Melhorando a Epistemologia de Números Fracionários: uma Ontologia baseada na História e Neurociência*[1]

Improving the Epistemology of Fractional Numbers: An Ontology Based on History and Neuroscience

Arthur B. Powell
Rutgers University-Newark/USA

RESUMO

Neste artigo, descrevemos a importância acadêmica e social do conhecimento de fração e questionamos como ele pode tornar-se mais acessível para alunos. Para responder a essa questão, primeiro, examinamos brevemente perspectivas ontológicas e epistemológicas do tratamento dominante dos números fracionários nos livros escolares. Em seguida, examinamos uma perspectiva ontológica alternativa para o conhecimento de fração na literatura sobre a História da Matemática e a Ciência Neurocognitiva. Por meio dessa investigação, sugerimos uma alternativa às noções prevalecentes de números fracionários que prometem melhorar a compreensão dos estudantes para a representação fracionária de números racionais. Finalmente, dentro da nova perspectiva ontológica e epistemológica, indicamos questões de pesquisa que a perspectiva sugere.

Palavras-chave: Frações, Números racionais. Representações nos livros didáticos de números fracionários. História de frações. Neurociência. Razões não-simbólicas e simbólicas.

ABSTRACT

In this article, we outline the academic and social importance of fraction knowledge and question how it can be made more accessible to students. To respond to this question, we first examine briefly ontological and epistemological perspectives of the dominant treatment of fractions in school textbooks. We then examine alternative ontological perspective for fraction knowledge in literature about the history of mathematics and neurocognitive science. From this examination, we suggest an alternative to prevailing notions of fractions that hold promise to improve the students' comprehension of fractional representation of rational numbers. Finally, within the new ontological and epistemological perspective, we indicate research questions that the perspective suggests.

Keywords: Fractions, Rational numbers. Textbook representations of fractions. History of fractions. Neuroscience. Nonsymbolic and symbolic ratios.

Introdução

No Ensino Básico, um dos tópicos mais importantes é o conhecimento dos números fracionários. É o conhecimento chave para estudantes serem sucedidos na Álgebra e disciplinas matemáticas posteriores (BAILEY et al., 2012; BOOTH; NEWTON, 2012; SIEGLER et al., 2012; TORBEYNS et al., 2015). No caso da Álgebra, está repleta de exemplos direto e indiretamente relacionados às frações, tanto nas equações lineares das quais completam o quadrado perfeito, quanto na resolução de sistemas de equações lineares à resolução de equações racionais, como também razões nas probabilidades simples ao teorema binomial. Uma grande parte da base do pensamento algébrico repousa sobre um claro entendimento dos conceitos de números racionais (DRISCOLL, 1982; KIEREN, 1980; LAMON, 2005; WU, 2001) e sobre a capacidade de operar e manipular frações. Outrossim, as demais facetas da Álgebra, o conhecimento dos números fracionários dos quais são fundamentais para a compreensão das

---

1 Este artigo é uma elaboração a partir de uma palestra que ministrei no dia 12 de junho de 2018 na Universidade Federal de Pará para o Ciclo de Palestras Ciências, Cultura, História, e Educação, coordenado pelos Professores Carlos Aldemir Farias da Silva e Iran Abreu Mendes.

áreas avançadas como a Teoria dos Limites, o Cálculo, a Analise Numérica, a Analise Real, dentre outras.

Complementando sua importância para estudantes na escola, os números fracionários influenciam seu futuro no mercado de trabalho e, no geral, na justiça social. Controlando o QI, a educação e renda familiar, o conhecimento das frações pelos estudantes prevê sua futura ocupação e renda (RITCHIE; BATES, 2013). Então, este conhecimento faz um papel significativo nas questões de equidade social. Em várias publicações, o lutador para direitos civis dos afrodescendentes nos EUA na década 60 e fundador do projeto, Algebra Project, Bob Moses e também com seus colegas (MOSES et al., 1989; MOSES; WEST; DAVIS, 2009; MOSES, 1994; MOSES; COBB, 2001; SILVA et al., 1990) argumentam fortemente e convincentemente que, no ensino fundamental e médio, o acesso à Álgebra para estudantes afrodescendentes e outros grupos marginalizados faz parte da luta para justiça social. Por extensão, como o estudo de frações antecede o conhecimento dela e prevê desempenho na Álgebra, o acesso ao conhecimento dos números fracionários é crucial para a justiça social e o alcance da equidade social.

Embora conhecimento de frações seja essencial escolasticamente e socialmente, em muitos países, os estudantes têm dificuldades para compreender e operar com frações (OECD, 2014). Aprender frações exige não apenas proficiência processual, mas também entendimento conceitual. Tanto para os estudantes como os professores faltam o conhecimento conceitual de frações e operações (LAMON, 2007; LIN et al., 2013). Paralelamente, essa deficiência coexiste com os padrões curriculares, livros didáticos, e práticas pedagógicas atualizadas que são fundamentadas numa perspectiva ontológica e epistemológica específica. Na Educação Matemática, mesmo que hajam materiais manipulativos atrativos, os livros didáticos apresentam ilustrações atraentes que representam materiais cotidianos e as aplicativos digitais que sejam dinâmicos e permitam manipulações, (1) os conhecimentos conceituais e procedimentais de estudantes e adultos com números fracionários são de baixo desempenho (LAMON, 2007; LIN et al., 2013); (2) os professores dos anos iniciais veem como um desafio complexo ensinar frações (CLARKE et al., 2006; MA, 1999); e (3) até agora, as pesquisas em Educação Matemática não têm avançado a pratica do ensino de frações e operações com frações para que os estudantes possam construir e apropriar o conhecimento com facilidade.

Para melhorar a epistemologia de números fracionários é provável que pesquisadores e educadores de Educação Matemática precisem buscar uma ontologia nova dos mesmos. Esta ontologia pode ser encontrada fora de Educação Matemática na História de Matemática e na Ciência Neurocognitiva. Com uma ontologia nova, estas disciplinas podem indicar um caminho epistemológica e pedagógico mais promissório. Este caminho facilitará estudantes construírem e apropriarem os conhecimentos dos números fracionários, assim fará o seu estudo da Álgebra mais sucedido, aumentar a equidade e a justiça social para estudantes até agora sub-representados na Matemática, e ajudará professores que ensinam a Matemática e autores de livros didáticos entenderem representações que conformam à ontologia histórica das frações e novas dicas da Neurociência.

As visões conceituais dos objetos matemáticos têm fontes históricas que, por sua vez, podem moldar perspectivas ontológicas e epistemológicas, bem como práticas pedagógicas sobre os objetos. Para compreender sua natureza ou a ontologia de um objeto matemático, devemos começar com uma análise histórica da sua origem. A consciência da gênese do objeto influenciará nossas perspectivas acerca de como se adquire conhecimento dele, ou seja, sobre sua epistemologia.

Um exemplo deste movimento ontológico e epistemológico é o conjunto de objetos matemáticos que formam uma das representações de números racionais—os números fracionários. A seguir neste artigo, descrevemos brevemente como tipicamente os números fracionários são apresentados visualmente nos livros didáticos e questionamos quais ideias conceituais e procedimentais essas representações giram. Com uma lente crítica, examinamos os problemas epistemológicas evidenciam com a ontologia típica que sustenta o conhecimento tradicional de números fracionários. Depois, traçamos historicamente a origem desta ontologia tipicamente. Para estabelecer a base de nossa proposta ontológica, epistemológica e pedagógica para os números fracionários, íamos historicamente para as raízes das frações e fundamentar uma epistemologia nelas.

As representações atuais de frações nos livros didáticos e suas problemáticas

Tanto para professores quanto para alunos, as fontes autorizadas para o conhecimento da matemática escolar, impressas ou digitais, são livros didáticos. Eles são o principal recurso que os professores usam para planejar e ministrar suas aulas e, ao mesmo tempo, os livros didáticos são frequentemente o único recurso que os alunos acessam para aprender sobre objetos matemáticos e operações com eles. A partir de uma avaliação paralela, autores como CHINGOS e WHITEHURST (2012), FAN; ZHU e MIAO (2013) observam que “os pesquisadores geralmente concordam que os livros didáticos são considerados um grande transmissor do currículo desempenham um papel dominante nas cenas de educação moderna em diferentes disciplinas escolares” (p. 635, nossa tradução). Então, torna-se importante entender como os números fracionários são representados nos livros didáticos.

Muitas vezes, os manuais matemáticos para professores são iguais aos mesmos para estudantes, mas com anotações e comentários. As anotações incluem discussões de conceitos matemáticos e dicas didáticas. Um exemplo de um desses manuais é uma série de livros curriculares, disponível *online* e em versão impressa, que, segundo a editora, Great Minds (https://greatminds.org), em que sua utilização totaliza em 57 per cento das escolas públicas do ensino fundamental I dos Estados Unidos da América (EUA), *Eureka Math.*

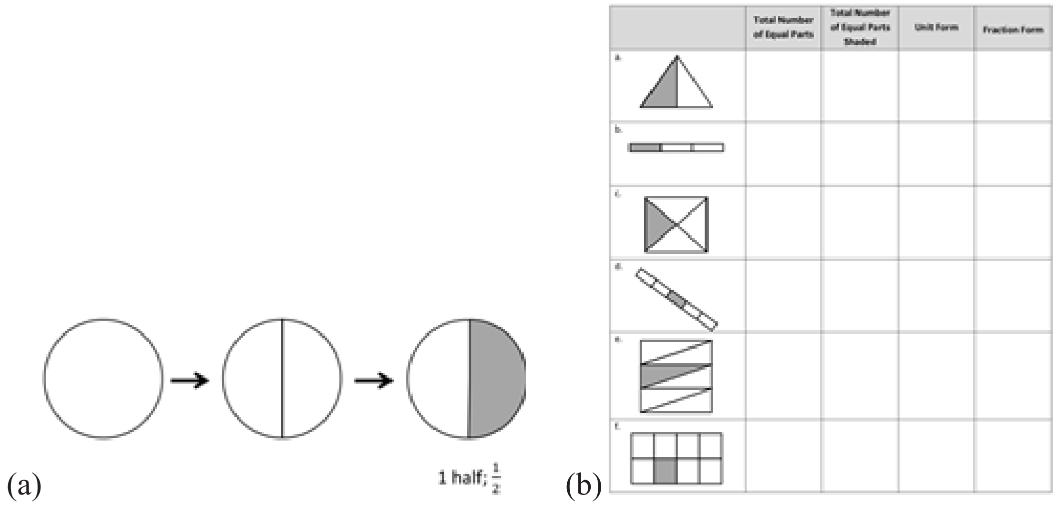
Um dos estados que usa a série é New York. Neste estado, como em outros estados dos EUA e em muitos países no mundo como no Brasil, o ensino de frações começa no terceiro ano do ensino fundamental quando os estudantes têm em volta de 8 anos de idade (OECD, 2014). Na série, *Eureka Math*, para o terceiro ano, a primeira lição trata da natureza e formação de frações, em particular as unidades de frações. Com base da Figure 1(a) e o que está escrito no livro para os professores, a ideia é que uma fração nasce da partição de uma inteira em b partes iguais e uma destas partes é a fração unitária, 1/b. Isto é dizer que a ontologia da noção de uma fração é na partição ou divisão atual de coisas. Elas podem ser regiões ou áreas de figuras geométricas ou conjuntos de itens discretas. No entanto, na Figura 1(a), o processo faz efetivamente que a coisa que era uma inteira vira em partes discretas. Então, com a partição real de cosias, uma região ou área se torna numa ítem discreta e contável.

Na Figura 1(b) apresenta-se uma ficha de trabalho onde os estudantes têm que escrever nas colunas, da esquerda para a direta, o número total de partes iguais em que a figura dada está dividida, o número total de partes sombreadas, a fração unitária em uma escrita especial—um numeral natural, ou seja, um elemento deste conjunto {1,2,3,4,…}, para o numerador e a palavra escrita para o nome do denominador da fração—e a fração unitária completamente em símbolos matemáticos.

É crítico notar que, para responder corretamente, o procedimento que os estudantes têm que usar é contar o número de partes no qual das figuras geométricas estão dividas e o número destas partes sombreadas. Então, nessa abordagem, hão três aspectos do conhecimento de frações que os estudantes irão construir:

1. a origem de frações está na divisão de coisas em partes iguais;
2. uma fração é uma descrição de duas coisas discretas relacionadas: uma inteira discretizada e um certo número das partes dela; e
3. a contagem é o procedimento chave para nomear uma parte da divisão em termos fracionários.

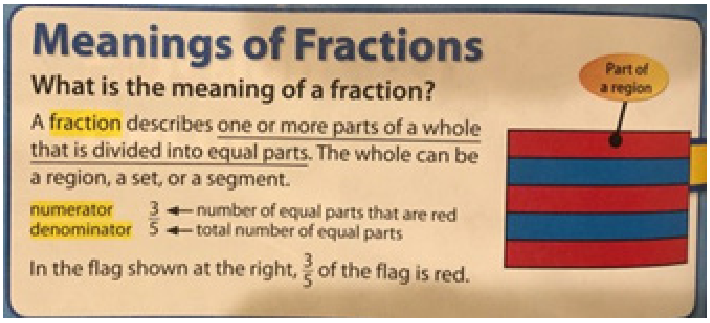
Figura 1: (a) Apresentação ontológica de frações com base da fração unitária. (b) Parte de uma ficha de trabalho.



Fonte: De EngageNY.org do New York State Education Department. (*New York State Common Core Mathematics Curriculum, Eureka Math, Grade 3 Mathematics*/Module 5/Topic B/Lesson 5, p. 54) Disponível de https://www.engageny.org/resource/grade-3-mathematics-module-5-topic-b-lesson-5/file/35276; acessado 09 de setembro de 2018. (a) p. 54 e (b) p. 58.

As Figuras 1(a) e 1(b) apresentam uma discussão do que representa a noção de fração relacionada a "parte/todo." Nessa abordagem ontológica e epistemológica, uma fração é uma relação contável ou aditiva que compara dois aspectos de uma quantidade dividida ou discretizada em partes iguais, do total das partes discretas considera-se um certo número delas. Desta abordagem, os conhecimentos construídos são reforçados ao longo dos outros anos da escola. A Figura 2 ilustra a apresentação em um livro didático para estudantes do quinto ano do ensino fundamental (aproximadamente 10 anos de idade), uma discussão em que a fração é definida como uma ou mais partes de uma região, conjunto, ou segmento divido em partes iguais, destacando o que representa o numerador que é o número de partes de interesse e o denominador que é o número total de partes iguais em que o inteiro foi divido.

Figura 2: Apresentação do significado de frações. O exemplo é de uma parte de uma região e indica que 3/5 da bandeira é vermelho.



Fonte: Charles, R. I., Caldwell, J. H., Cavanagh, M., Chancellor, D., Copley, J. V., Crown, W. D., . . . Van de Walle, J. A. (2011). *EnVision math*. Glenview, IL: Pearson Education, p. 220 (9-1).

A abordagem parte/todo de números fracionários com base na partição gera problemas epistemológicos. Entre os problemas documentados na literatura, colocamos dois deles para indicar categorias problemáticas epistemologicamente. Como a abordagem parte/todo está baseada na contagem e numa concepção aditiva, estudantes usam as propriedades e procedimentos dos números naturais[2] para fazer inferências sobre números fracionários. Isso é chamado por vários pesquisadores como "o viés do número natural" (por exemplo, NI; ZHOU, 2005, nossa tradução). Uma manifestação desse viés é descrita pelas observações da MACK (1990) quando notar que alunos da 6° ano (11 anos de idade) costumam afirmar que 1/8 é maior que 1/6. Outro aspecto que ela destaca em sua pesquisa volta-se para quando um estudante descrever a adição de fração da seguinte forma: "Bem, você atravessa. Você adiciona os números de cima juntos e os números inferiores juntos" (p. 23, nossa tradução). Assim, a soma de 1/2+ 1/3 se torna 2/5. Nesse momento das operações, os estudantes assumem que os números fracionários têm as mesmas propriedades assumidas pelos números naturais no momento das operações.

Outras manifestações do viés do número natural que influenciam no sentido de frações que os estudantes se apropriam diz respeito às demais operações. Com base do seu conhecimento de propriedades das operações com números naturais, eles dificilmente entendem que a multiplicação de uma fração por outra fração positiva às vezes produz um resultado menor que os operandos originais, enquanto a divisão às vezes produz um resultado maior que os operandos, dependendo da magnitude do multiplicador ou divisor (SIEGLER et al., 2013; VAMVAKOUSSI; VOSNIADOU, 2004). Também, estudantes não concebem que, diferentemente dos números naturais, os números fracionários são um denso subconjunto de números reais (MAHER; YANKELEWITZ, 2017; NI; ZHOU, 2005; SIEGLER, 2016). Assim, eles não reconhecem que diferentemente de números naturais, as frações não têm sucessor direto e existe um número infinito de frações entre quaisquer duas frações.

O que acontece é que o sentido de frações é mal construído. Uma evidência disso foi o resultado nos EUA de numa amostra nacionalmente representativa de estudantes da 13 anos de idade (do 8° ano). Eles tiveram de escolher a estimativa mais próximo para soma de 12/13+7/8 entre 1, 2, 19 21, ou "não sei." A maioria destes estudantes escolheram 19 e 21 do que 2, e sua resposta mais comum foi "19" (CARPENTER et al., 1980). Este resultado indica que os estudantes de 13 anos não tiveram um sentido da razoabilidade de uma adição de frações com

2 Os números naturais são tipicamente definidos como o conjunto de números inteiros não negativos, {0,1,2,3,…}, ou o conjunto de inteiros positivos, {1,2,3,…}. Para os propósitos deste artigo, queremos dizer o conjunto de inteiros positivos quando nos referimos aos números naturais.

respeito às magnitudes das frações envolvidas.

Um outro exemplo da falta de sentido das frações trata da falha em entender a magnitude que envolve a noção de frações. A metade dos participantes em um grupo focal de consumidores achavam que o hambúrguer A & W de 1/3 libra era menor que o famoso "*quarter pounder*" do McDonald's. Eles, portanto, escolheram o hambúrguer menor do McDonald's, embora preferissem o sabor do hambúrguer da A & W (Taubman, 2007, p. 62-63).

As ideias ontológicas de frações são definidas com base na abordagem—parte/todo—e estão relacionadas a problemas epistemológicos. Na abordagem, a contagem é o procedimento essencial para decidir como simbolizar termos fracionários uma parte da uma divisão de uma figura em partes iguais. Uma fração é então considerada como o resultado de uma contagem *dupla*, o que é contraria a concepção de frações como números representando *uma* relação quantitativa entre duas grandezas ou números (NI; ZHOU, 2005).

O surgimento da divisão de coisas: a raiz dos problemas atuais de aprendizagem

A concepção problemática de frações que os estudantes evidenciam são raizadas numa ontologia de frações. Sua ontologia é baseada na concepção de que a origem das frações está na divisão de coisas em partes iguais, o que chamamos a ontologia de partição. A partição ou divisão de coisas nesse momento funciona como um espelho, ou melhor, como uma simetria de um processo matemático de divisão de números naturais. Este processo nem sempre resulta em um outro número natural. Historicamente, estes resultados que não são números naturais por milênios não foram considerados como números.

Depois de mais de três ou quatro milênios desde seus surgimentos, o uso e a notação para simbolizar frações evoluíram. No entanto, foi somente no século XVII que os matemáticos aceitaram as frações não apenas como razões sem estado numérico, mas como números, como objetos iguais aos números naturais. A aceitação das frações permitia equações da forma $ax = b$ que tem por solução, $x = b / a$, sem restrições, desde que $a \neq 0$. Também, licenciava a generalização de números com as quatro operações—adição, subtração, multiplicação e divisão—como um domínio fechado, um campo algébrico (COURANT; ROBBINS, 1941/1996).

A expansão teórica do domínio de números para incluir frações conferiu significado ao resultado da divisão de números naturais quando o divisor não é um fator do dividendo. Além disso, no final do século XVI E.C., Simon Stevin de Bruges já havia escrito um tratamento sistemático de ambas as frações comuns e frações decimais em seu livro, *De Thiende* (*O Décimo*) (FLAGG, 1983). Portanto, no século XVII, quando as frações finalmente foram aceitas, os números racionais já tinham duas representações simbólicas.

Quanto às frações, nem sua representação simbólica nem sua justificativa teórica como número provaram ser suficientes ou mesmo epistemologicamente desejáveis para apoiar a compreensão e apropriação psicológica de estudantes. Como tal, as representações mentais de fração dos dicentes precisavam de apoio. Neste ponto, DAVYDOV e TSVETKOVICH (1991b) observam o seguinte:

> Aos estudantes da quinta série, e os de menor idade, mais ainda, não podem se dado o princípio dessa divisão que leva a representação de frações numa forma simbólica e pura. Seu correlato visual deveria ser encontrado e utilizado. É nesse papel que a própria divisão das coisas apareceu, sua subdivisão em partes que, no decorrer do ensino, pode ser relativamente facilmente ligada a termos característicos para definir frações ordinárias. (p. 24, tradução nossa)

Os autores argumentam que a postura ontológica de que as frações emergem da partição dos números naturais torna-se associada epistemologicamente à divisão física dos objetos visuais. Esses dois correlatos conectam às representações simbólicas de frações com imagens visuais, como a divisão física de áreas de círculos ou de retângulos em regiões iguais. A fração a/b é então definida visualmente como a regiões iguais da área de uma figura geométrica dividida em b destas regiões.

Como vemos, segundo DAVYDOV e TSVETKOVICH (1991b), a necessidade de fornecer para aprendizes uns correlatos físicos e visuais de frações é a origem da interpretação parte/todo das frações. Ao longo do tempo, essa interpretação tem se tornado instrutivamente privilegiada entre outras interpretações ou subcontratos que KIEREN (1976; 1988) identifica e descreve tal como operador, razão, quociente e medida. No entanto, como já vemos na seção anterior, para os estudantes, essa interpretação pode ser epistemologicamente problemática. Os estudantes que trabalham apenas com modelos visuais de coisas partidas ou seccionadas, podem desenvolver estratégias limitadas, como contar o número de peças, em vez de avaliar a relação de comparação multiplicativa entre duas quantidades comensuráveis. Além disso, concebendo as frações como "partes de um todo", os dicentes têm dificuldade em entender as frações cujo numerador é maior que o denominador, como 7/4, e admitir que uma fração representa uma magnitude, não apenas partes de algo (TUCKER, 2008).

Nas seções a seguir, veremos que a ontologia de partição não corresponde à situação histórico-cultural do surgimento do conceito de fração; ou seja, não representa a ontologia histórica do conceito. Ademais, a ideia de frações vista como divisão de coisas em setores discretos que são iguais é também ortogonal a neurológica humana.

A ontologia antecedente da 'divisão de coisas' para as frações segundo a História

Antes da definição de números fracionários com base na partição de uma região em partes iguais, o surgimento histórico de frações é de uma outra fonte. Cerca de 5.000 anos atrás aparecem as primeiras notações numéricas inequívocas, que estavam na Mesopotâmia e no Egito (BELLER et al., 2018). No entanto, muito antes, segundo BELLER et al. (2018), são exemplos de dispositivos que poderiam servir para acumular, representar, e armazenar informações numéricas como as contas de conchas marinhas (*Blombos Cave*, África do Sul, com cerca de 75.000 anos), os ossos entalhados (*Border Cave*, na África do Sul, cerca de 42.000 anos) e os estênceis manuais (*Cosquer Cave,* na França, cerca de 27.000 anos).

Com a evidência escrita de tabletes de argila e papiros, sabemos que primeiro da Mesopotâmia e logo depois do Egito saíram como dispositivos semióticos abstratos as notações numéricas. Embora que os mesopotâmios tivessem maneiras para expressar frações, não eram distintos dos números de contagem. Em contraste, os egípcios desenvolveram um sistema para escrita para registar frações que diferencia elas dos números para contar (CLAWSON, 1994/2003). Segundo IFRAH (1981/1998), os egípcios antigos expressaram frações com apenas frações unitárias (o seja frações cujos numeradores são um). Com a exceção da fração uma metade, eles usaram o hieróglifo para "boca" sobre a expressão numérica hieroglífica para o denominador. Mesmo assim, além de uma metade, tiveram símbolos hieroglíficos especiais para mais três outras frações: dois terços e um quarto, e três quartos (IFRAH, 1981/1998; ROQUE, 2012). Os egípcios antigos expressaram o valor de uma fração como 3/5 não como 1/5+1/5+1/5 mas como decomposto de uma soma de diferentes frações unitárias como 1/2+1/10.

Nas culturas mesopotâmicas e egícias, ao longo dos rios Tigre, Eufrates e Nilo, com o nascimento da agricultura, as condições materiais introduziram a necessidade de inventar maneiras cognitivas para medir quantidades de terrenos, colheitas, sementes, e assim por diante, para registar as medidas, e para as classes dominantes coletar impostos (CLAWSON, 1994/2003; STRUIK, 1948/1967). Para mensurar as distâncias dos terrenos, os agrimensores antigos esticavam cordas, no qual o comprimento entre dois nós representava uma unidade de medida. Em vários países, estes agrimensores eram chamados como 'esticadores de corda' (STRUIK, 1948/1967, p. 11, nossa tradução).

Uns 4.000 anos ou mais atrás, por meio desta prática social e necessária de medir quantidades surgiram a ideia de frações. Em um capítulo sobre a natureza essencial da matemática, o matemático, físico e filósofo da era soviética, A. D. Aleksandrov[3] (1963), no seguinte trecho, localiza a origem das frações na interação inicial entre geometria e aritmética:

> Em geral, a medição de qualquer magnitude combina cálculos com alguma operação específica que é característica desse tipo de magnitude.… Mas no processo de medição verifica-se, em geral, que a unidade escolhida não está contida na magnitude medida um número inteiro de vezes, de modo que um cálculo simples do número de unidades em não é suficiente. Torna-se necessário dividir a unidade de medida para expressar a magnitude com mais precisão por partes da unidade; isto é, não mais por números inteiros, mas por frações. Foi desse modo que as frações realmente surgiram, como é demonstrado por uma análise do histórico e de outros dados. Surgiram da divisão e comparação de magnitudes contínuas; em outras palavras, da medição. As primeiras magnitudes a serem medidas foram geométricas, ou seja, comprimentos, áreas de campos e volumes de líquidos ou materiais friáveis, de modo que nas primeiras aparências de frações vemos a ação mútua da aritmética e da geometria. Essa interação leva ao surgimento de um novo conceito importante, nomeadamente, frações, como uma extensão do conceito de número de números inteiros para números fracionários.… Frações não surgiram, e não poderiam surgir da divisão de números inteiros, uma vez que apenas objetos inteiros são contados por números inteiros. Três homens, três flechas e assim por diante, tudo isso faz sentido, mas dois terços de um homem e até dois terços de uma flecha são conceitos sem sentido; até mesmo separados três de um terço de uma flecha não matarão um cervo, para isto é necessário ter uma flecha *inteira.* (p. 24-25; ênfase no original, tradução nossa)

Aleksandrov argumenta que o surgimento histórico de frações *não* está ligado à ideia de divisão de números inteiros nem a múltiplos de frações unitárias. Seu argumento depende da distinção fundamental entre *uma unidade* usada para contar e para medir. Ele escreve: "apenas objetos inteiros são *contados* por números inteiros" (ênfase minha). Ou seja, ao contar, a unidade escolhida é indivisível; enquanto que, ao medir, a unidade escolhida é divisível. Esta diferença conceitual crítica, não obstante, a apresentação ontológica de frações como emergentes do quociente de números inteiros—partes de um todo equipartizado—ou como múltiplos de frações unitárias exibidas em uma reta numérica são as bases das propostas contemporâneas para a introdução de frações (BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DA EDUCAÇÃO BÁSICA, 2016; COMMON CORE STATE STANDARDS INITIATIVE, 2010). Em vez disso, Aleksandrov postula que a interação específica entre aritmética e geometria da qual emergiu a necessidade de frações era a prática social de medir as magnitudes de comprimentos, áreas e volumes.

Essas práticas faziam parte da vida social dos antigos africanos no Egito[4]. Por exemplo, eles as empregaram para construir pirâmides 1000 anos antes que os famosos papiros Ahmes e

3 De acordo com a versão do seu livro, Convex Polyhedra (Springer), Aleksandr Danilovich Aleksandrov (1912-1999) 2005 foi agraciado com o Prêmio de Estado Stalin em 1942, o prêmio Lobachevsky em 1952, e a Medalha de Ouro Euler em 1992.

4 Os egípcios envolvidos nessas práticas matemáticas também são corroborados por análises históricas recentes. Veja, por exemplo, ROQUE (2012). Outros estudos recentes corroboram ainda mais as realizações do antigo Egito em medições espaciais e cronológicas. Cúbitos cerimoniais do Império Egípcio (c. 1550 AEC a c. 1077 AEC)

Moscou fossem escritos, ambos evidenciando a invenção de frações e operações em frações pelos egípcios. Segundo Heródoto, o historiador grego, que escreveu a obra de nove volumes magnum opus, As *Histórias*, no quinto século AEC, a prática egípcia de agrimensura deu origem à “geometria”, um derivado de uma palavra grega antiga que significa ‘medir a terra’ (ROQUE, 2012). As antigas práticas de medição egípcias que geraram frações e geometrias simultaneamente fizeram com que a geometria e as frações fossem mutuamente constituídas.

Embora frações continuassem a ser usadas em civilizações posteriores, como a Grécia, China e Índia, como notam DAVYDOV e TSVETKOVICH (1991b), foi somente no século XIX que as leis para operar com frações foram formalmente elaboradas. Quando as regras para operar com frações eram estabelecidas, as frações se tornavam (1) conceitualmente distantes de sua “fonte objetiva” concreta na medição de quantidades e (2) um número abstrato igual em status com números naturais (COURANT; ROBBINS, 1941/1996; DAVYDOV; TSVETKOVICH, 1991a).

A ontologia inicial das frações segundo a neurociência

Vimos que a origem dos números racionais está numa prática social dos mesopotâmios e egípcios. A prática emergiu aproximadamente 13.000 anos atrás com uma mudança do estilo de vida, de nômade a agrário e assim uma alteração dos meios de produção e da organização social (CLAWSON, 1994/2003; STRUIK, 1948/1967). Eles precisavam de medir comprimentos, áreas e volumes, ou seja, mensurar quantidades contínuas. A ontologia de frações, então, está na medição de uma quantidade contínua medida por uma unidade contínua, como uma corda com dois nós. Como ALEKSANDROV (1963) observa, é certo que a ideia de fração não surgisse da divisão de números inteiros; o seja, não com base de conjuntos discretos ou a divisão de coisas. Quantidades discretas são coleções de objetos contáveis, enquanto quantidades contínuas são objetos unitários que podem ser medidos. A ideia de uma fração surgiu na prática de comparar duas quantidades contínuas e concebendo a relação como uma razão.

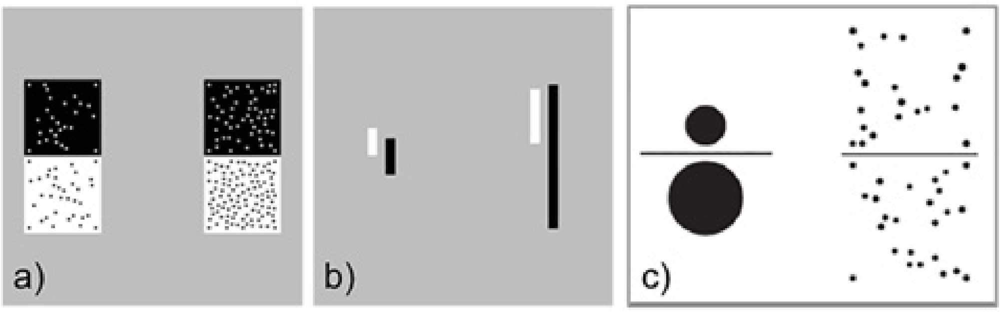
Comparando quantidades contínuas e avaliando a magnitude das razões fazem parte da capacidade cognitiva humana. Por exemplo, considerando comparações que envolvem quantidades contínuas, crianças sem treinamento numérico podem escolher facialmente e imediatamente o mais alto de duas pessoas ou bonecos e o maior de duas bolas ou duas fatias de bolo. As habilidades perceptuais das crianças lhes proporcionam acesso intuitivo a relações espaciais que ilustram facilmente a magnitude comparativa (DAVYDOV; TSVETKOVICH, 1991b; GATTEGNO, 1973; SCHMITTAU; MORRIS, 2004).

A capacidade cognitiva para fazer comparações de razões de quantidades contínuas está raizada em uma arquitetura neurocognitiva de seres humanos que é sintonizado com as magnitudes de proporções não-simbólicas. Isto é, a capacidade de comparar o comprimento proporcional relativo de duas linhas ou as numerosidades relativas de duas matrizes de pontos (veja Figura 3, (a) e (b)). MATTHEWS e ELLIS (2018) argumenta que uma quantia considerável de pesquisas empíricas sugere que os seres humanos têm acesso intuitivo, baseado na percepção, a conceitos de razão primitiva quando são instanciados usando representações gráficas não-simbólicas, ou seja, sem numerais ou símbolos matemáticos. Eles e seus colegas (LEWIS; MATTHEWS; HUBBARD, 2015) denominam esse aparato perceptivo básico, o Sistema de Processamento de Razões (SPR) (em inglês, Ratio Processing System, RPS)[5] e argumentam que ele poderia ser usado para suporta aos raciocínios matemáticos sobre números fracionários e proporcionalidade.

5 Para estes circuitos neurais, em uma publicação mais cedo, LEWIS; MATTHEWS e HUBBARD (2014) os chamam, o Sistema Racional do Cérebro (SRC) (em inglês, Rational Brain System, RBS).

Para investigar o SPR, cientistas cognitivas (LEWIS; MATTHEWS; HUBBARD, 2014; MATTHEWS; ELLIS, 2018) empregam representações gráficas de razões não-simbólicas como estímulos (veja na Figura 3). Cada um dos estímulos é composto de quantidades não-simbólicas. A primeira, Figura 3(a), tem duas matrizes de pontos dividas em duas partes, a parte superior é de cor preta e a parte inferior de cor branca, cada destas partes de uma matriz tem um número de pontos maior de 40. Na segunda, Figura 3(b), há dois pares de segmentos de linha, onde em cada par as segmentos de linha são de tamanhos diferentes. Finalmente, na Figura 3(c) há duas figuras diferentes, uma de áreas circulares diferentes separadas por um segmento de linha horizontal e uma de dois matrizes de pontos diferentes separados por um segmento de linha horizontal. Para impedir a possibilidade de contar os pontos nas matrizes, os neurocientistas dão menos de dois segundos para sujeitos responderem. Nesses casos, os sujeitos fazem uma decisão da numerosidade da matriz de pontos e escolher qual razão seja maior perceptivamente.

Figura 3: Amostra de razões não-simbólicas usadas em tarefas de comparação não-simbólica. As razões são compostas de vários tipos de quantidades não-simbólicas, incluindo matrizes de pontos (a e c), (b) segmentos de linha e (c) áreas circulares. Note que matrizes de pontos, embora contáveis, são frequentemente usadas em tarefas onde o número de pontos é alto (isto é, > 40) e o tempo limite é ajustado baixo (isto é, < 2 segundos) para impedir a possibilidade de contagem. Nesses casos, a numerosidade do matriz de pontos é processada perceptivamente (por exemplos, ver LEWIS; MATTHEWS; HUBBARD, 2014; MATTHEWS; CHESNEY, 2015).



Fonte: (MATTHEWS; ELLIS, 2018, p. 23)

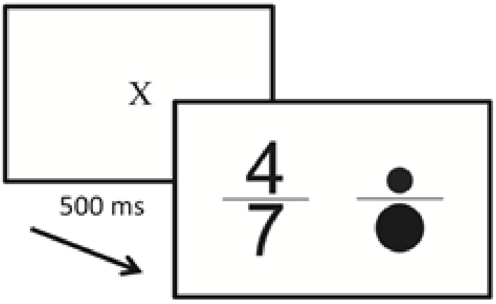
Em um experimento, LEWIS; MATTHEWS e HUBBARD (2014) usam estímulos como os na Figura 3. Eles apresentam para as participantes tarefas de comparação não-simbólicas para

avaliar a acuidade para discriminar a numerosidade, o comprimento da linha e a magnitude racional não-simbólica. Cada tentativa começou com uma cruz de fixação por 1000 milissegundos (ms) (veja na Figura 4). Isto foi seguido pela apresentação de dois estímulos. Os pares de estímulos eram visíveis por 750 ms para as tarefas de comparação de pontos (Figura 3(a)) e linhas (Figura 3(b)) e 1500 ms para as tarefas de comparação de proporção não-simbólica (Figura 3(c)). Em cada caso, os participantes foram instruídos a selecionar figura com a maior proporção, a da esquerda ou a direita.

Além, deste experimento, LEWIS; MATTHEWS e HUBBARD (2014) também darem os participantes avaliações de seu conhecimento e frações e Álgebra. Acharam que diferenças individuais na acuidade para magnitudes racionais não-simbólicas se correlacionam com conhecimento de fração e realização de álgebra. O desempenho dos participantes nas tarefas de comparação de razão não-simbólica previu seu conhecimento de fração simbólica e desempenho na Álgebra mesmo depois de controlar o desempenho em tarefas de controle. Embora essa evidência seja comportamental, ela suporta hipóteses derivadas de evidências neurocientíficas emergentes para um SPR.

Numa outra investigação, MATTHEWS e CHESNEY (2015) mostram que essas magnitudes acessadas perceptivelmente podem ser facilmente comparadas com frações simbolicamente representadas. Nas comparações entre formatos, os participantes escolheram a maior de duas proporções (veja Figura 4). As proporções foram apresentadas simbolicamente como frações ou não-simbolicamente como matrizes de pontos pareados ou como círculos pareados. Padrões de resposta foram consistentes com os sujeitos comparando magnitudes fracionárias analógicas específicas, independentemente dos formatos em que foram apresentados. Parece que os seres humanos podem processar grandezas de razão não-simbólicas por meio de rotas perceptivas e sem recorrer a algoritmos simbólicos conscientes, análogo ao processamento de magnitudes de números inteiros.

Figure 4: Um estímulo com uma fração simbólica versus uma razão não-simbólica composta de dois círculos. Os participantes responderam pressionando uma caixa de botão indicando qual estímulo representa a proporção.



Fonte: (MATTHEWS; CHESNEY, 2015, p. 42)

Por meio de uma séries de outros experimentos, MATTHEWS e CHESNEY (2015) apresentam evidências de que as arquiteturas cognitivas humanas podem fornecer acesso perceptual para aproximar magnitudes de frações abstratas instanciadas por estímulos não-simbólicos. Os participantes demonstraram a capacidade de mapear sistematicamente magnitudes de frações não simbólicas para frações simbólicas, ambos usando estímulos compostos de numerosidades discretas e estímulos compostos de áreas circulares contínuas. Esta e outras pesquisas levantam questões para serem investigadas futuramente sobre o sistema de processamento não-simbólico. Um conjunto de questões diz respeito à natureza da interface entre a percepção da razão, o conhecimento da fração simbólica e os processos pedagógicos que podem ligar os dois.

Discussão: Que fazer?

Em sua análise política de 1902, *Que Fazer?*, LENIN (1947) argumenta que, embora o capitalismo por meio da produção de desigualdade predisponha os trabalhadores à aceitação do socialismo, isso não os torna espontaneamente conscientes socialistas. Num sentido paralelo, embora o Sistema de Processamento de Razões (SPR) predisponha os seres humanos ao representar razões não-simbólicas, isso não os torna espontaneamente conscientes de razões simbólicas. O trajeto de representações de razões não-simbólicas para frações simbólicas precisa ser construído com base de uma ontologia, epistemologia e pedagogia que concordam com a natureza do conceito.

O trajeto começa com o reconhecimento que ontologicamente a histórica de números fracionários é na medição e neurologicamente está na SPR. Essas duas fontes da ideia de razões convergem no ato de comparar, a comparação de duas quantidades incontáveis ou contínuas. Essa convergência de fontes de ideias ontológicas pode ser promulgada por substituir referentes não-simbólicos convencionais compostos de elementos discretos, contáveis tal como pizzas divididas em partes iguais ou um conjunto pequeno de objetos com proporções não-simbólicas incontáveis ou contínuas. Neste ponto, CARRAHER (1996) observa a importância psicológica de quantidades físicas, não-numéricas:

> Uma concepção matemática estreita desconsidera o papel que a quantidade física desempenha no significado do conceito e, consequentemente, obscurece as origens psicológicas das frações, pois há pouca dúvida de que conceitos numéricos, incluindo conceitos numéricos racionais, são desenvolvidos atuando e refletindo sobre quantidades físicas. (CARRAHER, 1996, p. 241, tradução nossa)

Ontologicamente, como CARRAHER afrima, a origem dos numéricos racionais é na ação e reflexão sobre de quantidades físicas. Em termos de números fracionários, como discutimos anteriormente, seus surgimentos aconteceram pela medição de quantidades físicas, entre outros, comprimentos de terrenos e cordas atadas.

Durante nossa discussão toda, usamos a ideia de quantidade sem explicar o que entendemos por essa noção. De acordo com THOMPSON (1994), caracterizamos uma quantidade como uma categoria conceitual ou construto mental que tem quatro momentos: (1) um objeto percebido (por exemplo, uma extensão de terra), (2) um atributo do objeto (a distância), (3) uma unidade (o comprimento entre dois nós de uma corda), (4) um processo para atribuir um valor numérico ao atributo (iterando o comprimento entre os nós do cordão ao longo do trecho de terra). O quarto momento é a quantificação.

Além disso, vemos uma quantidade, em um sentido comparativo, tem características qualitativas bem como quantitativas. Para isso, usamos o termo protó-quantidade, e ele tem três momentos: (1) um objeto percebido, (2) um atributo do objeto, e (3) atribuir uma dimensão comparativa ao atributo (como maior, mais pesado e maior como em mais espaçoso). Este terceiro momento é uma qualificação. Como protó-quantidade não envolve quantificação, é importante trabalhar pedagogicamente com protó-quantidades antes de quantidades

Atuando e refletindo sobre quantidades físicas faz parte das experiências cotidianas tanto para crianças como para adultos. De seus mundos experienciais, o ensino pode aproveitar as ações e reflexões cotidianas das crianças com protó-quantidades tal como comprimento, altura, movimento, volume e outros aspectos. O currículo escolar pode recrutar os aparatos perceptuais que evoluíram ao longo de milênios e que podem fornecer acesso semântico profundamente intuitivo a conceitos matemáticos fundamentais como maior ou menor e como, independentemente de números simbólicos, relações multiplicativas de duas quantidades. Trabalhando com esses conceitos fundamentais para um estudo de números fracionários, em POWELL (2018) se encontra uma perspectiva alternativa à construção do conhecimento de frações e um instrumento pedagógico—o *4A-Instructional Model*—projetado para engendrar a visão dos aprendizes sobre si mesmos como agentes capacitados do conhecimento matemático. Para implementar nossa perspectiva usamos materiais manipuláveis que consistem de objetos contínuos de tamanhos diferentes que podem ser comparados. Entre tais materiais populares hão a Frac-soma 235, inventada no Brasil[6] , e as barras de Cuisenaire, inventada na Bélgica[7] , e, por várias razões, optamos para usar o material Cuisenaire. Também, para complementar nossa perspecti-

6 Para uma descrição, veja PEREIRA (2009) ou as páginas 40 a 45 de MENDES (2009).

7 Para uma descrição, veja o primeiro capítulo de GATTEGNO (1960/2009) ou a página 408 de POWELL (2018).

va do ensino de números fracionários, POWELL e ALI (2018) propõem três componentes de sentido fracionário: razoabilidade, flexibilidade, bem como magnitude (ou grandeza) não-simbólica e simbólica. Nós postulamos que o conhecimento de ambas as frações não-simbólicas e simbólicas são cruciais para operar flexivelmente com frações e para avaliar a razoabilidade dos resultados aproximados ou computados.

Nossas propostas fazem parte de tentativas de rever o ensino de números fracionários com a luz dos resultados recém na Educação Matemática, Ciência Cognitiva e na Neurociência. Entre as questões que MATTHEWS e CHESNEY (2015) notam que precisam ser investigadas são estas: Como a acuidade da percepção da razão não simbólica se relaciona com o conhecimento da fração simbólica? Como são as diferenças individuais na capacidade de discriminar entre frações visual-espaciais relacionadas ao desempenho do teste de conhecimento da fração simbólica ou à realização da matemática de forma mais geral? Além essas, hão outras áreas de pesquisa que deixam para investigar tais como quais sequências de tarefas não-simbólicas e simbólicas são eficaz para o desenvolvimento de conhecimento de frações? Quais estratégias de desenvolvimento profissional ajudam professores que ensinam a Matemática escolar apropriar os resultados recém na Educação Matemática, Ciência Cognitiva e Neurociência para aperfeiçoar-se dos conhecimentos de frações e tornar este conhecimento para aprofundar sua prática docente. Para estudantes de grupos sub-representados na Matemática, Engenheira, Tecnologia e nas Ciências que nas suas escolas são maiores dos anos normais, como eles podem ser engajados para desenvolver seus conhecimentos de números fracionários?

Referências

ALEKSANDROV, A. D. A general view of mathematics. In: ALEKSANDROV, A. D.; KOLMOGOROV, A. N.; LAVRENT'EV, M. A. (Org.). *Mathematics: Its content, methods, and meaning*. Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology, 1963. v.1 p. 1-64.

BAILEY, D. H. et al. Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology,* v. 113, n. 3, p. 447-455, 2012/11/01/. 2012. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022096512001063>.

BELLER, S. et al. The cultural challenge in numerical cognition. *Journal of Numerical Cognition,* v. 4, n. 2, p. 448-463, 2018.

BOOTH, J. L.; NEWTON, K. J. Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman? *Contemporary Educational Psychology,* v. 37, n. 4, p. 247-253, 10//. 2012. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0361476X12000392>.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DA EDUCAÇÃO BÁSICA. *Base nacional comum curricular.* Brasília, DF 2016.

CARPENTER, T. P. et al. Results of the second NAEP mathematics assessment: Secondary school. *Mathematics Teacher,* v. 73, n. 5, p. 329-338, 1980.

CARRAHER, D. W. Learning about fractions. In: STEFFE, L. P. et al. (Org.). *Theories of mathematical learning.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1996. p. 241-266.

CHINGOS, M. M.; WHITEHURST, G. J. *Choosing blindly: Instructional materials, teacher effectiveness, and the Common Core.* Washington, DC: Brookings Institute, 2012.

CLARKE, D. M. et al. Assessing student understanding of fractions using task-based interviews. In: NOVOTNÁ, J. et al. (Org.). *Proceddings of the 30th Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education.* Prague: Charles University, 2006. v.2 p. 337-344.

CLAWSON, C. C. *The mathematical traveler: Exploring the grand history of numbers.* Cambrige, MA: Perseus, 1994/2003.

COMMON CORE STATE STANDARDS INITIATIVE. *Common core state standards for mathematics* National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers 2010.

COURANT, R.; ROBBINS, H. *What is mathematics?: An elementary approach to ideas and methods.* 2nd revised by Ian Steward,. ed. Oxford: New York, 1941/1996.

DAVYDOV, V. V.; TSVETKOVICH, Z. H. The object sources of the concept of fractions. In: DAVYDOV, V. V.; STEFFE, L. P. (Org.). *Soviet studies in mathematics education. Volume 6. Psychological abilities of primary school children in learning mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1991a. p. 86-147.

______. On the objective origin of the concept of fractions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, v. 13, n. 1, p. 13-64, 1991b.

DRISCOLL, M. *Research within reach: Secondary school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematoics, 1982.

FAN, L.; ZHU, Y.; MIAO, Z. Textbook research in mathematics education: Development status and directions. ZDM - *International Journal on Mathematics Education,* v. 45, n. 5, p. 633-646, 2013. Disponível em: <https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=edselc&AN=edselc.2-52.0-84884159637&site=eds-live>.

FLAGG, G. *Numbers: Their history and meaning.* Mineola, NY: Dover, 1983.

GATTEGNO, C. *Arithmetic: A teacher's introduction to the Cuisenaire-Gattegno methods of teaching airthmetic*. New York: Educational Solutions Worldwide, 1960/2009.

______. *In the beginning there were no words: The universe of babies.* New York: Educational Solutions, 1973.

IFRAH, G. T*he universal history of numbers: From prehistory to the invention of the computer.* London: Harvill, 1981/1998.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational number. In: LESH, R. A. (Org.). *Number and measurement.* Columbus, Ohio: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education, 1976. p. 101-144.

______. The rational number construct-Its elements and mechanisms. In: KIEREN, T. E. (Org.). *Recent research on number learning*. Columbus, Ohio: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education, 1980. p. 125-150.

______. Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In: HEIBERT, J.; BEHR , M. J. (Org.). *Number concepts and operations in the middle grades.* Reston, VA: Lawrence Erlbaum, 1988. p. 49-84.

LAMON, S. J. *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* 2nd. ed. New York: Lawrence Erlbaum Associates, 2005.

______. Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In: LESTER, J. F. K. (Org.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics.* Charlotte, NC: Information Age, 2007. p. 629-667.

LENIN, V. I. What is to be done? In: MARX-ENGLES-LENIN INSTITUTE (Org.). *Lenin selected works in two volumes.* Moscow: Foreign Language Publishing House, 1947. v.1 p. 147-269.

LEWIS, M. R.; MATTHEWS, P. G.; HUBBARD, E. M. The (neuro)cognitive roots of fraction knowledge. *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society*, v. 36, n. 36, p. 2549-2554, 2014.

LEWIS, M. R.; MATTHEWS, P. M.; HUBBARD, E. M. Neurocognitive architectures and the nonsymbolic foundations of fractions understanding. In: BERCH, D. B.; GEARY, D. C.; KOEPKE, K. M. (Org.). *Development of mathematical cognition: Neural substrates and genetic influences.* San Diego, CA: Academic Press., 2015. p. 141–160.

LIN, C.-Y. et al. Preservice Teachers' Conceptual and Procedural Knowledge of Fraction Operations: A Comparative Study of the United States and Taiwan. *School Science and Mathematics*, v. 113, n. 1, p. 41-51, 01/01/. 2013.

MA, L. *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Mahwah: Lawrence Erlbaum, 1999.

MACK, N. K. Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 21, n. 1, p. 16-32, 1990.

MAHER, C. A.; YANKELEWITZ, D., Eds. *Children's reasoning while building fraction ideas.* Boston: Senseed. 2017.

MATTHEWS, P. G.; CHESNEY, D. L. Fractions as percepts? Exploring cross-format distance effects for fractional magnitudes. *Cognitive Psychology,* v. 78, p. 28-56, 2015.

MATTHEWS, P. G.; ELLIS, A. B. Natural alternatives to natural number: The case of ratio. *Journal of Numerical Cognition,* v. 4, n. 1, p. 19-58, 2018.

MENDES, I. A. *Matemática e investigação em sala de aula*: *Tecendo redes cognitivas na aprendizagem.* 2 Edição revista e aumentada. ed. São Paulo: Livraria de Física, 2009.

MONNIER, F.; PETIT, J.-P.; TARDY, C. The use of the 'ceremonial' cubit rod as a measuring tool. An explanation. *The Journal of Ancient Egyptian Architecture*, v. 1, p. 1-9, 2016.

MOSES, R. et al. The Algebra Project: Organizing in the spirit of Ella. *Harvard Educational Review,* v. 59, n. 4, p. 423-443, 1989.

MOSES, R.; WEST, M. M.; DAVIS, F. E. Culturally responsive mathematics education in the Algebra Project. In: GREER, B. et al. (Org.). *Culturally responsive mathematics education.* New York: Routledge, 2009. p. 239-256.

MOSES, R. P. Remarks on the struggle for citizenship and math/science literacy. *Journal of Mathematical Behavior,* v. 13, n. 107-111, 1994.

MOSES, R. P.; COBB, C. E., JR. *Radical equations: Math literacy and civil rights*. Boston: Beacon, 2001.

NI, Y.; ZHOU, Y.-D. Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist,* v. 40, n. 1, p. 27-52, 2005.

OECD. A profile of student performance in mathematics. In: PISA 2012 results: *What students know and can do—Student performance in mathematics, reading, and science.* Paris: OECD Publishing, 2014. v.1, Revised edition, February 2014 p. 31-144.

PEREIRA, M. C. M. *Construindo Frac-soma 235, e conhecimento, no ensino básico* 2009. 78 f.(Licenciatura em Matemática), Universidade Federal do Rio Grande do Sul., Porto Alegre, 2009.

POWELL, A. B. Reaching back to advance: Towards a 21st-century approach to fraction knowledge with the 4A-Instructional Model. *Revista Perspectiva,* v. 36, n. 2, p. 399-420, 2018.

POWELL, A. B.; ALI, K. V. Design research in mathematics education: Investigating a measuring approach to fraction sense. In: CUSTÓDIO, J. F. et al. (Org.). *Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT): Contribuições para pesquisa e ensino.* São Paulo: Livraria da Física, 2018. p. 221-242.

RITCHIE, S. J.; BATES, T. C. Enduring links from childhood mathematics and reading achievement to adult socioeconomic status. *Psychological Science,* v. 24, n. 7, p. 1301-1308, 2013.

ROQUE, T. História da matemática: *Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.* Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SCHMITTAU, J.; MORRIS, A. The development of algebra in the elementary mathematics curriculum of V.V. Davydov. *The Mathematics Educator*, v. 8, n. 1, p. 60-87, 2004.

SIEGLER, R. S. Magnitude knowledge: the common core of numerical development. *Developmental Science,* v. 19, n. 3, p. 341-361, 2016.

SIEGLER, R. S. et al. Early Predictors of High School Mathematics Achievement. *Psychological Science,* v. 23, n. 7, p. 691-697, 2012.

SIEGLER, R. S. et al. Fractions: the new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Sciences*, v. 17, n. 1, p. 13-19, 1//. 2013. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364661312002653>.

SILVA, C. M. et al. The Algebra Project: Making middle school mathematics count. *Journal of Negro Education,* v. 59, n. 3, p. 375-391, 1990.

STRUIK, D. J. *A concise history of mathematics.* 3rd Revised. ed. New York: Dover, 1948/1967.

THOMPSON, P. W. The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In: HAREL, G.; CONFREY, J. (Org.). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics.* Albanym NY: State University of New York, 1994. p. 179-234.

TORBEYNS, J. et al. Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. *Learning and Instruction*, v. 37, p. 5-13, 6//. 2015. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0959475214000255>.

TUCKER, A. Fractions and units in everyday life. In: MADISON, B. L.; STEEN, L. A. (Org.). *Calculation vs. context: Quantitative literacy and its implications for teacher education*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2008. p. 75-86.

VAMVAKOUSSI, X.; VOSNIADOU, S. Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change approach. *Learning and Instruction*, v. 14, n. 5, p. 453-467, 2004/10/01/. 2004. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S095947520400043X>.

WU, H.-H. How to prepare students for algebra. *American Educator,* v. 25, n. 2, p. 1-7, 2001.

Arthur Belford Powell
Rutgers University-Newark - USA
E-mail: powellab@newark.rutgers.edu