Revista Matemática, Ensino e Cultura

Un análisis de los inicios de toma de consciencia de la "resta" de vectores a través de la labor conjunta

Ulises Salinas-Hernández[1]
IFÉ, ENS de Lyon, France

Isaias Miranda[2]
Instituto Politécnico Nacional, México

RESUMEN

Este artículo presenta el inicio de la toma de consciencia en torno al encuentro con el Saber de la "resta" de vectores por métodos gráficos, que llevan a cabo conjuntamente estudiantes y un profesor experto (20 años de experiencia) en una clase de física de bachillerato. Se trata de un estudio de caso de tipo cualitativo que forma parte de una línea de investigación sobre los modos de enseñanza y que se apoya en la teoría de la objetivación; la cual define al aprendizaje –objetivación– como toma de consciencia. Los resultados muestran, por una parte, la manera en que diferentes elementos semióticos (gestos, signos y artefactos) son movilizados conjuntamente durante la actividad de la "resta" de vectores; y, por otra parte, las dificultades y contradicciones que se producen durante el encuentro con los saberes durante la actividad.
Palabras clave: Profesor experto; Gestos; Labor conjunta; Medios semióticos de objetivación.

Uma análise do início da tomada de consciência da "subtração" vetorial através do labor conjunto

RESUMO

Este artigo apresenta o início da tomada de consciência do encontro com o conhecimento da "subtração" de vetores por métodos gráficos, realizado conjuntamente por estudantes e um professor especializado (20 anos de experiência) em uma aula de física do ensino médio. Este é um estudo de caso qualitativo que faz parte de uma linha de pesquisa sobre métodos de ensino e se baseia na teoria da objetivação, que define aprendizagem - objetivação - como tomada de consciência. Os resultados mostram, por um lado, a forma como diferentes elementos semióticos (gestos, sinais e artefatos) são mobilizados juntos durante a atividade de "subtração" de vetores; e, por outro lado, as dificuldades e contradições que ocorrem durante o encontro com o conhecimento durante a atividade.
Palavras-chave: Professor especializado; Gestos; Labor conjunto; Meios semióticos de objetivação.

An analysis of the beginnings of awareness of vector "subtraction" through joint labor

ABSTRACT

This article presents the beginning of awareness of the knowledge of "subtraction" of vectors by graphic methods, carried out jointly by students and an expert teacher (20 years of experience) in a high school physics class. This is a case qualitative study that is part of a line of research on modes of teaching and is based on the theory of objectification, which defines learning - objectification - as awareness. The results show, on the one hand, the way in which different semiotic elements (gestures, signs, and artifacts) are mobilized together during the activity of "subtracting" vectors; and, on the other hand, the difficulties and contradictions that occur during the encounter with knowledge during the activity.
Keywords: Expert teacher; Gestures; Joint labor; Semiotic means of objectification.

[1] Investigador postdoctoral en el Institut Français de l'Éducation de l'École Normale Supérieure de Lyon (IFÉ, ENS de Lyon), Lyon, Auvergne-Rhône-Alpes, France. 19 Allée de Fontenay, Lyon, 69007, France. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2940-6253. E-mail: ulisessh@ciencias.unam.mx.

[2] Profesor Titular en el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria del Instituto Politécnico Nacional (CICATA Legaria-IPN), Miguel Hidalgo, Ciudad de México, México. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2076-7383. E-mail: imirandav@ipn.mx.

REMATEC, Belém (PA), v. 16, n. 39, p. 60-76, Set-Dez, *e*-ISSN: 2675-1909, 2021
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p60-76.id497

INTRODUCCIÓN

La práctica docente, definida como lo que hace el profesor dentro y fuera del salón de clases con la intención de contribuir en el aprendizaje de sus estudiantes, es uno de los temas más abordados en la investigación en educación matemática. Algunos investigadores han analizado la práctica docente a partir de los conocimientos que el profesor requiere para realizar con eficacia esa práctica (CARRILLO *et al*., 2018; BALL; HILL; BASS, 2005); otros han estudiado las decisiones tomadas por el profesor dentro de su aula (SCHOENFELD, 1998; 2013; CASTRO GARZÓN, 2017) y otros más han explorado cómo el discurso del profesor influye en el aprendizaje de los estudiantes (PLANAS; ARNAL-BAILERA; GARCÍA-HONRADO, 2018).

Otra forma de analizar la práctica docente es por medio de la aplicación del uso de una teoría diseñada para analizar el aprendizaje de las matemáticas. Hersant y Perrin-Glorian (2005), por ejemplo, caracterizan la práctica docente a partir de la Teoría de Situaciones Didácticas, desarrollada por Brousseau (1997) para estudiar las condiciones bajo las cuales el aprendizaje de las matemáticas puede ser eficiente. En otro ejemplo, Salinas-Hernández y Miranda (2020) analizan la práctica docente de un profesor novato (2 años de experiencia docente al momento de realizar el estudio) de física, con base en la Teoría de la Objetivación (TO), creada inicialmente por Radford (2013) para estudiar la emergencia del signo algebraico en estudiantes de niveles de escolaridad básica. Actualmente, la TO sigue desarrollándose tanto conceptual como metodológicamente y se ha consolidado como una teoría robusta de gran influencia en la disciplina de la educación matemática. La TO busca "ofrecer una concepción teórica precisa del aprendizaje como un auténtico proceso cultural-historico (…) [y] explorar las condiciones pedagógicas prácticas que hacen posible un auténtico aprendizaje colectivo." (RADFORD, 2021, p. XI, traducción libre).

Este artículo es la continuación de un proyecto más amplio que consiste en el análisis, aplicación y discusión de los conceptos de la TO para estudiar la práctica docente de profesores de disciplinas relacionadas con las matemáticas (e.g., la Física). Este proyecto pretende: 1) Ofrecer un análisis alternativo de la práctica de enseñanza y su relación con el aprendizaje, a través de una mirada teórica que muestra la riqueza y la complejidad de esta práctica y 2) hacer evidente que el entendimiento de esta nueva forma de ver al docente y su relación con los estudiantes y los saberes requiere de un cambio de paradigma que supere la mirada tradicional que, por un lado, estigmatiza prácticamente cualquier momento de presentación de contenidos (saberes), al considerarlos como una mera exposición que no beneficia de ninguna manera a los estudiantes y, por otro lado, considera que deben restringirse las acciones del docente con miras a evitar estudiantes pasivos.

En específico, el objetivo de este artículo es doble. Por una parte, analizamos el proceso de producción de significados de un profesor de bachillerato y sus estudiantes en el momento en el que, en una clase de física, se aborda el tema "Resta de vectores por medios gráficos"; por otra parte, identificamos el incio del reconocimiento de formas de pensar y de hacer, establecidas histórica y culturalmente (toma de consciencia), sobre la operación de vectores en la misma clase de física. La decisión de considerar a los estudiantes como parte de este proceso se basa en el hecho de que, en la TO, la enseñanza y el aprendizaje son dos partes indisociables dentro del fenómeno educativo escolar.

REMATEC, Belém (PA), v. 16, n. 39, p. 60-76, Set-Dez, *e*-ISSN: 2675-1909, 2021
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p60-76.id497

El resto del artículo se divide en cuatro secciones: la sección 2 presenta el marco teórico usado para analizar los datos y la pregunta que guía esta investigación; la sección 3, la metodología del estudio. El análisis de datos se lleva a cabo en la sección 4; las discusiones finales y las conclusiones son presentadas en la sección 5.

MARCO TEÓRICO

La Teoría de la Objetivación (TO)

El análisis que de la práctica docente hace la TO (RADFORD, 2014a; 2016; 2021) resalta el papel de la historia y la cultura en el desarrollo de la formación del sujeto. Al enmarcarse dentro de las aproximaciones socioculturales de investigación en educación matemática, la TO se enfoca en los problemas de enseñanza-aprendizaje en términos diferentes de los utilizados en teorías cognitivas e individualistas. Como lo señala Radford (2021), se requiere que la interacción entre docente y estudiantes (e.g., las intervenciones del docente y las reacciones de los estudiantes) sea vista con nuevos lentes. Sugiere que ésta sea conceptualizada como un esfuerzo ético en el que estudiantes y maestros logren algo juntos (e.g. la aparición de nuevas formas de sumar objetos matemáticos como los vectores).

Así, la presente investigación es apoyada por la TO (RADFORD, 2014a), la cual conceptualiza la enseñanza-aprendizaje en términos de actividad conjunta entre alumnos y profesores. De manera que es el concepto de actividad o labor, la categoría conceptual fundamental de la TO (RADFORD, 2014a). La concepción del Saber, en la TO, se basa en el materialismo dialéctico; y se concibe no como algo que los individuos posean, adquieran o construyan, si no como pura posibilidad; posibilidad de formas de hacer y de pensar en los sistemas de ideas (RADFORD, 2014b). El Saber se le considera como "una capacidad generativa de hacer algo o pensar de cierta manera; (…) es un arquetipo histórico de acciones colectivas" (RADFORD, 2021, p. 40, traducción libre). Por lo que "la única manera de que el Saber adquiera determinaciones culturales es a través de actividades específicas" (RADFORD, 2014b, p. 7). Así, el aprendizaje –como proceso de objetivación– se define como la toma de consciencia de los sistemas de ideas [científicas], es decir, de las formas de expresión, acción y reflexión constituidas histórica y culturalmente. Las implicaciones de ver el aprendizaje como toma de consciencia son:

- Los sistemas de ideas y significados preceden a nuestra aparición en el mundo. Es decir, los estudiantes, al llegar al salón de clases, se encuentran con sistemas de ideas, es decir, con un Saber que se ha creado, transformado y refinado a través de largos procesos y "que ha sido codificado en la memoria y en las práctica culturales, y ahora está presente en muchos planes de estudio en muchas partes del mundo" (RADFORD, 2021, p. 49, traducción libre).
- El profesor ya está familiarizado con los saberes, pero tiene el objetivo de trabajar conjuntamente con sus estudiantes para que ellos puedan ahora reconocer y familiarizarse con esos saberes. Esto corresponde al "componente didáctico" de la actividad, como Radford (2021) lo señala: "la actividad de enseñanza-aprendizaje tiene un objetivo. Previo a la actividad, este objetivo es identificado por el maestro, es parte de su projecto de enseñanza" (p. 88, traducción libre).
- El proceso del reconocimiento de los saberes y significados está sujeto a tensiones, debates, acuerdos y desacuerdos.

REMATEC, Belém (PA), v. 16, n. 39, p. 60-76, Set-Dez, *e*-ISSN: 2675-1909, 2021
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p60-76.id497

- La toma de consciencia representa el resultado del aprendizaje, no el origen del mismo. De manera de que el proceso de toma de consciencia es el proceso en el cual un objeto cultural (e.g., un contenido matemático) se vuelve un objeto de la consciencia del estudiante.

Los significados en el salón de clase son producidos a través de un proceso social, corpóreo (lenguaje, gestos) y simbólicamente mediado que se lleva a cabo en un espacio de labor conjunta, definido como "un espacio de relaciones y ajustes recíprocos encarnados que ocurren en el espacio concreto de las interacciones" (RADFORD; ROTH, 2011, p. 231). El concepto de labor conjunta en la TO permite que el rol del profesor no sea el de un sujeto que posee el Saber y que, después de la instrucción, sus estudiantes lo puedan tener al final de una clase; sino el de uno que, junto con sus estudiantes, logran hacer visible ese Saber. De esta manera, la labor conjunta entre profesor y sus estudiantes es concebida en la TO como la actividad que media el proceso de conocer (D'AMORE; RADFORD, 2017).

Vale aquí aclarar que, en la TO, *Conocimiento* no tiene el mismo significado que el de *Saber*. Mientras que el Saber (Knowledge) es pura potencialidad, el Conocimiento (Knowing) es una particularidad de ese Saber. Por un lado, la potencialidad del Saber indica que éste se encuentra incrustado en una cultura determinada (como un arquetipo histórico de acciones colectivas). Así, el Saber ofrece a los individuos de esa cultura formas de pensar y resolver problemas de manera específica. Por otro lado, la particularidad del conocimiento significa que éste ejemplifica lo que esa cultura determinada acepta como válido. En el caso de esta investigación, el Saber *cómo realizar la suma o resta de dos vectores por medios gráficos* o *cómo operar con vectores* se encuentra en una cultura occidental cuya ciencia Física ha privilegiado el uso de segmentos dirigidos no solo para simbolizar magnitudes físicas (velocidad, desplazamiento), sino también para operar con ellos. El Conocimiento *sobre cómo operar esos vectores* es o bien el ejemplo específico utilizado por un profesor durante sus clases, o bien las soluciones específicas de los estudiantes al resolver un problema. El Conocimiento es la materialización concreta del Saber, que solo puede manifestarse a través de la actividad conjunta.

En otras palabras, el Saber solo puede observarse mientras exista un Conocimiento que lo haga visible. "El conocimiento es el contenido conceptual concreto del saber (...) El conocimiento matemático es el contenido del saber matemático que se muestra ante una reflexión teórica o práctica sensible" (D'AMORE; RADFORD, 2017, p. 111). Así, la visibilidad del Saber, es decir, el Conocimiento, sucede por la acción mediadora de la actividad en la que se involucran los individuos. En esta investigación, la labor conjunta del profesor y los estudiantes se puede observar a través de la coordinación de los medios semióticos de objetivación utilizados por ellos durante la clase. Aun cuando el término medios semióticos de objetivación fue acuñado por Radford (2003) para dar cuenta de la forma como los estudiantes organizan sus acciones para tomar consciencia de los objetos matemáticos; este constructo teórico se ha desarrollado y actualmente da cuenta de la variedad de artefactos, signos y otros elementos (e.g., gestos, palabras, etc.) que son utilizados tanto por estudiantes como por profesores en todo el proceso de enseñanza-aprendizaje (RADFORD, 2021). De esta manera, en este artículo aplicamos el concepto de *medios semióticos de objetivación* con la finalidad de examinar la labor conjunta generada por el profesor de física y sus estudiantes (una aplicación

REMATEC, Belém (PA), v. 16, n. 39, p. 60-76, Set-Dez, *e*-ISSN: 2675-1909, 2021
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p60-76.id497

de este término en la práctica docente puede verse en SALINAS-HERNÁNDEZ; MIRANDA, 2020). Aún más, con la finalidad de hacer visible el proceso de conocer, los *medios semióticos de objetivación* "son semióticos en la medida en que que son piezas clave en la producción de significados incrustados en el proceso de objetivación" (RADFORD, p. 100, traducción libre).

En resumen, los *medios semióticos de objetivación* (e.g., esquemas, gestos, palabras) puestos en práctica tanto por el profesor como por sus estudiantes durante la clase de física forman parte de esa labor conjunta que media el Saber *cómo operar con vectores* y el proceso de Conocer *cómo operarlos*. Así pues, la pregunta de investigación que guía el presente artículo es: ¿de qué manera un profesor experto de física y sus estudiantes inician el proceso de toma de conciencia de la "resta" de vectores en un espacio de trabajo conjunto?

METODOLOGÍA

Esta sección se divide en cuatro subsecciones: el contexto del estudio (§3.1); el contenido conceptual-didáctico (§3.2); el diseño metodológico de la investigación (§3.3); la recolección de datos y estrategia de análisis (§3.4).

Contexto del estudio

El presente artículo forma parte de una línea de investigación orientada al análisis de las diferencias en los modos de enseñanza entre diferentes perfiles de profesor, en particular, entre profesores novatos y expertos. Esta línea de investigación se deriva, a su vez, de una investigación doctoral ya finalizada (SALINAS-HERNANDEZ, 2018) que analiza la práctica docente de dos profesores de bachillerato, novato y experto, a través de los *medios semióticos de objetivación* y de sus sistemas de recursos, durante los procesos de producción de significado. Así, de acuerdo con los objetivos del presente artículo (§1), aquí se reporta y analiza un evento de una clase de un profesor experto de física, a partir de la TO; cuando da inicio el proceso del encuentro del Saber concerniente a la resta de vectores por métodos gráficos. La manera para determinar el perfil experto del profesor que participó en la investigación se basó en ubicarlo en una de las cinco etapas que señala Berliner (2004), que dan cuenta del desarrollo profesional de los profesores. Un aspecto importante para identificar a un profesor experto es que "tiene una comprensión intuitiva de la situación y parecen percibir de forma no analítica y no deliberativa la respuesta adecuada que hay que dar" (BERLINER, 2004, p. 207, traducción libre).

Contenido conceptual-didáctico de la investigación: saberes

De acuerdo con la pregunta de investigación, el contenido conceptual-didáctico en torno al cual se lleva a cabo el análisis se sitúa en el nivel bachillerato, en una clase de física en la que se aborda la resta de vectores por métodos gráficos. A continuación señalamos la manera general en que se ha conceptualizado este Saber y que será actualizado de manera concreta a través de la actividad.

Conceptualmente, un *vector* de dimensión n se concibe como una secuencia finita de números reales $(a_1, a_2, \dots, a_{n)}$ que puede ser visualizado simbólicamente como *vector geométrico* (e.g., en dos dimensiones). En el espacio euclidiano bidimensional, este *vector*

REMATEC, Belém (PA), v. 16, n. 39, p. 60-76, Set-Dez, *e*-ISSN: 2675-1909, 2021
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p60-76.id497

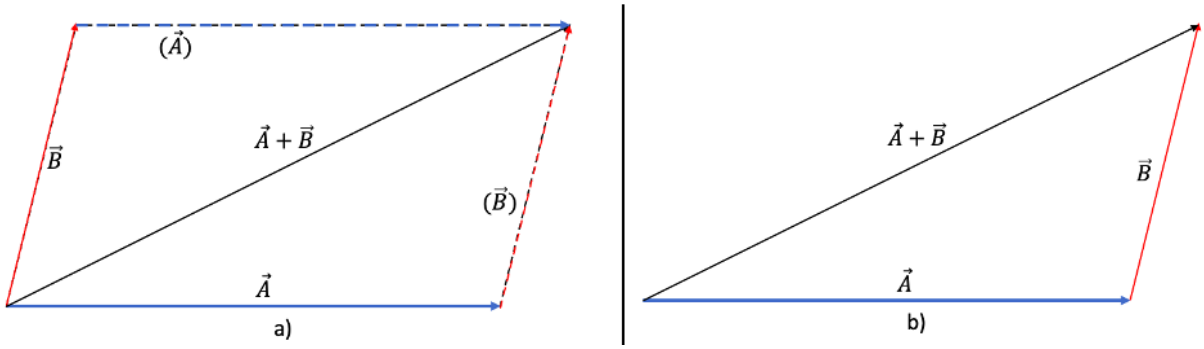
geométrico se puede definir a su vez por el par ordenado con coordenadas (x, y). En este plano se distinguen tres características:

(1) Módulo: que corresponde a la longitud del segmento orientado que une al origen con el punto (x, y). En física, es común simbolizar a un vector como una flecha.
(2) Dirección: establecida por el ángulo del vector con respecto al eje de las abscisas (eje X).
(3) Sentido: la orientación del segmento, del origen al extremo del vector.

Ahora nos enfocamos en la operación con dos (o más) *vectores geométricos*. Por una parte, respecto a la suma de *vectores geométricos* existen dos métodos:

- El método del paralelogramo: que permite sumar solamente dos vectores (Figura 1a).
- El método del polígono: en el cual se pueden sumar dos o más vectores (Figura 1b).

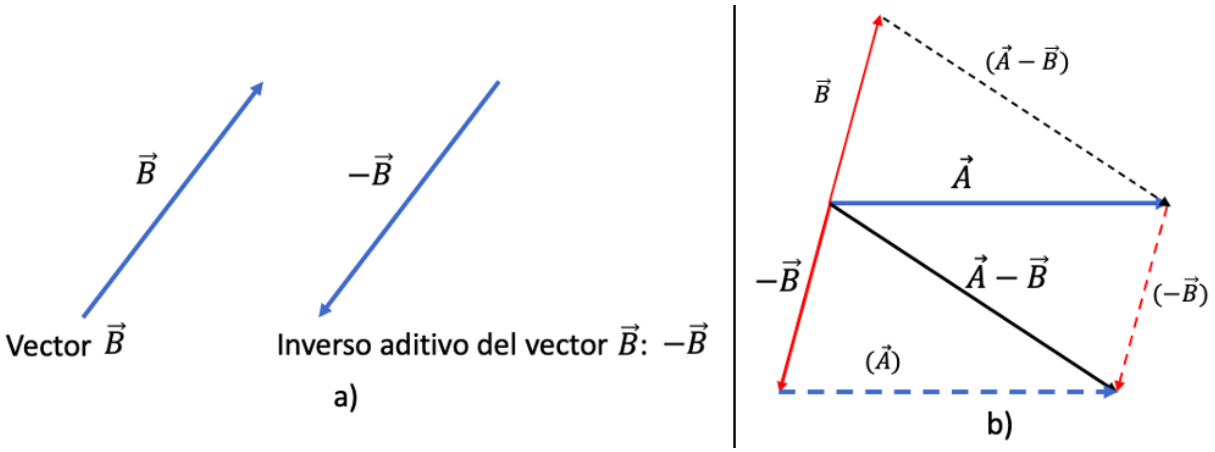
Figura 1 – Suma de vectores geométricos por el método del paralelogramo (a) y el método del polígono (b)



Por otra parte, la resta de vectores geométricos sigue los mismos dos métodos antes mencionados. Sin embargo, es importante señalar que al restar un vector $\vec{B}$ de otro vector $\vec{A}$, lo que se realiza es la suma del vector $\vec{A}$ con lo que se denomina: el inverso aditivo del vector $\vec{B}$ (Figura 2).

REMATEC, Belém (PA), v. 16, n. 39, p. 60-76, Set-Dez, *e*-ISSN: 2675-1909, 2021
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p60-76.id497

Figura 2 – Inverso aditivo de un vector geométrico (a) y suma ("resta") con el inverso aditivo de un vector (b)



El contenido conceptual presentado en esta sección es el que se pone en movimiento durante la actividad adquiriendo realizaciones concretas, que a su vez serán analizadas en la sección de análisis de resultados.

Diseño metodológico de la investigación

Como lo señala Radford (2008), la metodología es una de las tres componentes en las que se articula una teoría, además de las preguntas de investigación y los principios teóricos. De manera particular, el aspecto metodológico de una investigación enmarcada en la TO debe enfocarse al análisis de la actividad como unidad de análisis (RADFORD, 2015). La presente investigación, cuya metodología es de corte cualitativo, se adapta a partir de las condiciones en las que fueron recabados los datos en una investigación previa (§3.1). Parte de esos datos ahora se analizan a partir de la TO, con la consideración de que existen tres fases de la actividad de enseñanza-aprendizaje que permiten dar respuesta a nuestra pregunta de investigación (§2). Estas tres fases corresponden a la presentación de la actividad por parte del profesor, a la discusión profesor-estudiante y a la discusión general de todo el grupo.

Recolección de datos y estrategia de análisis

Para dar respuesta a la pregunta de investigación (§2) se seleccionó un evento de clase que surgió en una de las 10 sesiones en las que se estuvo observando las clases de física de un profesor experto en sus condiciones habituales de enseñanza. La clase fue videograbada con la ayuda de dos cámaras. Una cámara permaneció fija al fondo del salón de clases, dirigida a la pizarra, para filmar los momentos en que el profesor hablaba frente a todo el grupo. La segunda cámara seguía al profesor en los momentos de interacción con los 24 estudiantes inscritos en el grupo. Se utilizó además una grabadora de voz, la cual portaba el profesor con el objetivo de registrar el audio que pudiera ser difícil de registrar por las dos cámaras. Se identificó el evento de clase en el cual se abordan los saberes y conocimientos de interés en estudio (§3.2).

Para el análisis de datos se divide el evento de clase en tres momentos, que corresponden a lo que ocurre en tres diferentes fases de la actividad (§3.3). Posteriormente, cada momento se analiza a partir de los medios semióticos de objetivación que son movilizados conjuntamente

REMATEC, Belém (PA), v. 16, n. 39, p. 60-76, Set-Dez, *e*-ISSN: 2675-1909, 2021
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p60-76.id497

por el profesor y los estudiantes. Se presentan transcripciones e imágenes de la actividad que permiten estructurar el análisis.

ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD COMO LABOR CONJUNTA

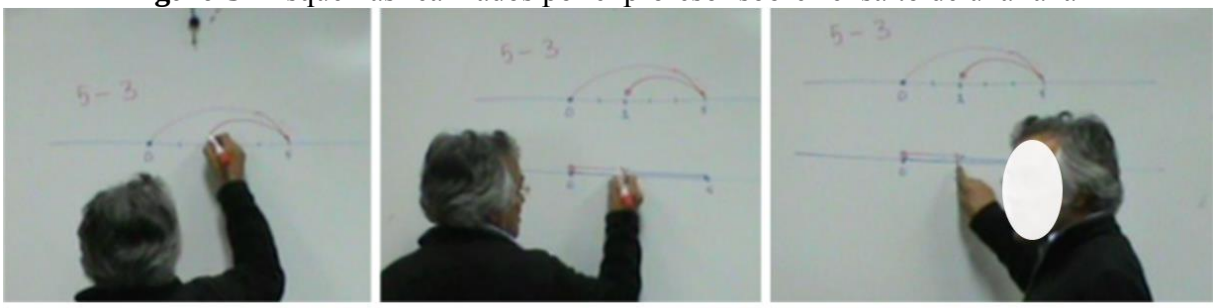
A continuación se presenta el análisis de la actividad, vista como labor conjunta, de un evento de clase en el cual estudiantes y un profesor experto producen significados referentes a la resta de vectores geométricos (§3.2). Este análisis se centra en presentar de qué manera se inicia la toma de consciencia cuando se da el encuentro entre profesor y estudiantes de este tipo de Saber. Se presenta el análisis en tres fases de la actividad.

Momento 1: Presentación e inicio de la actividad

El primer momento tiene lugar cuando el profesor, después de comentar con todo grupo al inicio de la clase sobre las características de los *vectores geométricos* y la operación suma, dice a los estudiantes: "voy a empezar con la resta de vectores". Este es el momento en que el profesor presenta la actividad. El profesor vincula este Saber (*cómo restar vectores*) con uno que ya forma parte de la consciencia de los estudiantes: el *de cómo restar números enteros*. Al decir que este Saber (*cómo restar números enteros*) ya es un objeto de la consciencia de los estudiantes significa que ha sido reconocido por los estudiantes (objetivado) en sus cursos previos. El profesor aprovecha una manera común de simbolizar la resta de números enteros, "el salto de una rana en la recta numérica", para iniciar con el Saber de la resta de vectores.

> **[1] Profesor***: ¿Qué quería decir cinco menos tres, usando la ranita? (...)* [repite la respuesta de una estudiante] *Muy bien, una posibilidad es pensar que estaba en la posición cinco y se recorrió* [se regresa] *tres. Otra posibilidad es que primero brincó cinco hacia delante y luego tres hacia atrás* [acompaña su discurso con un esquema en el pizarrón, Figura 3a].

Figura 3– Esquemas realizados por el profesor sobre "el salto de una rana"



a) b) c)

Después de presentar la actividad a través de la cual el Saber *cómo restar vectores* adquirirá formas concretas, el profesor incorpora un Saber que, como puede observarse en [1], ya forma parte de la consciencia de los estudiantes. Este Saber se manifiesta de forma concreta como Conocimiento y es acompañado de medios semióticos tales como artefactos gráficos en el pizarrón y gestos deícticos. Este conocimiento que se presenta en [1] es acompañado con la elaboración de un esquema, por parte del profesor, que no es ajeno a los estudiantes [Figura 3a]. Posteriormente, el profesor dice:

REMATEC, Belém (PA), v. 16, n. 39, p. 60-76, Set-Dez, *e*-ISSN: 2675-1909, 2021
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p60-76.id497

> **[2] Profesor**: *Ahora, si todo está referido al origen, voy a repetir este diagrama* [Figura 3a], *modificándolo ligeramente. Entonces el primer brinco lo podría haber puesto así, como una flecha* [que va del origen al 5]. *Y después, tres para acá* [dibuja una flecha que va del 5 al 2]. *El resultado* [5-3] *visto como vector, visto como flecha sería, partiendo del origen, a dónde llegué* [Figura 3b]. *Entonces puedo pensar el 2 de dos formas: como un punto o, como una flechita que va del cero al dos* [Figura 3c].
> *Ahora, imagínense que la rana puede brincar en dos dimensiones. Quiero a (3,1) quitarle (2,2)* [escribe: (3,1) – (2,2)]. *Quiere decir que en el eje de las equis brinca 3, y en el eje de las ye brinca 1.*

En [2], el profesor hace el vínculo del Conocimiento que se manifiesta en [1] con el Saber sobre la resta de vectores, cuando dice: "voy a repetir este diagrama, modificándolo ligeramente". Se observa cómo el profesor es consciente de que los estudiantes están encontrándose con ese Saber que está ahora adquiriendo determinaciones concretas a través de la actividad. Esta actividad se encuentra en su fase de inicio y el profesor procura que se desarrolle de manera conjunta incentivando la participación desde la primera pregunta [1].

La relación inicial entre el profesor y sus estudiantes puede analizarse de acuerdo con sus intenciones [del profesor] de hacer aparecer nuevos significados para los estudiantes. El profesor parte de un Saber (*cómo restar números enteros*) que no es ajeno para los estudiantes (y evidentemente tampoco para él), lo cual se observa cuando repite lo dicho por una estudiante [1]. Así, el profesor está tomando una postura en la cual busca que el encuentro con el nuevo Saber (*cómo restar vectores geométricos*) se lleve a cabo conjuntamente entre él y sus estudiantes. Es este encuentro del nuevo Saber al que nos referimos con que el profesor incentiva la participación con la primera pregunta; es una invitación a participar en la actividad. Es claro que los estudiantes aún no se encuentran con este nuevo Saber, que está por adquirir formas concretas. Por lo tanto, es de esperarse que los estudiantes, en lugar de tomar un rol "activo", estén a la espectativa (incluso muy posiblemente con tensión) y en una posición que pudiera parecer "pasiva" sobre el nuevo Saber con el que se van a encontrar. Sería muy osado esperar mayor participación verbal en un momento en que ya están participando en la actividad que ha dado inicio, y en la cual están en un momento de atención ante lo que se les presenta.

Sobre cómo el Saber adquiere formas concretas, se observa en [2] que el resultado (de 5–3) puede ser "visto como vector, visto como flecha sería, partiendo del origen, a dónde llegué". Este Momento 1 finaliza cuando, para explicar gráficamente lo que sucede al restar $(3,1) - (2,2)$, el profesor indica que al tratarse de una resta entonces el (2,2) sería en realidad (-2,-2). Y escribe en el pizarrón: $(3,1) - (2,2) = (3,1) + (-2,-2) = (1,-1)$. Se puede decir que en este momento el profesor define a los vectores como: $\vec{A} = (3,1)$, $\vec{B} = (2,2)$, y $-\vec{B} = (-2,-2)$, como el inverso aditivo del vector $\vec{B}$ (Figura 2a).

Momento 2: Discusión profesor-estudiante

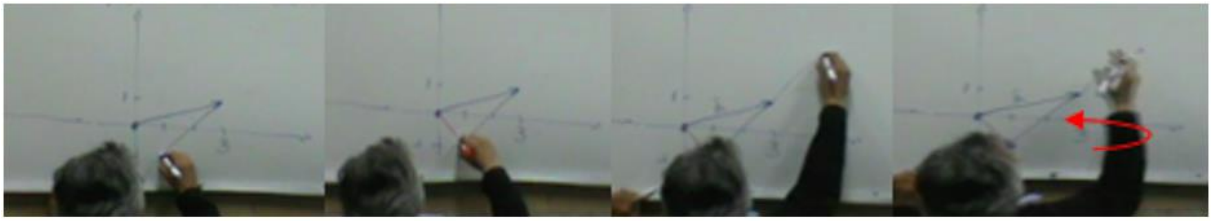
El segundo momento corresponde a la fase de la actividad en la que tiene lugar una discusión entre el profesor y una estudiante, en torno a los significados de la resta de *vectores geométricos*:

> **[3] Profesor**: *Éste es el brinco (-2,-2)* [ver Figura 4a] *y el resultado* [de la resta de (3,1) – (2,2)] *es desde el origen hasta donde llegué* [el (1,-1); ver Figura 4b]. *Entonces*

REMATEC, Belém (PA), v. 16, n. 39, p. 60-76, Set-Dez, *e*-ISSN: 2675-1909, 2021
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p60-76.id497

lo que tenía es el primer vector [(3,1)], *luego tenía en realidad el segundo vector que era éste* [traza el vector (2,2) iniciando en (3,1); ver Figura 4c], *pero con el signo menos lo invertí de lado* [para obtener el (-2,-2); hace un gesto, ver Figura 4d] *y sumé el inverso.*
(...)

Figura 4 – Uso de diagramas y gestos para abordar los significados de la resta de dos *vectores geométricos*



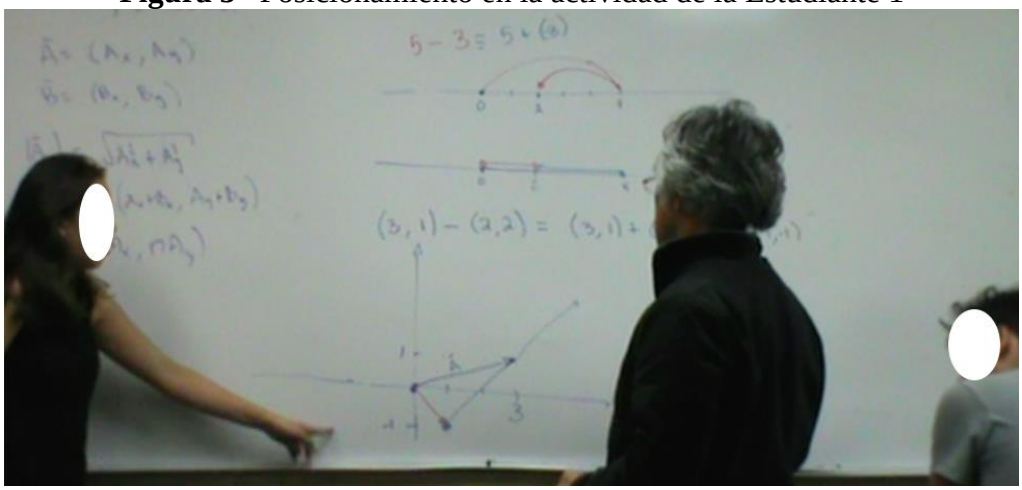
Al hablar de la "resta de vectores", la operación que en realidad está efectuando el profesor es $\vec{A} + (-\vec{B})$. Inclusive comienza a trabajar desde el inicio con $-\vec{B}$ y hace la aclaración que en realidad está sumando el inverso aditivo de $\vec{B}$ cuando dice: "luego tenía en realidad el segundo vector que era éste (refiriéndose al vector (2,2)), pero con el signo menos lo invertí de lado y sumé el inverso (refiriéndose al vector (-2,-2)". Este señalamiento se lleva a cabo a través de la coordinación de *medios semióticos de objetivacion*; esto es, las palabaras del profesor se coordinan con su esquema gráfico y con un gesto icónico que significa esta operación (ver Figura 4c y 4d); así se observa la forma en que los gestos acompañan a los significados que se están produciendo en este momento de la actividad.

Sobre el conocimiento que se desarrolla en el Momento 2, al trabajar gráficamente el significado de la resta de vectores, se observa que el profesor coloca el vector (-2,-2) iniciando en el punto (3,1), y no en el origen del plano cartesiano (Figura 4a). Ésta es una forma de sumar *vectores geométricos* que se trabaja en los cursos de física y se conoce como: "*método del polígono*" (Figura 1b (§3.2)), es decir, es un Saber que ahora adquiere una determinación concreta; es, de hecho, un nuevo Conocimiento. Posteriormente, interviene una estudiante:

[4] Estudiante 1*: Profesor* [en el mismo momento en que se para y se acerca al pizarrón], *¿no puede quedar que lo hagamos como en el plano cartesiano? O sea, porque usted empezó desde aquí, ¿no?* [indicando que el vector (-2,-2) parte del final del primer vector (3,1) y no del origen (Figura 4a)]. *¿No sería menos dos, menos dos aquí?* [señalando el lugar que piensa la estudiante debería estar el vector (-2,-2), partiendo del origen (Figura 5)].
[5] Profesor*: Sí, puedes también.*
[6] Estudiante 1*: ¿Sí se puede?, pero ¿tendríamos que alargar el vector, no? porque ya no quedaría ahí.*
[7] Profesor: *¿Por qué no vemos lo que estás proponiendo?*

REMATEC, Belém (PA), v. 16, n. 39, p. 60-76, Set-Dez, *e*-ISSN: 2675-1909, 2021
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p60-76.id497

Figura 5– Posicionamiento en la actividad de la Estudiante 1



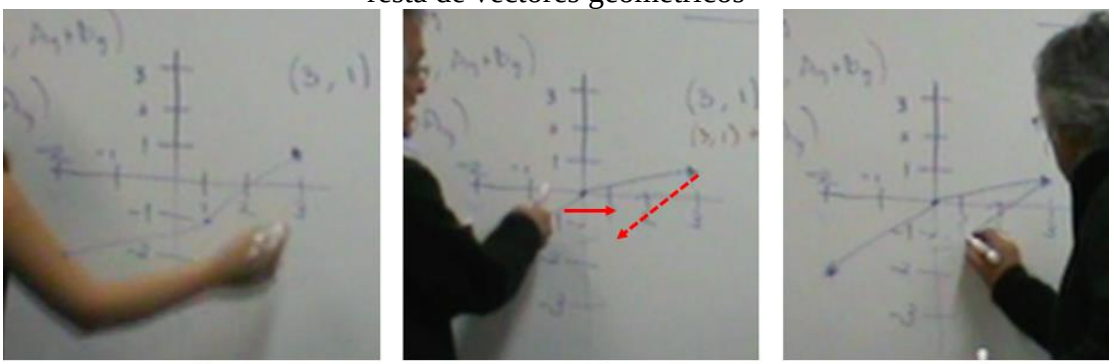
En [4] se observa cómo la **Estudiante 1** se encuentra con un conocimiento que le parece extraño. El reconocimiento de lo que ha hecho el profesor en [3] le parece aún lejano. Sin embargo, es importante notar nuevamente que la **Estudiante 1** no es un sujeto pasivo y ha llegado su momento de intervenir en una actividad en la que ha participado desde el inicio. Le comunica al profesor, a través de diferentes gestos deíticos que acompañan su intervención, que hay algo que le produce "extrañeza". Ella retoma lo hecho por el profesor al decir "porque usted empezó desde aquí", señalando con un gesto deítico el par ordenado (3,1) y manifiesta su interés de que se trabaje de otra manera: "¿No sería menos dos, menos dos aquí?", señalando con otro gesto deíctico el lugar que ella considera debiera tener el vector (-2,-2) (ver Figura 5). Ambos gestos deícticos tienen significados diferentes. El primer gesto, en el que señala el par ordenado (3,1), es un gesto que señala algo que está presente y que forma parte de lo realizado por el profesor; este gesto, a su vez, se relaciona conceptualemente con *la suma de vectores* siguiendo el *método del polígono* (Figura 1b (§3.2)). Mientras que el segundo gesto señala un espacio "vacío" que la **Estudiante 1** considera debiera ser ocupado por el vector que el profesor puso en otro lado. Este segundo gesto está relacionado con la suma de vectores, según el método del paralelogramo (Figura 1a (§3.2)). Aquí es importante observar que el profesor no toma una actitud de querer controlar la actividad y que el conocimiento se produzca de acuerdo a sus propios intereses; sino que está dispuesto a trabajar conjuntamente con la **Estudiante 1** a partir de sus inquietudes [7]. De esta manera, la discusión continúa:

> **[8] Estudiante 1***: Yo decía que lo hiciéramos por coordenadas* [marca en un sistema de ejes coordenados el punto (3,1) y el (-2,-2)] *(...) y luego nos está dando que es (1,-1), pero queda una línea entonces por eso no sabía si estaba bien. En realidad queda algo súper chueco* [ver Figura 6a].
> **[9] Profesor***: Entonces el punto que tu pusiste acá* [refiriéndose al [(-2,-2)], *es un punto pero también es un vector. En el sentido que puedo tomar la flecha que va del cero a ese punto. (...) entonces el problema se transforma en cómo sumo éste* [(3,1)] *con éste* [(-2,-2)], *¿cómo se suman estos dos vectores? (...) ¿No alcanzaron a ver* [refiriéndose a una simulación en una clase previa] *que se podía agarrar este vector* [(-2,-2)], *esta flecha y llevársela al extremo de la otra?* [hace un gesto como trasladando el vector (-2,-2); ver Figura 6b] *sin cambiar la longitud, ni la dirección. Entonces si la desplazo* [refiriéndose al (-2,-2)] *es ésta* [ver Figura 6c; otro estudiante exclama: "Ah!"]. *Y la suma, ¿quién era? Era el vector que partiendo del origen*

REMATEC, Belém (PA), v. 16, n. 39, p. 60-76, Set-Dez, *e*-ISSN: 2675-1909, 2021
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p60-76.id497

llegaba al final de la segunda flecha. O sea que lo que tú estás planteando en el fondo es lo mismo [dirigiéndose a Estudiante 1].

Figura 6 – Trabajo conjunto sobre el proceso de producción de significados en torno a la resta de vectores geométricos



a) b) c)

En [8] se observa, por una parte, la manera en que la **Estudiante 1** sigue posicionándose en la actividad de manera escéptica ante algo que ha encontrado extraño, lo que muestra su dimensión social. Este posicionamiento ahora lo respalda haciendo un intento de llevar a cabo la suma de vectores por el método del paralelogramo. Por otra parte, también se observa la dificultad que tiene esta estudiante al trabajar con un conocimiento que se está produciendo y que proviene de un Saber que no es inmediato para ella (*cómo operar dos vectores geométricos*). Así, la **Estudiante 1,** al colocar el vector (-2,-2) en el origen del plano cartesiano, no es aún consciente de que el profesor seguía el método gráfico del polígono para la suma de vectores geométricos y ella está utilizando el método del paralelogramo (Figura 1a y Figura 2b), es por esta razón que no logra visualizar gráficamente el resultado. Por su parte, en [9] el profesor se da cuenta de la inquietud de la **Estudiante 1** y cómo esta inquietud se relaciona con el Conocimiento nuevo que se está produciendo. De esta forma, él trabaja conjuntamente con la estudiante a través del uso de gestos y los esquemas en el pizarrón (ver Figura 6b y 6c), para producir el Conocimiento que no es claro, hasta ahora, para ella.

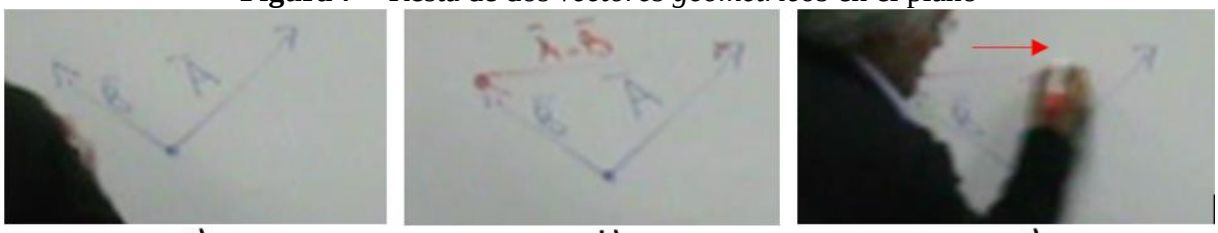
Momento 3: Discusión general

El último momento que se presenta corresponde a la fase de la actividad en la que se discute el significado de la resta de *vectores geométricos* los cuales no se colocan en el plano cartesiano, sino solamente en el plano (Figura 2b (§3.2)).

[10] Profesor*: Ahora voy a hacer una siguiente* [diferente] *representación, a ver si les sirve (...) ¿Qué querría decir esa resta?* [(3,1)-(2,2)] *(...)* [quiere decir:] *¿qué hay que sumarle a (2,2) para que me dé (3,1)? (...) voy a poner dos vectores cualquiera* [escribe en el pizarrón los vectores; ver Figura 7a]. *(...) los puse dos saliendo del origen* [como había hecho la estudiante]. *¿Qué significado tiene* $\vec{A} - \vec{B}$*? (...) cuánto le falta a* $\vec{B}$ *para que sea* $\vec{A}$*. Pero lo que le falta a* $\vec{B}$ *para ser* $\vec{A}$*, es justamente el vector que sale del extremo de* $\vec{B}$ *y llega a* $\vec{A}$ [traza el vector; ver Figura 7b]. *Porque si a esto* [señala $\vec{B}$] *le sumo esto* [señala $\vec{A} - \vec{B}$] *me da éste* [señala $\vec{A}$], *entonces esto es* $\vec{A}$ *menos* $\vec{B}$ [ver Figura 7c]. *Porque es el vector que sumado a* $\vec{B}$ *te da* $\vec{A}$.

REMATEC, Belém (PA), v. 16, n. 39, p. 60-76, Set-Dez, *e*-ISSN: 2675-1909, 2021
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p60-76.id497

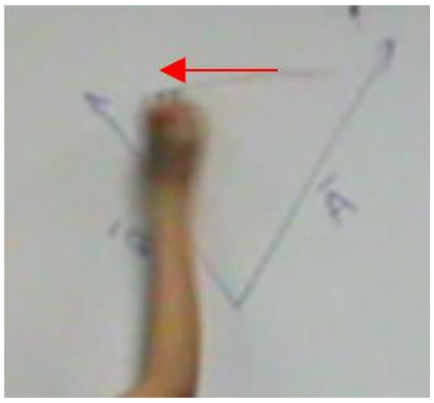
Figura 7 – Resta de dos *vectores geométricos* en el plano



A diferencia del trabajo previo para resta de vectores, ahora el profesor trabaja (gráficamente) la resta de dos vectores geométricos como un proceso en donde, por un lado, coloca a ambos vectores partiendo del mismo origen (Figura 7a) y, por otro lado, presenta el resultado como: "el vector que sale del extremo de $\vec{B}$ y llega a $\vec{A}$". Después de que se discute con el grupo y que parece haber un entendimiento, el profesor vuelve a preguntar por el resultado de $\vec{A} - \vec{B}$ a la **Estudiante 1**.

> **[11] Profesor**: *A ver este es* $\vec{A}$ *y éste es* $\vec{B}$ [escribe en el pizarrón los mismos vectores que la Figura 7a], *¿quién es* $\vec{A}$ *menos* $\vec{B}$*? Con todo y línea y dirección?*
> **[12] Estudiante 1**: *Ok, pues* $\vec{A}$ *menos* $\vec{B}$ *es hacia acá* [ver Figura 8].

Figura 8 – Señalamiento de la Estudiante 1 de lo que considera es el resultado de restar los vectores $\vec{A} - \vec{B}$



Por una parte, el Momento 3 puede verse como un intento del profesor para que se lleve a cabo una *contracción semiótica*, la cual Radford (2021) define como "un fenómeno que [se] toma como evidencia del aprendizaje" (p. 102, traducción libre). Así, el profesor espera que la Estudiante 1 muestre a través de medios semióticos (dibujando en el pizarrón la respuesta) si ha tomado consciencia de *cómo operar con vectores*, en particular, *cómo restar dos vectores geométricos*.

Por otra parte, la respuesta de la **Estudiante 1**, muestra la dificultad que tiene en tomar consciencia sobre el proceso de restar dos vectores (en dos dimensiones). Es importante señalar que se tomó la respuesta de la **Estudiante 1** debido a que fue la estudiante a la que se dirigió principalmente el profesor a partir de la propia inquietud de esta estudiante. Sin embargo, los

REMATEC, Belém (PA), v. 16, n. 39, p. 60-76, Set-Dez, *e*-ISSN: 2675-1909, 2021
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p60-76.id497

otros estudiantes estuvieron presentes para participar en la discusión sobre los significados de la actividad.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El presente artículo abordó dos objetivos particulares (§1). Respecto al primero de ellos, observamos la manera en que, en coordinanción con diferentes *medios semióticos de objetivación* (gestos, lenguaje y diagramas en el pizarrón), se producen los significados referentes a la resta de dos vectores geométricos en una actividad en la cual se ven involucrados un profesor experto de física y sus estudiantes. En otras palabras, estudiamos el encuentro del Saber *cómo restar dos vectores geométricos* (constituido histórica y culturalmente) que un docente ofrece a sus estudiantes en una clase ordinaria de física de bachillerato. Respecto al segundo objetivo, nos centrarnos –a partir de la TO– en un momento del proceso de enseñanza-aprendizaje que, creemos, pasa desapercibido o se minimiza: el inicio de toma de consciencia; es decir, el inicio del reconocimiento de Saberes (matemáticos y científicos) que han sido producidos a lo largo de un largo trayecto histórico-cultural y que son ajenos a los estudiantes, aunque no necesariamente lo son para los docentes.

Con respecto a la respuesta de la pregunta de investigación, ¿de qué manera un profesor experto de física y sus estudiantes inician el proceso de toma de consciencia de la "resta" de vectores en un espacio de trabajo conjunto?, el análisis de datos muestra que este inicio de toma de consciencia no corresponde a un instante en particular, sino a un proceso que transcurre a lo largo de una actividad que presentamos en tres Momentos, en los que los objetos matemáticos adquieren determinaciones concretas. En estos tres Momentos se producen significados a través de la movilización y coordinación de gestos, lenguaje y objetos matemáticos simbolizados en diagramas; es decir, a través de *medios semióticos de objetivación*. En un primer Momento, el profesor experto vincula un Saber ya reconocido por los estudiantes (*cómo restar números enteros*) con otro Saber que aún es ajeno para ellos (*cómo restar vectores*). Es un Momento en que el profesor invitó a los estudiantes a participar conjuntamente en la actividad, partiendo de elementos reconocidos mutuamente por todos los participantes. Por un lado, el Saber sobre la resta de números enteros; por otro lado, gestos, un lenguaje y diagramas en el pizarrón cuyos significados son comprendidos por los estudiantes. Después, en el transcurso del primer Momento al segundo Momento, ocurrió el encuentro de los estudiantes con el Saber *cómo restar dos vectores geométricos*. En este segundo Momento se observó la extrañeza que tuvo una estudiante ante el nuevo Saber con el que se ha encontrado: *cómo restar dos vectores*. Se resaltó el hecho de que la **Estudiante 1** manifiesta su inquietud al profesor y que éste, a su vez, procura trabajar conjuntamente para que la estudiante reconozca el Conocimiento que se está desarrollando. Finalmente, el tercer Momento es un intento, por parte del profesor, de que se lleve a cabo una *contracción semiótica*; es decir, busca ver si la **Estudiante 1** ha reconocido el Saber *cómo restar dos vectores geométricos*. La respuesta incorrecta de la estudiante muestra la complejidad y dificultad que representa la toma de consciencia de los objetos matemáticos. Aún más, el análisis del trabajo conjunto entre la **Estudiante** 1 y el profesor muestra que esta toma de conciencia no sucede inmediatamente después de que el profesor asemeja la resta de vectores con la de números enteros. Hasta el momento en que se termina el análisis de datos, la estudiante aún se encuentra en proceso de reconocer cómo llevar a cabo la resta de vectores en

REMATEC, Belém (PA), v. 16, n. 39, p. 60-76, Set-Dez, *e*-ISSN: 2675-1909, 2021
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p60-76.id497

su representación geométrica. De hecho, este proceso coninuó en posteriores actividades y clases que no fueron reportadas en este trabajo por no ser parte de los objetivos de investigación.

Teniendo en cuenta que el presente artículo forma parte de un proyecto más amplio (§1), consideramos importante y necesario profundizar en el análisis de las prácticas educativas en matemáticas y ciencias con la intención de superar una forma reduccionista y simplista de ver las relaciones entre el maestro y los estudiantes. En este tipo de relaciones, como lo señala Radford (2021), solo hay dos posibilidades: "o bien el aprendizaje emana de los alumnos o los estudiantes reciben el conocimiento del maestro" (p. 21, traducción libre). Algunas de las consecuencias de tal reduccionismo son el uso de nociones tales como "estudiante pasivo/activo" o "clase magistral" en el análisis de las prácticas en el salón de clases.

En particular, consideramos que este artículo ofrece una oportunidad de profundizar en el análisis de diferentes perfiles de profesores (e.g., novatos y expertos) y en la manera en que dichos perfiles repercuten en la forma en que los medios semióticos de objetivación se movilizan en el salón de clases y en los procesos de produción de significados. Además, aunado a este interés, consideramos pertinente impulsar el diálogo de la TO con otros enfoques teóricos que analizan la práctica de los docentes; un diálogo que, creemos, ayudará a profundizar en la naturaleza del trabajo conjunto entre estudiantes y docentes.

AGRADECIMIENTOS

Respecto al primer autor, este artículo fue escrito en el marco de una estancia postdoctoral (2020-2021) en el Instituto Francés de la Educación (IFÉ) de la École Normale Supérieure de Lyon, Francia (ENS de Lyon) financiada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México (CONACYT).

Respecto al segundo autor, este artículo fue escrito con el apoyo de la Secretaría de Investigación y Posgrado, Instituto Politécnico Nacional, a través del proyecto número SIP: 20200781.

REFERENCIAS

BALL, D.; HILL, H.; BASS, H. Knowing mathematics for teaching. Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? **American Educator** p. 14-46, 2005.

BERLINER, D. C. Describing the Behavior and Documenting the Accomplishments of Expert Teachers. **Bulletin of Science, Technology & Society**, 24(3), p. 200-212, 2004. https://doi.org/10.1177/0270467604265535.

BROUSSEAU, G. **Theory of Didactical Situations in Mathematics**. (N. Balacheff; M. Cooper; R. Sutherland; S. Warfield, Trads.). London, Great Britain: Kluwer, 1997.

CARRILLO-YAÑEZ, J.; CLIMET, N.; MONTES, M.; CONTRERAS, L. C.; FLORES-MEDRANO, E.; ESCUDERO-ÁVILA, D. V.; ROJAS, N.; FLORES, P.; AGUILAR-GONZÁLEZ, Á.; RIBEIRO, M.; MUÑOZ-CATALÁN, M. C. The mathematics teacher 's specialised knowledge (MTSK) model. **Research in Mathematics Education**, 20(3), 236-253, 2018. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981.

CASTRO GARZÓN, D. Análisis de las decisiones del profesor de matemáticas en su gestión de aula. **Educación Matemática**, 29(3), p. 131-160, 2017.
D'AMORE, B.; RADFORD, L. **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos**. Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2017.

HERSANT, M.; PERRIN-GLORIAN, M. J. Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of Didactic Situations. **Educational Studies in Mathematics**, 59(1-2), p. 113-151, 2005.

RADFORD, L. Gestures, speech, and the sprouting of signs. **Mathematical Thinking and Learning**, 5(1), p. 37-70, 2003.

RADFORD, L. Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities**. ZDM - Mathematics Education** 40(2), 317-327, 2008. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0090-3

RADFORD, L. Three key concepts of the theory of objectification: knowledge, knowing, and learning. **Journal of Research in Mathematics Education**, 2(1), 7-44, 2013.

RADFORD, L. De la teoría de la objetivación. **Revista Latinoamericana de Etnomatemática**, 7(2). 132-150, 2014a.

RADFORD, L. On teachers and students: An ethical cultural-historical perspective. In Liljedahl, P., Nicol, C., Oesterle, S., & Allan, D. (Eds.) **Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36 (Plenary Conference), Vancouver (PME)**, Vol. 1, pp. 1-20, 2014b.

RADFORD, L. The theory of objectification and its place among sociocultural research in mathematics education. **International Journal for Research in Mathematics Education**, 6(2), 187-206, 2016.

RADFORD, L. **The Theory of Objectification: A Vygotskian Perspective on Knowing and Becoming in Mathematics Teaching and Learning.** Netherlands: Brill, 2021.

RADFORD, L.; ROTH, W. M. Intercorporeality and ethical commitment: An activity perspective on classroom interaction. **Educational Studies in Mathematics**, 77(2-3), 227-245, 2011.

SALINAS-HERNÁNDEZ, U. A. 2018. Tesis (Doctorado) – **Análisis de la características de los modelos de dos profesores –novato y experto– en torno al concepto de sistema de referencia, a través de la red de teorías: un estudio de caso**. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Ciudad de México, México.

SALINAS-HERNÁNDEZ, U.; MIRANDA, I. La teoría de la objetivación en el análisis de los modos de enseñanza: el caso de un profesor novato. **RECME - Revista Colombiana De Matemática Educativa**, 5(2), 83-91, 2020.

SCHOENFELD, A. Toward a theory of teaching-in-context. **Issues in Education**, 4(1), 1-94, 1998.

SCHOENFELD, A. Classroom observations in theory and practice. **ZDM Mathematics Education**, 47, 607-621, 2013.

***Submetido em*:** 08 de agosto de 2021.

***Aprovado em*:** 17 de outubro de 2021.

***Publicado em*:** 02 de dezembro de 2021.

Como citar o artigo:
SALINAS-HERNANDEZ, U.; MIRANDA, I. Un análisis de los inicios de toma de consciencia de la "resta" de vectores a través de la labor conjunta. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, Belém/PA, v. 16, n. 39, p. 40-76, Set-Dez, 2021.
https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p60-76.id497