REMATEC
Revista de Matemática, Ensino e Cultura
Histórias de Práticas Matemáticas

INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS DOS SÉCULOS XVI E XVII NA ARTICULAÇÃO ENTRE HISTÓRIA, ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

LINKING HISTORY, TEACHING AND LEARNING MATH BY SIXTEENTH AND SEVENTEENTH CENTURIES MATHEMATICAL INSTRUMENTS

Fumikazu Saito
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Resumo

Neste artigo apresentamos o instrumento como suporte que veicula conhecimentos do "saber-fazer" matemáticos do século XVI. Discorro aqui apenas uma pequena parte de minha proposta de trabalho que procura articular história, ensino e aprendizagem de matemática. Tendo por foco a ideia de "medida" e de "medição", este texto busca por meio da história da matemática, pautada em perspectivas historiográficas atualizadas, apontar para alguns aspectos do processo da construção do conhecimento e suas possíveis implicações no processo de ensino e aprendizagem de matemática. A história da matemática é aqui articulada ao ensino e à aprendizagem com vistas a promover uma reflexão sobre o significado da medida de modo a levantar questões epistemológica acerca da medição.

Palavras-chaves: história da matemática, instrumentos matemáticos, ensino de matemática, epistemologia.

Abstract

This paper deals with instrument which embodies knowledge of sixteenth century "knowing by doing" mathematics. I here discuss a small part of my work proposal that aims at articulate history, teaching and learning mathematics. This work focus on the idea of "measure" and "measurement" and is based on a history of mathematics grounded on current historiography trend. Its purpose is to point out some aspects of constructing knowledge and implications in the process of teaching and learning mathematics. In this paper, the history of mathematics is articulated to teaching and learning to promote a reflection on the meaning of measure, raising epistemological questions about the notion of measurement.

Keywords: history of mathematics, mathematical instruments, teaching math, epistemology

Introdução

A medida faz parte de nosso cotidiano e não costumamos questionar a seu respeito. Basta colocarmos um termômetro em água fervente para logo constatarmos a "medida" de sua temperatura. Do mesmo modo, um teodolito "mede" ângulos verticais e horizontais, uma máquina de hemograma "conta" o número de células brancas e vermelhas, plaquetas, hemoglobina etc. e o relógio "mede" o tempo e "conta" as horas, os minutos e os segundos. Numa primeira aproximação, visto que estão sempre associados à noção de quantidade, esses instrumentos e máquinas, de certa maneira, "medem" alguma coisa. E essas medidas são tomadas como dadas e raramente são questionadas, pois não só os critérios e os padrões de medida, mas também os instrumentos que as executam já se encontram convencionados.

Os modernos instrumentos de medida parecem, dessa maneira, artefatos simples e óbvios em sua operação de modo que não questionamos o resultado, ou seja, aquilo que aparece num visor ou numa escala. Contudo, o processo que está por trás dessa operação é extremamente complexo não só do ponto de vista técnico-científico, mas também histórico.

Recentes estudos históricos têm revelado que o instrumento nunca foi neutro no processo da construção do conhecimento de modo que as medidas não podem ser reduzidas a uma fórmula óbvia e simples (VAN HELDEN, HANKINS, 1993; HANKINS, SILVERMAN, 1995; SAITO, 2009).

Convém observar que instrumentos sempre estiveram presentes no processo da construção do conhecimento em geral. Entretanto, sua importância foi enfatizada apenas no início do século XVII, quando “novos instrumentos”, concebidos em virtude da demanda por novos métodos matemáticos e experimentais, exerceram um significativo papel no desenvolvimento da ciência moderna (VAN HELDEN, 1983; BENNETT, 1986; KUHN, 1989; WARNER, 1990, 1994).

Esses instrumentos entraram em uso para facilitar a resolução de problemas matemáticos, observacionais e experimentais (DAUMAS, 1972; HACKMANN, 1989, TURNER, 1998). Dentre esses instrumentos, encontramos aqueles denominados "matemáticos", isto é, instrumentos concebidos para medir aquilo que Aristóteles (1952) denominava "quantidades" (distância e ângulos) (BENNETT, 1991, 1998, 2003).

No que diz respeito a esses instrumentos, que já eram fabricados em grande quantidade no século XIII (HACKMANN, 2003), seu número aumentou significativamente a partir do século XVI, revitalizando as práticas matemáticas, dandolhes não só mais visibilidade, mas também reforçando a associação entre filósofos naturais e outros artesãos, principalmente, os "praticantes de matemáticas"[7].

Um dos fatores que levou os praticantes de matemáticas, artesãos e estudiosos da natureza, geralmente patrocinados por príncipes, comerciantes, banqueiros e outros, a investirem na produção desses instrumentos está relacionada ao próprio contexto de época. As transações comerciais, a pequena indústria em pleno desenvolvimento, as operações bancárias, as questões militares, o aumento dos valores das terras, entre outros aspectos, impulsionaram o desenvolvimento de novas ferramentas pra lidar com a nova ordem econômica e social (SAITO; DIAS, 2011). Foi nessas circunstâncias que floresceram muitas oficinas dedicadas à fabricação de instrumentos matemáticos em várias regiões da Europa, notadamente, Louvain, Nuremberg, Florença, Londres, entre outras (CONNER, 2005).

Esses instrumentos matemáticos são apreciados pelos historiadores da ciência e da matemática de diferentes maneiras[8]. Neste artigo apresentamos o instrumento como suporte que veicula conhecimentos do "saber-fazer" matemáticos do século XVI. Tendo por foco a ideia de "medida" e do processo de "medição", este texto busca por meio da história da matemática, pautada em perspectivas historiográficas atualizadas, apontar para alguns aspectos do processo da construção do conhecimento e suas possíveis implicações no processo de ensino e aprendizagem de matemática.

Instrumentos matemáticos na interface entre história, ensino e aprendizagem de matemática

A proposta de reconstruir antigos instrumentos e utilizá-los para promover ensino e aprendizagem de matemática é bastante interessante. Entretanto, do ponto de vista do historiador, fornecer ao discente[9] apenas uma imagem do instrumento e diferentes ilustrações de seu uso não propiciaria nenhuma articulação entre história e ensino, pois o discente seria colocado frente a uma situação em que ele mobilizaria conhecimentos matemáticos atuais para reconstruí-lo e utilizá-lo para medir. Embora possamos reconhecer que a mobilização de conhecimentos para a reconstrução do instrumento já fornecesse importante contribuição para o processo de aprendizagem, a proposta nesse sentido não implicaria numa efetiva articulação entre história e ensino, visto que a história da matemática não teria aí contribuído a não ser na escolha do instrumento.

---

[7] Por exceder os objetivos desse artigo, não discorremos aqui sobre as diferentes práticas matemáticas, bem como sobre os praticantes de matemáticas no século XVI. A esse respeito, consulte Taylor (1954); McKiranhan (1978), Bennett (1991, 2003); Mancosu (1996), Hill (1998), Higton (2001), Mosley (2009) e Roux (2010).
[8] A lista é bem é bastante longa, vide, por exemplo: Warner (1994), Gabbey (1997), Kusukawa e MacLean (2006), Gessner (2010, 2013) e Saito (2013c).
[9] Referimo-nos por "discente", tanto o professor em formação quanto o aluno em sala de aula.

As potencialidades didáticas e/ou pedagógicas na reconstrução de instrumentos antigos podem ser exploradas por meio de uma proposta que busque revelar não só os conhecimentos matemáticos incorporados nesses instrumentos, mas também a complexa rede de conhecimentos que "esteve" e "está" presente no processo de sua construção e uso. Essa proposta confere à história da matemática uma papel mais significativo visto que a reconstrução dos instrumentos é realizada de maneira contextualizada, uma vez que a história da matemática é tomada como ponto de partida para o discente resignificar os conceitos matemáticos e levantar discussões epistemológicas que seriam relevantes para o ensino e a aprendizagem de matemática (SAITO, 2013a).

A nossa proposta, dessa maneira, busca articular história e ensino a partir da contingência histórica propiciada por documentos originais (SAITO, 2012a, 2012b). Isso, entretanto, não significa levar documentos originais e usá-los numa sala de aula, mas sim, por meio deles, construir uma interface entre história e ensino de matemática.

A não ser que se trate de uma pesquisa histórica, utilizar documentos originais nem sempre é recomendável, pois os discentes não estão preparados para lidar com eles. Assim, para construir uma interface entre história, ensino e aprendizagem de matemática sugerimos que os documentos sejam revistos e adaptados à proposta de articulação, preservando neles aspectos essenciais que permitam trazer à luz a concepção de ciência e de matemática que influencia, quando não fundamenta, a prática matemática de uma determinada época[10] (SAITO, DIAS, 2013).

A interface nesses termos é construída pautando-se em aspectos essenciais do fazer matemático de uma época, evitando-se adotar uma perspectiva normativa (ou filosófica) estranha ao contexto desse mesmo fazer matemático. Desse modo, a interface propicia ao discente o acesso à matemática do passado tal como ela era vista no passado, e não como ela deveria ser vista segundo uma perspectiva filosófica (ou epistemológica) ou didática pré-concebida (BROMBERG, SAITO, 2010; BELTRAN, SAITO, 2012; SAITO, 2013b). É nesse sentido que recentes estudos em história da ciência têm apontado para importantes contribuições das tentativas de reconstruir antigos instrumentos, pois o processo de reconstrução permite não só a compreender o significado histórico do registro descritivo, mas também os tipos de problemas (práticos e teóricos) enfrentados por seus fabricantes originais (WILLMOTH, 2009).

Contudo, é importante ter em conta que a reconstrução exata desses instrumentos é impossível visto que não temos notícias dos conhecimentos e técnicas mobilizados por artesãos na sua construção. A tentativa de reproduzir as condições materiais e históricas é impossível porque vivemos em outra época e, portanto, em outro contexto, em que os

[10] Denominamos "tratamento didático" a esse procedimento, vide Saito e Dias (2013).

conhecimentos matemáticos e extramatemáticos incorporados no instrumentos nos conduzirão a uma interpretação moderna e anacrônica do processo.

Embora indícios de tais conhecimentos, bem como de outras técnicas e práticas antigas, possam ser recuperados por investigação histórica, baseada em documentos originais, mesmo assim, a reconstrução não reproduzirá o processo real. Assim, mesmo que os conhecimentos e as operações requeridas em sua reconstrução tornem-se disponíveis, muito das práticas e técnicas antigas ainda requisitarão pesquisas históricas mais aprofundadas de modo que nada podemos inferir sobre os procedimentos efetivamente utilizados. Além disso, diferentemente do que se costuma pensar, muito do conhecimento geométrico compartilhado por artesãos, eruditos e outros estudiosos de matemática no século XVI não tinha por base apenas os *Elementos* de Euclides, mas também outras obras ligadas às práticas matemáticas, como abordamos mais adiante. Desse modo, embora o conhecimento geométrico incorporado nesses instrumentos sejam elementares, a sua relação com as diferentes práticas apontam para outros aspectos multifacetado das "matemáticas" que hoje não estão mais presentes na matemática moderna.

Mas, uma vez que a proposta de reconstrução de um instrumento matemático do século XVI não tem aqui por objetivo reproduzir exatamente o processo, mas propiciar valiosos *insights* da práticas e técnicas em voga naquela época, ela se torna interessante porque possibilita ao discente o acesso aos conhecimentos matemáticos incorporados no instrumento, tanto na sua construção, quanto no seu uso, para que então os (re)signifique.

Como já bem observamos em outros estudos, a construção de instrumentos e seu uso promove um deslocamento de concepções familiares para outras bastante incomuns. Esse deslocamento e a dialética proporcionada pela articulação entre duas diferentes concepções (do passado e do presente) favorecem a reconstrução das ideias matemáticas já preconcebidas e sedimentadas pelo discente, fazendo-o (re)significar o objeto matemático. Nesse movimento o objeto matemático é desconectado das malhas formais e reintegrado ao processo de sua elaboração, fazendo o discente tomar consciência de que a formalização é também uma construção.

Um exemplo disso é a atividade didática elaborada a partir do tratado *Del modo di misurare* de Cosimo Bartoli, publicada em 1564 (SAITO, DIAS, 2011). Esse tratado, como muitos outros disseminados nos séculos XVI e XVII ensina, entre outras coisas, como medir distâncias em diferentes situações utilizando diferentes instrumentos matemáticos. Para o desenvolvimento da atividade foram escolhidos, dentre os muitos instrumentos ali apresentados, três que eram muito comuns naquela época (figura 1): o quadrante geométrico, o quadrante num quarto de círculo e o báculo (DIAS; SAITO, 2010a, 2010b; 2011; SAITO, DIAS, 2013).

A atividade consistiu basicamente em fazer os participantes[11] seguirem as instruções fornecidas[12] por Bartoli para a construção e o uso do instrumento. Buscamos, assim, observar a articulação da interpretação da leitura dessas instruções com os conhecimentos que subjazem à concepção dos participantes do processo de medição. Um desses conhecimentos refere-se à escala e aos procedimentos de medida que não são nada convencionais. Assim diferentemente do uso de instrumentos hoje disponíveis para medir, essa atividade propiciou aos participantes a realizarem ligações conceituais necessárias à tarefa de mensurar grandezas.

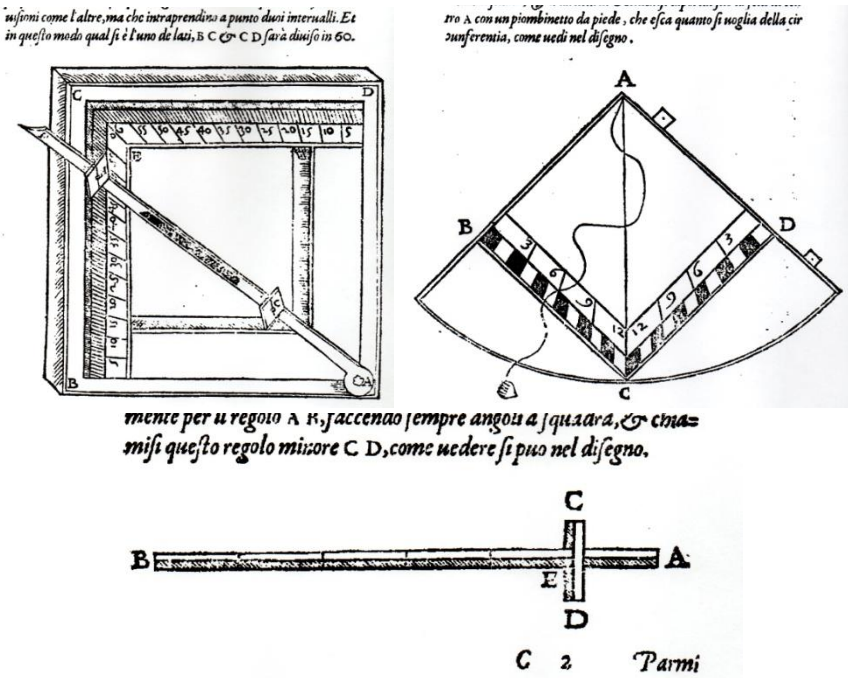

Figura 1: Da esquerda para a direita temos o quadrante geométrico e o quadrante num quarto de círculo e, abaixo, o báculo (BARTOLI, 1564, p. 3r, 8r e 10r)

No processo da atividade notamos que a leitura das instruções e as informações da figura, que acompanha o texto, não foram suficientes para que a realização de uma medida fosse imediata. Observamos que, no processo de medição, a posição do observador no espaço, a posição dos olhos em relação aos instrumentos e a posição do instrumento no espaço configuraram três ações não triviais aos participantes. Essas ações assim se configuraram porque os participantes estavam acostumados aos modernos instrumentos

[11] Esses participantes são alunos de pós-graduação e professores da educação básica e superior.
[12] Cabe observar que o texto utilizado na atividade passou antes por um "tratamento didático", tal como mencionamos anteriormente (SAITO, DIAS, 2013).

que, geralmente, ocultam as relações conceituais básicas necessárias para a realização de uma medida (DIAS; SAITO, 2010a, 2010b; 2011).

Convém aqui observar que esta atividade, elaborada na interface entre história, ensino e aprendizagem de matemática não teve por objetivo explicar, nem justificar, por meio da história, as dificuldades encontradas pelos participantes. A história da matemática foi articulada (entre outros propósitos) para promover uma reflexão sobre o significado da medida de modo a levantar questões epistemológicas acerca da medição. Podemos dizer que por meio dessa atividade de construção e uso de instrumentos, os participantes puderam visualizar parcialmente práticas e técnicas antigas de medição, flagrando no processo os aspectos conceituais fundamentais para se compreender o que é uma medida.

Um desses aspectos refere-se a relação entre o sujeito, instrumento e o ente a ser medido. Instrumentos matemáticos antigos nos dão acesso não só ao processo de medição, mas também do significado e o lugar dos diferentes instrumentos na construção do conhecimento matemático ou científico. Ao manusear os instrumentos para obter uma medida, os participantes notaram que o corpo de quem mede fazia parte do processo de mensuração, pois a medida dependia, tal como já mencionamos, da posição do observador no espaço, da posição dos olhos em relação aos instrumentos e da posição do instrumento no espaço (figura 2).

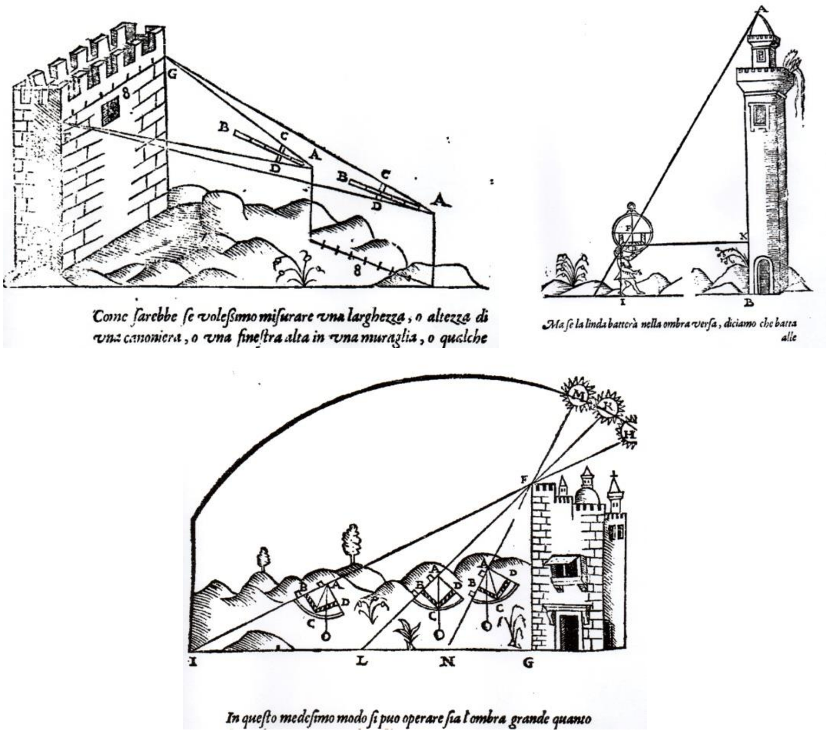

Figura 2: No báculo a medida é dada pelo deslocamento do observador; à direita e embaixo, a medida depende também da altura do observador (BARTOLI, 1564, p. 11v, 23 e 15v).

O uso de triângulos retângulos e/ou isósceles, bem como das relações de semelhança de triângulos, indica que a medida depende também da orientação do sujeito no espaço real. O traçado imaginário desses triângulos no espaço real, em que se situa o sujeito que mede, o torna consciente das relações geométricas inscritas no instrumento (vide figura 2). O instrumento matemático, assim, possibilita estabelecer uma relação entre o que se encontra inscrito no instrumento e o espaço em que se localiza o sujeito que mede.

Diferentemente dos modernos instrumentos, que geralmente realizam a medida com a mínima interferência de quem os manuseia (como uma régua, por exemplo), esses instrumentos requeriam não só destreza de quem os manuseava, como também de conhecimentos matemáticos relativos à medida. O sujeito fazia parte da medida porque, naquela época, os instrumentos ainda eram compreendidos como extensões da natureza (porém, não dos sentidos) (SAITO, 2011). Sem entrarmos em detalhes a esse respeito, podemos dizer que foi somente a partir da primeira metade do século XVIII que os instrumentos matemáticos, assim como os filosóficos, passaram a "mediar" definitivamente a relação entre aquele que "mede", "observa" ou "manipula" e a natureza. Isso porque ao longo do século XVII foi se constituindo os critérios e as convenções para seu uso, promovendo gradativamente a transcendência do homem em relação à natureza. Na medida em que a natureza passava a ser o outro, o instrumentos passaram a ser compreendidos como extensões dos sentidos humanos, adquirindo, assim, um papel mediador (SAITO, 2011, 2014).

A medida, portanto, era obtida (ou melhor, calculada) a partir da distância em que se encontravam o observador e o ente a ser medido. Nesse processo, o observador, o instrumento e o ente medido faziam parte de um só conjunto de ações que revela importantes aspectos ligados ao ato de medir. Como veremos a seguir, os instrumentos matemáticos, a geometria e outros segmentos do conhecimento das artes, que estiveram na origem dos modernos instrumentos de medida, apontam para um rico cenário que nos conduzem a refletir não só sobre as diferentes técnicas, mas também o conhecimento matemático ligado à medida. Esse cenário nos permite levantar questões de natureza epistemológica a respeito do significado de grandeza numérica e geométrica visto que nos dá acesso à diferentes práticas matemáticas do passado.

O número e a grandeza

Três aspectos fundamentais devem ser considerados quando nos referimos à medida: acessibilidade, adequabilidade e consistência. Isso significa que a medida deve ser acessível a todos, adequada ao que se quer medir e confiável, ou seja, ela deve ser convencionada.

Diferentes culturas em diferentes épocas "mediram" e "medem" por variadas razões sempre atendendo a diferentes propósitos em variadas circunstâncias. Nesse sentido, o corpo humano foi talvez o primeiro e o mais antigo instrumento medida. Assim, uma vez que o pé, o palmo, o côvado, a polegada, por exemplo, são estabelecidos como padrão, eles "corporificam" a unidade, conferindo-lhe identidade específica e concreta, como se fosse um artefato.

Contudo, o padrão de medida deve também se adequar ao que se quer medir. A medida, desse modo, requer uma escala própria ao objetivo pretendido, ou seja, o padrão para se pesar, por exemplo, não deve ser utilizado, para medir distâncias. Todavia, mesmo que a medida tenha uma escala, esta necessariamente deve ser consistente, segura e confiável, pois as medidas são como ferramentas, como bem observa Creese:

> as pessoas as utilizam com fins específicos, e se as condições mudam ou surgem novas finalidades, as medidas são adaptadas ou são improvisadas substituições. Porém, as comunidades precisam compartilhar e confiar nelas. Como resultado, adquirem vida própria, difundindo-se lentamente e sendo substituídas com relutância. Desenvolve-se uma interação entre tradição, a forma como a medições foram feitas no passado, e a evolução das necessidades (CREESE, 2013 , p. 66).

A história da ciência e da matemática nos fornecem, assim, exemplos variados e originais a esse respeito[13]. E ao fornecê-los não apenas os apresenta, como também trazem indícios de uma prática matemática e de outros aspectos ligados ao processo da construção do conhecimento matemático. Trataremos aqui apenas da arte de medir dos agrimensores que utilizavam escalas lineares para medir distâncias (comprimento) sem perder de vista, entretanto, outras escalas, tais como a angular, por exemplo.

Em linhas gerais, medir significa reduzir grandezas geométricas a números. Para tanto, requer-se de antemão uma unidade de medida. Cada grandeza é, assim, identificada ao número inteiro de unidades de medida que a compõem. A medida, portanto, é um procedimento que estabelece uma correspondência entre qualquer grandeza e um número inteiro, ou uma relação entre inteiros. Desse modo, "medir" significa essencialmente "comparar" e, muitas vezes, para medirmos, subdividimos uma das grandezas para obter a unidade de medida que caiba um número inteiro de vezes em ambas as grandezas a serem comparadas.

[13] Vide, por exemplo: Crosby (1999), Cohen (2005), Glennie e Thrift (2005) e MacLean (2006).

Todavia, no século XVI, atribuir um número a uma grandeza geométrica não era uma prática tão óbvia e bem fundamentada. Embora medidas do tipo cinco braças, três pés e duas polegadas, uma jarda e meia etc. fizessem parte do jargão do agrimensores, a atribuição de número ao comprimento medido (ou seja, para expressar uma quantidade) era feita informalmente.

É importante relembrar que, nos séculos XVI e XVII, a geometria e a aritmética, embora fossem campos de conhecimento matemático, eram consideradas separadamente. Isso é notório, por exemplo, nos livros V e VII de *Elementos* de Euclides que não apresenta nenhum equivalente à noção de "comprimento" de um segmento, nem trata de medidas de objetos geométricos em geral. O livro V, por exemplo, discorre sobre as grandezas numéricas (discretas) e nele não encontramos nenhuma menção sobre a possibilidade de multiplicar ou dividir as grandezas que são consideradas contínuas (geométricas). O Livro VII, por sua vez, trata dos números e suas operações e nele não encontramos nenhuma a relação entre número e grandeza geométrica (EUCLIDES, 2009).

A separação entre aritmética e geometria foi expressa por muitos estudiosos entre os séculos XVI e XVII, tais como John Dee (1527-160[8]), Egnatio Danti (1536-1586), entre muitos outros. Não encontramos até a publicação do tratado de aritmética de Simon Stevin (1548-1620), nenhuma teoria que confrontasse com essa noção clássica de números e grandezas geométricas. No entanto, como bem observa Malet (2006), no mundo árabe essas duas noções estavam se aproximando em razão do desenvolvimento da álgebra. Assim, é bem provável que a ideia de expressar uma grandeza geométrica por meio de números tenha sido transmitido ao ocidente latino por meio das escolas de ábaco que eram frequentadas por filhos de comerciantes, agrimensores, navegadores e toda sorte de praticantes de matemáticas.

De fato, tratados, tal como *Del modo di misurare* de Bartoli, por exemplo, foram muito utilizados em escolas de ábaco para instruir os filhos de artesãos e outros praticantes de matemáticas. Além disso, se considerarmos os tratados publicados por Fineo, Leonard Digges (*ca*.1515–*ca*.1559) e Johann Müller (Regiomontanus) (1436–1476), por exemplo, notamos que, em todos eles, o número é associado indiscriminadamente à grandeza geométrica. Todos esses tratados, embora tenham por referência e se fundamentem nos *Elementos* de Euclides, trazem, entretanto, no corpo de seus tratados modificações significativas para adequar o número à grandeza (MALET, 2006).

Podemos dizer que essa prática tornou-se comum a partir do século XVI e esteve associada, em parte, à disseminação de diferentes instrumentos matemáticos, principalmente aqueles utilizados em astronomia, navegação e agrimensura. As descobertas e o mapeamento de novas terras, a busca de métodos para localização das naus em alto-mar, a divisão de terras para o cultivo da agricultura e pecuária, a construção de fortificações, a organização bélica e militar de diferentes regiões da Europa, bem como da recém-descoberta América e da Ásia, formam um conjunto de fatores que fomentou o desenvolvimento de novas técnicas de medição. Instrumentos antigos foram, então, modificados e utilizados em diferentes contextos[14] (RICHENSON, 1996; BENNETT, 1991; SHORT, 2004).

Convém observar que a arte de medir é bem antiga. Entretanto, as origens das técnicas de medição do século XVI, remonta basicamente às práticas medievais que deram continuidade à tradição romana dos agrimensores (*agrimensores*)[15]. Considerada parte das muitas artes manuais (*technai*) ou mecânicas (*mechanikai*), a arte de medir era comumente vista como uma arte servil e inferior, portanto, não liberal. Foi ao longo do período medieval que a arte de medir começou a despertar interesse de alguns estudiosos de geometria, e até mesmo a ganhar espaço nos currículos universitários, porém num contexto muito peculiar[16].

A esse respeito, Zaitsev (1999) observa que, no início da Idade Média, a imagem clássica da geometria grega tinha passado por profundas mudanças que teriam rompido as barreiras entre metafísica, geometria e agrimensura. Isso decorreu, em parte, à nova configuração social, política e religiosa do ocidente latino, o que conduziu a uma reorganização do conhecimento, em que a referência etimológica passou a ser utilizada para classificar, expressar e captar a essência das diferentes "disciplinas" (*disciplinae*). Nesse contexto, o termo grego *geometria* passou a designar *mensuratio terrae* (a medição da terra) estabelecendo estreita relação com a agrimensura.

No início da Idade Média, os estudiosos de geometria, que desconheciam ainda os livros de *Elementos* de Euclides, passaram a estabelecer uma estreita conexão da *geometria* e a *gromatica*, isto é, a arte de medir terras com a *groma*, instrumento de medida romano que era utilizado para mapear e dividir as terras (ZAITSEV, 1999, p. 528-530). Nesse particular, é importante não perder de vista que, após a queda do Império Romano por volta do século V, grande parte do conhecimento grego ficara confinada no oriente e disponível aos árabes que o estudaram e o comentaram, desenvolvendo novas matemáticas. Assim, o parco material relativo à geometria de Euclides, que estava à disposição dos

[14] É importante aqui observar que a arte de medir ganhou impulso por causa dos altos valores que adquiriram as terras para cultivo no século XVI, fomentando diferentes práticas que lidavam com a organização do espaço, incluindo a cartografia, vide: Fischer (1996); Braudel (2002) e Short (2004).
[15] Sobre os agrimensores romanos e as técnicas utilizadas para medir, vide: Lewis (2001), Vitrúvio (1999) e Thulin (1913).
[16] Por "arte" não nos referimos a "belas-artes". Trata-se das muitas práticas manuais muito comum nos séculos XVI e XVII. A esse respeito, vide: Rossi (1989); Van den Hoven (1996); Long (2001) e Smith (2003).

estudiosos latinos, era muito simplificado e atendia basicamente às necessidades práticas do cotidiano.

Contudo, os medievais procuraram reorganizar os conhecimentos relativos à geometria e, com vista a de dar-lhe alguma coerência, aproximaram-na da *gromatica*. Mas, tal aproximação atendia a outros propósitos de natureza teológica e não necessariamente matemáticos. No início da Idade Média, elas eram exaltadas e apreciadas não só porque conduziam à compreensão da construção do universo, mas também porque davam acesso a Deus por meio da investigação piedosa de toda construção dos céus (ZAITSEV, 1999, p. 531-553).

A partir de então, as relações entre geometria, astronomia e agrimensura passariam a estreitar-se cada vez mais, compartilhando não só o conhecimento geométrico, mas também instrumentos e técnicas de medição. Essa aproximação, entretanto, também daria uma nova configuração ao campo de conhecimento geométrico à medida em que o tempo avançava. Assim, em meados da Idade Média, por volta do século XI, a cultura monástica buscou resgatar e ampliar as técnicas de medidas do mundo greco-romano, incorporando-as ao que ficou conhecido por *practica geometriae* (literalmente: "prática da geometria", mas comumente designado pelos historiadores como "geometria prática").

Diferentemente da geometria teórica (ou especulativa), que recorria à pura reflexão intelectual para estudar o espaço e os intervalos das dimensões, a *practica geometriae* tinha um apelo mais empírico, visto que estava sempre associada ao uso de instrumentos. Mas, ao contrário da *gromatica*, a *practica geometriae* não era mera aplicação do conhecimento geométrico a problemas de natureza prática, mas um ramo da própria geometria que incorporava aspectos mais teóricos, fazendo parte das sete artes liberais. Assim, Hugo de São Vitor (1096-1141), por exemplo, incluía a *practica geometriae* entre as artes liberais, como parte do *quadrivium*[17] (HUGH OF SAINT VICTOR, 1961).

Em *Didascalicon*, Hugo de São Vitor define "geometria" como "a medida da terra", seguindo a tradição medieval, tal como mencionamos anteriormente. E no que diz respeito à geometria, observa que ela é dividida em três partes: "planimetria" (*planimetria*), "altimetria" (*altimetria*) e "cosmimetria " (*cosmimetria*):

> Planimetria mede o plano, isto é, o comprimento e a largura, e, ampliando sua finalidade, mede o que está na frente e atrás, o que está à direita e à esquerda. Altimetria mede o aquilo que está elevado e, ampliando sua finalidade, mede o que atinge em cima e o que se estende embaixo: pois a altura é atribuída tanto ao mar, no sentido de profundidade, quanto a uma

---

[17] O *quadrivium* era constituído por quatro disciplinas, Aritmética, Música, Geometria e Astronomia que, juntamente com o *trivium* (Gramática, Lógica e Retórica) compunham as sete artes liberais. Sobre o *quadrivium* medieval, vide: Mongeli (1999, p. 161-329) e Gagné (1969).

> árvore, no sentido de estatura. *Cosmos* é a palavra que designa o universo e dele deriva o termo "cosmimetria", ou "medida do universo". Cosmimetria mede coisas esféricas, isto é, em forma de globo e arredondada, tais como uma bola ou um ovo e é, portanto, denominada "cosmimetria" a partir da esfera do universo, por conta da proeminência dessa esfera... (HUGH OF SAINT VICTOR, 1961, p. 70, tradução nossa).

Em outro tratado, intitulado *Practica geometriae* (1125?), Hugo de São Vitor, discorre sobre cada uma dessas três partes da geometria prática. Para cada uma delas, apresenta os instrumentos adequados para realizar a medição. Assim, além de astrolábios, espelhos, vara etc., a obra discorre sobre diferentes técnicas de medição, utilizando em grande parte as propriedades de triângulos retângulos (HUGH OF SAINT VICTOR, 1956, 1991).

Devemos notar que a geometria a que se referia Hugo de São Vitor, e que fazia parte do *quadrivium*, não era aquela que encontramos em *Elementos* de Euclides. Isso é compreensível, tal como já mencionamos, se considerarmos que as traduções dos tratados de Euclides e de Arquimedes, a partir do árabe, só se tornariam disponíveis aos estudiosos de geometria no século seguinte. Essas traduções, por sua vez, implicariam na reorganização do conhecimento, alargando o abismo entre geometria teórica e geometria prática.

Com efeito, no século XII, a edição e tradução de *Elementos* de Euclides por Adelard de Bath (1080-1152) e, posteriormente, por Campanus da Novara (1220-1296) passaram a roubar o cenário intelectual medieval ao lado da geometria prática. O estudo sistemático das obras de Euclides, notoriamente os *Elementos*, entretanto, não ofuscou o ensino da geometria prática. Além das técnicas de medida apresentadas em *Practica geometriae* de Hugo de São Vitor, outras encontradas no tratado intitulado *Geometria Geberti*, atribuído a Gerbert de Aurillac (946-1003) (posteriormente, Papa Silvestre II), que fazia uso sistemático de triângulos semelhantes para obter medidas (diferentemente dos romanos que utilizavam apenas triângulos congruentes), continuaram a ser disseminadas (HOMANN, 1991). Mas, além dessas duas formas de geometria, uma terceira transmitida por tradição oral começou a circular em forma manuscrita em alguns grupos a partir do século XIII. Tratavam-se de "cadernos de desenho", em que arquitetos e "mestres de obras" (carpinteiros e pedreiros) esboçavam genuínas "construções geométricas", tais como os desenhos de Villard de Honnecourt (SHELBY, 1972).

O ambiente intelectual, entretanto, mudaria radicalmente com o retorno da ciência grega a partir de finais do século XIV. E à medida em que se avançava em direção ao século XVI, a nova organização social, a recuperação de textos da antiguidade tardia, a expansão dos horizontes físicos proporcionada pela descoberta de novas terras, as mudanças que tiveram lugar nos métodos da arte militar, o crescimento do comércio e da pequena indústria e o surgimento da imprensa passariam a renovar o interesse pela especulação matemática. Foi nesse contexto que a geometria teórica e a agrimensura sofreram mudanças significativas.

Em meados do século XVI, a geometria prática e a arte da agrimensura tornaram-se praticamente indistintas e passaram também a incorporar alguns aspectos daquela "geometria construtiva" encontrada nos cadernos de desenho. Além disso, a agrimensura, assim como outras artes (*technai*), adquiriu um novo *status* nessa nova ordem social, visto que a arte de medir tinha se tornado importante para os príncipes e governantes em todos os novos segmentos de negócios naquela época. A navegação, a agricultura, a pecuária, a pequena indústria e o comércio requisitavam cada vez mais inovações em que a quantificação e a medida tinham papel fundamental. Assim, a valorização da arte de medir conduziu artesãos e agrimensores a publicarem em vernáculo tratados relacionados à instrumentos matemáticos e à técnicas de medida. Mas, diferentemente da "geometria prática" medieval, esses tratados passaram a incorporar demonstrações geométricas, baseadas nos teoremas encontrados em *Elementos* de Euclides, para validar os procedimentos utilizados para medir.

Esse movimento, que se caracterizou pela apropriação de conhecimentos da geometria teórica (especulativa) encontrada nas universidades à arte de medir, entretanto, não estava relacionado a questões de natureza essencialmente matemática. Sem dúvidas que, ao longo dos séculos XVII e XVIII, a precisão desses instrumentos se tornaria cada vez mais premente. Entretanto, no século XVI, a incorporação de alguns teoremas da geometria teórica nesses tratados estava mais relacionado ao lugar que a arte de medir ocupava na organização do conhecimento do que em dar mais "certeza" matemática às técnicas de medição. A incorporação de aspectos da geometria teórica conferia à arte de medir, que sempre fora considerada uma *techné* (arte manual e mecânica), o estatuto de arte liberal ou mesmo de *scientia* no sentido aristotélico, visto que encontrava-se subordinada à geometria.

Nesse contexto, podemos dizer que a arte de medir alargou seu escopo de atuação. Instrumentos não só utilizados em agrimensura, mas também em astronomia, navegação, cartografia, geografia, cosmografia, etc. receberam novos atributos e tornaram-se cada vez mais complexos em suas operações. Assim, no que diz respeito aos instrumentos utilizados em agrimensura, por exemplo, os fabricantes começaram a introduzir neles escalas angulares, muito utilizadas em astronomia e na navegação. Além disso, diferentes instrumentos, adotados por astrônomos e navegadores, foram adaptados às necessidades terrestres (BENNETT, 1991).

De fato, os três instrumentos apresentados por Bartoli em *Del modo di misurare* (o quadrante geométrico, o quadrante num quarto de círculo e o báculo), por exemplo, dispensavam o uso de ângulos para realizar a medida, visto que as escalas eram todas lineares (vide figura 1). Assim, embora já existissem instrumentos que apresentavam escalas angulares naquela época, tal como o "quadrante geométrico" de Oroncio Fineo (1494-1555), elas, entretanto, só seriam incorporadas de forma definitiva aos instrumentos ao longo do século XVII, como podemos notar, por exemplo, no "setor trigonal" de John Chatfeild (?) (figura 3)

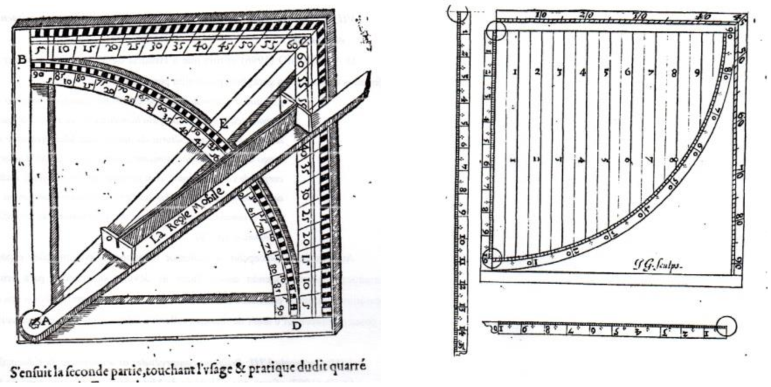

Figura 3: Da esquerda para a direita, o quadrante geométrico de Oroncio Fineo (1556, p. 3v) e o setor trigonal de John Chatfeild (1650, p. 1)

Mas, embora alguns desses instrumentos matemáticos tivessem incorporado escalas angulares, elas eram pouco utilizadas, visto que o uso das relações trigonométricas não estava ainda difundida, embora Johann Müller (Regiomontanus) já tivesse publicado *De triangulis omnimodis* (1533). As escalas angulares não eram utilizadas por razões de prática. O traçado preciso das escalas lineares já não era tarefa fácil de ser executada. Mas, os problemas encontrados para dividir um arco de círculo em partes iguais eram praticamente insuperáveis. Além do mais, a medida poderia ser determinada facilmente por meio de semelhança de triângulos conforme a geometria prática medieval, o que dispensava a escala angular. No entanto, a incorporação das técnicas trigonométricas ainda viria a ocorrer ao longo do século XVI e XVII. Os fabricantes de instrumentos matemáticos apropriaram-se dos métodos utilizados pelos astrônomos para construir suas escalas e procuraram incorporar aos instrumentos as escalas angulares.

A esse respeito, cabe observar que não temos notícias dos métodos de divisão de arco de círculo em pequenas partes. Segundo Richenson (1966, p. 83-85), Pedro Nunez teria descrito um dos primeiros métodos para divisão de arcos em seu tratado *De* *crespusculis Liber Unus*, publicado em Lisboa em 1542. Porém, o método mais comum, utilizado com bastante sucesso em finais do século XVI e início do XVII, parece ter sido o das escalas transversais e diagonais. É bem possível que Regiomontanus e Georg von Puerbach (1423-1461) tivessem conhecimento do método das transversais. Isso porque Tycho Brahe (1546-1601) teria dividido incorporado ao seu báculo (*cross-staff*) divisões de arcos utilizando o método das transversais em 1562. Outro indício é encontrado no tratado *Alae seu Scalae Mathematicae*, publicado em 1573, em que Thomas Digges (1546-1595) fornece uma imagem da escala linear dividida pelo método das transversais por meio do qual divide o báculo.

Considerações finais

O movimento histórico do conhecimento matemático associado ao instrumento e às diferentes práticas matemáticas no passado dá um significado mais amplo à medida. A restituição da medição ao seu processo histórico, extraindo-o das malhas formais da matemática moderna, dá acesso aos nexos conceituais que estão em torno do ato de medir. A dialética entre concepções do passado e do presente (re)significa, dessa maneira, a medição, fazendo emergir diferentes questões de natureza epistemológica.

Uma dessas questões refere-se aos procedimentos de medida e sua finalidade. Entretanto, como abordamos, a questão de "como medir" e "para que medir" são indissociáveis de outra, a saber, "o que é medição" (SAITO, 2014) Desse modo, a história nos mostra que a medida só faz sentido se considerarmos o ato de medir, em que o sujeito mobiliza diferentes ações que não são essencialmente matemáticas. A posição de quem mede, o alcance do objeto a ser medido, o manuseamento do instrumento, entre outros, são aspectos que fazem parte da medida. Além disso, o movimento histórico traz evidências de que nem mesmo a escolha de uma escala linear ou angular para se obter uma medida é um problema essencialmente matemático embora o uso de uma dessas escalas implique em discutir epistemologicamente a redução de uma em outra.

A medição, portanto, implica em diferentes escolhas, envolvendo essencialmente a associação de números a "graus" de certa grandeza (vide as escalas nas figuras 1 e 3). Associação esta que não é arbitrária embora, à primeira vista, assim pareça, pois acreditamos ser natural atribuir um número à qualquer grandeza. Por outro lado, tal associação também não é essencialmente teórica, pois, como vimos, a prática de medição antecede histórica e epistemologicamente a fundamentação teórica que permite estabelecer a correspondência de um número a uma grandeza geométrica. De um lado, isso é decorrência da organização do conhecimento matemático em que aritmética (estudo dos números) é entendida como campo de conhecimento distinto da geometria (estudo das formas). De outro, da relação que passa a existir, pelo menos entre os estudiosos de matemáticas, entre aritmética, geometria e física, entendida aqui num sentido mais amplo que abarca a ideia geral de ciências naturais. E eis aqui um ponto importante a ser considerado. "Medir" não significa "ler" um número na escala do instrumento e sim "interpretar" a correspondência estabelecida entre um número e uma quantidade, pois o número, correspondente à medida num instrumento, não é um numeral (abstrato), mas uma quantidade que, em última instância, é empírica (concreta).

Concluindo, do ponto de vista epistemológico, podemos dizer que a quantificação precede a medição, uma vez que a unidade de medida, incorporada no instrumento, tem origem empírica (um pé, um côvado, uma braça etc.). Assim, a grandeza geométrica, assunto que aqui tratamos, era entendida pelo agrimensor, astrônomo, navegador e outros praticantes de matemáticas como uma entidade concreta. Diferentemente do geômetra, que se dedicava à especulação abstrata dos entes geométricos, os praticantes de matemáticas do século XVI estavam preocupados com questões práticas de sua época. Por sua vez, do ponto de vista histórico, os instrumentos matemáticos do século XVI não atendiam a uma necessidade estritamente matemática. Tais instrumentos não eram produtos da geometria pura, mas de uma geometria prática que era compartilhada por um grupo de praticantes de matemática. Assim, a geometria incorporada nesses instrumentos não fazia dela uma geometria aplicada, concepção que só viria a surgir a partir de finais do século XVIII. Porém, é no século XVI que essas duas dimensões de geometria, teórica e prática, mediadas pelo instrumento matemático, passaram a estreitar suas relações, impulsionando o desenvolvimento de uma geometria moderna a partir do século XVII.

Referências

ALEXANDER, A. R. Introduction: Mathematical Stories. **Isis**, Chicago, v. 97, p. 678-682, 2006.

BARTOLI, C. **Cosimo Bartoli Gentil'huomo, et accademico Fiorentino, Del modo di misurare le distantie, le superficie, i corpi, le piante, le province, le prospettive, & tutte le altre cose terrene...**. Veneza: Francesco Franceschi Sanese, 1564.

BELTRAN, M. H. R.; SAITO, F. História da Ciência, Epistemologia e Ensino: Uma proposta para atualizar esse diálogo. IN: ***Atas do VIII ENPEC: Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências / I CIEC: Congreso Iberoamericano de Investigación en Enseñanza de las Ciéncias***. Campinas: ABRAPEC, 2012. p. 1-8.

BENNETT, J. A. The Mechanics' Philosophy and the Mechanical Philosophy. **History of Science**, v. 24, p. 1-28, 1986.

BENNETT, J. A. The challenge of practical mathematics. In: PUMFREY, S.; ROSSI, P. L.; SLAWINSKI, M. (Orgs.). **Science, Culture and Popular Belief in Renaissance Europe**. Manchester/New York: Manchester University Press, 1991. p. 176-190.

BENNETT, J. A. Practical Geometry and Operative Knowledge. **Configurations**, Baltimore, v. 6, p. 195-222, 1998.

BENNETT, J. A. Knowing and doing in the sixteenth century: what were instruments for?. **British Journal for the History of Science**, London, v. 36, n. 2, p. 129-150, 2003.

BRAUDEL, F. **Reflexões sobre a História**. São Paulo: Martins Fontes, 2002.

BROMBERG, C.; SAITO, F. A História da Matemática e a História da Ciência. IN: BETRAN, M. H. R.; SAITO, F.; TRINDADE, L. dos S. P. (Orgs.), ***História da Ciência:*** *tópicos atuais*. São Paulo: Ed. Livraria da Física/CAPES, 2010. p. 47-71.

CHATSFEILD, J. **The trigonall sector: The description and use thereof: Being an instrument most aptly serving for the resolution of all Rightlined Triangles with great faculty and delight...**. London: Robert Leybourn, 1650.

COHEN, I. B. **The Triumph of Numbers:** How Counting Shaped Modern Life. New York/London: W. W. Norton, 2005.

CONNER, C. D. **A People's History of Science:** Miners, Midwives, and "Low Mechanicks". New York: Nation Books, 2005.

CREESE, R. P. **A medida do mundo:** A busca por um sistema universal de pesos e medidas. Rio de Janeiro: Zahar, 2013.

CROSBY, A. W. **A mensuração da realidade:** A quantificação e a sociedade ocidental 1250-1600. São Paulo: Ed. Unesp, 1999.]

DANTI, E. **Le scienze matematiche ridotte in tavole**. Bologna: Compagnia della Stampa, 1577.

DAUMAS, M. **Scientific Instruments of the 17th & 18th Centuries and their Makers**. London: Portman Books, 1972.

DEE, J. **The Mathematical Preface of the Elements of Geometrie of Euclid of Megara** (1570). New York: Science History Publications, 1975.

DIAS, M. S.; SAITO, F. A resolução de situações-problema a partir da construção e uso de instrumentos de medida segundo o tratado *Del modo di misurare* (1564) de Cosimo Bartoli. IN: ***Anais Congresso Internacional – PBL 2010: Aprendizagem baseada em Problemas e Metodologias Ativas de Aprendizagem – Conectando pessoas, idéias e comunidades (8 a 11 de fevereiro de 2010, São Paulo, Brasil)*.** São Paulo: Pan American Network of Problem Based Learning/USP, 2010a.

DIAS, M. S.; SAITO, F. O ensino da matemática por meio de construção de instrumentos de medida do século XVI. IN: ***Anais do X Encontro Paulista de Educação Matemática: X EPEM.*** São Carlos: SBEM/SBEM-SP, 2010b. p. 1-4.

DIAS, M. S.; SAITO, F. História e ensino de matemática: o báculo e a geometria. IN: ***Anais do Profmat 2011 e XII SIEM (Seminário de Investigação em Educação Matemática) – Lisboa: 5 a 8 de setembro de 2011***. Lisboa: Associação dos professores de matemática, 2011. p. 1-11.

DIGGES, L. **A boke named Tectonicon. Briefelye shewynge the exacte, and speady reckenynge all manner lande, squared tymber, stone, steaples, pyllers, globes, etc...**. London: Iohn Daye for Thomas Gemini, 1556.

EUCLIDES. **Os elementos**. Trad. e Introd. de I. Bicudo. São Paulo: Ed. Unesp, 2009.

FINEO, O. **La composition et usage du Quarre Geometrique, par lequel on pu mesurer fidelement toutes longueurs, hauteurs, & profunditez, ...**. Paris: Gilles Gourbin, 1556.

FISCHER, D. H. **The Great Wave:** Price Revolutions and the Rhythm of History. New York/Oxford: Oxford University Press, 1996.

GABBEY, A. Between *ars* and *philosophia naturalis*: reflections on the historiography of early moderns mechanics. In: FIELD, J. V.; JAMES, F. A. J. L. (Orgs.). **Renaissance & Revolution:** Humanists, Scholars & Natural Philosophers in Early Modern Europe. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. p. 133-145.

Gagné, J. Du *Quadrivium* aux *Scientaie Mediae*. IN: **Arts Liberaux et Philosophie au Moyen Age.Actes du IVe Congrès International de Philosophie Médiévale: Univ. de Montreal, 27/08-02/09, 1967**. Montreal/Paris, J. Vrin, 1969.

GESSNER, S. Savoir manier les instruments: la géometrie dans les écrits italiens d'architecture (1545-1570). **Revue d'Histoire des Mathématiques**, Paris, v. 16, n.1, p. 87-147, 2010.

GESSNER, S. The Use of Printed Images for Instrument-Making at the Arsenius Workshop. **Early Science and Medicine**, Leiden, v. 18, n. 1/2, p. 124-152, 2013.

GLENNIE, P.; THRIFT, N. Revolutions in the Times: Clocks and the Temporal Structures of Everyday Life. IN: LIVINGSTONE, D. N.; WITHERS, C. W. J. (Eds.). **Geography and Revolution.** Chicago/London: The University of Chicago Press, 2005. p. 160-198.

HACKMANN, W. D. Scientific Instruments: Models of Brass and Aids to Discovery. In: GOODING, D.; PINCH, T.; SCHAFFER, S. (Orgs.). **The Uses of Experiment:** Studies in the Natural Sciences. Cambridge/New York: Cambridge University Press, 1989. p. 39-43.

HACKMANN, W. D. Natural Philosophy and the Craft Techniques of Experimentation. **Bulletin of the Scientific Instrument Society**, South Ruislip, v. 78, p. 35-37, 2003.

HANKINS, T. L.; SILVERMAN, R. J. **Instruments and the Imagination.** Princeton/New Jersey: Princeton University Press, 1995.

HIGTON, H. Does using an instrument make you mathematical? Mathematical practitioner of the 17th century. **Endeavour**, Michigan, v. 25, n. 1, p. 18-22, 2001.

HILL, K. "Juglers or Schollers?": negotiating the role of a mathematical practitioner. **British Journal for the History of Science**, London, v. 31, p. 253-274,1998.

HOMANN s.j., F. A. Introduction. IN: HUGH OF SAINT VICTOR. **Practical Geometry [Practica Geometriae] attributed to Hugh of St. Victor.** Milwaukee/Wisconsin: Marquette University Press, 1991. p. 1-30.

HUGH OF SAINT VICTOR. **Hvgonis de Sancto Vitore: Practica Geometriae**. Ed. R. Baron. **Osiris**, Philadelphia, v. 12, p. 186-224, 1956.

HUGH OF SAINT VICTOR. **The *Didascalicon* of Hugh of St. Victor:** A medieval guide to the arts. Ed. J. Taylor. New York/London: Columbia University Press, 1961.

HUGH OF SAINT VICTOR. **Practical Geometry [Practica Geometriae] attributed to Hugh of St. Victor.** Trad. F. A. Homann. Milwaukee/Wisconsin: Marquette University Press, 1991.

KUHN, T. S. Tradição matemática *versus* tradição experimental no desenvolvimento da ciência física. In: KUHN, T. S. **A tensão essencial.** Lisboa: Edições 70, 1989. p. 63-100.

KUSUKAWA, S.; MACLEAN, I. (Eds.). **Transmitting Knowledge:** Words, Images, and Instruments in Early Modern Europe. Oxford/New York: Oxford University Press, 2006.

LEWIS, M. J. T. **Surveying instruments of Greece and Rome**. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

LONG, P. O. **Openness, Secrecy, Authorship**: Technical Arts and the Culture of Knowledge from Antiquity to the Renaissance. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2001.

McLEAN, I. Diagrams in the Defense of Galen: Medical Uses of Tables, Squares, Dichotomies, Wheels, and Latitudes, 1480-1574. IN: KUSUKAWA, S.; MACLEAN, I. (Eds.). **Transmitting Knowledge:** Words, Images, and Instruments in Early Modern Europe. Oxford/New York: Oxford University Press, 2006. p. 135-164.

MALET, A. Renaissance notions of number and magnitude. **Historia Mathematica**, British Columbia, v. 33, p. 63-81, 2006.

MANCOSU, P. **Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century**. New York/Oxford: Oxford University Press, 1996.

MCKIRANHAN Jr., R. D. Aristotle's Subordinate Sciences. **British Journal for the History of Science**, London, v. 11, p. 197-220, 1978.

MONGELLI, L. M. org. ***Trivium & Quadrivium:*** As artes liberais na Idade Média. Cotia, Íbis, 1999.

MOSLEY, A. Early Modern Cosmography: Fine's *Sphaera Mundi* in Content and Context. In: MARR, A. (Org.). **The Worlds of Oronce Fine:** Mathematics, Instruments and Print in Renaissance France. Donington: Shaun Tyas, 2009. p. 114-136.

MÜLLER, J. **Regiomontanus On Triangles**. Trad. B. Hughes. Madison/Milwaukee/London: The University of Wisconsin Press, 1967.

RICHENSON, A. W. **English Land Measuring to 1800:** Instruments and Practices. Cambridge/London: The Society for the History of Technology/MIT Press, 1966.

ROSSI, P. **Os filósofos e as máquinas 1400-1700**. São Paulo: Companhia das Letras, 1989.

ROUX, S. Forms of Mathematization (14th-17th Centuries). **Early Science and Medicine**, Leiden, v. 15, n. 10, p. 319-337, 2010.

SAITO, F. Algumas considerações historiográficas para a história dos instrumentos e aparatos científicos: o telescópio na magia natural. IN: ALFONSO-GOLDFARB, A. M.; GOLDFARB, J. L.; FERRAZ, M. H. M.; WAISSE, S. (Orgs.). **Centenário Simão Mathias: documentos, métodos e identidade da história da ciência.** São Paulo: PUCSP, 2009. p. 103-120.

SAITO, F. **O telescópio na magia natural de Giambattista della Porta**. São Paulo: Educ/Ed. Livraria da Física/FAPESP, 2011.

SAITO, F. Possíveis fontes para a História da Matemática: Explorando os tratados que versam sobre construção e uso de instrumentos "matemáticos" do século XVI. IN: SILVA, M. R. B. da; HADDAD, T. A. S. (Orgs.), ***Anais do 13 Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia – FFLCH USP – 03 a 06 de setembro de 2012***. São Paulo: EACH/USP, 2012a. p. 1099-1110.

SAITO, F. History of Mathematics and History of Science: Some remarks concerning contextual framework. ***Educação Matemática Pesquisa***, São Paulo, v. 14, n. 3, p. 363-385, 2012b.

SAITO, F. História da Matemática e Educação Matemática: Uma proposta para atualizar o diálogo entre historiadores e educadores. IN: ***Actas VII Congreso Iberoamericado de Educación Matemática***. Montevideo: FISEM/SEMUR, 2013a. p. 3979-3987.

SAITO, F. “Continuidade" e "descontinuidade": o processo da construção do conhecimento científico na História da Ciência”. ***Educação e Contemporaneidade. Revista da FAEEBA***, Salvador, v. 22, n. 39, p. 183-194, 2013b.

SAITO, F. Instrumentos e o "saber-fazer" matemático no século XVI. ***Revista Tecnologia e Sociedade***, *Curitiba, v.* 18, n. especial, p. 101-112, 2013c.

SAITO, F. O "sentido da história": repensando o papel da história da matemática no ensino e na aprendizagem de matemática [em preparação], 2014.

SAITO, F. Revelando processos naturais por meio de instrumentos e outros aparatos científicos. IN: BELTRAN, M. H. R.; SAITO, F.; TRINDADE, L. dos S. P. (Orgs.). **História da Ciência:** Tópicos atuais 3. São Paulo: Ed. Livraria da Física/OBEDUC/CAPES, 2014. p. 95-115.

SAITO, F.; DIAS, M. S. ***Articulação de entes matemáticos na construção e utilização de instrumento de medida do século XVI***. Natal: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2011.

SHELBY, L. R. The Geometrical Knowledge of Medieval Master Masons. **Speculum**, Cambridge, v. 47, p. 395-421,1972.

SMITH, P. H. **The Body of Artisan:** Art and Experience in the Scientific Revolution. Chicago/London: University of Chicago Press, 2003.

SHORT J. R. **Making Space: Revisioning the World, 1475-1600.** New York: Syracuse University Press, 2004.

TAYLOR, E. G. R. **The Mathematical Practitioners of Tudor & Stuart England.** Cambridge: Institute of Navigation/Cambridge University Press, 1954.

THULIN, C. O. (ed.). ***Corpus Agrimensorum romanorum I. Opuscula agrimensorum veterum*.** Leipzig: Teubner, 1913.

VAN DEN HOVEN, B. **Work in ancient and medieval thought**: ancient philosophers, medieval monks and theologians and their concept of work, occupations and technology. Amsterdam: J. C. Gieben, 1996.

VAN HELDEN, A. The Birth of the Modern Scientific Instrument, 1550-1770. In: BURKE, J. G. (Org.). **The Uses of Science in the Age of Newton**. Berkeley/Los Angeles/London: University of California Press, 1983. p. 49-84.

VAN HELDEN, A.; HANKINS, T. L. Introduction: Instruments in the History of Science. **Osiris**, Philadelphia, v. 9, p. 1-6, 1993.

VILLARD DE HONNECOURT. **Album de Villard de Honnecourt architecte du XIIIe siècle, manuscrit publié en facsimile...** Paris: Imprimerie Impériale, 1858.

VITRÚVIO. **Da Arquitetura**. São Paulo: Hucitec/Fundação Para a Pesquisa Ambiental, 1999.

WARNER, D. J. What is a scientific instrument, when did it become one, and why?. **British Journal for the History of Science**, v. 23, London, p. 83-93, 1990.

______. Terrestrial Magnetism: For the Glory of God and the Benefit of Mankind. **Osiris**, Philadelphia, v. 9, p. 67-84, 1994.

WILLMOTH, F. "Reconstruction" and interpreting written instructions: what making a seventeenth-century plane table revealed about the independence of readers. **Studies in History and Philosophy of Science**, Notre Dame/Indiana, v. 40, p. 352-359, 2009.

ZAITSEV, E. A. The Meaning of Early Medieval Geometry: From Euclid and Surveyor's Manuals to Christian Philosophy. **Isis**, Chicago, v. 90, p. 522-553, 1999.

Fumikazu Saito
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – Brasil
REMATEC/Ano 9/n.16/ maio – agos. de 2014 p. 22 - 37
Email: fsaito@pucsp.br