a conclusão de sua equipe, posteriormente a partir das conclusões das equipes construímos a conclusão oficial da turma.

No decorrer do processo de experimentação percebemos que os discentes participantes da pesquisa ficaram cada vez mais rápidos no desenvolvimento das atividades propostas, o que corrobora com Sá (1999, p.81), o qual afirma que “a experiência tem mostrado que o educando fica mais rápido à medida que as atividades são vencidas e deste modo o maior tempo gasto no início é recompensado posteriormente”.

Durante o estudo das análises das respostas dos discentes percebemos que no decorrer das atividades a quantidades de respostas consideradas válidas sobre poliedros cresce significativamente, enquanto que as parcialmente válidas e inválidas diminuem, demonstrando que os discentes ao longo das atividades conseguiram construir conceitos e desenvolver respostas.

Um fator que chamou nossa atenção, reiteramos, foi a fala constante dos discentes a respeito da vontade de que as aulas de matemática fossem conduzidas dessa forma, onde eles pudessem sair do campo do pensamento, isto é, do abstrato e ver a aplicabilidade da matemática de forma concreta.

Conclusões dos estudantes e os Livros Didáticos

Com o objetivo de comparar as respostas obtidas nas conclusões dos estudantes durante nossa pesquisa com as relações/propriedades existentes nos livros didáticos referentes a Poliedros, selecionamos quatro livros didáticos utilizados no Ensino Médio que abordam o conteúdo, a saber: Matemática Contexto & Aplicações (2016), Matemática Ciência e Aplicações (2016), Conexões com a Matemática (2016) e Matemática Paiva (2015).

Ao buscar compararmos as conclusões obtidas na Atividade 01 com as informações existentes a relação apresentada, referente as Arestas e os Vértices de um poliedro, verificamos que os quatro livros destacados não abordam a relação separadamente para posteriormente apresentar a Relação de Euler, mas sim as apresentam somente em seus exemplos e exercícios de maneira superficial. O mesmo acontece com a relação apresentada na Atividade 02, que trata da relação entre as arestas e os polígonos das faces de um poliedro.

Essas relações são essenciais no estudo das propriedades de Poliedros, bem como para o desenvolvimento do entendimento da Relação de Euler e sua respectiva aplicação em questões que a abordem. E ao apresenta-las sem ênfase, como já percebemos em nossa experiência docente e no desenvolvimento das atividades apresentadas, poderemos nos deparar com maiores dificuldades no processo de ensino e aprendizagem do referido conteúdo.

No que se refere as conclusões obtidas na Atividade 03, que aborda diretamente a Relação de Euler, podemos observar que estão de acordo com o que apresentam os quatro livros didáticos selecionados, como observamos no livro Matemática Contexto & Aplicações (2016), que apresenta os poliedros e solicita que por meio da observação destes o leitor observe que o número de arestas é exatamente duas unidades a menos do que a soma do número de faces com o número de vértices.

Na sequência, apresenta a relação de Euler "V-A+F=2", e posteriormente afirma que o valor 2 da referida expressão é uma característica de todos os poliedros convexos, e ainda traz observações sobre a validade da relação, como "Em alguns poliedros (não em todos) não convexos vale também a relação de Euler", apresentado exemplos de poliedros não convexos em que a relação é válida.

No livro Matemática Ciência e Aplicações (2016), apresenta a relação de Euler após abordar os poliedros e suas fórmulas para o encontro de suas respectivas áreas e volumes, entre outros. Então de maneira direta afirma que "Pode-se mostrar que para todo poliedro convexo vale a relação: V - A + F = 2", e em seguida comenta superficialmente sobre Leonhard Euler.

Este livro traz exemplos de poliedros com quantidades de vértices, arestas e faces de poliedros em tabelas, mostrando que os poliedros não convexos geralmente não satisfazem a relação de Euler, mas sugere que um poliedro não convexo pode ou não satisfazer a relação de Euler. Por fim, afirma que "Se um poliedro (convexo ou não) satisfaz a relação de Euler, diz-se que é um poliedro euleriano".

No livro Conexões com a Matemática (2016), antes da abordagem da relação de Euler é chamada a atenção para o fato de que os elementos dos poliedros mantêm entre si muitas relações geométricas, e na sequência afirma que uma das mais importantes é a relação de Euler que está relacionada aos poliedros convexos.

Para verificar a validade da relação, apresenta três exemplos de poliedros convexos em que a relação de Euler tem validade, em seguida aponta um exemplo de poliedro não convexo em que também é válida, neste sentido faz uma observação que embora todo poliedro convexo satisfaça a relação de Euler, nem sempre um poliedro que satisfaz essa relação é convexo.

Por fim, o livro Matemática Paiva (2015), aborda como introdução a relação de Euler as características dos polígonos convexos, posteriormente comenta sobre a descoberta de um teorema por Leonhard Euler, indicando que em todo poliedro convexo vale a relação "V-A+F=2", e posteriormente traz dois exemplos de poliedros convexos em que a relação apresentada é válida.

Como podemos observar os livros didáticos somente apresentam a Relação de Euler e sua validade para os poliedros convexos, porém a validade da relação para alguns poliedros não convexos não é aprofundada no desenvolvimento do conteúdo de poliedros. Nas conclusões construídas pelos grupos podemos verificar que a maioria conseguiu identificar que a Relação de Euler tem validade para todos os poliedros convexos e para alguns não convexos, sendo um total de cinco grupos, e apenas dois grupos não identificaram, porém em suas observações destacaram a validade para alguns não convexos, de modo que inferimos que entenderam a corrente validade.

Considerações Finais

Nossa pesquisa objetivou analisar a validade de conclusões elaboradas por estudantes sobre aspectos de Poliedros a partir da realização de atividades experimentais sem que o professor tivesse apresentado o assunto anteriormente, e dado ao fato de que todas as respectivas conclusões obtidas foram válidas no que se refere ao respectivo conteúdo, consideramos que nossos resultados foram significativos, uma vez que contribuiu para que os discentes participantes da pesquisa identificassem as regularidades e descobrissem leis gerais para chegarem ao entendimento das relações desejadas.

Com esta pesquisa, esperamos ter contribuído com para o desenvolvimento do conteúdo de Poliedros em sala de aula, na intenção de oferecer suporte ao professor, e buscando favorecer a obtenção do conhecimento pelo discente, para deste modo tentar ocasionar a existência de maiores possibilidades de um processo efetivo de ensino e aprendizagem do conteúdo matemático em questão. Temos consciência que o conteúdo de poliedros e de geometria espacial de modo geral possuem uma grande extensão, o que nos leva a refletir sobre possíveis atividades a serem futuramente desenvolvidas de forma semelhante.

Por fim, no que se refere a pesquisas envolvendo o ensino e aprendizagem de poliedros, acreditamos que nossa pesquisa abre espaço para novas investigações sobre a referida temática por meio de outras pesquisas envolvendo metodologias semelhantes, ou ainda outras metodologias.

Referências

CORRÊA, J. N. P. **O Ensino de Poliedros por Atividades.** 2019. 354f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, PA, Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Belém, 2019.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** Contexto & Aplicações: Ensino Médio, 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N., **Fundamentos de Matemática Elementar** - Volume 10, 4ª edição. São Paulo. Editora ATUAL. 1985.

IEZZI, Gelson.; DOLCE, Osvaldo.; DEGENSZAJN, David.; PÉRIGO, Roberto.; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática**: Ciência e Aplicações: Ensino Médio, volume 2. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

LEONARDO, Fabio Martins de. **Conexões com a Matemática**. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016.

LIMA, E. L. O teorema de Euler sobre poliedros. In: **Meu Professor de Matemática e outras Histórias** - Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro: IMPA, 1991a.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio -** Volume 2, SBM Coleção do Professor de Matemática. 6ª Edição (2006). Rio de Janeiro.

SÁ, Pedro Franco de. **Atividades para o ensino de Matemática no ensino fundamental.** Belém: EDUEPA, 2009.

SÁ, Pedro Franco de. **Possibilidades do ensino de matemática por atividades**. Belém: SBEM-PA, 2019. Disponível em http://sinepem.sbempara.com.br/file/V7.pdf.

PAIVA, Manoel. **Matemática:** Paiva. 3.ed. São Paulo: Moderna, 2015.

João Nazareno Pantoja Corrêa
Universidade Federal do Pará – Pará – Brasil
E-mail: joaonpcorrea@hotmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1875-4711

Ducival Carvalho Pereira
Universidade do Estado do Pará – Pará – Brasil
E-mail: ducival@uepa.br
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4511-0185