O Raciocínio Proporcional e a Resolução de Problemas na Formação Inicial de (futuros) Professores de Matemática

Proportional Reasoning and Problem Solving in Initial Training of (Future) Mathematics Teachers

Célia Barros Nunes
Universidade do Estado da Bahia – UNEB – Brasil

Manoel dos Santos Costa
Universidade Ceuma – UNICEUMA – Brasil

RESUMO

A investigação que está registrada neste artigo tem por objetivo analisar aspectos relevantes a respeito do raciocínio proporcional e da resolução de problemas na formação inicial de (futuros)[6] professores de Matemática. A pesquisa foi realizada com um grupo de licenciandos de uma universidade pública do Estado do Maranhão, que buscavam novos recursos para desenvolver os conteúdos matemáticos com seus (futuros) alunos. Trata-se de uma pesquisa de natureza qualitativa, cujos dados foram coletados através das observações realizadas pelo primeiro autor deste texto, enquanto os licenciandos resolviam os problemas propostos. No presente trabalho são apresentados os problemas em que percebemos indícios do raciocínio proporcional revelado por parte dos (futuros) professores, durante sua resolução. Os resultados mostram que no decorrer das atividades eles foram mobilizando novas estratégias de resolução aos problemas propostos, empregando tanto o pensamento quantitativo (que envolve algoritmos numéricos) quanto o qualitativo (que analisa e explica as estratégias utilizadas na resolução). Também, saíram da condição de ouvintes mostrando-se questionadores, investigativos, participativos e passando à posição de co-construtores de seus próprios conhecimentos.

Palavras-chave: Formação de Professores, Resolução de Problemas, Raciocínio Proporcional.

ABSTRACT

The purpose of the present investigation is to analyse relevant aspects about proportional reasoning and problem solving in initial training of (future) Mathematics teachers. The research was conducted with a group of students from a public University in Maranhão state, who searched for new resources to develop mathematical contents with their (future) students. It is a qualitative approach research, and the data were collected through the researcher's observations while the students were solving the proposed problems. In the present work, we show problems in which we noticed some indications of proportional reasoning revealed by those (future) teachers during its resolution. The results show that along the development of the activities, they managed to mobilize new resolution strategies to the proposed problems by using both quantitative thinking (which involves numerical algorithms) and qualitative thinking (which analyses and explains the strategies used in the resolution). They also moved from listeners to questioners, investigative, participant and co-builders of their own knowledge.

Keywords: Teacher training, Proportional reasoning, Problem Solving.

[6] Será utilizada**,** neste trabalho**,** a expressão "(futuros) professores", pois alguns participantes já atuavam como professores, embora se encontrassem em formação inicial.

Considerações Iniciais

Este artigo foi desenvolvido a partir de uma pesquisa realizada com um grupo de (futuros) professores de Matemática, estudantes de uma universidade pública do Estado do Maranhão, que buscavam novos recursos para desenvolver conteúdos matemáticos com seus (futuros) alunos. Nessa investigação o objetivo era verificar como esses (futuros) professores, em formação inicial, percebiam a possibilidade de explorar o conceito de proporcionalidade através da resolução de problemas. A partir desse estudo, buscamos, então, analisar aspectos relevantes, a respeito do raciocínio proporcional e da resolução de problemas, que emergiam dessa experiência de formação inicial de (futuros) professores de Matemática.

O presente trabalho está organizado em quatro seções principais. Iniciamos pela fundamentação e revisão teórica caracterizando o raciocínio proporcional e a resolução de problemas, situando-os, em seguida, na formação de (futuros) professores. Prosseguindo, descrevemos os participantes e a metodologia empregada na pesquisa, assim como os instrumentos utilizados. E, por fim, apresentamos os problemas envolvendo a proporcionalidade, trabalhado com os licenciandos, em que utilizamos como recurso metodológico a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas. Das resoluções apresentadas, faremos as discussões e análises, seguidas das considerações finais.

Caracterizando o Raciocínio Proporcional

O fato de muitos aspectos relacionados ao mundo real envolverem relações de proporcionalidade tornam as capacidades de raciocínio proporcional extremamente úteis e importantes na interpretação desses aspectos e de vários fenômenos. Essa relação entre a proporcionalidade e o mundo real é destacada por muitos pesquisadores que têm investigado sobre esse tema, alguns dos quais serão apresentados a seguir.

Lamon (2005) salienta que raciocínio proporcional não é sinônimo de proporcionalidade, mas constitui-se na condição necessária para a compreensão de contextos e aplicações baseadas na proporcionalidade. A autora afirma que o conceito de raciocínio proporcional vai muito além da mecanização de estratégias formais de resolução de problemas, estando associado à capacidade de analisar de forma consciente as relações entre quantidades, evidenciada por argumentos e explicações sobre as relações proporcionais.

Então, o que se entende por raciocínio proporcional?

Segundo Lamon (2005), o raciocínio proporcional implica na compreensão de uma relação multiplicativa constante entre duas grandezas (invariância) e na noção de que essas duas grandezas variam em conjunto (covariância).

Lesh, Post e Behr (1988) consideram o raciocínio proporcional como uma forma de raciocínio matemático que envolve o sentido de covariância e múltiplas comparações, assim como a aptidão para reunir e processar mentalmente várias informações. O raciocínio proporcional está relacionado com inferência e predição, envolvendo pensamento qualitativo e quantitativo. Os autores afirmam que o raciocínio proporcional realiza um papel fundamental no desempenho matemático dos alunos, podendo ser considerado a "pedra fundamental" do currículo da Educação Básica e uma base do pensamento algébrico. Além

disso, propicia a habilidade de compreensão das relações multiplicativas, enquanto a maioria dos conceitos da Aritmética é de natureza aditiva.

Cramer e Post (1993) acrescentam que o raciocínio proporcional permite a exploração de vários sistemas de representação como gráficos, tabelas e expressões para a mesma situação. Para os autores, um "pensador" proporcional, mais que aplicar algoritmos, tem a capacidade de resolver vários tipos de problemas, e as condições para isso são: (1) conhecer as características matemáticas de situações proporcionais; (2) compreender exemplos no contexto real e matemático de situações proporcionais; (3) perceber que podem ser usados vários métodos na resolução de atividades proporcionais e que esses métodos são relacionados; (4) saber como resolver atividades que envolvem raciocínio proporcional de natureza quantitativa e qualitativa; e (5) não ser afetado pelo contexto dos números nas atividades.

Tinoco (1996) salienta que, em alguns problemas, o raciocínio qualitativo não depende de valores específicos, sendo um importante meio para se esboçarem caminhos e respostas, bem como para verificar sua adequação ao problema.

Nesse sentido os *Curriculum Standards* - Padrões Curriculares (NCTM, 1989) já atribuíam lugar de destaque a esse tipo de raciocínio, que é de vital importância para o desempenho matemático dos alunos: o raciocínio proporcional "era de importância tão grande que merecia qualquer tempo e esforço gastos para assegurar o seu desenvolvimento cuidadoso" (NCTM, 1989, p. 82). Na realidade, ainda hoje, continua sendo de suma importância para o desempenho matemático dos alunos, de modo que essa ênfase ao raciocínio proporcional se mantém nos Padrões de Conteúdos, expressos nos *Standards* 2000 (NCTM, 2000), que destacam a necessidade de uma abordagem de integração entre "porcentagem, semelhança, escala, equações lineares, inclinação, histograma de frequência relativa e probabilidade" (NCTM, 2000, p. 212).

Ampliando essa ideia, Cyrino et al. (2014) dizem que o conceito de raciocínio proporcional é um pivô no processo de aprendizagem matemática, o ponto alto do aprendizado de Aritmética no Ensino Fundamental e, ainda, a base para futuros estudos de conceitos matemáticos mais complexos que envolvem proporcionalidade, como a Álgebra e as Medidas. Acrescenta os autores que

> O raciocínio proporcional é condição necessária para o entendimento do conceito de proporcionalidade e suas propriedades, e para a compreensão de contextos e aplicações que envolvem relações proporcionais tais como a Física e a Matemática mais avançada (CYRINO et al., 2014, p.35)

Encerrando tais reflexões, citamos Hoffer (1988), que destacou a existência de evidências de que não somente à época, o raciocínio proporcional na população em geral era insatisfatório, como de que grande segmento de nossa sociedade nunca as adquiriu. Nossa vivência pessoal e profissional, como professores e pesquisadores, nos leva a crer que essa realidade permanece. Sendo assim, consideramos que há necessidade de refletirmos sobre essa temática, na formação de (futuros) professores através da resolução de problemas.

Caracterizando a Resolução de Problemas

Educadores matemáticos do Brasil (ONUCHIC, 1999; ALLEVATO, 2005; NUNES, 2010; COSTA, 2012) e do Mundo (SCHROEDER; LESTER, 1989; VAN DE WALLE, 2009; SILVESTRE; PONTE, 2013) e documentos oficiais (BRASIL, 1998; NCTM, 2000) têm demonstrado preocupação em adequar o trabalho escolar a novas tendências que levem a melhores formas de ensinar, de aprender e de avaliar os conteúdos matemáticos. Portanto, ensinar Matemática não tem sido uma tarefa fácil. "As dificuldades intrínsecas somam-se às decorrentes de uma visão distorcida da disciplina, estabelecida, muitas vezes, desde os primeiros contatos do professor com o aluno" (MARANHÃO, 2000, p. 37).

Para Schroeder e Lester (1989) e Onuchic (1999), uma alternativa seria fortalecer e aprimorar o trabalho com resolução de problemas em sala de aula, conferindo-lhe sua principal função que é a de desenvolver a compreensão matemática dos alunos, sempre considerando que a compreensão ou não de determinadas ideias aparece quando se resolve um problema.

Os autores destacam três formas de abordar a resolução de problemas, que configuraram o trabalho do professor: ensinar **sobre** resolução de problemas, teorizando acerca da resolução de problemas, isto é, explicando estratégias e métodos para se obter a solução; ensinar Matemática **para** a resolução de problemas, em que o professor apresenta a Matemática formal para depois oferecer aos alunos o problema, como aplicação dessa Matemática - essa é a prática mais usual e fortemente impregnada da ideia de utilizar a resolução de problemas para fixar os conteúdos estudados; e ensinar Matemática **através** da resolução de problemas, em que o professor utiliza o problema como ponto de partida e orientação para o ensino, a aprendizagem e a avaliação ou seja, a construção do conhecimento pelos alunos far-se-á por meio da resolução do problema proposto.

Ainda hoje, apesar das alternativas para um trabalho diferenciado, há professores que ensinam Matemática considerando que os alunos aprendem unicamente pela repetição e memorização de ideias matemáticas. Para Allevato e Onuchic (2014), um bom caminho para o trabalho em sala de aula, seria o uso do que elas denominam de Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática **através** da Resolução de Problemas.

Com essa metodologia, o ensino e a aprendizagem de um tópico matemático começam com um problema, de modo que técnicas matemáticas e aspectos-chave desse tópico são evidenciados e desenvolvidos no percurso da busca da solução, e a avaliação é feita continuamente, durante a resolução do problema. Além disso, a metodologia contempla ações pedagógicas que promovem a busca por informação, a investigação, a experimentação, a renovação do interesse, a motivação dos alunos e a interação entre os alunos e o professor.

Nessa perspectiva, a resolução de problemas possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade de gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Eles têm oportunidade de ampliar tanto os conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos, como a visão que têm dos problemas da Matemática e do mundo em geral e, assim, desenvolver sua autoconfiança.

Essa abordagem apoia-se, especialmente, nas orientações dos *Standards 2000* (NCTM, 2000), em que a resolução de problemas é destacada como primeiro padrão de processo, e o ensino de Matemática através da resolução de problemas é fortemente recomendado. Também no Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998) apontam o

desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, explorar, generalizar e propor novos problemas a partir deles, como um dos propósitos do ensino de Matemática, indicando a resolução de problemas como ponto de partida das atividades matemáticas na sala de aula.

O Raciocínio Proporcional e a Resolução de Problemas na Formação Inicial de (Futuros) Professores de Matemática

O raciocínio proporcional é fundamental no ensino de Matemática, por isso é indicado que seja desenvolvido a partir dos anos finais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998). Nesse nível de ensino, o raciocínio proporcional envolve relações matemáticas multiplicativas, ao contrário das relações aditivas que são mais utilizadas pelas crianças que estão na fase inicial da vida escolar. É muito difícil para os alunos, nessa fase inicial, compreenderem essa relação multiplicativa das situações proporcionais, uma vez que é necessária certa maturidade matemática para compreender a diferença entre adicionar e multiplicar. Nessa perspectiva, uma possível indicação da causa das dificuldades apresentadas pelos alunos para compreender a relação multiplicativa das situações proporcionais pode estar na ênfase dada às relações aditivas nos primeiros anos da escolaridade (LAMON, 2005).

Pesquisas sobre o raciocínio proporcional (TINOCO, 1996; COSTA, 2012; SILVESTRE; PONTE, 2013) têm nos mostrado que há (futuros) professores que apresentam dificuldades quanto ao conteúdo proporcionalidade e à maneira que este deve ser ensinado nos Ensinos Fundamental e Médio. Geralmente, o conhecimento é limitado; por isso, ensinam de forma "mecânica" e desconectada de outros conteúdos matemáticos.

Cyrino et al (2014) propõem um estudo sobre o raciocínio proporcional na formação de professores de Matemática por também considerarem que eles não têm um conhecimento aprofundado dos conceitos e ideias relacionadas à proporcionalidade e ao raciocínio proporcional. Além disso, acreditam que esses conhecimentos podem subsidiar o trabalho docente e o desenvolvimento de propostas de ensino que promovam o desenvolvimento deste raciocínio em seus alunos.

A conclusão que essas pesquisas nos trazem é que, para melhorar essa situação, os cursos de formação inicial de (futuros) professores de Matemática deveriam apresentar os resultados dessas investigações, em tópicos e discussões, para que os licenciandos pudessem perceber sua importância no ensino de Matemática.

> A proporcionalidade é um tema indubitavelmente importante em Matemática e outras Ciências em âmbito escolar, e em diversas situações da atividade humana. Por isso, o pensamento proporcional tem sido objeto de estudo em Educação Matemática e em suas especialidades, a Psicologia da Educação Matemática, há várias décadas (MARANHÃO; MACHADO, 2011, p. 142).

Nesse sentido, Ponte (2002, p. 3) afirma que um curso de formação inicial de (futuros) professores de Matemática deve ser necessariamente diferente de um curso de Matemática que visa formar matemáticos. Do ponto de vista dos fatores que influenciam e caracterizam o processo educativo, dominar o conteúdo de ensino é condição necessária, mas não suficiente, ao professor, especialmente nos dias atuais. Adotando a premissa de que o pensar orienta o

fazer docente, a prática educativa e as teorias educacionais devem caminhar juntas na formação inicial do (futuro) professor (MIZUKAMI, 1986; MARCELO GARCÍA, 1999).

Além disso, outros estudos (SILVESTRE; PONTE, 2009; COSTA, 2012) sistematizando as ideias de Behr, Lesh e Post (1995) e Lamon (2005) – indicam o raciocínio proporcional como um aspecto importante a ser discutido nesses cursos de formação, por envolver três condições: (1) a capacidade para distinguir situações que têm subjacentes relações de natureza proporcional das situações que não o têm; (2) a compreensão da natureza multiplicativa das relações proporcionais; e (3) a capacidade de resolução de vários tipos de problemas, revelando a flexibilidade mental para realizar diferentes abordagens, sem ser afetada pelos dados numéricos, pelo contexto, pela linguagem utilizada ou pela forma como os problemas são apresentados: textos, gráficos, tabelas, razões.

Concordando com essas ideias, Camejo, Maranhão e Miranda (2009) consideram alguns aspectos como manifestações de um raciocínio proporcional, dos quais destacamos aqueles que, do ponto de vista de Costa (2012), podem servir como fontes de discussão e aprimoramento nos cursos de formação de (futuros) professores de Matemática: (a) utilizar estratégias pessoais para a resolução de problemas envolvendo pensamento proporcional; (b) distinguir situações proporcionais e não proporcionais; e (c) representar razões por meio de gráficos, tabelas, símbolos, desenhos ou diagramas.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN (BRASIL, 1998), a proporcionalidade e o raciocínio proporcional estão presentes no currículo escolar em diferentes níveis de escolaridade e atrelados a diferentes estudos e discussões envolvendo temas especificamente matemáticos ou não. No quarto ciclo do Ensino Fundamental o documento indica que ideias relacionadas à proporcionalidade devem aparecer na "resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de […] análise de tabelas, gráficos e funções" (BRASIL, 1998, p. 84).

Os Estados Unidos, no final da década de 1970 e início de 1980, já pensavam na resolução de problemas como sendo uma alternativa importante para o ensino de Matemática. No entanto, embora, nessa época, já existissem investigações produzidas e discutidas na Educação Matemática sobre o assunto, os professores ainda tinham dificuldades em discernir os diferentes processos utilizados na resolução de problemas e os fundamentos do seu ensino. Somente a partir dos trabalhos do NCTM (1980), que a Educação Básica (Ensinos Fundamental e Médio) começou a se preocupar mais em preparar seus alunos para resolver problemas.

Mas, foi a partir da década de 1990 que a resolução de problemas apareceu com destaque no cenário educacional. Ainda que o número de investigações fosse substancialmente pequeno, nesse período já se considerava que os cursos de formação inicial deveriam incluir atividades orientadas para a aprendizagem através da resolução de problemas.

Acompanhando esse movimento, no Brasil os PCN indicam a necessidade de mudanças nas formas de trabalho em sala de aula, pois a prática mais usual vinha sendo "aquela em que o professor apresenta o conteúdo oralmente, partindo de definições e exemplos [...] seguidos de exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação" (BRASIL, 1998, p. 37). Com esse tipo de trabalho que ainda hoje é, com frequência, realizado em sala de aula,

o aluno aprende a reproduzir o que lhe foi ensinado, mas não mostra uma aprendizagem efetiva ao se defrontar com novos problemas a resolver.

Vale (1997) considera que os cursos de formação inicial de (futuros) professores de Matemática devem proporcionar aos licenciandos a oportunidade de: (1) desenvolver modelos de ensino-aprendizagem fundamentados na resolução de problemas; (2) resolver problemas diversificados e (3) conhecer dificuldades, desempenhos, convicções, concepções e atitudes dos (futuros) professores perante a resolução de tais problemas. Segundo a autora, esse é um período "privilegiado, pois pode contribuir favoravelmente para o desenvolvimento das concepções dos futuros professores" (VALE, 1997, p. 2), e deve harmonizar um ambiente de aprendizagem em que eles tenham amplas oportunidades para resolver uma grande variedade de problemas. Esse ambiente deverá confrontá-los com as mesmas atividades e experiências que deverão propor aos seus (futuros) alunos.

Sendo assim, os cursos de formação inicial de professores de Matemática, devem, entre outras coisas, aprofundar conhecimentos sobre as competências e os saberes dos licenciandos, pois estes podem encontrar-se em melhores condições do que os professores que já estão atuando como docentes, no sentido de que poderão estar mais receptivos para a aprendizagem e para mudanças em suas concepções. Quanto mais soubermos sobre como reagem os (futuros) professores e o que sabem sobre os conteúdos matemáticos e sobre a resolução de problemas, mais facilmente poderemos ir ao encontro de uma metodologia de ensino que os ajude a ultrapassar determinadas dificuldades influenciando positivamente o seu ensino (VALE, 1997).

Vale salientar que as discussões específicas sobre a resolução de problemas na formação inicial de (futuros) professores de Matemática, tanto no Brasil como em outros países, são bastante pontuais. No Brasil, Nunes (2010) e Costa (2012) sugerem que esse trabalho seja feito com o intuito de propiciar momentos de reflexão e análise sobre as potencialidades que a resolução de problemas oferece no sentido de incrementar a aprendizagem e melhorar os processos de ensino de Matemática. Esses trabalhos destacam a importância de adequar aos licenciandos experiências que desenvolvam seus conhecimentos "em e sobre" a Matemática e "em e sobre" a resolução de problemas.

Nesse sentido, Onuchic e Allevato (2015) relatam experiências realizadas num curso superior de licenciatura em Matemática, envolvendo proporcionalidade através da resolução de problemas. As autoras apontam as dificuldades que os licenciandos apresentaram durante a resolução dos problemas envolvendo esse conceito; no entanto foi possível reconstruir e aprofundar conhecimentos sobre proporcionalidade e sobre outros relacionados a ele, considerando-o como conceito unificador. A metodologia de ensino através da resolução de problemas utilizada pelas autoras mostrou-se bastante eficaz, no sentido de ter criado situações de resgate, correção e ampliação de conhecimentos prévios, bem como de cnstrução de novos conhecimentos.

Portanto, a finalidade de discutir o raciocínio proporcional e utilizar a resolução de problemas na formação inicial de (futuros) professores de Matemática é desenvolver os conhecimentos e as práticas dos professores, não só para que possam reproduzi-las, mas, para prepará-los para uma prática docente que seja dinâmica, interativa e reflexiva.

O Contexto da Pesquisa e os Instrumentos Metodológicos

A pesquisa apresentada no presente artigo é de natureza qualitativa, cujos dados foram coletados através das observações realizadas pelo segundo autor deste texto, enquanto os licenciandos resolviam os problemas propostos envolvendo proporcionalidade. Os participantes envolvidos eram estudantes do primeiro período de um programa de formação inicial de professores de Matemática, de uma universidade pública do Estado do Maranhão, que buscavam, na época, novos recursos para desenvolver os conteúdos com seus (futuros) alunos.

Os encontros para a realização das atividades de pesquisa eram semanais e, foram realizados fora do horário normal de suas aulas, ou seja, no horário noturno, com duração de 4 horas cada um.

Tendo como objetivo analisar aspectos relevantes acerca do raciocínio proporcional e da resolução de problemas na formação desses (futuros) professores, durante a coleta dos dados, foram realizadas leituras e discussões de textos sobre o ensino de proporcionalidade, a resolução de problemas e a formação de professores, além de atividades práticas de resolução de problemas envolvendo o conteúdo em estudo.

As resoluções escritas desses problemas e as discussões, essas registradas em um diário de campo, constituíram os dados desta pesquisa, de modo que o pesquisador manteve contato direto com o ambiente e com os sujeitos envolvidos. Assim, o pesquisador foi o principal instrumento de pesquisa, responsável pela organização e condução das atividades desenvolvidas (GOLDENBERG, 2007).

A Análise e a Discussão dos Dados

Ao trabalharmos com resolução de problemas como ponto de partida para construir novos conceitos matemáticos, estamos corroborando com as ideias de Onuchic (1999), Nunes (2010), Costa (2012), Allevato e Onuchic (2014) e Onuchic e Allevato (2015). Os problemas aqui apresentados têm o intuito de "reconstruir" o conceito de proporcionalidade e, ao mesmo tempo, analisar se os (futuros) professores desenvolviam seu raciocínio proporcional durante a resolução do problema.

Vale ressaltar que as resoluções dos problemas foram conduzidas por meio de um roteiro de atividades sugerido para se trabalhar com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas[7].

O primeiro problema apresentado aos (futuros) professores foi:

Resolva e marque a alternativa correta para o problema.
Suely e Júlia estavam correndo na mesma velocidade ao redor de uma trilha. Suely começou primeiro. Quando Suely completou 9 voltas, Júlia completou 3 voltas. Quando Júlia completou 15 voltas, quantas voltas Suely completou? a) ( ) 45 voltas b) ( ) 24 voltas c) ( ) 21 voltas d) ( ) 6 voltas Este problema expressa uma situação de proporcionalidade? Justifique!

Fonte: Tinoco, 1996

[7] Para maiores detalhes sobre essa Metodologia, consultar Allevato e Onuchic (2014).

Para a resolução desse problema, os (futuros) professores se reuniram em duplas[8] após terem feito a leitura para entendimento do enunciado e esclarecimento de eventuais dúvidas. Com tudo esclarecido, começaram a resolver o problema. Enquanto isso, o pesquisador observava seus comportamentos e as estratégias de resolução.

A seguir, analisaremos algumas resoluções apresentadas. A dupla ADR1 e ADR3 fez três tentativas em que foram utilizadas estratégias diferentes:

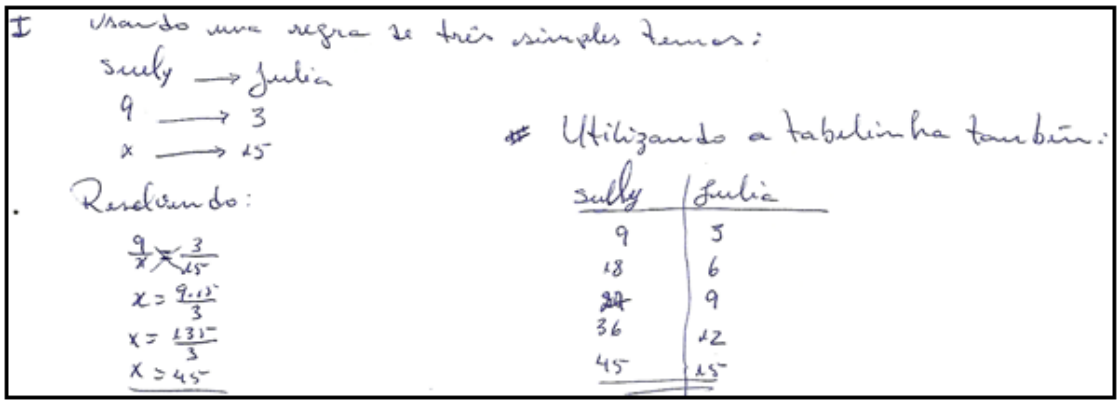

Figura 1: Resolução apresentada por ADR1 e ADR3
Fonte: Dados dos pesquisadores

Nessa primeira tentativa, os licenciandos utilizaram a regra de três simples a partir da definição de proporção, ou seja, da igualdade entre duas razões. Em seguida, construíram uma tabela para confirmar o resultado obtido.

Após a resolução, seguiu-se o diálogo:

Dupla: — *Professor, tem alguma coisa errada na resolução, não tem?*

Pesquisador: — *Por que vocês acham isso?*

Dupla: — *Ambas estão a uma mesma velocidade; a diferença é que Júlia começou a correr depois, então, pode Júlia dar 6 voltas e Suely 18?* [segunda linha da tabela].

Ao invés de responder aos questionamentos, o pesquisador pediu à dupla que fizesse novamente a leitura do problema, já que estavam com dúvidas quanto à solução, e ficou observando que estratégia utilizariam. Os licenciandos tentaram de outra maneira:

[8] Com o intuito de resguardar a identidade dos (futuros) professores, utilizaremos pseudônimos ADR1, ADR2, ..., ADRn para identificá-los.

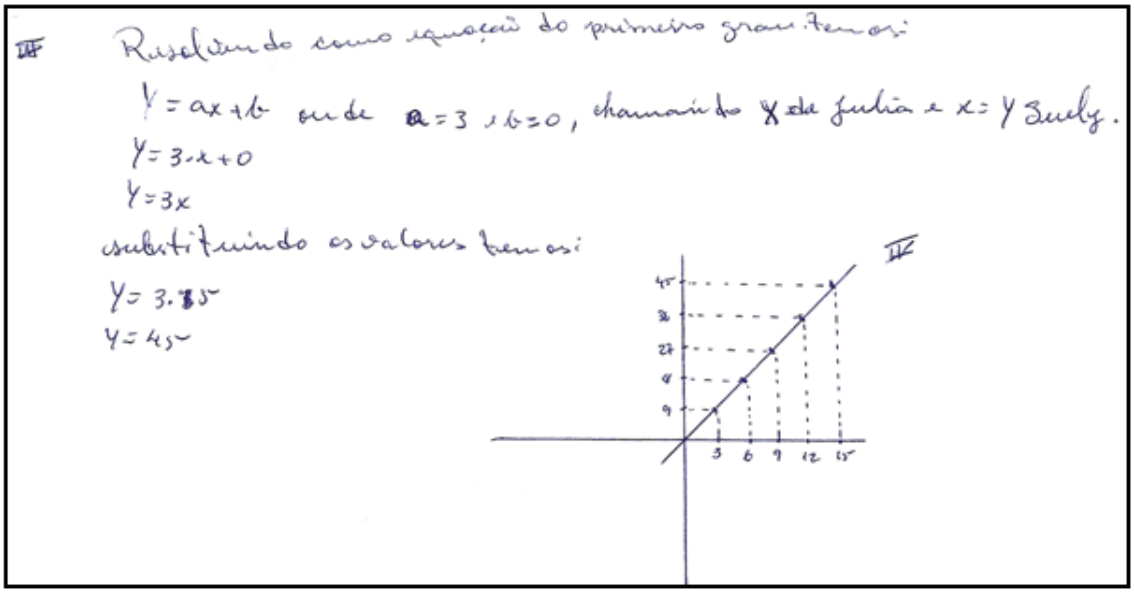

Figura 2: Resolução apresentada por ADR1 e ADR3
Fonte: Dados dos pesquisadores

Apesar de os licenciandos terem informado que resolveram usando uma "equação" de primeiro grau, na verdade, resolveram por meio da função y = *a*.x indicando relações multiplicativas, diretamente proporcionais, entre as variáveis x e y, que resultaram na constante de proporcionalidade *a*, no caso *a* = 3. E até representaram graficamente, mas chegaram à conclusão de que não estava correto, pois encontraram a mesma solução (45), obtida com a estratégia anterior. A dupla percebia que o que estava fazendo "matematicamente" não correspondia à situação expressa no problema. Dessa forma, achou que seria melhor resolver usando uma "linha de raciocínio" (palavras de um dos participantes da dupla).

Então, a dupla foi novamente questionada:

Pesquisador: — *Como assim, por uma linha de raciocínio?*

Um dos licenciandos respondeu:

ADR3: — *Como Suely partiu primeiro, a partir da sétima volta em diante, Júlia começou a correr junto com Suely, na mesma velocidade, sendo que Suely está 6 voltas à frente de Júlia. Logo, quando Júlia percorrer a décima quinta volta, Suely vai estar na vigésima primeira, pois Suely está 6 voltas à frente de Júlia*.

Foi solicitado a ADR1 e ADR3 que representassem matematicamente, ou seja, que escrevessem o que haviam acabado de explicar. A resolução apresentada foi:

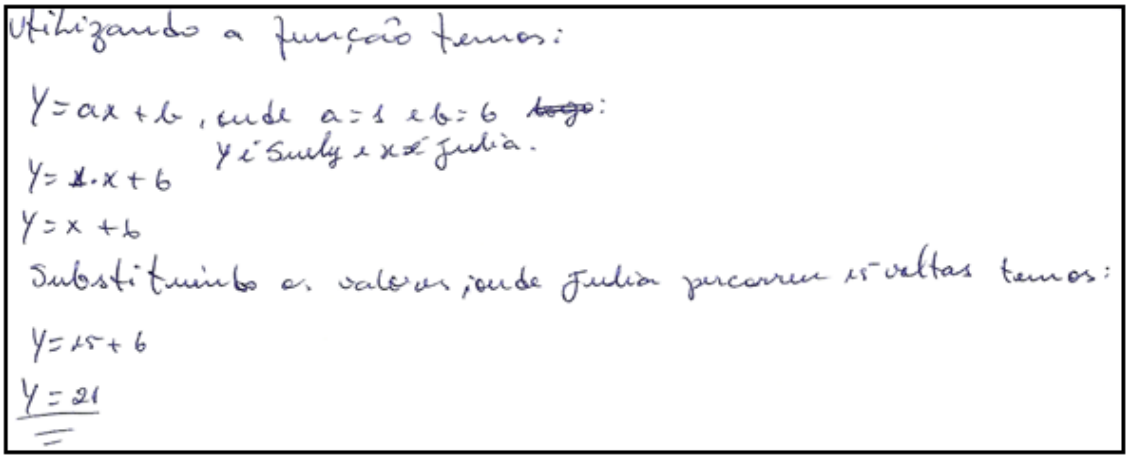

Figura 3: Resolução apresentada por ADR1 e ADR3
Fonte: Dados dos pesquisadoares

Desse modo, a dupla concluiu que o problema não expressa uma situação de proporcionalidade. Apesar disso, consideramos que foi o raciocínio proporcional que permitiu aos participantes chegar a essa conclusão, conforme explicitam Silvestre e Ponte (2013):

> [...] durante a aprendizagem formal da proporcionalidade direta os alunos devem trabalhar também com problemas que não envolvem a proporcionalidade direta. Em particular, o trabalho de sala de aula deve envolver problemas pseudoproporcionais, isto é, problemas que não envolvem proporcionalidade direta, mas geram nos alunos uma forte tendência para assumir a sua existência (SILVESTRE; PONTE, 2013).

Podemos observar nos processos com que desenvolveram as 3 (três) resoluções que os (futuros) professores utilizaram o raciocínio proporcional, bem como o conceito de proporcionalidade, embora por vez de forma equivocada, ao utilizarem habilidades para reconhecer, explicar, pensar sobre, fazer gráficos, fazer julgamentos, representar e simbolizar proporções diretas, conforme consideram Borralho, Monteiro e Espadeir (2004). Após as reflexões desenvolvidas no trabalho em grupo e as várias discussões, conseguiram perceber que o problema não se referia a uma situação envolvendo proporcionalidade (CAMEJO, MARANHÃO, MIRANDA, 2009).

Outras resoluções são apresentadas a seguir:

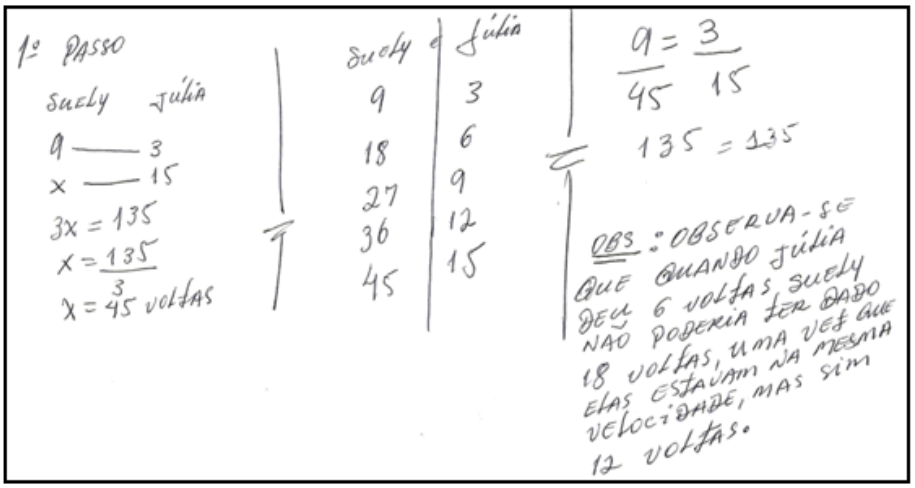

Figura 4: Resolução apresentada por ADR4 e ADR5
Fonte: Dados dos pesquisadoares

Nessa resolução, percebemos que a dupla, também utilizou mais de uma estratégia para confrontar os resultados. A dupla não tinha certeza quanto à solução encontrada, pois também percebeu que enquanto Júlia deu 6 voltas, Suely não poderia ter dado 18. Por isso, resolveu novamente o problema, agora obtendo a solução correta:

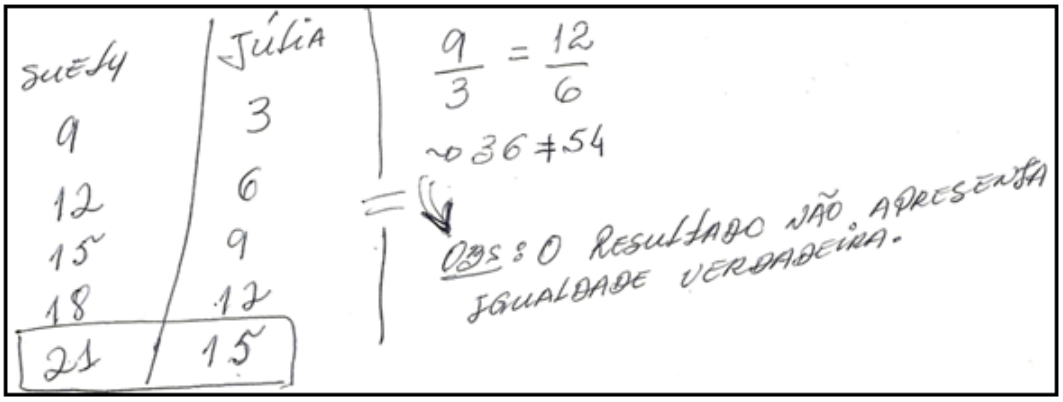

Figura 5: Resolução apresentada por ADR4 e ADR5
Fonte: Dados dos pesquisadoares

A dupla iniciou a resolução pela tabela; em seguida, utilizou o conceito de proporção para verificar se o resultado encontrado estava correto e, com isso, chegou à conclusão de que o problema não expressa proporcionalidade.

De fato, um dado essencial nesse problema, que não foi percebido de imediato e considerado pelos (futuros) professores, é que as atletas corriam a uma mesma velocidade. Assim, a partir da terceira volta de Júlia, em que a diferença entre as corredoras era de 6 voltas, essa diferença se mantém nas demais voltas. Quando Júlia terminou 15 voltas, Suely terminou 21 voltas. Ou seja, a comparação entre as grandezas não é multiplicativa, mas aditiva, não se configurando, de fato, uma situação de proporcionalidade.

Também, é possível observar nas resoluções apresentadas, que os licenciandos empregaram tanto o raciocínio quantitativo, que envolve algoritmos numéricos, quanto o qualitativo, ao explicarem as estratégias utilizadas.

Após todas as duplas terem concluído a resolução do problema e entregado por escrito todas as tentativas de resolução, realizamos a plenária para discussão das soluções obtidas e escolha da que era mais adequada ao problema, e, conforme consideram Allevato e Onuchic (2014), esse momento se mostrou bastante relevante para a construção do conhecimento acerca do conteúdo que queríamos trabalhar, qual seja, proporcionalidade.

O segundo problema proposto aos participantes está apresentado a seguir:

A turma de um curso de licenciatura resolveu fazer uma “vaquinha” para dar um presente ao coordenador. Todos os alunos vão colaborar. Se o presente custar R$ 2.000,00, cada aluno vai participar com R$ 80,00.
Se a turma escolher um presente de R$ 3.500,00, quanto deverá dar para cada aluno?
Complete a tabela a seguir:

2.000	80
1.000	
500	
3.500	

Agora responda:
a) Que grandezas variam no problema?
b) Essas grandezas são proporcionais? Por quê?
c) Observe a tabela. Que número se mantém constante?
d) O que esse número representa?

Fonte: Tinoco, 1996

Foi solicitado aos licenciandos que, inicialmente, o resolvessem individualmente. O pesquisador observava o trabalho sendo realizado e esclarecia dúvidas pontuais. As resoluções foram entregues por escrito, algumas das quais serão apresentadas a seguir. Nesse problema, os (futuros) professores tiveram poucas dúvidas, pois fizeram poucos questionamentos. Na Figura 6, apresentamos dois protocolos com o preenchimento da tabela:

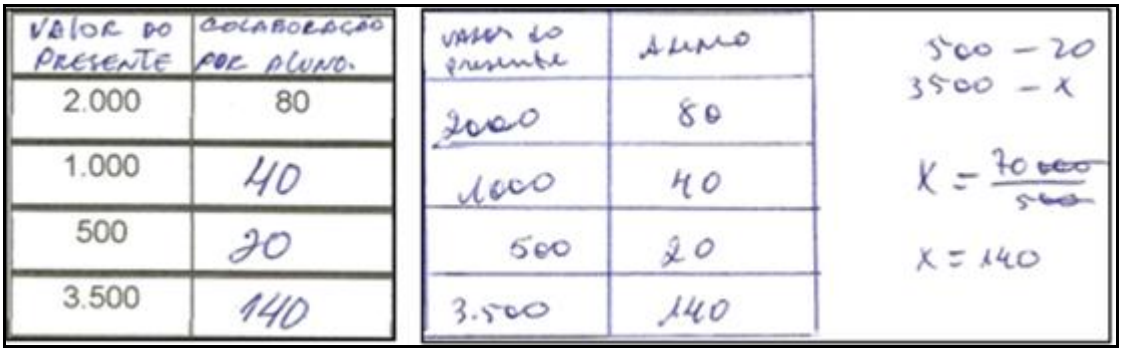

Figura 6: Respostas apresentadas por ADR5 e ADR3, respectivamente
Fonte: Dados dos pesquisadores

Os licenciandos foram orientados a manter todos os "escritos", relativos a cálculos ou outros, nas folhas que foram entregues ao pesquisador. Por isso, acreditamos que, no preenchimento da tabela, o licenciando ADR5 tenha utilizado uma estratégia diferente da de ADR3. Possivelmente, ADR5 tenha encontrado os valores da 2ª e da 3ª parcela por divisões sucessivas por 2; e os valores da 4ª linha da tabela, por adição dos valores anteriores (1ª, 2ª e 3ª linhas) ou, simplesmente, por multiplicação dos valores da 3ª linha por 7. De qualquer modo, esse licenciando não fez o registro escrito do processo, ou seja, calculou mentalmente os valores, realizando, assim, o raciocínio proporcional. ADR3 utilizou a estratégia da regra de três, conforme registro escrito, estratégia de resolução muito arraigada quando se trata de problemas envolvendo proporcionalidade.

Ao serem questionados sobre quais grandezas variam nessa situação, ADR4 respondeu que o valor do presente e o valor com que cada aluno vai colaborar, são as grandezas envolvidas no problema, e enquanto que, para ADR5 é a colaboração dos alunos.

Assim, embora tenham preenchido corretamente a 1ª linha da tabela (Figura 6) indicando quais eram essas grandezas, os licenciandos não relacionaram com o que lhes foi solicitado no item (a), sugerindo que o registro na tabela não estava acompanhado da compreensão efetiva de quais eram as grandezas envolvidas no problema.

Para o item (b), que questiona se as grandezas são proporcionais, as respostas, foram diversificadas. Para ADR3 as grandezas são proporcionais até 20 alunos, enquanto que para ADR5 as grandezas são proporcionais porque existe uma variação constante, a colaboração dos alunos.

Por essa resposta, percebemos que alguns dos (futuros) professores ainda apresentavam dificuldades em identificar uma proporção, ou seja, em perceber a relação diretamente proporcional entre duas grandezas, a ser expressa por uma função linear:

> Quando duas grandezas x e y são diretamente proporcionais, a razão y/x entre o valor de y e o valor correspondente de x é constante. Se o valor dessa constante é a, $a\neq0$, então $y/x=a$, ou $y = a.x$. Assim, dado o valor de x, para obtermos o valor correspondente a y, multiplica-se x pela constante a. Então a expressão $y = a$.x define y como uma função linear de x.

Um dos (futuros) professores conseguiu notar a presença da constante na relação, e afirmou:

ADR5: — *O problema trata de grandezas diretamente proporcionais. Logo, existe uma constante.*

Por isso, foi solicitado aos licenciandos que observassem a tabela preenchida e respondessem ao seguinte questionamento: Que número se mantém constante? Alguns dos participantes, mesmo depois de algumas discussões sobre o tema, ainda apresentaram dificuldade. ADR1 tendo respondido, no item (b), que as grandezas do problema são proporcionais, no item (c) respondeu que não tem esse número constante.

Então, durante as discussões, ADR3 fez o seguinte questionamento:

ADR3: — *Professor, não tem somente um número constante? Então, como saber o que ele representa?*

A dúvida, expressa oralmente por ele, também se manifestou na resposta escrita, em que o licenciando respondeu que as constantes seriam os números 20 e 500.

Vale ressaltar que apenas um licenciando (ADR2) apresentou o número 25 como sendo a constante. Para ele, as grandezas envolvidas nesse problema são proporcionais, e acrescentou:

ADR2: — *O custo do presente aumenta ou diminui na mesma proporção, de acordo com o valor que cada aluno contribui.*

E o que representa esse número que se mantém constante?

ADR5 respondeu que representa o valor da colaboração dos alunos.

As respostas indicam que, de fato, os (futuros) professores ainda não haviam percebido e compreendido que nas relações que representam grandezas proporcionais existe uma constante, a constante de proporcionalidade. Percebemos que essa dúvida permaneceu, em outros licenciandos, até o momento da formalização, quando todos esses aspectos foram esclarecidos: foi destacada a relação entre a constante que existe na relação multiplicativa e as grandezas do problema e, também, os fatos ligados à função afim que essa relação expressa.

Enfim, das resoluções apresentadas pelos (futuros) professores, podemos aferir que já haviam indícios do raciocínio proporcional quando demonstravam habilidades em reconhecer, explicar, pensar sobre, fazer gráficos e representar proporções diretas e a condução das atividades e discussões e reflexões realizadas possibilitaram o desenvolvimento desse raciocínio.

Considerações finais

Acreditamos, enfim, que os problemas aqui apresentados e discutidos foram geradores da reconstrução e ressignificação do conceito de proporcionalidade pelos (futuros) professores, embora o tenham utilizado, inicialmente, para a resolução, sem se atentarem para o seu significado. Naquele momento utilizaram simplesmente o algoritmo de resolução, o que demonstra que a compreensão conceitual e, de fato, o raciocínio proporcional são aspectos ainda negligenciados no ensino de proporção (CYRINO et al, 2014).

Não basta encontrar a solução para um problema; também é importante explicar como a encontrou. Por vezes, nos preocupa a maneira como o raciocínio proporcional tem sido trabalhado nas escolas: um ensino restrito a cálculos e à manipulação de regras, propiciando um desenvolvimento frágil e pouco significativo desse raciocínio matemático.

Dessa forma, acreditamos, a partir deste estudo desenvolvido, que um trabalho em sala de aula utilizando a Resolução de Problemas, especificamente a Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, favorece um ambiente de aprendizagem onde o aluno desenvolve-se ativamente, e experimenta avanços na construção do conhecimento. Os licenciandos entenderam isso a partir das reflexões desenvolvidas nesta experiência de formação.

Por fim, sugerimos aos professores que, durante o ensino formal de proporcionalidade, escolham criteriosamente os problemas a apresentar aos alunos, para que aprendam a resolver problemas progressivamente mais complexos e compreendam a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta (SILVESTRE; PONTE, 2013).

Referências

ALLEVATO, N. S. G. Resolução de Problemas. In: **Associando o Computador à Resolução de Problemas Fechados: Análise de uma Experiência.** 2005. 370 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2005.

_____.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: Por que através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. R. et al. (Org). **Resolução de Problemas:** Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 35-52

BEHR, M.; LESH, R.; POST, T. R. A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra. In: COXFORD, A. F. SHULTE, A. P. (Org.). **As ideias da álgebra.** Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995, p. 89-103.

BORRALHO, A.; MONTEIRO, C.; ESPADEIR, R. **A matemática na formação do professor**. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação – secção de Educação Matemática, 2004.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais** - 3º e 4º ciclos: Matemática. Brasília: MEC, 1998.

CAMEJO, A; MARANHÃO, C; MIRANDA, M. R. Ideias de professores dos anos iniciais sobre números racionais: In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2009, Brasília. **Anais**... Brasília: Universidade Católica de Brasília, 2009, p 12-13.

COSTA, M. S. **Ensino-aprendizagem-avaliação de proporcionalidade através da resolução de problemas:** uma experiência na formação inicial de (futuros) professores de matemática. 292 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2012.

CRAMER, K.; POST, T. Connecting research to teaching proportional reasoning. **Mathematics Teacher**, v. 86, n. 5, p. 404-407, 1993.

CYRINO, M. C. C. T, et al. **Formação de professores em comunidade da prática:** frações e raciocínio proporcional. Londrina: UEL, 2014.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar**: como fazer pesquisa qualitativa em ciências sociais. Rio de Janeiro: Record, 2007.

HOFFER, A. Ratios and proportional thinking. In: POST, T. (Org.). **Teaching mathematics in grades K-8**. Boston: Allyn & Bacon, 1988.

LAMON, S. **Teaching fractions and ratios for understanding**: Essential Content Knowledge and instructional strategies for teachers, 2. ed. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 2005.

LESH, R.; POST, T.; BEHR, M. Proportional reasoning. In: HILBERT, J.; BEHR, M. (Org.). **Number Concepts and operations in the midlle grades**. Reston, VA: Lawrence Erlbaum & NCTM, p. 93-118, 1988.

MARANHÃO (Estado). Secretaria de Estado da Educação. **Proposta Curricular do Estado do Maranhão** – Matemática: Ensino Fundamental – 5ª a 8ª série, 2000.

MARANHÃO, C.; MACHADO, S. Uma meta-análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional. **Educar em Revistas**, n. 1, p. 141-156, Editora UFPR, 2011.

MARCELO GARCÍA, C. **Formação de professores:** para uma mudança educativa. Porto: Porto, 1999.

MIZUKAMI, M. G. N. **Ensino**: as abordagens do processo. São Paulo: EPU, 1986.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHER OF MATHEMATICS. **An agenda for action**: Recommedations for school mathematics for the 1980s. Reston: NCTM, 1980. Disponível em http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=17278. Acesso em 25 abr. 2016.

_____. **Curriculum and evaluation standards for school mathematics**. Reston: NCTM, 1989.

_____. **Principles and Standards for School Mathematics.** Reston: NCTM, 2000.

NUNES, C. B. **O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas:** perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática. 2010. 430 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, 2010.

ONUCHIC, L. R. ALLEVATO, N. S. G. Proporcionalidade Através da Resolução de Problemas no Curso Superior de Licenciatura em Matemática. In: In: SEMINÁRIO

INTERNACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2015, Perinópolis. **Anais**... Perinópolis: Pousada dos Pirineus, 2015, p. 1-14.

_____. Ensino-Aprendizagem de Matemática através de Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática**: Concepções e Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

PONTE, J. P. A vertente profissional da formação inicial de professores de Matemática. **Educação Matemática em Revista**. a. 9, n. 11A – Edição Especial. Abril, 2002.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. Developing Understanding in Maathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Org.). **New Directions for Elementary School Mathematics**. Reston: NCTM, p. 31-42, 1989.

SILVESTRE, A.; PONTE, J. P. Raciocínio proporcional: uma perspectiva atual. **Educação e Matemática**: Revista da Associação de Professores de Matemática, n. 123, maio/junho, 2013.

_____; _____. Ser ou não ser uma relação proporcional: uma experiência de ensino com alunos do 6º ano. **Actas do XX Seminário de Investigação em Educação Matemática**: Associação de Professores de Matemática, 2009.

TINOCO, L. A. A. (Coord.) **Razões e Proporções**. Instituto de Matemática / UFRJ – Projeto Fundão – SPEC/PADCT/CAPES - Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 1996.

VALE, I. Desempenhos e concepções de futuros professores de Matemática na resolução de problemas. In: FERNANDES, D.; LESTER, F.; BORRALHO, A.; VALE, I. (Org.). **Resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática**: múltiplos contextos e perspectivas. Aveiro: GIRP, 1997. p.1-38.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

Célia Barros Nunes
Universidade do Estado da Bahia (UNEB) - Brasil
E-mail: celiabns@gmail.com

Manoel dos Santos Costa
Universidade Ceuma (UNICEUMA) - Brasil
E-mail: manoel.costa@ceuma.br