

## Poliedros de Platão e Relação de Euler numa abordagem utilizando a História da Matemática

Thaciane Jähring Schunk<sup>1</sup>

Instituto Federal do Espírito Santo

Lígia Arantes Sad<sup>2</sup>

Instituto Federal do Espírito Santo

### RESUMO

Este artigo versa sobre uma pesquisa de mestrado desenvolvida pelas autoras no ano de 2020 e 2021 no cenário do ensino híbrido devido a COVID-19. A pesquisa busca investigar os significados produzidos por alunos do 8º ano do ensino fundamental diante de uma abordagem pedagógica relacionada a História da Matemática no estudo de Poliedros de Platão e da Relação de Euler. O solo epistemológico é constituído pelo Modelo dos Campos Semânticos (MCS), segundo Romulo Lins, junto com a historiografia da matemática como vertente metodológica no ensino da matemática. Durante a prática pedagógica os alunos puderam ter uma visão de criação humana desses objetos matemáticos, pois fugimos da abordagem dita convencional, isto é, de trabalhar uma matemática a partir de resultados a serem memorizados e aplicados. Em vez disso, viabilizamos uma visão sobre como o conteúdo foi desenvolvido no passado por diversas pessoas e momentos, considerando a história como promotora de atitudes e de valores.

**Palavras-chave:** Ensino e aprendizagem; Modelo dos Campos Semânticos; Ensino fundamental.

### Plato's Polyhedra and Euler's Relation in an approach using the History of Mathematics

#### ABSTRACT

This article is about a master's research developed by the authors in the year 2020 and 2021 in the hybrid education scenario due to COVID-19. The research seeks to investigate the meanings produced by students of the 8th year of elementary school in the face of a pedagogical approach using the History of Mathematics in the study of Plato's Polyhedra and Euler's Relation. The epistemological ground is constituted by the Semantic Fields Model (SCM), according to Romulo Lins, and by the History of Mathematics as a methodological aspect. During the pedagogical practice, the students were able to have a vision of human creation, as we do not approach the content in a conventional way, that is, a mathematics based on results to be memorized and applied. Instead, we provide insight into how content has been developed in the past by different people, presenting history as a promoter of attitudes and values.

**Keywords:** Teaching and learning; Semantic Fields Model; Elementary School.

### Los poliedros de Platón y la relación de Euler en una aproximación desde la Historia de las Matemáticas

#### RESUMEN

Este artículo trata de una investigación de maestría desarrollada por los autores en el año 2020 y 2021 en el escenario de la educación híbrida por el COVID-19. La investigación busca indagar en los significados producidos por estudiantes del 8º año de la enseñanza fundamental frente a un abordaje pedagógico utilizando la Historia de las Matemáticas en el estudio de los Poliedros

<sup>1</sup> Mestra em Educação em Ciências e Matemática pelo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo (IFES). ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3570-9047>. E-mail: [thacianeschunkj1@gmail.com](mailto:thacianeschunkj1@gmail.com).

<sup>2</sup> Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP). Professora titular do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, Jucutuquara, Vitória, Espírito Santo, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Barão de Mauá, Jucutuquara, Vitória, Espírito Santo, Brasil, CEP: 29040-860. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2758-8380>. E-mail: [aransadli@gmail.com](mailto:aransadli@gmail.com).

de Platón y la Relación de Euler. El terreno epistemológico está constituido por el Modelo de Campos Semánticos (MCS), según Rómulo Lins, y por la Historia de las Matemáticas como aspecto metodológico. Durante la práctica pedagógica, los estudiantes pudieron tener una visión de la creación humana, ya que no abordamos el contenido de manera convencional, es decir, una matemática basada en resultados para ser memorizada y aplicada. En su lugar, proporcionamos información sobre cómo diferentes personas han desarrollado el contenido en el pasado, presentando la historia como promotora de actitudes y valores.

**Palabras clave:** Enseñando y aprendiendo; Modelo de Campos Semánticos; Enseñanza fundamental.

## INTRODUÇÃO

Este artigo, tem ênfase na parte prática pedagógica da pesquisa de mestrado da primeira autora, orientada pela segunda, resultando a dissertação *Produção de significados para Poliedros de Platão e Relação de Euler numa abordagem utilizando a História da Matemática no ensino fundamental*, do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (Educimat), do Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes). A pesquisa teve a seguinte questão norteadora: que significados são produzidos, pelos alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, diante de uma prática pedagógica que utiliza a história da matemática no estudo de poliedros de Platão e da relação de Euler? (SCHUNK, 2021, p. 10)

Na busca de resposta(s) à questão enunciada e com base epistemológica constituída pelos pressupostos da História da Matemática e do Modelo dos Campos Semânticos – MCS, a investigação teve como objetivo geral analisar a produção de significados de alunos do 8º ano do ensino fundamental, no estudo de poliedros de Platão e relação de Euler, mediante uma proposta metodológica de perspectiva historiográfica.

Uma justificativa para escolher pesquisar o estudo de Poliedros de Platão e Relação de Euler, aliada à História da Matemática, veio da percepção e interesse, desde o desenvolvimento do Trabalho de Conclusão de Curso; reforçada também pela busca inicial por fontes bibliográficas para a dissertação, além dos indícios de que ainda há poucos trabalhos amparados nos pressupostos da História da Matemática como metodologia de ensino, principalmente no que concerne a uma análise no âmbito epistemológico de produção de significados.

Ademais, por meio de pesquisas e de experiências em sala de aula enquanto professora e pesquisadora, percebemos que a Matemática ensinada está pouco articulada às abordagens e aos desenvolvimentos apresentados em livros de História da Matemática. Por esse motivo, agravado pela situação de pandemia vivenciada nos últimos anos (2020-2021), que dificultou o contato com outros colegas professores, houve a escolha de ação da primeira autora como professora e pesquisadora da própria prática, ou seja, atuar na pesquisa como observadora, investigadora e analista.

Uma observação que a prática profissional evidenciou, fortemente, para a professora pesquisadora foi o valor atribuído pelas políticas educacionais ao “saber calcular por algoritmos” – para dar conta dos conteúdos no que se refere ao fazer matemático específico e a resultados – enquanto a cultura e o entendimento do como e do porquê se chegou a esse fazer, os processos, são, por vezes, deixados de lado. Dessa forma, geralmente, não é levado em consideração, por exemplo, o desenvolvimento lógico-histórico do conteúdo, fazendo com que

o conhecimento científico pareça não ter história. Na verdade, revela-se aparentemente a-histórico, porque torna invisível a contribuição cultural dos povos, das diversas civilizações que ajudaram a desenvolver a Matemática.

Dada a importância de o professor ter material didático disponível para abordar esse conteúdo dentro do propósito aqui mencionado, foi também elaborado um Paradidático (digital) composto por tarefas que intencionou-se constituir como atividade de ensino para estudantes de nível básico. Ou seja, um produto educacional concomitante e integrado aos procedimentos metodológicos que possa contribuir como um recurso didático ao professor e aos alunos na abordagem do objeto matemático Poliedros de Platão e Relação de Euler.

Ao observar reflexivamente a lógica e os significados de determinado conteúdo em seu desenvolvimento, ao longo de algumas décadas ou séculos, pode-se compreender como se constituem e são transformados historicamente. Nessa perspectiva, depreende-se que a história permite contribuir não somente para o conhecimento científico, como também para o nosso conhecimento enquanto seres humanos. Em síntese, a análise dos relatos históricos deixados em várias civilizações possibilita entender o movimento da vida humana e a relação com o desenvolvimento de objetos matemáticos, conforme consideram Radford (2000); Jankvist (2009); Miguel e Miorim (2004); Mendes (2006); Sad (2013); entre outros.

Pretendeu-se, portanto, ter a compreensão da História da Matemática na produção de significados e na integração desta com a prática pedagógica de acordo com Silva e Sad (2007). Além disso, na concepção proposta por Boero, Pedemonte e Robotti (1997) conhecida como Jogo de Vozes e Ecos, identificar os ecos produzidos pelos estudantes diante das vozes que emanam de registros da História da Matemática. Em suma, uma forma de relacionar os conhecimentos históricos com a prática em sala de aula.

## UM PANORAMA DAS BASES TEÓRICAS

Nesta seção discutimos a História da Matemática como uma aliada à prática dos professores de matemática. Para isso, recorreremos a Miguel e Miorim (2004) e Sad (2013). Depois, passamos a debater a respeito da produção de significados e outros elementos característicos do Modelo dos Campos Semânticos (MCS), utilizando literaturas de Lins (1993, 2012), para constituir o solo epistemológico da base de obtenção dos dados e argumentos de análise.

Quando tratamos das questões relativas à participação da história na educação matemática, esta pode ser concebida com base em várias perspectivas teóricas e pontos de vista já definidos. Com base em Miguel e Miorim (2004), inspirados também nos professores pesquisadores Paulo Boero, B. Pedemonte, E. Robotti e G. Chiappini, escolhemos a perspectiva dos Jogos de Vozes e Ecos pelos aspectos de proximidade à nossa prática.

Nesta perspectiva em discussão, os autores entendem por “vozes” toda expressão verbal ou não verbal, especialmente aquelas produzidas por cientistas do passado, que simbolizariam significativos saltos históricos na evolução da matemática e da ciência. No momento em que tais “vozes” são apropriadas e ressignificadas por pessoas de outra época, produzem “ecos”. Portanto, ecos é “uma conexão remota estabelecida entre pessoas de diferentes épocas e culturas

com base em seus diferentes propósitos, experiências, concepções e sentidos.” (MIGUEL; MIORIM, 2004, p. 140).

Para uma aula pautada na perspectiva do *Jogo de Vozes e Ecos* é necessário que anteriormente seja realizada uma investigação e análise histórica do objeto matemático que se pretende trabalhar, a fim de avaliar as características de tal conteúdo matemático e suas condições histórico-culturais potencializadas para seu entendimento. Com esse suporte é preciso planejar sequências ou tarefas de ensino e aprendizagem fundamentadas em uma seleção de fontes.

Como exemplo de aplicação dessa teoria, temos o processo de elaboração do produto educacional da presente pesquisa, pois, foi durante o planejamento que oportunizamos aos estudantes acesso às vozes do passado para que eles pudessem produzir ecos. Desse modo, em relação aos *Jogos de Vozes e Ecos* podemos dizer que praticamos como “uma situação educacional particular que tem por meta ativar os estudantes a produzirem ecos por intermédio de tarefas específicas: ‘Como X interpretou o fato Y?’.” (BOERO *et al.*, 2000, apud MIGUEL; MIORIM, 2004, p. 141).

Compreendemos que a apropriação pelo estudante da cultura científica, em especial da matemática, pode ser um processo mediado por vozes da História da Matemática em resposta a situações do presente, em que o estudante estabelece uma reflexão e dialoga com outros estudantes e/ou com o professor, que é um mediador entre vozes históricas e vozes dialogais presentes.

Nesse sentido, os diálogos serão compreendidos como resíduos de enunciação para serem observados à luz do Modelo dos Campos Semânticos (MCS). Isso torna convergente à escolha pela perspectiva teórica dos *Jogos e Vozes e Ecos*, a fim de intensificar a questão do diálogo com os alunos e a nossa observação quanto a produção de significados, de acordo com princípios do modelo.

O Modelo dos Campos Semânticos foi desenvolvido por Romulo Campos Lins e enunciado em 1992 em sua tese de doutorado. Impulsionado por suas inquietações como professor, objetivava “dar conta de caracterizar o que os alunos estavam pensando quando ‘erravam’, mas sem recorrer a esta ideia de erro” (LINS, 2012, p. 11). O MCS tem seus alicerces em Vygotsky e na Teoria da Atividade de Leontiev e apresenta-se como um modelo epistemológico que, centralmente, considera “(i) o que é conhecimento? (ii) como é que o conhecimento é produzido? (iii) como é que conhecemos o que conhecemos?” (LINS, 1993, p. 77). O modelo tem como primordial uma existência em ação, que pode ser usada em sala de aula, portanto, não sendo limitado a um modelo teórico estático. Nesse sentido, seu aspecto central é o processo de produção de significados pelos alunos em sala de aula e a leitura desses significados pelos professores.

A fim de compreender o modelo e utilizá-lo em nossa pesquisa, foi necessário entender alguns princípios básicos da sua constituição: conhecimento, autor – texto – leitor, campo semântico, interlocutor, legitimidade, leitura plausível, núcleos formados, resíduos de enunciação e significado. Apresentamos aqui uma sintetizada discussão de cada um deles, com base em Lins (1993; 2012).

O conhecimento consiste em uma enunciação seguida de uma justificação, ou seja, uma crença-afirmação. A justificação é o que o sujeito acredita que o autoriza a dizer algo, o que

pode ocorrer, por exemplo, mediante a autoridade de um professor, de um livro, de um filme ou de uma lembrança. De acordo com Lins (1993), o

conhecimento é entendido como uma crença - algo em que o sujeito acredita e expressa, e que se caracteriza (sic), portanto, como uma afirmação - junto com o que o sujeito considera ser uma justificação para sua crença-afirmação. (LINS, 1993, p. 86).

Cabe destaque o fato de que a autoridade serve para emprestar legitimidade, não tendo a intenção de explicar. A respeito da criação de significado, este acontece em uma enunciação, podendo ocorrer quando o leitor se “transforma” no autor, ou ainda, quando o sujeito da enunciação diz algo a respeito de uma situação/objeto. A título de exemplo, imagine um sujeito (leitor) diante de um resíduo de enunciação, que demanda uma produção de significados. Sua enunciação sobre aquele “algo” é sempre realizada na direção de um interlocutor, com o qual quer compartilhar seu entendimento. Vale diferenciar “resíduo de enunciação” da produção de significados, sendo o primeiro o que resta de um processo, enquanto que o significado de um objeto representa o que se diz a respeito do próprio objeto.

Contudo, isso não significa que o significado enunciado é tudo o que se pode falar sobre o objeto e, nessa perspectiva, pode-se dizer que o significado é local. De acordo com Lins (2012), os objetos também são constituídos constantemente em meio a nossas atividades quando produzimos significados e vice-versa.

Os modos de produção de significados partem dos campos semânticos idealizados, ou seja, formas de anteciparmos e refletirmos sobre o que os outros estão falando e se o que dizem é legítimo. O campo semântico é esse processo de produção de significado, que acontece em meio a uma atividade, podendo agregar objetos e estipulações (dados anteriormente legitimados). Um campo é um processo dinâmico, que pode se transformar a qualquer momento, e, enquanto há interação dialógica dos sujeitos no processo, isso indica que estes estão operando em um mesmo campo semântico. Dessa forma, é no interior do campo que se produz significado e conhecimento em relação a um objeto matemático.

Os interlocutores são legitimidades, isto é, podem ser compreendidas no viés do MCS do seguinte modo:

o processo no qual a pessoa passa de ser capaz de fazer algo com a ajuda/presença de uma pessoa mais “experiente”, para ser capaz de fazer aquele algo “sozinho”, é o processo no qual a pessoa passa de “precisar emprestar a legitimidade de um terceiro para poder dizer o que diz naquele lugar e momento”, para “fazer de maneira autônoma por ter internalizado interlocutores, legitimidades (LINS, 2012, p. 20).

Para tanto, é importante o exercício do descentramento, que consiste na tentativa de o professor se colocar no lugar dos alunos, tornando-se mais sensível aos acontecimentos em sala de aula, até mesmo aos estranhamentos vividos por eles. Com essas considerações, o MCS busca promover uma interação, mediante o espaço comunicativo, que acontece quando professor e alunos compartilham modos de criação de significados.

Em sala de aula, professores e alunos buscam dialogar, ou seja, constituírem-se como interlocutores. O trabalho do professor é pautado na leitura do aluno, a fim de analisar os significados que está produzindo, por meio da leitura plausível, que consiste em mapear o

terreno e saber onde o aluno está. Assim, caracteriza-se por buscar e incentivar a leitura do aluno, tentando fazê-lo constituir os significados adequados.

Diante do exposto, observa-se que o solo epistemológico do presente trabalho tem por base algumas relações advindas da produção de significado e conhecimento, segundo o MCS, bem como de caracterizações quanto as integrações com a História da Matemática.

## PERCURSOS METODOLÓGICOS

Apresentamos nesta seção alguns detalhamentos do processo de construção do percurso metodológico da pesquisa. A caracterização primeira foi por uma pesquisa de abordagem qualitativa, por que se desenvolveu em uma situação natural, sendo rica em dados descritivos e com um plano aberto e flexível, buscando focalizar a realidade de forma complexa e contextualizada. Como um caminho, foi adotada a modalidade do estudo de caso, conforme Lüdke e André (1986) e André (2005). Com isso, também caracterizamos o *locus* e os sujeitos da pesquisa.

Os autores citados consideram que o estudo de caso pode ser simples e específico (um caso, uma pessoa) ou mais complexo e abstrato (um grupo, uma comunidade, um meio ou uma situação), no entanto, sempre bem delimitado. O caso estudado pode ter semelhança com outros estudos, mas, destaca-se no seu interesse próprio. Mas, como a realidade pode ser compreendida por diferentes perspectivas, os estudos de caso objetivam evidenciar distintos pontos de vistas em busca de resposta à questão investigada e, embora concentrado no caso específico, pode ser ampliado em termos típicos para um conjunto de outros do qual é representante.

No seu desenvolvimento, é preciso recorrer a uma variedade de fontes de informação e realizar a obtenção e/ou produção de dados em diferentes momentos, sendo possível triangular as informações, confirmando ou não as hipóteses, considerando novos dados, afastando as suposições e podendo levantar novas hipóteses.

Consoante a Lüdke e André (1986), as conclusões da investigação, geralmente, têm validade mais ampla do que a compreensão do caso estudado, sobretudo no que se refere ao contexto educacional quando se escolhe casos exemplares por seus relacionamentos.

A parte de pesquisa em campo, tendo por *locus* o Colégio Ápice da rede particular localizada no bairro de Jacaraípe do município de Serra – ES e uma turma do 8º ano do ensino fundamental II, foi caracterizada pelo caso que tem como fundamento principal o planejamento, a realização e a avaliação de um método de ensino inovador, que precisa ser avaliado no contexto adequado às atividades de ensino e aprendizagem dos estudantes quanto aos objetos matemáticos já destacados.

Considerando o cenário pandêmico do ano de 2021, que provocou alterações na sala de aula, fazendo a escola adotar o ensino híbrido, ou seja, uma parte dos alunos em regime presencial e outra parte on-line. Os pais dos alunos puderam escolher qual modalidade de ensino preferiam adotar, havendo, em todas as salas de aula, computadores que permitiam aos alunos que estavam em formato on-line assistirem e participarem da aula em tempo real de forma remota. Cabe destacar que, diante desse contexto, o professor(a) foi incumbido(a) de atender os dois cenários ao mesmo tempo. Em específico, a turma participante da pesquisa possuía 10 alunos no formato presencial e 15 alunos no formato on-line.

A respeito da caracterização da turma, os estudantes tinham uma boa afinidade uns com os outros, interagindo bem, sendo que muitos eram amigos há muito tempo. Com uma média de idade de 13 anos, era uma turma participativa durante as aulas de matemática. A professora de matemática, autora da pesquisa, lecionou para essa turma em anos anteriores. Sua formação acadêmica em Licenciatura de Matemática permitiu que trabalhasse na instituição particular deste 2019 até 2021. Nesse último ano, na turma do 8º ano assumiu dois papéis, quais sejam, professora pesquisadora.

A pesquisa de mestrado foi realizada a partir da investigação da professora pesquisadora sobre sua própria prática. Mas por que pesquisar a própria prática? Naquele momento, de muitas incertezas em relação ao cenário global da educação, foi a opção escolhida como oportuna, porque não se sabia como seria ofertado o ensino, por quanto tempo ficaria on-line, ou quando voltaria para o presencial e, se voltasse, como seria o retorno. Pelo menos, a escola que a pesquisadora trabalhava, bem como ela mesma, se adaptaram a todas as mudanças impostas pelas medidas de prevenção e controle da Covid-19.

Na modalidade 100% on-line, a professora pesquisadora ministrava suas aulas de casa pelo google meet na “forma ao vivo”, usando diferentes recursos tecnológicos como mesa digitalizadora, GeoGebra, jogos, simuladores, entre outros meios. Um desafio e tanto! Ainda mais quando, no formato híbrido, as aulas passaram a acontecer na escola com alguns alunos presenciais e outros de forma on-line acompanhando as aulas ao vivo. Para isso, em cada sala de aula havia um computador para o professor ter acesso aos alunos distantes e vice-versa.

## **SÍNTESE DA PRÁTICA PEDAGÓGICA E DAS ANÁLISES**

Esta seção é dedicada à uma descrição sucinta do planejamento da prática pedagógica, bem como do seu desenvolvimento. Será apresentada também uma análise de algumas atividades do Paradidático (digital) realizadas pelos educandos, à luz do referencial teórico. Para isso, utilizamos a leitura plausível e algumas caracterizações a fim de examinar a produção de significados dos alunos do 8º ano na abordagem envolvendo Poliedros de Platão e Relação de Euler a partir da perspectiva metodológica da História da Matemática.

O procedimento metodológico central da análise foi por meio dos resíduos de enunciações, compreendidos também como ecos dos alunos diante das vozes da História da Matemática. Reforçamos que utilizamos, para a obtenção de dados, a gravação de áudio dos alunos em processo de atividade, o diário de campo da pesquisadora, as transcrições das aulas, entre outros. Considerando o limite do presente artigo, trazemos um recorte da análise das atividades.

A turma envolvida possuía duas aulas de matemática três vezes por semana, com duração de 50 minutos cada uma. Lembrando que a prática pedagógica da pesquisa foi realizada entre os meses de junho e julho de 2021, durante a pandemia da Covid-19, sendo as aulas de forma híbrida, devido às medidas de controle e mitigação da transmissão do vírus.

Como a professora-pesquisadora precisava aplicar a prova do trimestre também nesse período, optamos por começar o trabalho com o Paradidático (digital), realizar uma interrupção para a revisão e aplicação da prova sobre outro tema e, posteriormente, continuar com o estudo do Paradidático.

Inicialmente, os alunos foram separados em grupos de 5 integrantes para desenvolverem e discutir juntos as tarefas do Paradidático, mesmo que à distância. A estratégia de realizar tarefas em grupo foi adotada com a intenção de motivá-los, pois, segundo as experiências em sala de aula, os alunos se engajam mais quando as atividades pedagógicas são assim realizadas.

Como havia dez alunos presenciais e quinze alunos na modalidade remota, separamos dois grupos presenciais e três grupos remotos. Durante as atividades de ensino e aprendizagem a partir do Paradidático, os grupos presenciais podiam realizar discussões das tarefas. Como havia poucos alunos em sala, os grupos se colocaram de modo que um grupo não atrapalhava o diálogo do outro. Os grupos remotos também podiam interagir uns com os outros utilizando o *chat* da aula ou o *Whatsapp*, como de costume. Apenas a interação entre os alunos remotos com os alunos presenciais e vice-versa ficou inviável.

Na organização da presente escrita dessa seção, buscamos nas descrições das práticas em sala de aula destacar as vozes da História da Matemática. Em sequência, apresentamos a transcrição dos ecos produzidos pelos estudantes, compreendidos também como resíduos de enunciação. A grande maioria dessas enunciações foram oriundas de alunos que optaram pelo modelo presencial. E, por fim, a análise de cada situação, com o intuito de evidenciar o processo de produção de significados. Observando que este ocorre em uma enunciação, no interior de uma atividade, quando o leitor se transforma no autor.

Apresentamos a capa do Paradidático (figura 1), pois de modo convergente os grupos foram separados de acordo com cada elemento da natureza. O grupo 1 (G1) escolheu o elemento fogo, o G2 escolheu o elemento água, o G3 escolheu o elemento terra, o G4 escolheu o elemento universo e, por fim, o grupo G5 ficou com o elemento ar. Importante destacar que desses grupos apenas foram analisados os dados de alunos dos grupos G1, G2 e G3, pois estes foram os que aceitaram ser participantes da pesquisa<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup> Os estudantes convidados que aceitaram participar da pesquisa (participantes) assinaram Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TCLE), pois o Projeto de Pesquisa foi, anteriormente, submetido e aprovado pelo Conselho de Ética em Pesquisa (CEP -Ifes).

**Figura 1** - Capa do Paradidático (digital)



Fonte: Schunk e Sad (2021)

O Paradidático foi distribuído aos alunos de forma digital na plataforma utilizada pelo colégio, que está disponível na internet e os alunos tinham acesso, permitindo, assim, acompanhar e fazer as atividades. Para os alunos que não possuíam computador e acompanhavam a aula pelo celular, o Paradidático foi visualizado pelo compartilhamento de tela e, com isso, anotaram as respostas no caderno de forma organizada a fim de compartilhar.

O primeiro encontro ocorreu em duas aulas da sexta-feira (25/06), quando por meio do Paradidático discutimos e revisamos o conteúdo sobre os sólidos geométricos, poliedros e não poliedros e poliedros regulares, temas que já tinham sido estudados por eles nos 6º e 7º anos. Devido a isso, praticamente não apresentaram dificuldades. Naquele momento, concluímos a primeira aula com a seguinte indagação: Por que são assim chamados e qual a razão de serem apenas cinco os poliedros regulares?

Os alunos foram, portanto, instigados e convidados a realizar uma viagem por diferentes momentos históricos para compreenderem essa questão a partir da disponibilização de um tempo para investigação em grupo a respeito de selecionados personagens envolvidos no conteúdo a ser estudado. Cada grupo ficou responsável por um personagem, o G1 ficou responsável por pesquisar sobre Pitágoras; o G2, sobre Platão; o G3, sobre Euclides; e o G4,

sobre Teeteto. Para as investigações deles, foram dadas as seguintes sugestões de referência: o artigo de Sousa et al. (2018), o site Mathigo<sup>4</sup> e o site MacTutor<sup>5</sup>.

Nas duas aulas da quarta-feira (30/06), os alunos apresentaram os resultados da pesquisa e explicaram o que entenderam a respeito da etimologia do nome de cada Poliedro de Platão. A professora-pesquisadora orientou que, em momento seguinte, seria realizado o estudo do porquê existir apenas cinco poliedros regulares e, para isso, desenvolveriam uma tarefa amparada na demonstração de Euclides. Houve necessidade também em discutir sobre ângulos poliédricos, ângulo externo e interno de um polígono com os alunos, visto que são noções geométricas consideradas pré-requisitos para a realização de tarefas posteriores.

No que tange à investigação sobre os diferentes personagens que contribuíram com os cinco Poliedros de Platão – Pitágoras, Platão, Euclides e Teeteto –, os alunos, ao realizarem buscas no site MacTutor e no site Mathigon, destacaram aspectos sobre a história de vida de cada personagem, tendo uma visão um pouco mais aprofundada. Na aula posterior, apresentaram o que investigaram. A seguir, no quadro 1, destacamos alguns ecos dos estudantes produzidos diante das vozes da História da Matemática.

#### Quadro 1 – Caixa I de diálogos dos alunos em discussão

**Cristiano** – *Olha a data de nascimento e falecimento de Pitágoras. Ele tinha uns 80 anos?*

**Diversos alunos** – *Uau!!! Bastante, considerando aquela época e a expectativa de vida.*

**Professora** – *Pitágoras realmente existiu?*

**Lane** – *Sim! Se existe estas coisas, então ele tem que ter existido.*

(...)

Devido à curiosidade, calcularam que Teeteto viveu em torno de 48 anos e Euclides 60 anos.

**Lane** – *Pitágoras viveu mais.*

(...)

**Lu** – *Existe quem criou a matemática? Quem começou tudo?*

**Fonte:** Schunk (2021).

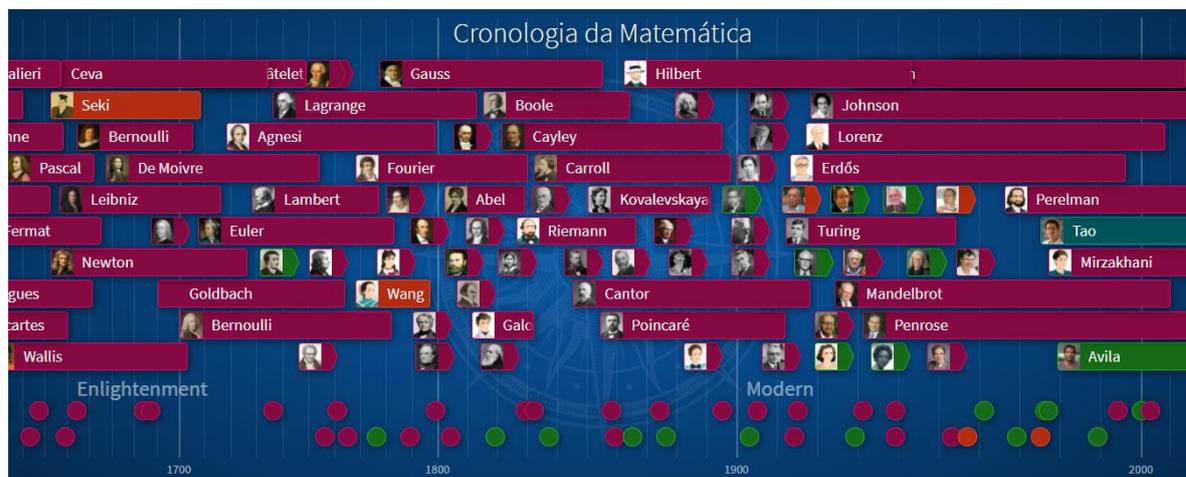
A aluna Lane era uma das integrantes do grupo que pesquisou e apresentou sobre Pitágoras, e demonstrou-se impermeável à possibilidade de Pitágoras não ter existido. Segundo a estudante, seria impossível ter desenvolvido tudo aquilo, de acordo com sua investigação, sem Pitágoras. Ela não estava aberta à possibilidade de ter sido não apenas uma única pessoa, mas uma comunidade chamada de pitagóricos (STRUIK, 1997).

A fim de discutir sobre a pergunta da aluna Lu, a professora apresentou a “cronologia da matemática” existente no site Mathigon (figura 2) e a síntese biográfica de alguns matemáticos.

<sup>4</sup> <https://pt.mathigon.org/timeline>.

<sup>5</sup> <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/>

**Figura 2 - Cronologia da matemática**

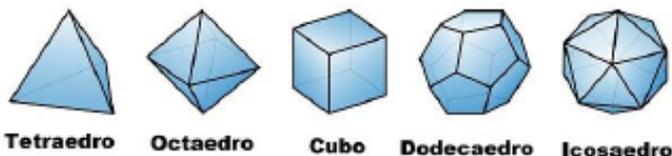


Fonte: <https://pt.mathigon.org/timeline>.

Em seguida, trabalhamos sobre a etimologia da palavra poliedro, a qual se divide em *poli* – que, em grego, significa várias; e *edro*, que vem da palavra grega *hédra*, que significa faces. Concluindo com os alunos que a palavra poliedro significa várias faces. Essa tarefa de estudo sobre a etimologia dos nomes dos cinco sólidos platônicos consta no Paradidático, conforme a figura 3.

**Figura 3 - Página 21 do Paradidático (digital)**

Qual a quantidade de faces de cada poliedro platônico abaixo?



Fonte: [5]

Os cinco poliedros regulares também possuem origem grega, podemos inferir isto pelo fato de serem os primeiros a estruturarem o estudo acerca desse conteúdo. Pesquise e explique a respeito da etimologia do nome de cada poliedro de Platão.

---



---



---



---

Fonte: Paradidático digital, Schunk e Sad (2021).

Referente a essa tarefa, alguns resíduos de enunciação merecem realce (quadro 2).

### Quadro 2 – Caixa II de diálogos dos alunos em discussão

**Professora** – *Por que destes nomes? Por que tetraedro, por exemplo?*  
**Lane** – *Por causa da quantidade de lados [faces].*  
**Professora** – *Mas qual a relação da quantidade de faces com o nome? – Repetiu o nome de cada poliedro. Destacando que cada um termina com edro, que já sabemos que significa faces. Indagou – Portanto o que seria o tetra, octa, dodeca, icosa?*  
**Lane** – *Octa vem de oito, certo?*  
**Cristiano** – *Dodeca de doze.*  
**Diversos alunos** – *Icosa de vinte, tetra de três e hexa de seis.*

**Fonte:** Schunk (2021)

É possível verificar que o estranhamento dos alunos com a nomeação dos poliedros regulares no início da aplicação do Paradidático foi superado no processo de estudo. Dessa forma, eles (os alunos) não sentiram necessidade de realizar uma pesquisa como era proposto na tarefa. Vale lembrar que, ao lerem os nomes dos Poliedros de Platão pela primeira vez, no início do trabalho, tiveram um pouco de estranhamento que ao longo do estudo foi superado. Observamos, também, que com o processo de produção de significados, no qual o estudante se constituiu como um autor, houve o desenvolvimento do que era novo se transformando em dado e sendo explorado como estipulação em respectivos campos semânticos constituídos.

Nas duas aulas da sexta-feira (09/07) disponibilizamos, para cada aluno, um kit contendo 20 jujubas e 30 palitos de dentes (figura 4). De início, o kit seria composto por peças em papel cartão e fita adesiva dupla-face, mas, como teríamos que disponibilizar todo esse material para cada aluno, visto que eles não podem ficar próximos uns aos outros devido à pandemia, e, para evitar o grandioso trabalho de produzir todo o material por meio de papel cartão, adotamos as jujubas e os palitos de dentes.

**Figura 4** - kit contendo 20 jujubas e 30 palitos



**Fonte:** Acervo de Schunk (2021).

Na tarefa, com inspiração em Machado (2010), explicamos aos alunos que eles deveriam construir ângulos poliédricos com diferentes números de polígonos, mas um único tipo de polígono por vez. Em cada tentativa de formar um ângulo poliédrico, solicitamos que anotassem em uma tabela de registro (figura 5).

**Figura 5-** Tabela para registro dos dados

Polígono	Número de polígonos	Soma dos ângulos dos polígonos em volta de cada vértices de um poliedro	Formou um ângulo poliédrico?	Poliedro formado

**Fonte:** Paradidático digital (2021).

Após a realização dessa tarefa, pedimos para explicarem mais detalhadamente suas conclusões mediante um texto. E, com essa tarefa pronta, dialogamos com os alunos sobre os resultados encontrados nas suas anotações. Este momento foi finalizado com a proposição de um desafio: cada integrante do grupo deveria construir um poliedro de Platão (figura 6) reaproveitando os palitos de dentes e as jujubas recebidas para a realização da tarefa.

**Figura 6 -** Construção dos ângulos poliédricos e dos poliedros de Platão



**Fontes:** Acervo de Schunk (2021).

Em seguida, para lembrar os elementos principais de um poliedro, como faces, vértices e arestas, solicitamos o preenchimento de uma outra tabela (figura 7). Os alunos conversaram, agiram em colaboração e preencheram suas respectivas tabelas.

**Figura 5** - Tabela a preencher

Poliedros	Vértices	Faces	Arestas
Tetraedro			
Cubo			
Octaedro			
Dodecaedro			
Icosaedro			

Fonte: Paradidático digital (2021).

Esse momento foi concluído com a seguinte indagação: Você consegue observar alguma relação entre o número de vértices, faces e arestas? Cujo objetivo era de reflexão.

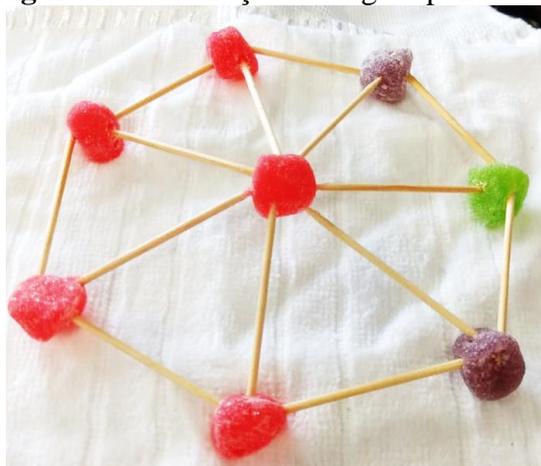
Em sequência, realizamos a tarefa de estudo sobre a demonstração por intuição da existência de somente cinco poliedros de Platão, com jujubas e palitos de dentes. Seguem algumas enunciações dos alunos (quadro 3) no decorrer da tarefa.

**Quadro 3** - Caixa VI de diálogos dos alunos sem discussão

<p><b>Professora</b> – <i>Por que existem somente 5 Poliedros de Platão?</i></p> <p><b>Diversos alunos</b> – <i>Porque eles só descobriram 5.</i></p> <p>(...)</p> <p>[Alunos realizaram várias tentativas de construção dos ângulos poliédricos]</p> <p>(...)</p> <p><b>Cristiano</b> – <i>Dá para construir ângulos poliédricos com 6, 7, (...), vários triângulos.</i></p> <p><b>Lu</b> – <i>Não dá, porque a soma dos ângulos internos em volta de cada vértice passa de 360° e não existe ângulo maior que isto.</i></p> <p><b>Criastiano</b> – <i>Dá sim, eu consegui! Olha...! (figura 9).</i></p> <p><b>Lu</b> - <i>Mas não faz sentido, porque fica plano.</i></p> <p><b>Cristiano</b> - <i>Mas olha eu consegui, não ficou plano.</i></p> <p>[Alguns alunos ficaram em dúvida se quando a soma dos ângulos internos é igual a 360° formaria ou não o ângulo poliédrico]</p>
---

Fonte: Schunk (2021)

**Figura 9** - Construção do ângulo poliédrico.



**Fonte:** Banco de dados da autora, 2021.

Na resposta descrita acima a respeito de *porque eles só descobriram cinco*, percebe-se um limite epistemológico de diversos alunos em relação à ideia de que isso tenha vindo de uma construção matemática, como resultado do desenvolvimento de uma longa etapa. Talvez porque os estudantes estivessem acostumados a olhar os resultados acabados, como normalmente é apresentado nos livros didáticos, presos a uma simples aceitação, sem a reflexão de alguns porquês.

A discussão de Lu com Cristiano instigou toda a turma, que ficou com opiniões divididas. A dúvida era: se, quando a soma dos ângulos internos em torno do vértice do poliedro resultava em  $360^\circ$ , a forma ficaria plana ou não. Lu justificou sua enunciação e produziu significado em relação a não ser possível ter um ângulo maior que  $360^\circ$ , pois isso seria uma volta completa no plano, portanto, não poderia ser maior que tal valor. Ela estava operando em um campo semântico mais abstrato, sem se ater ao que Cristiano exibiu em sua construção. Ou seja, foi possível cogitar que a aluna não tenha pensado na possibilidade de considerar mais de uma volta completa ( $360^\circ$ ).

Enquanto isso, o aluno Cristiano estava operando em outro campo semântico, mais geométrico e concretizado em suas construções com os palitos de dente e jujubas. Tal consideração advém do fato de que o aluno estava conseguindo, aparentemente, realizar as construções dos ângulos poliédricos a partir de vários triângulos com os materiais manipuláveis, o que o levou a compreender que isso poderia ser uma justificativa.

Observamos que Lu e Cristiano não estavam operando no mesmo espaço comunicativo. O que Lu enunciava com sua justificativa, Cristiano não aceitava e vice-versa. Com o desenvolvimento da escuta e do diálogo entre alunos e professora, foi possível um processo de interação em um mesmo espaço comunicativo, de modo que as dúvidas fossem sanadas.

Notamos que, durante toda a tarefa mencionada, diversos alunos produziam significados e tentativas de justificativa para as suas afirmações, aproximando-se da efetivação da constituição de conhecimento. No caso da Lu, foi possível observar sua produção de conhecimento quanto a não possibilidade da construção do ângulo poliédrico com mais de 5 triângulos.

Nas duas aulas da terça-feira (13/07) voltamos a comentar que Platão relacionou os cinco poliedros regulares aos cinco elementos da natureza: o tetraedro (fogo), cubo (terra), icosaedro (água), octaedro (ar) e dodecaedro (universo), já que, para Platão, a Matemática, sobretudo os sólidos cósmicos, estavam na natureza.

Em continuidade ao diálogo, apresentamos Leonard Euler como criador da relação aplicada aos poliedros que envolve o número de arestas, vértices e faces de qualquer poliedro convexo. E que, a fórmula criada por ele é: se  $V$  é o número de vértices,  $A$  o número de arestas e  $F$  o número de faces, então  $V - A + F = 2$ . Mas, antes de verificar tal relação, convidamos os alunos para conhecerem mais a respeito de Euler, realizando uma investigação em grupo. Para isso, indicamos novamente o site Mathigo e o site Mac Tutor, além do artigo de Pereira (2015).

Depois, as ideias foram sistematizadas, passando pelos seguintes caminhos da vida de Euler: infância e adolescência – nos primeiros vinte anos em Basileia na Suíça (1707-1727); a juventude – em São Petersburgo, na Rússia (1727-1741), e em Berlim, na Prússia (1741-1766); bem como, o retorno até seus últimos dias de vida a São Petersburgo (1766-1783). A atividade foi concluída pedindo para comentarem sobre o que lhes chamou mais a atenção na historiografia de Euler e, em destaque, a verificação da Relação de Euler para os Poliedros de Platão.

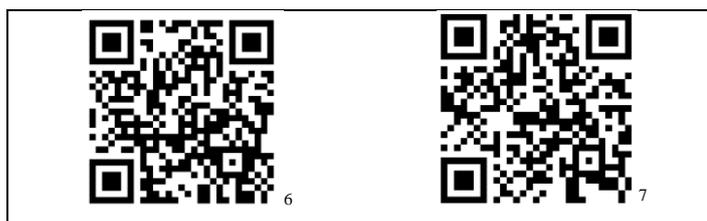
Inspirados por Santos (2014), exibimos o cubo e o tetraedro “desmontados” para analisar a Relação de Euler. Em sequência, solicitamos que utilizassem a tabela da figura 5 que haviam preenchido, a fim de verificar se essa relação de fato era válida para os demais Poliedros de Platão. Esse momento foi finalizado mostrando a planificação dos poliedros de Platão no software Poly diante do qual os alunos facilmente visualizaram a transformação da figura espacial em figura plana.

Por fim, como a tarefa de estudo final, no intuito de retornar aos temas trabalhados no decorrer das aulas e concluir a proposta de forma diferenciada para os alunos, propusemos a elaboração, com devidas orientações, para elaboração da tarefa de Performance Matemático Digital (PMD), comentando a respeito dos critérios para uma boa PMD. Como resultado, o grupo G1 escolheu e elaborou a PMD sobre a historiografia de Euler; o G2, não conseguiu entregar a tarefa finalizada mostrando as construções dos Poliedros de Platão; mas o G3 terminou também e abordou sobre Platão em sua PMD.

A produção de conhecimento ficou evidente nas elaborações das PMDs, visto que é possível verificar as enunciações seguidas de justificações por meio do que eles acreditaram e do que os autorizaram a dizer, neste caso, tudo indica terem sido as conclusões tomadas e as referências usadas ao longo da prática pedagógica. É imperativo mencionar ainda a produção de significados, que pode ser observada na criação dos vídeos, quando o leitor se transformou em autor, ou seja, quando os alunos elaboraram as PMDs com enunciações sobre Poliedros de Platão e Relação de Euler.

Observamos que no Paradidático, para além das atividades, adicionamos uma orientação para o uso de outros instrumentos tecnológicos, como o Aplicativo Sólidos Platônicos RA e o site Mathigon, além de algumas questões sobre Poliedros de Platão e Relação de Euler presentes em vestibulares. Segue QR CODE (Figura 10) com direcionamento ao YouTube para acessar as PMDs. Basta apontar a câmera do celular para o QR CODE.

**Figura 10** - QR-CODE PMD sobre Platão e sobre Euler



Fonte: Produzido por Schunk (2021), no Canva<sup>8</sup>.

## REFLEXÕES FINAIS

Devido a situação vivenciada com a pandemia da Covid-19, a professora pesquisadora precisou adaptar os procedimentos e adequar a modalidade de aulas dos participantes da pesquisa. Foi vislumbrada e pensada como ocasião oportuna para investigar sua própria prática. Um momento propício para um olhar mais crítico, que gerou reflexões e questionamentos sobre a prática educativa. Dessa forma, esta pesquisa constituiu-se como uma investigação que também teve um olhar à própria prática, contribuindo para o desenvolvimento profissional da professora pesquisadora e gerando conhecimento em outras direções educacionais, como a do ensino híbrido.

O contexto da pandemia trouxe muitos desafios e dificuldades! Entre eles o de utilização tecnológica: os alunos que optaram pelo modelo remoto criaram um grupo de WhatsApp para realizar discussões das tarefas de ensino, sem avisar a professora e incluí-la, ainda que tivessem o espaço do chat do Google meet destinado a isso. Embora o protagonismo da ação seja positivo, talvez tenhamos perdido importantes resíduos de enunciação e ecos dos alunos que poderiam ser mais dados para a pesquisa.

Além do mencionado acima, foram encontradas outras dificuldades, por exemplo, as tarefas de investigação precisaram ser realizadas em sala de aula pelo próprio celular dos alunos, visto que, devido à situação da pandemia, o laboratório de informática da escola foi desativado. Em consequência, mudou-se o propósito de os alunos irem ao laboratório para realizarem manipulação dos Poliedros de Platão no software Poly, como havíamos planejado.

A ideia de utilizar a Performance Matemática Digital (PMD) como uma tarefa complementar foi escolhida por ser uma possibilidade de produção dos alunos, com vídeos curtos, partindo das próprias tarefas desenvolvidas ao longo de todo o processo em sala de aula. Além do mais, uma oportunidade de adquirir habilidades, desenvolver criatividade e autonomia. O uso desse recurso didático permitiu uma maior aproximação dos alunos e da professora, tornando a proposta mais atrativa e desafiadora, ao fugir de metodologias tradicionais.

A intensificação da interação da professora pesquisadora com os participantes contribuiu para compreendermos melhor o que os alunos estavam dizendo, sentindo e

<sup>6</sup> Link: <https://www.youtube.com/watch?v=tMC9qoGGPyI>.

<sup>7</sup> Link: <https://www.youtube.com/watch?v=tMC9qoGGPyI>.

<sup>8</sup> Canva é um editor gratuito que possibilita criar artes, link: <https://www.canva.com/>.

produzindo, o que convergiu com os princípios pedagógicos defendidos no MCS e forneceu subsídios às análises.

Ao final, ficaram novas intenções de continuidade e desdobramentos que a pesquisa pode tomar, com investigações mais ampliadas em outros estudos de casos, em anos ou níveis escolares diferenciados, considerando o campo potencial da História da Matemática. Se haverá ampliação do interesse pelo modelo de educação mais presencial ou não?! Só o tempo poderá dizer.

## REFERÊNCIAS

ANDRÉ, M. E. D. A. de. **Estudo de caso em pesquisa e avaliação educacional**. Brasília: Liber Livro, 2005. v. 13.

BOERO, P.; PEDEMONTE, B.; ROBOTTI, E. Approaching theoretical knowledge through voices and echoes: a vygotskian perspective. In: **PME CONFERENCE**, 21nd, 1997, Finlândia. Proceedings... Disponível em: <  
[http://didmat.dima.unige.it/progetti/COFIN/biblio/art\\_boero/BOERO%26C,PME\\_XXI.pdf](http://didmat.dima.unige.it/progetti/COFIN/biblio/art_boero/BOERO%26C,PME_XXI.pdf)>. Acesso em: 26 jan. 2021.

JANKVIST, U. T. **Using history as a ‘goal’ in mathematics education**. Nr 464. Roskild: IMFUFA, 2009.

LINS, R. C. Epistemologia, história e educação matemática: tornando mais sólida as bases da pesquisa. **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática** – São Paulo, Ano 1, n. 1, set./1993, p.75-91.

LINS, R. C. O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimento e notas de teorizações. In: ANGELO, C. L. et al (Orgs.). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de história**. São Paulo: Midiograf, 2012. p. 11-30.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisas em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N.. **A história como agente de cognição na educação matemática**. Porto Alegre: Sulina, 2006.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática: propostas e desafios**. 1ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2004 [Tendências em Educação Matemática, 10].

RADFORD, L. **Cognição matemática: História, Antropologia e Epistemologia**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2000.

SAD, L. A. A história da matemática na educação básica: uma aliada para a prática do professor de matemática. **Anais eletrônicos do XI ENEM** – XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba – PR, 2013.

SANTOS, P. E. S. dos. Teorema de Euler: um estudo com auxílio de materiais concretos e tecnologias. 2014. 92f. **Dissertação** (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Campo dos Goytacazes, 2014.

SCHUNK, T. J. Produção de significados para Poliedros de Platão e Relação de Euler numa abordagem utilizando a História da Matemática no ensino fundamental. 2021. 154f.

**Dissertação.** (Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática – Educimat). Instituto Federal do Espírito Santo. Vitória -ES. Disponível em <<https://repositorio.ifes.edu.br/handle/123456789/1587>>

SCHUNK, T. J.; SAD, L. A. **Alguns porquês sobre os Poliedros de Platão e Relação de Euler.** Paradidático digital. Vitória: Edifes, 2021. Disponível em <<https://repositorio.ifes.edu.br/handle/123456789/1590>> .

SILVA, C; SAD, L. A. **Uma abordagem pedagógica do uso de fontes originais em história da matemática.** Guarapuava: SBHMat, 2007.

STRUIK, D. J. **História Concisa das Matemáticas.** Tradução de João Cosme Santos Guerreiro. 2ª edição. Lisboa: Gradiva, 1997.

*Submetido em:* 06 de agosto de 2022.

*Aprovado em:* 23 de agosto de 2022.

*Publicado em:* 03 de setembro de 2022.

**Como citar o artigo:**

SCHUNK, T. J.; SAD, L. A. Poliedros de Platão e Relação de Euler numa abordagem utilizando a História da Matemática. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, Belém/PA, Fluxo Contínuo, n. 17, p. 150-168, Jan.-Dez, 2022.

<https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n.p150-168.id522>