Rematec
Revista Matemática, Ensino e Cultura

Construcciones euclidianas con GeoGebra y procesos de objetivación: Un estudio con futuros profesores de matemáticas

Juan Luis Prieto G.[1]
Universidad de Los Lagos, Asociación Aprender en Red

Elizabeth-H. Arredondo[2]
Universidad de Los Lagos

RESUMEN

Producir construcciones geométricas con regla y compás o mediante algún software dinámico, así como justificar y explicar los procedimientos empleados con un lenguaje geométrico, son parte del saber necesario para la enseñanza de la geometría en Chile. En este artículo, analizamos el aprendizaje de este saber a partir de los procesos de objetivación ocurridos durante el trabajo conjunto de dos futuros profesores de matemáticas y el formador ante una tarea que demandaba la construcción con GeoGebra de un triángulo rectángulo con ciertas propiedades. Los resultados mostraron que las contradicciones inherentes a la respuesta de una estudiante impulsaron las acciones de los participantes hacia el logro del objetivo de la actividad. Además, el uso coordinado de palabras, gestos y notación geométrica permitieron hacer aparente las intenciones y acciones de estos sujetos durante el encuentro con el saber movilizado. Finalmente, destacamos el rol de algunos participantes en el aprendizaje evidenciado.
Palabras clave: Objetivación; Conciencia; Futuros profesores; Construcciones euclidianas; GeoGebra.

Euclidean constructions with GeoGebra and objectification processes: A study with future mathematics teachers

ABSTRACT

Producing geometric constructions with a ruler and compass or using some dynamic software, as well as justifying and explaining the procedures used with a geometric language, are part of the knowledge necessary for the teaching of geometry in Chile. In this article, we analyze the learning of this knowledge from the objectification processes that occur when two future mathematics teachers and the teacher educator worked together to solve a task that required the construction with GeoGebra of a right triangle with certain properties. In the results, we observed that the contradictions inherent in the response of a student drove the actions of the participants towards the achievement of the objective of the activity. In addition, the coordinated use of words, gestures and geometric notation made it possible to make the intentions and actions of the subjects apparent in search of an encounter with mobilized knowledge. Finally, we highlight the role of some participants in the learning reflected in the activity.
Keywords: Objectification; Conscience; Future teachers; Euclidian constructions; GeoGebra.

Construções euclidianas com GeoGebra e processos de objetificação: Um estudo com futuros professores de matemática

RESUMO

Produzir construções geométricas com régua e compasso ou através de algum software dinâmico, bem como justificar e explicar os procedimentos empregados com uma linguagem geométrica, fazem parte do saber necessário para o ensino de geometria no Chile. Neste artigo, analisamos a aprendizagem desse saber a partir dos processos de objetivação acontecidos durante o trabalho conjunto de dois futuros professores de matemática e o

[1] Estudiante de Doctorado en Educación Matemática (ULAGOS). Coordinador General de la Asociación Aprender en Red (APRENRED), Maracaibo, Zulia, Venezuela. Dirección de correspondencia: Magallanes 2480, Osorno, Chile, CP:5290000. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0798-5191. E-mail: juanl.prietog@gmail.com.

[2] Doctora en Ciencias, Especialidad en Matemática Educativa (CINVESTAV-IPN). Académica del Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de Los Lagos (ULAGOS), Osorno, Chile. Dirección de correspondencia: Calle Hacienda las Quemas 3028, casa 69, código postal 5312665. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5285-1603. E-mail: elizabeth.hernandez@ulagos.cl.

REMATEC, Belém (PA), v. 16, n. 39, p. 77-100, Set-Dez, *e*-ISSN: 2675-1909, 2021
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p77-100.id496

formador, diante uma tarefa que exigia a construção com GeoGebra de um triângulo retângulo com determinadas propriedades. Os resultados mostraram que as contradições inerentes à resposta de uma estudante impulsionaram as ações dos participantes até a consecução do objetivo da atividade. Além disso, o uso coordenado de palavras, gestos e notação geométrica permitiram fazer aparente as intenções e ações desses sujeitos durante o encontro com o saber mobilizado. Por fim, destacamos o papel de alguns participantes no aprendizado evidenciado.
Palavras-chave: Objetivação; Consciência; Futuros professores; Construções euclidianas; GeoGebra.

INTRODUCIÓN

Con la entrada del siglo XXI, la importancia que adquiere el profesor para los procesos de aprendizaje en el aula de matemáticas permitió que la Formación de Profesores de Matemáticas (FPM) se estableciera como un área de prácticas educativas y de investigación (SFARD, 2004). Dentro de la FPM, los investigadores enfrentan diversas problemáticas relacionadas con el aprendizaje y desarrollo profesional del profesorado de matemáticas en las distintas etapas del ciclo de vida docente (inicial, principiante y continua), para lo cual suelen recurrir a la implementación de actividades formativas diversas y dinámicas (KRAINER; LLINARES, 2010).

Por mucho tiempo, una problemática propia de la FPM es la débil relación entre la preparación disciplinaria y profesional que mantienen los programas universitarios de formación inicial docente en matemáticas de varios países (RUIZ, 2017). En respuesta a esta problemática, los investigadores de la FPM se han interesado tanto por el saber disciplinario y didáctico requerido para enseñar matemáticas, como por los modos de incorporar este saber en los programas de formación (TATTO *et al*., 2009). En este contexto, *comprender* los procesos de adquisición del saber para la enseñanza de las matemáticas y *promover* tales procesos entre los futuros profesores, han sido dos de las principales preocupaciones de la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas (FIPM) (LILJEDAHL *et al*., 2009). En la atención de estas preocupaciones, la perspectiva sociocultural ha ido ganando terreno en la FPM (KRAINER; LLINARES, 2010).

Así mismo, las necesidades de la FIPM en Chile están descritas en los *Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para Carreras de Pedagogía en Matemáticas* (EPD) (MINEDUC, 2021), un documento oficial dirigido a las Facultades y Escuelas de Educación del país que ofrece pautas acerca de las habilidades, conocimientos y disposiciones necesarias para que los futuros profesores asuman con responsabilidad el desafío de enseñar matemáticas en los niveles de básica (a partir del 7°grado) y media. Uno de los descriptores de conocimiento disciplinar correspondiente al estándar B de Geometría destaca la importancia de las construcciones geométricas para la formación de los futuros profesores de matemáticas:

> Utiliza regla y compás, y tecnologías de geometría dinámica en la construcción de figuras geométricas; en la formulación, verificación o rechazo de conjeturas; en el descubrimiento de relaciones; y en la elaboración de pruebas formales e informales (MINEDUC, 2021, p. 76).

Teniendo en cuenta lo anterior, actualmente desarrollamos un proyecto de investigación doctoral que busca aportar elementos para comprender y promover el aprendizaje del saber acerca de las construcciones euclidianas (un tipo particular de construcciones con regla y compás) con GeoGebra, en distintos escenarios de FIPM. Asumiendo la perspectiva educativa

REMATEC, Belém (PA), v. 16, n. 39, p.77-100, Set-Dez, *e*-ISSN: 2675-1909, 2021
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p77-100.id496

de la Teoría de Objetivación (TO) (RADFORD, 2006, 2020), este artículo presenta una parte de la investigación en la que analizamos tal aprendizaje en función de los procesos de objetivación que ocurren cuando dos futuros profesores de matemáticas y el formador se dedican a resolver una tarea de construcción con GeoGebra de un triángulo rectángulo con ciertas propiedades. Como punto de partida, en el próximo apartado definimos la concepción de aprendizaje de la TO y la relacionamos con el contexto de nuestra investigación.

APRENDIZAJE COMO PROCESOS DE OBJETIVACIÓN

La TO define el *aprendizaje* como el encuentro dialéctico de los individuos con ciertas formas de expresión, acción y pensamiento cultural e históricamente constituidas, las cuales comprenden el saber de una cultura (p. ej., el saber matemático, pedagógico, estético, entre otros)[3]. En ese encuentro, estas formas de expresión, acción y pensamiento objetan a los individuos, es decir, le oponen resistencia, provocando así la "transformación subjetiva en algo que aparece a la conciencia" (RADFORD, 2017b, p. 120). Para hacer operativa esta idea de aprendizaje, Radford (2020) teoriza el encuentro con el saber histórico y cultural como *procesos de objetivación*, estos son, procesos sociales y colectivos de:

> […] toma de conciencia progresiva y crítica, de un sistema de pensamiento y acción cultural e históricamente constituido, sistema que gradualmente notamos, y que al mismo tiempo dotamos de sentido. Los procesos de objetivación son aquellos procesos de notar algo culturalmente significativo, algo que se revela a la conciencia […] por medio de la actividad corpórea, sensible, afectiva, emocional, artefactual y semiótica (RADFORD, 2020, p. 20).

A partir de esta definición, consideramos el aprendizaje que ocurre en distintos escenarios de FIPM como procesos de objetivación, es decir, como actos progresivos de toma de conciencia de aquello que las instituciones de formación docente consideran un saber acerca de la enseñanza de las matemáticas; todo esto, en el transcurso de una actividad formativa concreta. Como puede notarse, tras esta concepción del aprendizaje subyacen tres ideas clave para esta investigación (saber, toma de conciencia y actividad) que se explican enseguida.

Saber / Saber docente

Según Radford (2017a), el *saber* es "un sistema codificado de procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y de reflexión, constituidos histórica y culturalmente" (p. 101). De ahí que el saber se considere el producto de laboriosos e inacabados procesos históricos de refinamiento, codificación y expansión de las formas culturales de expresión, acción y pensamiento. Al ser puesto en movimiento por la actividad del profesor y los alumnos, el saber se materializa, adquiriendo la forma de un *conocimiento*. En otras palabras, el conocimiento es:

> el contenido conceptual concreto en el que se manifiesta o actualiza o materializa o encarna el saber. Su contenido conceptual concreto aparece y puede aparecer

[3] En realidad, la TO considera que "el aprendizaje es tanto *conocer* como *devenir*" (RADFORD, 2017a, p. 97). Sin embargo, en nuestro estudio decidimos aproximarnos al aprendizaje del saber acerca de las construcciones euclidianas con GeoGebra desde el *eje del conocimiento*, dejando como una cuestión abierta los aspectos del análisis que tratan este fenómeno desde el *eje de los sujetos*.

REMATEC, Belém (PA), v. 16, n. 39, p.77-100, Set-Dez, *e*-ISSN: 2675-1909, 2021
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p77-100.id496

> únicamente en una actividad —la actividad que media el saber y el conocimiento. (RADFORD, 2017a, p. 109).

Desde esta perspectiva, el saber acerca de la enseñanza de un contenido escolar (en lo que sigue, *saber docente*) constituye una forma corpórea, sensible y material de expresión, acción y pensamiento que es propia de la cultura escolar y que las instituciones de formación docente le consideran necesaria para la transformación de los futuros profesores en sujetos educadores. En cuanto a su especificidad, Tardif (2002) se refiere al saber docente como "un saber plural, formado por una amalgama, más o menos coherente, de saberes procedentes de la formación profesional y disciplinarios, curriculares y experienciales" (p. 29).

Toma de conciencia

Para la TO, la *toma de conciencia* de un saber es el acto subjetivo, emocional y afectivo de reconocimiento de los objetos de la cultura y de posicionamiento crítico ante tales objetos. Según Radford (2006), tomar conciencia de un saber implica una *reflexión*, es decir, un movimiento dialéctico entre la realidad objetiva y el individuo "que la refracta (y la modifica) según las interpretaciones y sentidos subjetivos propios" (p. 108). En este movimiento, se desarrollan "sensibilidades culturales para ponderar, reflexionar, comprender, disentir, objetar y sentir a los otros, a nosotros mismos y a nuestro mundo" (RADFORD, 2017b, p. 122).

En esta investigación, asumimos la toma de conciencia de un saber docente como un acto de reflexión y discernimiento crítico sobre las formas de expresión, acción y pensamiento que constituyen dicho saber. En un escenario de FIPM, las sensibilidades culturales que devienen de la toma de conciencia permiten a los futuros profesores orientarse en las actividades en las que participan, por ejemplo, al involucrarse responsablemente en la realización de una construcción geométrica con GeoGebra.

Actividad / Actividad formativa

En la TO, la *actividad* es la categoría ontológica y epistemológica fundamental para entender cómo un saber se transforma en objeto de conciencia. Para rescatar el carácter de espacio de producción humana que es inherente a la actividad del aula, Radford (2017b) se refiere a esta categoría como *labor conjunta* como:

> una forma de vida, algo orgánico y sistémico, un evento creado por una búsqueda común –es decir una búsqueda con otros– de la solución a un problema planteado, búsqueda que es al mismo tiempo cognitiva, emocional y ética. (p. 125).

Según lo anterior, llamamos *actividad formativa* a esa manera social, corpórea, sensorial y artefactual de labor conjunta en el cual el formador y los futuros profesores se implican en una búsqueda común de respuestas a tareas que orientan sus acciones hacia el logro de ciertos fines. Esta actividad puede transformar las condiciones iniciales de una respuesta (p. ej., un procedimiento particular de construcción con GeoGebra) en la búsqueda de su comprensión, favoreciendo con ello la toma de conciencia progresiva del saber movilizado. Así, el producto de la actividad formativa (la obra común) comprende tanto esa forma material que adquiere el saber en la realidad concreta (a través de acciones y reflexiones), como el reflejo del saber en la conciencia de quienes producen la obra. Sobre esto último, Leontiev (1978, p. 123) afirma que “la actividad del hombre es lo que constituye la sustancia de su conciencia”.

Un aspecto clave de toda labor conjunta (y, por ende, de la actividad formativa) tiene que ver con los medios semióticos empleados por los individuos para producir la obra común. Estos medios son consustanciales al pensamiento humano y se materializan a través del cuerpo (acciones cinestésicas, gestos y sensaciones), del uso de signos (lenguaje natural o simbólico) y de artefactos culturales (materiales concretos) (RADFORD *et al*., 2009). Sobre los artefactos culturales, Radford (2014) señala que éstos son portadores de significados históricos y culturales que el trabajo humano ha depositado en ellos y que solo pueden revelarse a la conciencia a través de una actividad capaz de hacer aparente tales significados.

A partir de los referentes teóricos descritos, en el próximo apartado se presenta una descripción del objeto de aprendizaje para esta investigación.

SABER ACERCA DE LAS CONTRUCCIONES EUCLIDIANAS CON GEOGEBRA

En este trabajo, asumimos que el Saber Acerca de las Construcciones Euclidianas con GeoGebra (SACEG) es un saber docente que se nutre de saberes específicos de la formación inicial de profesores de matemáticas, incluyendo el saber disciplinario. Según Tardif (2002), el saber disciplinario es producido por la tradición cultural y difundido por las instituciones de formación docente a través de cursos o asignaturas.

En particular, el SACEG se nutre de ciertos procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y de reflexión geométrica, asociados a las construcciones con regla y compás, que tienen lugar en cursos o talleres de formación docente en geometría euclidiana que integran el uso de GeoGebra. De esta manera, el SACEG comprende aquellas formas de expresión, acción y pensamiento acerca de los objetos de la geometría plana (p. ej., rectas, ángulos y triángulos), que han sido codificadas histórica y culturalmente como *procedimientos de construcción* de estos objetos con la mediación del software dinámico.

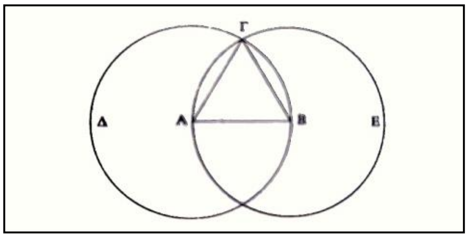
Las raíces de estos procedimientos se encuentran en una larga tradición de tratados sobre los fundamentos de la geometría, producidos en la Grecia clásica (450–300 a. de C.) (RÍBNIKOV, 1987; SCRIBA; SCHREIBER, 2015). De estos tratados, los *Elementos* de Euclides han sido la obra más difundida e influyente entre la comunidad científica por más de veinte siglos. En ella se presentan las construcciones con regla y compás (proposiciones del tipo *problema*) por medio de las cuales los matemáticos griegos demostraban la existencia de objetos geométricos con ciertas propiedades (objetos deseados), partiendo de unas condiciones iniciales (objetos dados) (REY; BABINI, 1985). Por ejemplo, la proposición I.1 enuncia el siguiente problema: *Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada* (EUCLIDES, 1991, p. 201).

La resolución de estos problemas consistía en *describir* el procedimiento de construcción del objeto deseado, usando solo regla y compás, y *probar* que tal procedimiento entregaba el objeto con las propiedades deseadas (SCRIBA; SCHREIBER, 2015). En el caso de la proposición I.1, la resolución comienza con la presentación del segmento (un caso particular de la recta finita del enunciado), sobre el cual se determina la construcción del triángulo equilátero. El procedimiento de construcción con regla y compás empleado por Euclides se resume así: (i) describir el círculo ΒΓΔ con centro Β y radio ΑΒ; (ii) describir el

REMATEC, Belém (PA), v. 16, n. 39, p.77-100, Set-Dez, *e*-ISSN: 2675-1909, 2021
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p77-100.id496

círculo AΓE con centro A y radio BA; (iii) dibujar el segmento ΓA, desde Γ hasta A; y (iv) dibujar el segmento ΓB, desde Γ hasta B (Figura 1).

Figura 1 – Dibujo asociado a la proposición I.1 de los Elementos



Fuente: Euclides (1991, p. 202)

La demostración de la proposición I.1 comprende una serie de consecuencias lógicas justificadas por algunos postulados, definiciones o nociones comunes que se citan al inicio de los *Elementos*. Por ejemplo, en atención al procedimiento de construcción, las operaciones (i) y (ii) se presentan como consecuencia del postulado 3, el cual describe un círculo con cualquier centro y radio; mientras que las operaciones (iii) y (iv) se derivan del postulado 1 que describe el trazado de un segmento de cualquier punto a cualquier punto. En este punto, se observa que la función de los postulados era la de "fijar la posibilidad constructiva de las figuras […] determinando así su existencia y unicidad" (REY; BABINI, 1985, p. 74), lo que hacían de la regla y el compás artefactos portadores de conceptualizaciones específicas que la tradición geométrica griega depositó en ellos.

Las construcciones con regla y compás que conocemos hoy en día son formas evolucionadas de las construcciones euclidianas que se enmarcan en una axiomática moderna y en el uso de artefactos de construcción sofisticados (p. ej., los softwares dinámicos) que hacen posible el surgimiento de novedosos procedimientos de construcción. Para Laborde (1997), las construcciones con software dinámico (p. ej., con GeoGebra) permiten el reconocimiento de vínculos entre las evidencias visuales que aportan los dibujos en la pantalla (invarianza de las propiedades espaciales del dibujo) y los hechos geométricos (elementos del sistema axiomático-deductivo de la geometría euclidiana); estos últimos relacionados con ideas que subyacen en las herramientas que ofrece el software.

En los últimos años, GeoGebra se ha vuelto parte de cultura material del aula de matemáticas en muchas escuelas, haciéndose presente cada vez más en la actividad geométrica de los escolares. Visto como un artefacto cultural de naturaleza digital (RADFORD, 2014), GeoGebra ofrece a los usuarios una serie de *contenidos conceptuales* que subyacen en las herramientas de construcción, medida y otras opciones, así como también un *espacio de trabajo* estructurado conceptualmente (apariencias del software) para experimentar con los contenidos, producir formas novedosas de construir *dibujos dinámicos*[4] y validar estas construcciones.

Por ejemplo, para construir con GeoGebra un triángulo equilátero partiendo del tamaño de sus lados (cantidad de longitud del segmento *m*) y de uno de sus vértices (punto *P*), la herramienta *Polígono* sugiere un procedimiento guiado por la determinación de los vértices que le definen (Figura 2). La conceptualización detrás de esta herramienta denota la idea moderna

[4] Por *dibujo dinámico* se entiende el dibujo creado con un *software* dinámico, de manera que "[...] conserve ciertas propiedades espaciales impuestas cuando se desplace uno de los puntos básicos del dibujo." (Laborde, 1997, p.42).

REMATEC, Belém (PA), v. 16, n. 39, p.77-100, Set-Dez, *e*-ISSN: 2675-1909, 2021
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p77-100.id496

de figura geométrica como “el conjunto de sus elementos; el triángulo es “tres puntos del plano”, a los cuales están adheridos tres segmentos y tres ángulos” (LEVI, 2006, p. 116).

Figura 2 – Conceptualización del polígono por la herramienta correspondiente

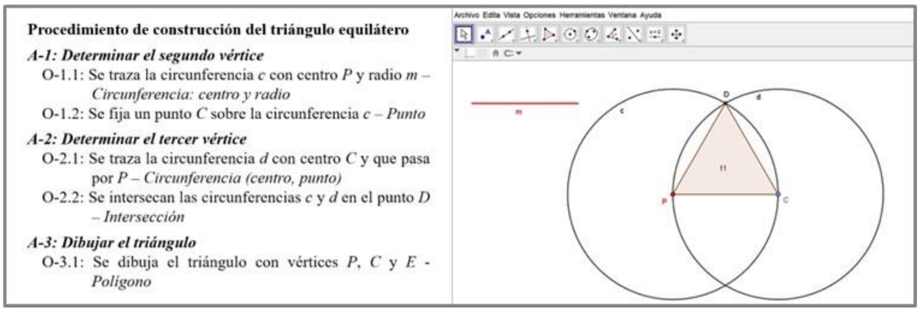
Fuente: Elaborado por los autores

En el ejemplo anterior, la conceptualización que subyace en la herramienta *Polígono* y las condiciones iniciales de la figura (*m* y *P*) posibilitan el surgimiento de procedimientos de construcción del triángulo equilátero que pueden acompañarse de una justificación de la consistencia geométrica del dibujo. Como parte consustancial de la actividad formativa, la consistencia geométrica de una construcción con GeoGebra se convierte en objeto de conciencia a medida que el formador y/o los futuros profesores intentan persuadir a otros de la validez del procedimiento de construcción empleado (FIALLO, 2011).

Por lo anterior, consideramos que el procedimiento de construcción con GeoGebra del triángulo equilátero y su justificación son formas singulares del SACEG (conocimiento) asociadas al caso de la proposición I.1 de los *Elementos*. En la práctica concreta, estas formas singulares del SACEG se materializan en *acciones* orientadas hacia el logro de resultados intermedios que, por sí solos, no satisfacen la necesidad de construir con GeoGebra el triángulo equilátero. De hecho, en líneas generales, las necesidades que mueven a los individuos a realizar una actividad no son satisfechas por los resultados intermedios, sino por la actividad con todas las acciones desplegadas (LEONTIEV, 1978).

Las acciones de una construcción con GeoGebra median entre la necesidad de los individuos de producir el dibujo dinámico esperado y las *operaciones* (conscientes o no) con el software que se realizan para concretar las acciones y que se encuentran subordinadas al espacio de trabajo (apariencia *Geometría*). Por ejemplo, una forma singular de construcción del triángulo equilátero del caso anterior podría incluir las acciones: *determinar el segundo vértice* (A-1), *determinar el tercer vértice* (A-2), y *dibujar el triángulo* (A-3); a su vez, cada acción se realiza mediante operaciones (O) con el software que conducen tanto a los resultados intermedios como al dibujo dinámico en su conjunto (Figura 3).

Figura 3 – Ejemplo de acciones y operaciones en una construcción con GeoGebra



Fuente: Elaborado por los autores

REMATEC, Belém (PA), v. 16, n. 39, p.77-100, Set-Dez, *e*-ISSN: 2675-1909, 2021
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p77-100.id496

Si bien GeoGebra ofrece a los usuarios ciertas conceptualizaciones de los objetos geométricos, así como un espacio de trabajo para experimentar con estos contenidos, es importante resaltar que este artefacto por sí solo es insuficiente para lograr que estas conceptualizaciones se revelen a la conciencia de los futuros profesores. Para que esto ocurra, es necesario que una actividad formativa haga aparente los contenidos conceptuales que portan las herramientas de construcción del GeoGebra. Solo en presencia de una actividad formativa orientada hacia este reconocimiento, podríamos preguntarnos: ¿de qué manera el SACEG, vinculado a una tarea de construcción con GeoGebra, se transforma en objeto de conciencia para el formador y los futuros profesores? Seguidamente presentamos la estrategia metodológica adoptada para tratar de responder la pregunta de investigación.

METODOLOGÍA

La actividad formativa

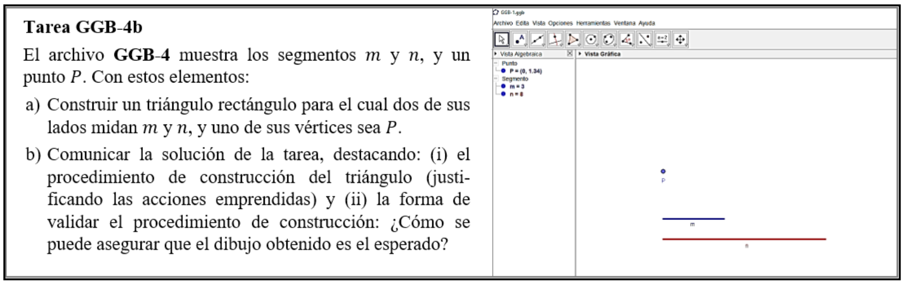
Para responder la pregunta de investigación, diseñamos una actividad formativa que atiende a las componentes de la labor conjunta introducidas por la TO (RADFORD, 2017b). Una descripción más detallada de ese diseño se encuentra en Prieto y Arredondo (2020).

La primera componente Φ de la labor conjunta se refiere a la estructura de objetivo, metas y tareas que conforma el proyecto didáctico del profesor. Siguiendo esta estructura, nos planteamos como *objetivo* de la actividad formativa el reconocimiento consciente y progresivo del SACEG a partir de la construcción de objetos geométricos (p. ej., ángulos, triángulos y cuadriláteros) con el software GeoGebra. Para dirigir la actividad hacia su objetivo, identificamos tres *metas* de la formación: (i) construir un dibujo dinámico con GeoGebra que fuese representativo de un objeto geométrico con ciertas propiedades, (ii) comunicar (de manera oral y/o escrita) el procedimiento de construcción del dibujo dinámico, y (iii) justificar la consistencia geométrica del dibujo producido.

Finalmente, para alcanzar las metas de la actividad formativa, elaboramos un conjunto de *tareas de construcción* con características similares a las clásicas tareas de producción de Cabri-dibujos que propone Laborde (1997). Definimos el contenido conceptual de las tareas a partir del análisis de algunas proposiciones (construcciones con regla y compás), seleccionadas desde tratados antiguos y modernos de geometría euclidiana (EUCLIDES, 1991; MOISE; DOWNS, 1966; SIMSON, 2014; TOSCA, 1757) según la relevancia histórica de estos problemas (en función de su presencia en el currículo de matemáticas chileno). En total, elaboramos 16 tareas de construcción, algunas referidas a rectas notables, ángulos, triángulos y cuadriláteros. Siguiendo la misma estructura de las proposiciones seleccionadas (enunciado, hipótesis y tesis), decidimos que el enunciado de cada tarea de construcción hiciera mención del objeto geométrico a ser construido, planteara unas preguntas orientadoras e incluyera una hoja de trabajo (en formato de archivo *.ggb*) con las condiciones iniciales de la construcción y sobre la cual debían producirse los dibujos dinámicos (Figura 4).

La segunda componente Θ de la labor conjunta se refiere a la actividad de enseñanza-aprendizaje propiamente dicha, esto es, al proceso mediante el cual el saber se materializa en conocimiento (RADFORD, 2017b). Aunque esta componente puede verse afectada por la estructura Φ, su naturaleza dialéctica hace de la actividad un proceso sujeto a cambio, situado en un espacio-tiempo determinado, e imposible de anticipar. Sin embargo, adoptamos la perspectiva de momentos de la labor conjunta que propone Radford (2017b) para organizar la actividad formativa en cuatro momentos: (M1) *presentación de la tarea*, (M2) *búsqueda de respuestas*, (M3) *discusiones en equipos*, y (M4) *puesta en común*.

Figura 4 – Ejemplo de una tarea de la actividad



Fuente: Elaborado por los autores

En el M4, una o varias respuestas producidas en el M2 se usan como materia prima para la producción de la obra común. En este momento, se pide a los futuros profesores que compartan sus obras (completas o inconclusas) al resto del grupo, promoviendo el diálogo sobre ideas geométricas importantes (STEIN *et al.*, 2008) para la consecución del objetivo de la actividad. En grupos de 3 estudiantes, decidimos descartar el M3.

Participantes y contexto

Las tareas de construcción se implementaron en 2019, durante un curso optativo del VIII semestre de la carrera de Pedagogía en Matemáticas de una universidad al sur de Chile. El curso estuvo compuesto por el formador y tres futuros profesores (próximos a egresar de la carrera), los cuales identificamos aquí con los pseudónimos Layla, Gonzalo y Fernando. En este artículo analizamos la actividad alrededor de la resolución de una tarea de construcción (Figura 4) que admitía dos respuestas posibles según se considerase: (1) que m y n fuesen los tamaños de los catetos del triángulo, o (2) que el mayor tamaño (n, en este caso) correspondiese a la hipotenusa. Nuestra investigación se sitúa en la puesta en común (M4) de la repuesta de Layla al caso (2), en la que esta joven participó junto a Gonzalo y el formador.

Seleccionamos este caso por dos razones. En primer lugar, la obra común difiere del procedimiento de construcción sugerido por Tosca (1757). En segundo lugar, el movimiento de transformación de la conciencia manifestado en la actividad se vincula con la conceptualización de la herramienta *Polígono*.

Datos de la investigación

Para recolectar la información, colocamos una cámara de vídeo en la sala del curso que nos permitió capturar la complejidad de las interacciones sociales producidas a lo largo de la actividad formativa. Junto a la grabación en vídeo, otras fuentes de información fueron (i) las hojas de trabajo con las construcciones realizadas antes y durante la puesta en común, y (ii) los registros fotográficos de la información colocada en la pizarra (p. ej., procedimientos de construcción, dibujos a mano alzada, etc.).

En cuanto a los datos de la investigación, éstos fueron producidos a partir de la transcripción del vídeo que, en principio, registraba el discurso verbal (en forma oral y escrita) y no verbal producido por Layla, Gonzalo y el formador para referirse al objeto de la tarea. Para elevar la calidad de la transcripción, los textos fueron enriquecidos con imágenes del instante en el que se producen los discursos, mostrando así esos elementos de interacción y comunicación no verbal (p. ej., emocionalidad transmitida mediante expresiones faciales, gestos, posturas corporales, etc.) que tuvieron lugar durante la puesta en común, pero que no fueron fáciles de representar en un texto escrito. Consideramos que estos elementos son importantes para el análisis de los datos (PINHEIRO *et al*., 2005).

Análisis de los datos

En el análisis de los datos, nos interesamos por comprender y describir los procesos de objetivación del SACEG que ocurrieron en la puesta en común de la respuesta de Layla.

Dos consideraciones sobre tales procesos guiaron el análisis. Por un lado, tuvimos en cuenta la naturaleza multimodal del pensamiento humano (RADFORD *et al*., 2009) en el sentido de poner atención tanto a los distintos recursos semióticos puestos en juego en la actividad como a los modos en que los participantes empleaban (o no) de manera integrada estos recursos para producir significados. Por otro lado, al tratarse de una realidad de corta duración, en la que interviene un número reducido de individuos, asumimos un enfoque de análisis *microgenético* (LAVELLI *et al*., 2005). Este enfoque hacía posible la observación del movimiento dialéctico de cambio subjetivo del SACEG en objeto de conciencia, mientras la respuesta de Layla se transformaba en obra común. En la perspectiva histórica-dialéctica, el movimiento de la conciencia se enciente como un proceso que implica:

> […] reflexionar sobre la realidad a partir de lo empírico (la realidad dada, lo real aparente, el objeto tal como aparece a primera vista) y, a través de abstracciones (elaboraciones de pensamiento, reflexiones, teoría), llegar a lo concreto: una comprensión más elaborada de lo que es esencial en el objeto, un objeto de síntesis de determinaciones múltiples, pensamiento concreto (PIRES, 1997, p. 87).

A partir de estas consideraciones, realizamos un análisis de la transcripción en cuatro etapas. La *etapa 1* consistió en identificar episodios que mostraran las acciones emprendidas por Layla, Gonzalo y el formador para lograr el objetivo de la actividad. Esto implicó reconocer la orientación que los participantes daban a estas acciones durante la puesta en común, considerándolas como componentes estables de la interacción que surgen de las particularidades de la actividad formativa en la que se realizan. De esta manera, obtuvimos una panorámica de la labor conjunta que permitió la materialización del SACEG.

La *etapa 2* consistió en determinar el modo en que el SACEG vinculado a la tarea de construcción se manifestaba en cada episodio. Particularmente, identificamos aquellas acciones y operaciones de la construcción que se discuten en los episodios, buscando establecer vínculos entre el procedimiento de construcción y las acciones descritas en la etapa anterior. De esta manera, logramos reconocer el foco de las discusiones entre el formador y los futuros profesores y, al mismo tiempo, las contradicciones que hacían avanzar estas discusiones hacia el reconocimiento del SACEG en movimiento.

La *etapa 3* consistió en detectar evidencias de la producción de significados para las acciones de la construcción y de la transformación de estos significados mientras dichas

REMATEC, Belém (PA), v. 16, n. 39, p.77-100, Set-Dez, *e*-ISSN: 2675-1909, 2021
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p77-100.id496

acciones se relacionaban con la conceptualización detrás de la herramienta *Polígono* (usada por Layla para construir el triángulo). Reconociendo que, “en el curso de los procesos de objetivación, estudiantes y profesores producen acciones multimodales” (RADFORD; SABENA, 2015, p. 166), en esta etapa realizamos una interpretación de cómo Layla, Gonzalo y el formador combinaron sincronizadamente determinados signos y artefactos para hacer *inteligibles* las acciones de construcción presentes en los episodios.

Para dicha interpretación, nos apoyamos en dos constructos metodológicos sugeridos por la TO: nodo semiótico y contracción semiótica. Por un lado, el *nodo semiótico* se define como “piezas de la actividad semiótica del alumno, en donde la acción, los gestos y la palabra trabajan juntas para lograr la objetivación del saber” (RADFORD *et al*., 2003, p. 56). En nuestro análisis, los nodos semióticos comprenden aquellos fragmentos de los procesos de objetivación en donde se pone de manifiesto el trabajo coordinado del cuerpo y otros signos de distintos sistemas semióticos para expresar significados geométricos de las operaciones de la construcción con GeoGebra y posibles rutas de acción en el marco de la conceptualización detrás de la herramienta *Polígono*.

Por otro lado, la *contracción semiótica* se refiere al mecanismo de “reorganización de los recursos semióticos que ocurre como resultado de una mayor conciencia de los estudiantes sobre los significados e interpretaciones matemáticas” (RADFORD; SABENA, 2015, p. 167). A través de la contracción semiótica se revela la evolución de los nodos semióticos hacia significados más refinados del saber puesto en movimiento. En nuestro análisis, la contracción semiótica revela un refinamiento de los vínculos entre los recursos semióticos movilizados por los participantes en los episodios, que es una consecuencia de la toma de decisiones sobre aquello que es (o no es) relevante para expresar los significados e intenciones que se tienen.

Finalmente, la *etapa 4* consistió en decidir la manera de presentar los resultados obtenidos en la etapa anterior.

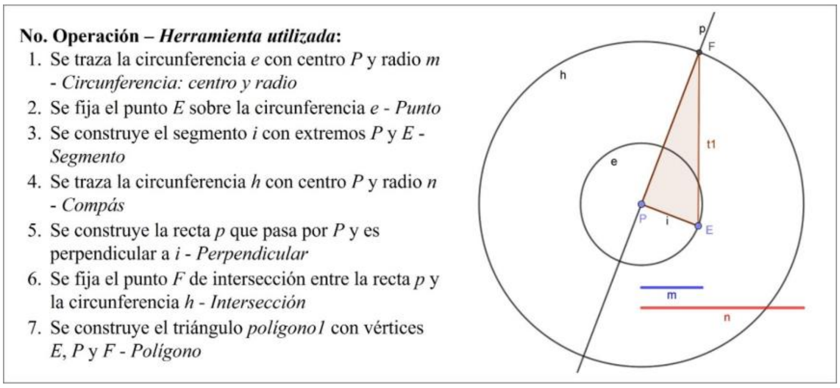
RESULTADOS

El análisis de los datos nos permitió identificar tres episodios que revelan el movimiento de transformación de la respuesta de Layla en la obra común de la actividad. Describimos cada episodio usando evidencias de la forma en que el SACEG se manifestó en la actividad.

La comunicación del procedimiento de construcción

El episodio 1 da cuenta del esfuerzo realizado por Gonzalo y el formador para comprender el procedimiento de construcción empleado por Layla. Para ello, la estrategia empleada por el formador consistió en pedirle a la joven que reprodujera su construcción desde el inicio, a partir de una nueva hoja de trabajo con las condiciones iniciales de la tarea (punto P y segmentos m y n). En respuesta a este pedido, Layla reprodujo un procedimiento de construcción (Figura 5) distinto al creado por ella misma en el momento de búsqueda de respuestas. Las diferencias entre estos procedimientos se encontraban en la cantidad de operaciones, la posición que éstas ocupaban en la secuencia, el tipo de herramientas de construcción utilizadas y el resultado obtenido.

Figura 5 – Procedimiento de construcción reproducido por Layla



Fuente: Elaborado por los autores

Los datos sugieren que el cambio en el procedimiento de construcción compartido por Layla se debió a la manera en que la joven entiende la resolución del tipo de tarea propuesta. Al respecto, encontramos evidencias de un modo de proceder caracterizado por la realización de operaciones de construcción prestablecidas que no requieren ser comprendidas. Por ejemplo, al comunicar la construcción de la recta *p* (operación 5), Layla se apoyó en una operación similar entre aquellas que fueron aplicadas al caso 1 (en que *m* y *n* son los tamaños de los catetos), y que ella misma tomó de la pizarra (línea 68).

68. Layla: *Después… ¿En qué quedé?* [voltea hacia la pizarra (Imagen 27a)] *"Se construye la circunferencia …"* [lee la operación 4 de la pizarra (Imagen 27b)]. *"Se construye la recta perpendicular"* [lee parte de la operación 5 escrita en la pizarra (Imagen 27b), luego voltea hacia el computador (Imagen 27c)].

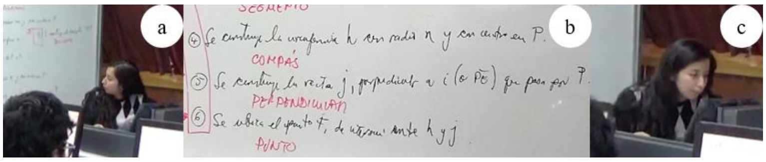


Imagen 27

Durante su intervención, Layla redujo el acto de comunicar el procedimiento de construcción a la enunciación de la herramienta usada en cada operación, mientras mostraba a los presentes cómo ella utilizó la herramienta en cuestión (línea 56). En su proceder, la joven parecía no comprender que el procedimiento descrito le estaba conduciendo a una respuesta incorrecta, mostrándose avergonzada y perpleja (línea 76) cuando, con la ayuda del formador (línea 74), terminó por reconocer este hecho (línea 72).

56. Layla: [Dibuja el segmento *i* con extremos *P* y *E* (operación 3)]. *Luego del segmento, voy a la herramienta Compás* [hace clic sobre el segmento *n*, y luego centra la circunferencia *h* en *P* (operación 4)].
72. Layla: *Éste es el polígono* [construye el triángulo con vértices *P*, *E* y *F* (operación 7, Figura 5). Luego, mira con extrañeza su dibujo y voltea hacia el formador]. *¡Ah, ya!, pero esto fue lo que…*
74. Formador: *Esto fue lo que hizo tu compañero* [Gonzalo], *¿cierto?* [haciendo alusión al procedimiento del caso 1, escrito en la pizarra].
78. Layla: *Sí. ¿Qué fue lo que hice?* [sonríe y se tapa la boca con la mano (Imagen 37)].

REMATEC, Belém (PA), v. 16, n. 39, p.77-100, Set-Dez, *e*-ISSN: 2675-1909, 2021
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p77-100.id496

Imagen 37

La contradicción en el procedimiento de construcción

Las diferencias entre la construcción de Layla (Figura 5) y la respuesta esperada por el formador dieron lugar a una *contradicción* en cuanto a la localización del tercer vértice del triángulo (acción 2 de la construcción): *el vértice F no conduce a un triángulo rectángulo con hipotenusa de tamaño n*. El episodio 2 relata el esfuerzo realizado por Gonzalo y el formador para hacer que Layla reconociera la causa de esta contradicción en su construcción.

Gonzalo fue el primero en dar a conocer la contradicción en la construcción de Layla, interrumpiéndola en dos ocasiones (p. ej., cuando la joven comunicaba la operación 1, líneas 41–44) para objetar el trazado de la circunferencia *h* (operación 4). Al notar que la intervención de Gonzalo incomodaba a Layla (ver línea 59, Imagen 22b), el formador pidió al joven permitir a su compañera continuar con la explicación.

41. Layla: *Construí la circunferencia…* [es interrumpida por Gonzalo (Imagen 16)].

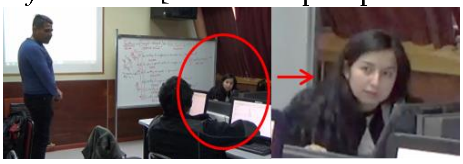


Imagen 16

42. Gonzalo: *¡Ah no! Eso es igual* [señala las operaciones 1, 2 y 3 que habían sido escritas en la pizarra]. *Solamente que ahí tienes un paso* [operación] *de más.*
43. Layla: *¿Un paso de qué?*
44. Gonzalo: *Hay un paso que no ocupas* [utilizas]. *Hiciste una circunferencia que no ocupas* [se refiere a la circunferencia *h*].
59. Formador: *Pero, deja que Layla termine* [se sonríe mientras continúa (Imagen 22a)]. *Deja que termine* [Layla se lleva las manos a la cabeza mientras ríe (Imagen 22b)].

Imagen 22

Ante el estado de conmoción de Layla hacia el final del episodio 1, el formador procuró acercar a la joven a la contradicción mediante un recuento de las operaciones de la construcción, el cual acompañó con cuestionamientos sobre las operaciones 4, 5 y 6, relacionadas con el vértice *F*. Con ello, el formador no solo buscó tal acercamiento, sino también mostró a los estudiantes una manera de comunicar el procedimiento de construcción (distinto del modo de Layla), en el cual él enunciaba cada operación (en orden ascendente) mientras señalaba con la mano el dibujo correspondiente (o sus elementos) sobre la pizarra. La línea 80 muestra un ejemplo del uso coordinado que hizo el formador del habla y los gestos para comunicar la operación 1 (Figura 5). Ya que el formador mencionó los elementos necesarios para emplear la

REMATEC, Belém (PA), v. 16, n. 39, p.77-100, Set-Dez, *e*-ISSN: 2675-1909, 2021
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p77-100.id496

herramienta *Circunferencia: centro y radio*, es posible que su forma de enunciación estuviera guiada por la conceptualización de las herramientas de construcción usadas en cada operación.

> **80. Formador**: *A ver Layla, antes que deshagas tu construcción, vamos a repetir lo que hiciste*. *Primero, construiste la circunferencia e* [gira su dedo índice por la curva (Imagen 39a)], *con centro P* [señala al punto (Imagen 39b)] *y radio m* [señala el segmento de tamaño *n* con sus dedos índice y medio extendidos (Imagen 39c).

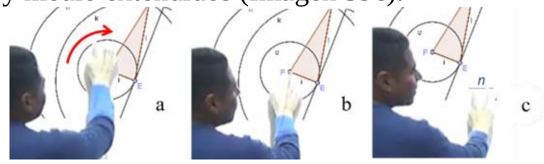


Imagen 39

Aunque el cuestionamiento sobre el tercer vértice del triángulo empezó con Gonzalo, fue el formador quien comenzó a revelar el origen de la contradicción: *la omisión de la relación de posición entre el ángulo recto y la hipotenusa de tamaño n*. De hecho, poco antes de iniciar el recuento, él cuestionó la pertinencia de la circunferencia *h* (operación 4) para la construcción, al no lograrse con ella el tamaño *n* deseado para la hipotenusa del triángulo (línea 77).

> **77. Formador**: *Layla, ahora necesito que esta medida* [se refiere a la distancia *PF*], *ésta* [coloca sus dedos pulgar e índice sobre los puntos *P* y *F* (Imagen 36a)], *sea la* [medida] *de la hipotenusa* [usa el mismo gesto anterior para referirse a la distancia *PE* (Imagen 36b)].

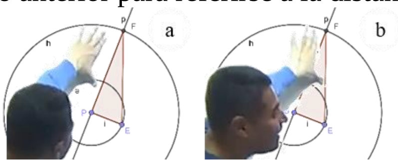


Imagen 36

Durante el recuento, el formador también consideró importante que Layla cuestionara el trazado de la circunferencia *h*. Para ello, intentó que la joven reconociera, en la relación de posición que mantienen el ángulo recto y la hipotenusa en el triángulo rectángulo, aquel hecho geométrico que permite objetar la construcción de *h*. Esto comenzó a tener lugar cuando el formador puso en entredicho la localización del vértice del ángulo recto en *P* (líneas 85 y 86), haciendo ver que una decisión como esa implicaba centrar la circunferencia de radio *n* (línea 87) en *E* (el otro extremo de *i*), cuestión que Layla había pasado por alto.

> **85. Formador**: *Después te pregunté en dónde iba a estar* [localizado] *el ángulo recto. ¿Y qué me respondiste?*
> **86. Layla***: En P.*
> **87. Formador**: *En P. Si el ángulo está en P,* [entonces] *E debe ser extremo del nuevo lado, o de la hipotenusa* [mantiene el dedo índice izquierdo en *P* y el dedo índice derecho en *E* (Imagen 45)]. *Y el otro extremo debería estar en otra parte. ¿Lo viste?*

Imagen 45

REMATEC, Belém (PA), v. 16, n. 39, p.77-100, Set-Dez, *e*-ISSN: 2675-1909, 2021
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p77-100.id496

Para tratar de mostrar la consecuencia de localizar el ángulo recto en *P*, el formador expuso dos ideas. En primer lugar, él mencionó la localización de la hipotenusa *en frente* del ángulo recto del triángulo (línea 89), pero sin conectar la idea con el tamaño *n* de dicho lado (condición de la tarea). En segundo lugar, él validó la construcción de la recta *p* (operación 5) en cuanto objeto que garantizaba la existencia del ángulo recto en *P* (*p* es perpendicular a *i*) (línea 91). Con todo esto, el formador ofreció una explicación de la contradicción presente en la construcción de Layla, la cual estuvo basada en la relación de posición entre el ángulo recto y la hipotenusa del triángulo que no se consideró al momento de definir la circunferencia *h*. Sin embargo, este asunto no parecía ser tan evidente para Layla (línea 92).

> **89. Formador**: *Es decir, el lado* [la hipotenusa] *se debe oponer* [señala con la palma de la mano el lugar que ocupa el lado opuesto al ángulo recto en el dibujo (Imagen 47)], *tiene que ser opuesto a este ángulo* [al mismo tiempo, señala el vértice *P* del ángulo].

Imagen 47

> **91. Formador**: *La recta tiene sentido que se construya, ya que esta perpendicular* [desplaza su mano sobre la recta *p* (Imagen 49a)] *te garantiza que este ángulo sea recto* [señala el ángulo recto (Imagen 49b)]. *¿Cierto? Está bien. El problema parece que está aquí Layla* [señala el punto *F* en la construcción (Imagen 49c)].

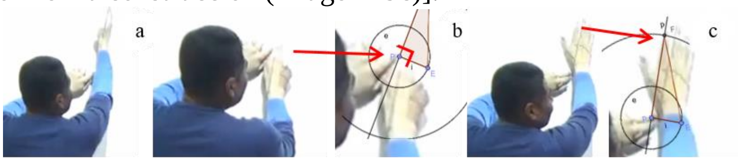


Imagen 49

> **92. Layla**: *Ya, profesor*.

La superación de la contradicción

En respuesta a las ideas del formador, Layla reconoció haber tomado una decisión distinta de la operación 4 (Figura 5) al construir la circunferencia *h* durante la búsqueda de respuestas, e intentó hacerse explicar (línea 98). Sin embargo, las dificultades que presentaba la joven para comunicar esta operación de la manera que lo hacía el formador le condujeron a mostrar lo hecho mediante la manipulación directa del dibujo dinámico en la pantalla. En concreto, Layla deshizo las operaciones 5, 6 y 7 de la construcción (Figura 5) e incluyó nuevas operaciones (5*, 6*, 7* y 8*) que agudizaron su estado de incomprensión (línea 100). Ante la duda del formador (línea 101), Layla terminó reconociendo que había fallado en su intento por superar la contradicción detectada en su construcción inicial (línea 102).

> **98. Layla**: *Es que, lo que paso fue que, yo primero lo hice así. Lo hice al revés al de Gonzalo* [hace un giro de su mano derecha con los dedos índice y medio extendidos para señalar que su construcción original había considerado al ángulo recto en *E*, y no en *P* (Imagen 54)]. *Lo hice al revés. Ya, así como. Le hice el, el…* [se queda callada, mientras mira su construcción en la pantalla del computador].

REMATEC, Belém (PA), v. 16, n. 39, p.77-100, Set-Dez, *e*-ISSN: 2675-1909, 2021
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p77-100.id496

Imagen 54

100. Layla: [Deshace algunas acciones de su construcción. Luego, construye la recta *j* que pasa por *E* perpendicular a *i* (operación 5*), y la circunferencia *k* con centro *E* y radio *n* (operación 6*) (Imagen 56a)]. *Lo que hice después, creo, fue que ubiqué desde ahí* [determina el punto *F* de intersección entre las circunferencias *h* y *k* (operación 7*), y luego traza el segmento *l* con extremos *E* y *F* (operación 8*) (Imagen 56b)]. *Y, al ubicarlo ahí, tengo n de ahí* [punto *E*] *hasta ahí* [punto *F*].

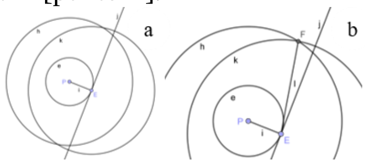


Imagen 56

101. Formador: *Muy bien, pero...*

102. Layla: *Pero, sí. Si, llegué a eso, que me daba isósceles. Chuta, ¿qué hice?* [se tapa la boca con la mano con cierta vergüenza y suelta una carcajada (Imagen 57)]. *A ver, después… Ya. Después…* [se toma la nuca con la mano izquierda (Imagen 57b)].

Imagen 57

Para terminar de rehacer su construcción, Layla dibujó el polígono con vértices *P*, *E*, *F* (operación 9*), obteniendo un triángulo isósceles en lugar de uno rectángulo (línea 105). Esta nueva situación fue aprovechada por el formador para involucrar a Gonzalo en la actividad, encargándole la misión de guiar a su compañera en la superación de las contradicciones del momento (línea 111).

105. Layla: *Es que* [el triángulo] *me da isósceles* [construye el triángulo con vértices *P*, *E* y *F* (operación 9*) (Imagen 59)]. Luego hice otras cosas que…

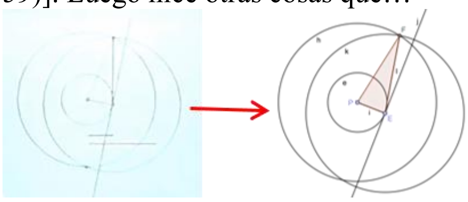


Imagen 59

111. Formador: *¿Cómo la podemos ayudar para que ella reconozca los problemas en su construcción y, poco a poco, logre la solución? Yo me voy a mover por aquí* [se mueve a otro punto de la sala] *y te dejo interactuando con tu compañera.*

La intervención de Gonzalo partió objetando la construcción del punto *F* (operación 7*) a través de un discurso de palabras y gestos, similar al usado por el formador en sus intervenciones que preceden (líneas 121–125). Este discurso estuvo referido al problema con la nueva construcción (el triángulo con vértices *P*, *E* y *F* era isósceles, líneas 121–124) y su

REMATEC, Belém (PA), v. 16, n. 39, p.77-100, Set-Dez, *e*-ISSN: 2675-1909, 2021
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p77-100.id496

relación con parte del procedimiento euclidiano de construcción de la bisectriz de un ángulo, tratado en un encuentro anterior (línea 125).

121. Gonzalo: *Ya. El punto F salió de la intersección entre dos circunferencias. ¿Cierto?*
122. Layla: Sí.
123. Gonzalo: *¡Pero! Eh, esas dos circunferencias claramente te dan un triángulo… isósceles…*
124. Layla: Isósceles.
125. Gonzalo: … *que es el proceso que nosotros seguimos para dividir este ángulo en dos* [señala el ángulo *PFE* (Imagen 68)]. *Por lo tanto, obviamente, el ángulo no es recto.*

Imagen 68

Para Gonzalo, el problema de definir el punto *F* a partir de la intersección de las curvas *h* y *k* podía superarse al prestar atención a la recta *j* (operación 5*, línea 127). Con su intervención, el joven colocó nuevamente en discusión la necesidad de pensar en la posición relativa del ángulo recto (ahora, con vértice en *E*) y la hipotenusa en un triángulo rectángulo; relación ésta que permitiría definir el tercer vértice del triángulo (acción 2 de la construcción) como la intersección de la recta *j* y la circunferencia *h* (centrada en *P*).

127. Gonzalo: *Ahora, tú tienes la perpendicular en el vértice E. Entonces la perpendicular es la que te tiene que dar la respuesta*.

Pese al esfuerzo de Gonzalo, Layla continuaba confundida al punto de creer que el problema estaba en el cambio de vértice del ángulo recto y no en la forma de determinar el punto *F* (operación 7*, líneas 131–133). De hecho, cuando Gonzalo intentó hacerla pensar en el vértice *F*, Layla se refirió al punto como la intersección de la recta *p* y la circunferencia *k*, aludiendo nuevamente al procedimiento de construcción para el caso en que los catetos tienen tamaño *m* y *n* (caso 1) (líneas 139–140). A diferencia de sus primeras intervenciones, Layla acá utilizó simultáneamente pronombres/adverbios demostrativos (p. e., *éste/a*, *acá*) y gestos de señalamiento con su dedo índice para referirse a los elementos de la construcción.

131. Layla: *O sea, que tendría que cambiar ésta* [señala la recta *j*, perpendicular a *i* por *E*] *a ésta* [señala con su dedo el punto *P*] (Imagen 73).

Imagen 73

132. Formador: *¿Por qué?*
133. Layla: *Porque me estás diciendo* [dirigiéndose a Gonzalo] *que ésta* [recta *j*] *no va aquí* [desliza su dedo por la recta *j* de arriba hacia abajo (Imagen 74)].

REMATEC, Belém (PA), v. 16, n. 39, p.77-100, Set-Dez, *e*-ISSN: 2675-1909, 2021
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p77-100.id496

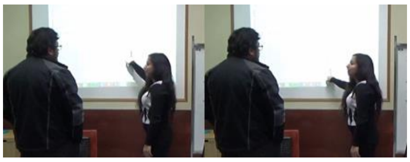


Imagen 74

139. Layla: *Porque si coloco este punto* [señala el punto F (Imagen 77)] *acá* [señala la intersección de la recta *j* y la circunferencia *k*] *esto seguiría midiendo 8* [se refiere a la distancia de *E* al punto de intersección de *j* y *k*].

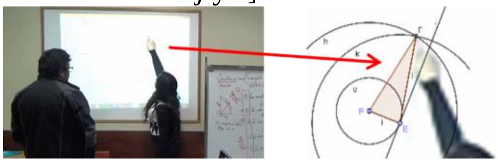


Imagen 77

Con la presión del momento, Gonzalo realizó una pregunta que sugería a Layla cómo proseguir con la construcción para resolver el problema existente (línea 142). En consecuencia, la joven acudió al computador para eliminar la circunferencia *k* (por sugerencia de la pregunta) y observar el resultado de lo hecho (línea 143). Sin la presencia de *k*, Gonzalo trató de guiar a Layla al tercer vértice del triángulo refiriéndose al cateto definido a partir de los vértices *P* y *E* (acción 1 de la construcción) e invitando a su compañera a determinar el otro cateto en función de sus extremos (*E* y el punto de intersección de la recta *j* y la circunferencia *h*, líneas 147–151).

142. Gonzalo: *Pero eso es considerando la circunferencia k. ¿Qué pasaría si eliminas la circunferencia k?*
143. Layla: [se dirige al computador y elimina la circunferencia *k*].
147. Gonzalo: *Entonces tienes el primer lado* [Gonzalo señala los vértices *P* y *E* (Imagen 79a)] *y tienes un lado aquí* [desplaza la mano desde el punto *E* hasta la intersección de *j* y *h*, luego se regresa (Imagen 79b)], *podrías generar un lado* [repite el movimiento anterior].

Imagen 79

148. Layla: *Sí.*
149. Gonzalo: *No tenemos la medida* [del cateto] *¿cierto?*
150. Layla: [asiente con la cabeza].
151. Gonzalo: *Entonces, ¿de dónde podría salir la medida de n? ¿Hay algún punto allí donde yo pueda asegurar que la medida es n?* [se refiere al tercer vértice del triángulo].

Tras someterse a preguntas más precisas por parte de Gonzalo, Layla reconoció la existencia del tercer vértice del triángulo como el punto de intersección entre la recta *j* y la circunferencia *h*, de manera que la hipotenusa (con extremos *P* y dicho punto) fuera de tamaño *n* (línea 163). Al término de su intervención, Gonzalo destacó que la construcción que ellos anticipaban en ese momento les permitía determinar tres elementos característicos del triángulo: el cateto $\overline{PE}$ (al que el joven llama *base*), el ángulo recto en *E* y la hipotenusa de tamaño *n* (línea 166). Incluso, el joven fue capaz de prever el procedimiento de construcción del triángulo para cuando el vértice del ángulo recto estuviera fijado en *P* (línea 168).

163. Layla: *Sí, ésta* [señala la hipotenusa, desplazando su dedo desde *P* (Imagen 80a) hasta la intersección de *j* y *h* (Imagen 80b)].

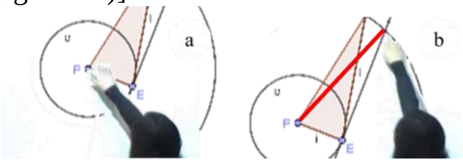


Imagen 80

166. Gonzalo: *Entonces, ya tengo una base* [señala el lado desplazando su dedo índice desde *P* hasta *E* (Imagen 81a)] *que es m* [se refiere al tamaño del lado]. *Tengo mi ángulo recto* [señala el ángulo (Imagen 81b)], *y mi hipotenusa* [señala el lado desplazando su dedo índice desde *P* hasta la intersección de *j* y *h* (Imagen 81c)] que sería *n* [se refiere al tamaño de la hipotenusa].

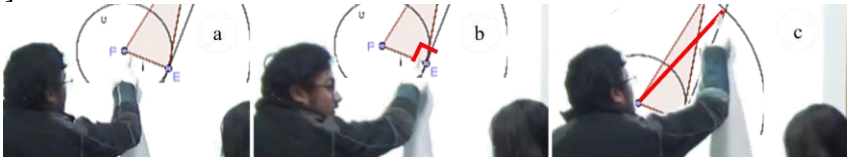


Imagen 81

168. Gonzalo: *Y allí lo tengo* [el triángulo], *con el vértice* [del ángulo recto] *en E. Y si fuera P* [el vértice del ángulo recto], *también se podría hacer* [la construcción], *pero con la circunferencia, en vez de centrada en P, centrada en E.*

Tras lograrse lo anterior, no encontramos evidencias del establecimiento de relaciones entre la descripción del triángulo rectángulo ofrecida por Gonzalo y la conceptualización de la herramienta *Polígono*, usada en su construcción.

CONSIDERACIONES FINALES

En este artículo, el cual es parte de una investigación doctoral, estudiamos los procesos de objetivación del SACEG presentes en una actividad formativa que convocó a dos futuros profesores y el formador en la construcción con GeoGebra de un triángulo rectángulo con ciertas propiedades. En particular, analizamos el movimiento de transformación del SACEG (asociado a la tarea propuesta) en un objeto de reconocimiento o de conciencia para estos sujetos. De este modo, identificamos tres episodios de la actividad formativa que revelan el modo en que Layla, Gonzalo y el formador tomaron conciencia del procedimiento de construcción con GeoGebra del triángulo rectángulo, expresado como una forma de realización concreta de la conceptualización detrás de la herramienta *Polígono*. En conclusión, el análisis nos permitió reconocer tres hallazgos.

El primer hallazgo se refiere a las *contradicciones* inherentes a la producción del dibujo dinámico que daba respuesta a la tarea y, particularmente, al modo en que estas contradicciones impulsaron la actividad formativa durante la puesta en común. Estas contradicciones surgieron a partir de las relaciones de oposición que mantenían, por un lado, la construcción de Layla y, por otro lado, el reflejo del resultado esperado en la conciencia de Gonzalo y el formador. En líneas generales, encontramos que los participantes se mostraron dispuestos a reflexionar sobre las contradicciones inherentes a la producción del dibujo dinámico (la respuesta a la tarea), aceptándolas, recorriéndolas y procurando su superación en cada momento (PIRES, 1997).

REMATEC, Belém (PA), v. 16, n. 39, p.77-100, Set-Dez, *e*-ISSN: 2675-1909, 2021
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p77-100.id496

Por ejemplo, en el episodio 1 observamos que Layla empleó un procedimiento de construcción con GeoGebra que negaba la posibilidad de traer a la realidad un triángulo rectángulo con hipotenusa de tamaño *n*. En el episodio 2 vimos que la discusión se centró en la determinación del tercer vértice del triángulo (acción 2 de la construcción), en cuyas operaciones estaría la causa de las contradicciones. En este episodio, aunque el formador ofreció una explicación del problema con el dibujo (basada en la posición relativa de los lados de un triángulo rectángulo), Layla no logró reconocer en el trazado de la circunferencia *h* (operación 4, Figura 5) el origen de las dificultades en su dibujo.

Esto último se hizo evidente en el episodio 3 cuando, al tratar de corregir el problema con *h*, Layla no pudo reconstruir un triángulo rectángulo ajustado a la tarea, agudizando más la situación. No obstante, pudimos notar que la tensión existente en este episodio impulsó un cambio favorable en las condiciones de producción del tercer vértice del triángulo, de cara a la solución de la tarea. En otras palabras, la materialización de la respuesta esperada estuvo condicionada por la producción de respuestas no apropiadas a las demandas de la tarea, las cuales se convirtieron en una fuente de desarrollo del aprendizaje. Siguiendo a Radford (2020), podemos concluir que las contradicciones surgidas en la puesta en común fueron el motor que impulsó la actividad formativa y la mantuvo siempre en movimiento.

El segundo hallazgo se relaciona con los *medios semióticos de objetivación* que operaron como una unidad inseparable para hacer aparente las emociones, intenciones y acciones de Layla, Gonzalo y el formador en procura de una respuesta conjunta a la tarea planteada. Como esperábamos, el uso coordinado de palabras, gestos y símbolos fue crucial durante la toma de conciencia de la conceptualización detrás de la herramienta *Polígono*. Sin embargo, vemos importante destacar los problemas con el uso de estos medios semióticos para evidenciar y materializar el procedimiento de construcción del triángulo rectángulo esperado. Por ejemplo, en el episodio 2, el formador ofreció una explicación de la causa de la contradicción en el dibujo dinámico a través de palabras, gestos y dibujo (trazos y notación geométrica), pero este esfuerzo no fue suficiente para que Layla imaginara la relación de posición entre la hipotenusa de tamaño *n* y el ángulo recto en *P* y, con ello, cuestionara la localización del tercer vértice del triángulo.

También queremos destacar los distintos gestos presentes en la comunicación del procedimiento de construcción. Por un lado, observamos que los gestos de señalamiento (con el dedo índice extendido) aparecieron con frecuencia como movimientos espontáneos de la mano (sintonizados con palabras) para indicar la ubicación de los elementos auxiliares en la construcción. Desde la perspectiva de McNeill (2000), estos gestos son de tipo *deícticos* ya que cumplen la función de señalar objetos o posiciones en el espacio. Por otro lado, notamos otros tipos de gestos presentes en la actividad. Por ejemplo, en el episodio 1 (línea 77) el formador extendió los dedos índice y pulgar de su mano izquierda para *capturar* el tamaño del cateto y *trasladarlo* hacia la hipotenusa del triángulo. Más adelante, en el episodio 3 (líneas 163 y 166), Layla y Gonzalo *trazaron* la hipotenusa del triángulo a través de un movimiento de sus dedos índice extendidos desde un extremo al otro, mientras se refería a estos objetos. Siguiendo con McNeill (2000), mientras que, en el primer caso, el gesto es de tipo *icónico* debido a la semejanza que mantiene el signo con la idea de tamaño de un segmento, en el segundo caso, el

REMATEC, Belém (PA), v. 16, n. 39, p.77-100, Set-Dez, *e*-ISSN: 2675-1909, 2021
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p77-100.id496

gesto es *rítmico* ya que los futuros profesores mueven la mano al ritmo de sus palabras para conceptualizar la hipotenusa del triángulo.

El tercer hallazgo tiene que ver con el *rol de Gonzalo y el formador* durante los procesos de toma de conciencia de la conceptualización detrás de la herramienta *Polígono*. En los episodios notamos que estos sujetos intentaron relacionar la construcción del Layla (sus aciertos y sus contradicciones) con ciertas descripciones del triángulo rectángulo, buscando favorecer el encuentro con el SACEG puesto en movimiento. Por ejemplo, en el episodio 2 el formador colocó en diálogo un posicionamiento subjetivo sobre el tercer vértice del triángulo a partir del cual la determinación de este punto (acción 2 de la construcción) implicaba la localización del ángulo recto y la consideración de la posición relativa de este ángulo y la hipotenusa. En el episodio 3, Gonzalo tomó esta contribución del formador y entregó una ampliación de la idea que destacaba el tamaño *n* de la hipotenusa. Consideramos que ambas formas de aproximación al SACEG contribuyeron a crear las condiciones de posibilidad y reconocimiento del procedimiento de construcción con GeoGebra del triángulo rectángulo para el cual el tamaño de la hipotenusa era *n*.

Pese a los esfuerzos realizados para dar cuenta de los procesos de objetivación del SACEG presentes en una actividad formativa centrada en construcciones euclidianas con GeoGebra, el hecho de analizar lo ocurrido en una única actividad dentro de una propuesta formativa de un semestre (PRIETO; ARREDONDO, 2020) hace necesario contrastar estos resultados con los análisis de actividades posteriores al caso que reportamos aquí, lo que permitiría una mejor comprensión del movimiento de toma de conciencia del SACEG a lo largo del tiempo. Además, si consideramos que el aprendizaje en la TO es tanto conocer como devenir (RADFORD, 2020), estamos en deuda con los lectores en cuanto al análisis de los procesos de subjetivación presentes en la actividad formativa que hemos analizado. Este tipo de información nos ayudaría a dar sentido a ciertas cuestiones de los procesos de objetivación que solo pueden explicarse a través de la ética movilizada en la formación.

RECONOCIMIENTO

Este trabajo fue realizado en el marco de la Tesis Doctoral en Educación Matemática de Juan Luis Prieto G., bajo la dirección de Elizabeth-H. Arredondo y con financiamiento parcial de la Dirección de Investigación de la Vicerrectoría de Investigación y Postgrado de la Universidad de Los Lagos, D.U. 430.

REFERENCIAS

EUCLIDES. **Elementos (Libros I–IV)**. Traducido por María Luisa Puertas Castaño. Madrid: Editorial Gredos, 1991.

EUCLIDES. **Elementos (Libros V–IX)**. Traducido por María Luisa Puertas Castaño. Madrid: Editorial Gredos, 1994.

FIALLO, J. **Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica**. 278 f. Tesis (Doctorado) - Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universidad de Valencia, Valencia, 2011.

Disponible en: http://matematicas.uis.edu.co/jfiallo/sites/default/files/TESIS_FIALLO.pdf. Acceso en: 20 jun. 2019.

KRAINER, K.; LLINARES, S. Mathematics teacher education. In: PETERSON, P.; BAKER, E.; MCGAW B. (Orgs.). **International Encyclopedia of Education**. Oxford: Elsevier, 2010. p. 702-705.

LAVELLI, M.; PANTOJA, A. P. F.; HSU, H. C.; MESSINGER, D.; FOGEL, A. Using microgenetic designs to study change processes. In: TETI, D. M. (Org.). **Handbook of Research Methods in Developmental Science**. Oxford: Blackwell Publishing, 2005. p. 40-65. Disponible en: https://www.wiley.com/en-am/Handbook+of+Research+Methods+in+Developmental+Science-p-9781405153959. Acceso en: 20 jun. 2019.

LEONTIEV, A. **Actividad, conciencia y personalidad**. Buenos Aires: Ediciones Ciencias del Hombre, 1978.

LEVI, B. **Leyendo a Euclides**. Buenos Aires: Libros del Zorzal, 2006.

LILJEDAHL, P.; DURAND-GUERRIER, V.; WINSLØW, C.; BLOCH, I.; HUCKSTEP, P.; ROWLAND, T.; THWAITES, A.; GREVHOLM, B.; BERGSTEN, C.; ADLER, J.; DAVIS, Z.; GARCIA, M.; SÁNCHEZ, V.; PROULX, J.; FLOWERS, J.; RUBENSTEIN, R.; GRANT, T.; KLINE, K.; MOREIRA, P.; DAVID, M.; *et al*. Components of mathematics teacher training. In: EVEN, R.; BALL, D. L. (Orgs.). **The professional education and development of teachers of mathematics**. NY: Springer, 2009. p. 25-34.

MCNEILL, D. (Org.). **Language and gesture**: window into thought and action. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN. **Estándares pedagógicos y disciplinarios para carreras de pedagogía en matemática**. Santiago: MINEDUC, 2021.

MOISE, E. E.; DOWNS, F. L. **Geometría moderna**. Traducido por Mariano García. EE.UU.: Addison-Wesley Publishing Company, 1996.

PINHEIRO, E. M.; KAKEHASHI, T.; ANGELO, M. Uso de filmagens em pesquisa qualitativa. **Revista Latino-Americana de Enfermagem**, v. 13, n. 5, p. 717-722, 2005. Acceso en: 20 jun. 2019. DOI: https://doi.org/10.1590/S0104-11692005000500016

PIRES, M. F. C. Education and the historical and dialectical materialism. **Interface - Comunicação, Saúde, Educação**, v. 1, n. 1, p. 83-94, 1997. Disponible en: http://hdl.handle.net/11449/30353. Acceso en: 20 jun. 2019.

PRIETO, J. L.; ARREDONDO, E.-H. Aprendizaje de las construcciones euclidianas con GeoGebra: elementos de una actividad formativa para futuros profesores de matemáticas, **Revista Paradigma**, v. XLI, n. Esp, p. 356-380, 2020. Acceso en: 23 ene. 2021. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.0.p356-380.id976

RADFORD, L. Elementos de una teoría cultural de la objetivación. **Revista Latinoamericana de Matemática Educativa**, n. Esp, p. 103-129, 2006. Disponible en: http://www.luisradford.ca/pub/58_Objectification3Spsh.pdf. Acceso en: 20 jun. 2019.

RADFORD, L. On the role of representations and artefacts in knowing and learning. **Educational Studies in Mathematics**, v. 85, n. 3, p. 405-422, 2014. Acceso en: 20 jun. 2019. https://doi.org/10.1007/S10649-013-9527-x

RADFORD, L. Saber y conocimiento desde la perspectiva de la teoría de la objetivación. In: D' AMORE, B.; RADFORD, L. (Orgs.). **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas**: problemas semióticos, epistemológicos y culturales. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2017a. p. 97-114. Disponible en: https://1bestlinks.net/ftro3. Acceso en: 20 jun. 2019.

RADFORD, L. Aprendizaje desde la perspectiva de la teoría de la objetivación. In: D' AMORE, B.; RADFORD, L. (Orgs.). **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas**: problemas semióticos, epistemológicos y culturales. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2017b. p. 115-136. Disponible en: https://1bestlinks.net/ftro3. Acceso en: 20 jun. 2019.

RADFORD, L. Un recorrido a través de la teoría de la objetivación. In: GOBARA, S. T.; RADFORD, L. (Orgs.). **Teoria da Objetivação**: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2020. p. 15-42. Disponible en: https://1bestlinks.net/lzk72. Acceso en: 15 dic. 2020.

RADFORD, L.; DEMERS, S.; GUZMÁN, J.; CERULLI, M. Calculators, graphs, gestures and the production of meaning. In: PATEMAN, N.; DOUGHERTY, B.; ZILLIOX, J. (Orgs.). **Proceedings of the 27 Conference of the international group for the psychology of mathematics education (PME27–PMENA25)**. Honolulu: PME, 2003. p. 55-62. Disponible en: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED501089.pdf. Acceso en: 20 jun. 2019.

RADFORD, L.; EDWARDS, L.; ARZARELLO, F. Introduction: Beyond words. **Educational Studies in Mathematics**, v. 70, n. 2, p. 91-95, 2009. Disponible en: https://1bestlinks.net/ljQMe. Acceso en: 20 jun. 2019.

RADFORD, L.; SABENA, C. The question of method in a Vygotskian semiotic approach. In: BIKNER-AHSBAHS, A; KNIPPING, C.; PRESMEG, N. (Orgs.). **Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education, Advances in Mathematics Education**. Dordrecht: Springer, 2015. p. 157-182.

REY, J.; BABINI, J. **Historia de la matemática**. De la antigüedad a la baja Edad Media. Volumen 1. Madrid: Gedisa, 1985.

RÍBNIKOV, K. **Historia de las matemáticas**. Moscú: Editorial Mir, 1987.

RUIZ, A. (Org.). **Mathematics teacher preparation in Central America and the Caribbean**. The cases of Colombia, Costa Rica, the Dominican Republic and Venezuela. San José: Springer, 2017.

SCRIBA, C.; SCHREIBER, P. **5000 Years of Geometry**. Mathematics in History and Culture. Basel: Springer, 2015.

SFARD, A. What could be more practical than good research? On mutual relations between research and practice of mathematics education. In: NISS, M. (Org.). **Proceedings of the**

10th International Congress on Mathematics Education. Roskilde: IMFUFA, 2004. p. 76-92.

SIMSON, R. **Los seis primeros libros, y el undécimo y duodécimo de los Elementos de Euclides**. Valladolid: Editorial Maxtor, 2014.

STEIN, M.; ENGLE, R.; SMITH, M.; HUGHES, E. Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 10, n. 4, p. 313-340, 2008. Acceso en: 20 jun. 2019. https://doi.org/10.1080/10986060802229675.

TATTO, M. T.; LERMAN, S.; NOVOTNÁ, J. Overview of teacher education systems across the world. In: EVEN, R.; BALL, D. L. (Orgs.). **The Professional education and development of teachers of mathematics**. NY: Springer, 2009. p. 15-23.

TARDIF, M. **Los saberes del docente y su desarrollo profesional**. Madrid: Narcea Editores, 2002.

TOSCA, T. **Compendio Mathematico**. Tomo I: en que se contienen todas las materias más principales de las ciencias que tratan de la cantidad. Valencia: Imprenta de Antonio Bordazar, 1757.

***Submetido em*:** 09 de agosto de 2021.

***Aprovado em*:** 15 de outubro de 2021.

***Publicado em*:** 02 de dezembro de 2021.

Como citar o artigo:
PRIETO, J. L.; ARREDONDO, E.-H. Construcciones euclidianas con GeoGebra y procesos de objetivación: Un estudio con futuros profesores de matemáticas. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, Belém/PA, v. 16, n. 39, p. 77-100, Set-Dez, 2021. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p77-100.id496