ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES DO GEOGEBRA PARA UMA ABORDAGEM CORPORIFICADA DA CONVERGÊNCIA DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS NO CÁLCULO

SOME CONTRIBUTIONS OF GEOGEBRA SOFTWARE TO AN EMBODIED APPROACH OF THE CONVERGENCE OF NUMERICAL SEQUENCES IN CALCULUS

Daila Silva Seabra de Moura Fonseca
Instituto Federal de Minas Gerais – IFMG – Brasil
Regina Helena de Oliveira Lino Franchi
Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP – Brasil

Resumo
Este artigo apresenta algumas contribuições do software GeoGebra para a criação de ambientes de exploração, de modo a corporificar a convergência de sequências numéricas. Discute atividades desenvolvidas em uma turma de Cálculo como parte de uma pesquisa de Mestrado que teve como principais referenciais teóricos o Pensamento Matemático Avançado e os Três Mundos da Matemática. Os resultados indicam que o uso do GeoGebra contribuiu para a corporificação da convergência, na medida em que tornou possível a construção e a manipulação das sequências de forma dinâmica, e também para o estabelecimento de relações entre suas diferentes representações, por meio da conexão entre as janelas de visualização algébrica, gráfica e numérica.

Palavras-chave: Educação Matemática, GeoGebra, Três Mundos da Matemática, Convergência de Sequências.

Abstract
This paper presents some contributions of GeoGebra software for creating operating environments in order to embody the convergence of numerical sequences. It discusses activities in a course of Calculus as part of a Masters' research which had as main theoretical framework the Advanced Mathematical Thinking and the Three Worlds of Mathematics. The results indicate that the use of GeoGebra contributed to the embodiment of convergence, since it made possible the construction and manipulation of sequences in a dynamical way and also the establishment of relationships between its various representations, by connecting algebraic, graphical and numerical view windows.

Keywords: Mathematics Education, GeoGebra, Three Worlds of Mathematics, Convergence of Sequences.

Introdução

A convergência de sequências e séries faz parte dos temas tratados nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral. De fundamental importância para compreensão de conceitos centrais do Cálculo, as ideias relacionadas à convergência nem sempre são bem compreendidas pelos estudantes. Subjacentes a elas estão a passagem de operações finitas para operações infinitas e o conceito de limite que, muitas vezes, são abordados com ênfase nas operações e na estrutura formal, o que causa dificuldades de compreensão por parte dos estudantes (BAGNI, 2005).

Essas dificuldades, relacionadas ao tratamento simbólico e formal utilizado nos cursos de Cálculo, nos quais muitos dos conceitos são apresentados por meio de definições, com ênfase nas deduções e demonstrações de resultados, podem, em parte, ser atribuídas às diferenças entre o pensamento matemático exigido para esse tipo de abordagem e aquele vivenciado pelo estudante nos ensinos fundamental e médio.

Segundo Tall (1991), muitas vezes nas disciplinas de Matemática na graduação, a teoria é apresentada em sua versão final, omitindo-se o processo do pensamento matemático e o da criação da teoria, dos quais o aluno não participa. Entendemos que isso pode dificultar o desenvolvimento dessa nova forma de pensar exigida para a Matemática avançada dos cursos de graduação.

O início do processo de construção do pensamento matemático relativo a um determinado conceito pode estar nas primeiras percepções e ações sobre objetos matemáticos, no chamado *mundo corporificado* (Tall, 2002). O quadro teórico no qual essa ideia se apoia intitula-se Três Mundos da Matemática. Entendemos que o uso de *softwares* matemáticos, especialmente o GeoGebra[1], possibilita a criação de ambientes nos quais a convergência de sequências pode ser explorada, tendo como base a corporificação dos conceitos, visando, porém, a transição entre os Três Mundos da Matemática e, assim, desenvolvendo as bases para a compreensão de conceitos que demandam processos de pensamento matemático avançado.

Neste trabalho apresentamos um recorte de uma pesquisa de Mestrado desenvolvida pela primeira autora deste artigo, sob orientação da segunda, com o objetivo geral de verificar se o desenvolvimento de atividades baseadas na corporificação dos conceitos, em busca da transição entre os mundos corporificado e simbólico, com a utilização de *software* de geometria dinâmica, favorece a compreensão da convergência de sequências e séries. Para tanto, desenvolvemos um conjunto de atividades nas quais o GeoGebra foi utilizado para manipulação e visualização dos termos de sequências numéricas, buscando

---

[1] Disponível para *download* na versão 4.2 em http://www.geogebra.org/cms/en/installers. Para a utilização do *software* é necessário que esteja instalado o *plugin* Java, disponível em http://www.java.com.

as percepções no mundo corporificado e, por meio da experimentação e da reflexão, estimular a passagem para o mundo simbólico. A pesquisa foi desenvolvida em uma classe de alunos de um curso de engenharia de um Instituto Federal em que a primeira autora atuava como docente, utilizando metodologia de pesquisa qualitativa. Os instrumentos de coleta de dados utilizados foram: registros feitos pelos alunos nas folhas de atividades e avaliações, gravações de áudio dos diálogos entre os alunos durante a realização das atividades, gravações das telas dos computadores utilizando o *software* TipCam[2] e notas de campo da pesquisadora. Os dados foram analisados segundo dois eixos derivados dos quadros teóricos que embasaram esta pesquisa: a corporificação do conceito de convergência e a relação com a proceitualização e a axiomatização; e a transição do pensamento matemático elementar para o avançado.

Trazemos para este artigo uma reflexão a respeito das contribuições do GeoGebra para essa abordagem corporificada da convergência de sequências numéricas e para o estabelecimento de bases para tratamentos formais posteriores. Na próxima seção, apresentaremos os fundamentos do quadro teórico que utilizamos como referência para concepção das atividades e para a análise dos resultados obtidos.

Os Três Mundos da Matemática e o Cálculo

Desenvolvido por David Tall desde 2002, o quadro teórico denominado Três Mundos da Matemática apresenta uma concepção sobre o desenvolvimento cognitivo do pensamento matemático. Segundo Tall (2002, 2007) há três tipos muito diferentes de desenvolvimento cognitivo que habitam três diferentes mundos de operações que interagem entre si e que possuem maneiras diferenciadas de provar resultados. Os três mundos são: *conceitual/corporificado*, *proceitual/simbólico* e *formal/axiomático*.

O mundo *conceitual/corporificado* ou somente *mundo corporificado*, está na base do pensamento matemático e fundamenta-se "na percepção e reflexão sobre propriedades de objetos, inicialmente vistos e percebidos no mundo real, mas depois imaginados na mente"[3] (TALL, 2008, p.3). O termo *corporificado* é utilizado pelo autor para se referir ao pensamento construído, fundamentalmente, a partir das percepções sensoriais, ações e experiências de pensamento, no sentido de "dar um corpo" a uma ideia abstrata. A prova no mundo corporificado inicia-se com coisas verdadeiras, que podem ser

---

[2] O *software* TipCam faz vídeos com áudio de qualquer atividade realizada na tela do computador, tendo duração máxima de vinte minutos. Esse *software* está disponível para *download* em http://tipcam.softonic.com.br/.

[3] Tradução nossa para: "perception of and reflection on properties of objects, initially seen and sensed in the real world but then imagined in the mind".

visualizadas e percebidas, e é feita, em geral, por meio de experimentos nos quais é possível *ver* a verdade acontecer (TALL, 2004, 2008).

O mundo *proceitual*[4]*/simbólico* ou simplesmente *mundo simbólico* é o mundo dos símbolos que utilizamos para efetuar os cálculos e manipulações na Álgebra, Aritmética, Geometria, Cálculo, entre outros. Inicia-se com ações que são encapsuladas em conceitos matemáticos, tornando possível pensar sobre o que fazemos e não apenas sobre o que percebemos (TALL e MEJIA-RAMOS, 2004). A verdade no mundo simbólico fica estabelecida por meio do cálculo com números, da manipulação de símbolos algébricos e da utilização desses símbolos para generalizar as ideias (TALL, 2002, 2004).

O mundo *formal/axiomático*, conhecido também como *mundo formal*, é caracterizado pelo uso de definições formais para os conceitos, a partir das quais as deduções são feitas. Pressupõe a construção de um sistema axiomático como, por exemplo, a análise e a teoria de grupos (TALL, 2002). Este mundo surge de uma combinação de concepções corporificadas e manipulação simbólica (TALL, 2007). A verdade no mundo formal fica estabelecida por meio de prova formal a partir de axiomas e definições.

As provas nos mundos corporificado e simbólico são, em geral, bem compreendidas pelos alunos, pois explicam e mostram o porquê de um determinado resultado ser verdadeiro. Por outro lado, a prova no mundo formal, embora rigorosamente construída se mostra, muitas vezes, confusa para os alunos (TALL, 2007).

Como dito anteriormente, os Três Mundos da Matemática relacionam-se e apresentam interseções. Os critérios de verdade em cada um dos mundos interagem em uma sequência de desenvolvimento cognitivo, como apresentado por Tall (2007, p. 10) na figura 1.

Vê-se, pela esquematização da figura 1 que, no mundo corporificado, há uma sofisticação na utilização de linguagens para definir e deduzir as propriedades de objetos, o que pode levar a uma nova teoria dedutiva. A utilização de símbolos cada vez mais sofisticados sobre símbolos manipuláveis na compreensão das ações está presente no mundo simbólico. Existe uma interação entre os mundos corporificado e simbólico, uma vez que a corporificação é utilizada para dar sentindo ao simbolismo e o simbolismo, para estruturar o que foi corporificado.

[4]A palavra "proceito" foi desenvolvida por Tall e Gray para representar a dualidade entre o processo (ação) e o conceito que constituem os símbolos na Matemática. Para mais informações sobre esse assunto, veja Gray e Tall (1994).

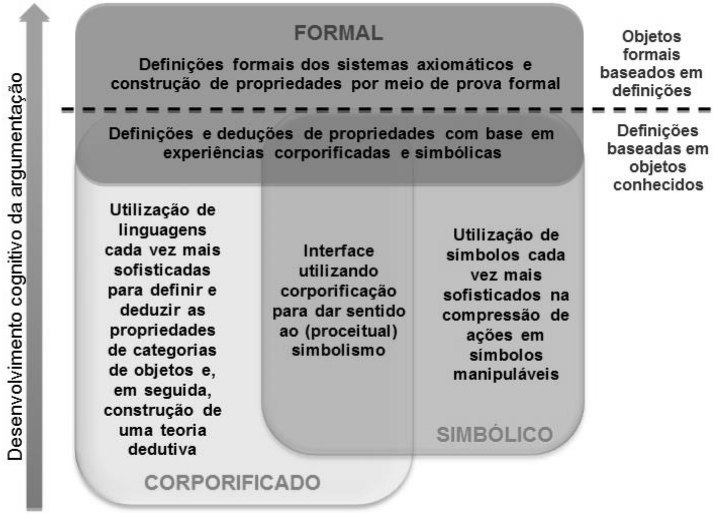


Figura 1. Desenvolvimento cognitivo da argumentação

Com a utilização de linguagens e símbolos cada vez mais sofisticados, é possível desenvolver níveis mais avançados de corporificação e de simbolismo, o que resulta no surgimento de definições e deduções que interferem na fase de transição dos argumentos baseados na experiência para os que compõem um sistema axiomático, presente na prova formal.

Com relação ao Cálculo, Tall (2002) caracteriza os três mundos:

> O **mundo corporificado** é um mundo de significado *sensorial*. Seu fundamento da verdade é que as coisas se comportam previsivelmente, de uma maneira esperada.
> O **mundo proceitual** é o mundo familiar tradicional do Cálculo em que os cálculos podem ser feitos (ambos aritméticos e algébricos). Um gráfico tem uma inclinação (derivada) ou uma área (integral), pois você pode *calcular isso.*
> O **mundo axiomático** é um mundo em que axiomas explícitos são assumidos para dar suporte e definições são dadas formalmente, em termos de quantificado conjunto de declarações teóricas. A função tem derivada ou integral, porque você pode *provar* isso. (TALL, 2002, p. 10)[5]

---

[5] Tradução nossa para: "The **embodied world** is a world of *sensory* meaning. Its warrant for truth is that things behave predictably in an expected way. The **proceptual world** is the familiar traditional world of calculus where calculations can be made (both arithmetic and algebraic). A graph has a slope (derivative) or an area (integral) because you can *calculate* it. The **axiomatic world** is a world where explicit axioms are assumed

Segundo Tall (1991, 2002), os cursos de Cálculo devem combinar os mundos corporificado e simbólico, não precisando ter como objetivo o tratamento formal, característico da última fase do desenvolvimento cognitivo, devendo esse tratamento ser feito na Análise. Concordamos com o autor e defendemos que nos cursos de Cálculo devemos transitar entre os mundos da Matemática por meio de atividades que permitam tanto a simbolização de conceitos corporificados, como a corporificação de simbolismos. Consideramos também que os ambientes devem propiciar trabalhos que, partindo do mundo corporificado, possam lançar bases para tratamentos formais posteriores atingindo o que no quadro da figura 1 aparece como interseção dos Três Mundos da Matemática e que foi chamado por Fonseca (2012) de *base do mundo formal*.

Entendemos que *softwares* de Matemática Dinâmica[6] podem ser usados para a construção de ambientes informatizados nos quais objetos matemáticos podem ser explorados pelos estudantes de maneira diferente das imagens estáticas usualmente trabalhadas no Cálculo (TALL, 2002), o que facilita a transição entre os Três Mundos da Matemática. Concordamos com Tall (2002) quando ele afirma que o uso adequado de um *software* nos permite organizar várias atividades que podem levar o aluno a realizar experiências de pensamento, favorecendo a corporificação de conceitos de Cálculo. Fonseca (2012) interpreta que, por meio de atividades que permitem a visualização e a manipulação da Matemática, é possível, não apenas a corporificação, como também a proceitualização a partir da reflexão sobre a ação realizada e do uso da simbologia adequada.

Atividades desenvolvidas nesse tipo de ambiente informatizado estão de acordo com o que Kawasaki (2008, p. 49) descreve para as propostas educacionais de construção da Matemática por meio do uso do computador: "não assumem a ideia tradicional de uma matemática 'pronta' ou 'acabada' a ser ensinada, mas admitem também a possibilidade de se 'fazer' matemática em uma atividade de aprendizagem".

Dessa forma, é possível iniciar o processo de construção do pensamento matemático avançado exigido para a criação de teorias matemáticas e compreensão de conceitos da matemática superior tais como, por exemplo, o conceito de convergência de sequências numéricas.

---

to hold and definitions are given formally in terms of quantified set-theoretic statements. A function has derivative or integral because you can *prove* it."

[6] A expressão "Matemática Dinâmica" está ligada à "geometria dinâmica", que, segundo Zulatto (2003), relaciona-se com os *softwares* que permitem "que construções geométricas sejam arrastadas pela tela mantendo-se os vínculos estabelecidos durante a construção" (p. 1). Além das representações geométricas, os *softwares* de matemática dinâmica também permitem representações e manipulações algébricas.

Nas próximas seções discorreremos sobre possibilidades de criação de ambientes, com características como as descritas acima e com uso do GeoGebra, para abordagem da convergência de sequências.

As potencialidades do *software* GeoGebra para uma abordagem corporificada da convergência de sequências

Apresentamos nesta seção possibilidades de utilização do GeoGebra para a criação de ambientes informatizados que permitem a exploração do conceito de convergência de sequências numéricas, numa abordagem corporificada e com vistas à transição entre os Três Mundos da Matemática. Essas possibilidades serão discutidas tendo como referência um conjunto de atividades desenvolvidas em uma turma de Cálculo, no ano de 2011, no contexto da pesquisa de Mestrado anteriormente mencionada.

As atividades foram aplicadas em aulas práticas em laboratório, com uso do GeoGebra, e em aulas teóricas. Nas aulas práticas, buscamos criar ambientes em que os alunos pudessem explorar os conceitos, por meio da experimentação, formulando e verificando conjecturas, visando à corporificação dos conceitos. Nas aulas teóricas, essas atividades foram discutidas e os conceitos foram formalizados.

O GeoGebra foi escolhido pelas seguintes razões: é um *software* de matemática dinâmica, gratuito, multiplataforma e de fácil utilização. No caso específico das sequências, o programa permite construí-las, alterar o número de termos e observar suas características.

O *software* possibilita que um mesmo objeto possa ser representado algébrica, gráfica e numericamente. Essas representações são apresentadas nas janelas de Álgebra, de Visualização e na Planilha (figura 2), que são conectadas entre si, ou seja, ao efetuar uma modificação no objeto em uma das janelas é possível acompanhar as consequentes modificações nas demais.

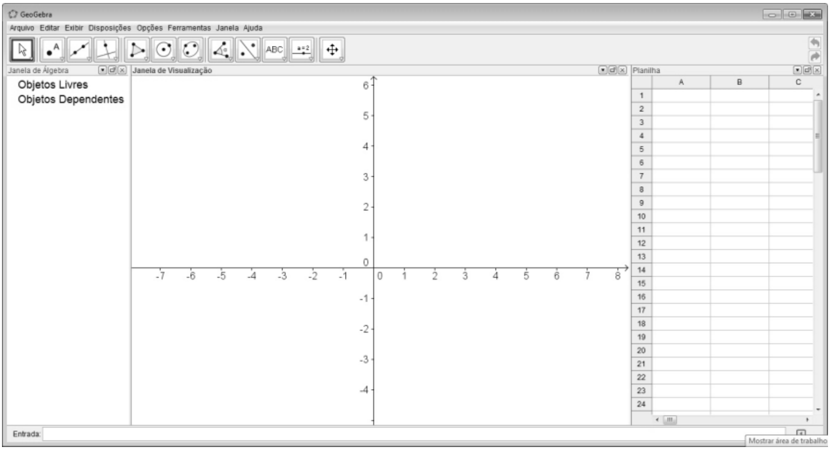


Figura 2. Tela incicial do GeoGebra

No campo de *Entrada*, é possível inserir comandos com expressões algébricas ou pontos, gerando representações correspondentes a essas entradas na Janela de Álgebra e na Janela de Visualização.

Uma das ferramentas disponíveis é o *Controle Deslizante*, que possibilita a criação de um intervalo de números livres (ou ângulos livres), permitindo a definição do seu nome, do valor mínimo, do valor máximo e do tamanho do intervalo entre dois de seus números consecutivos. Se alguma equação, expressão ou gráfico estiver relacionado a esse comando, variando o *Controle Deslizante* o objeto que estiver a ele atrelado também variará. Outro recurso à disposição é o *Rastro*, que possibilita o registro de cada modificação de um objeto na Janela de Visualização.

Na elaboração das atividades, percebemos que esses dois recursos tinham grande potencial para a exploração das sequências numéricas. Entendendo-as, primeiramente, como funções discretas, com domínio nos naturais, associamos ao *Controle Deslizante* a posição n dos termos da sequência de termo geral a_n, fazendo a variável n assumir valor inicial um e variar em intervalos de uma unidade. Representamos os termos da sequência por pontos do tipo (n, a_n), sendo a ordenada a_n o valor do termo de posição n. O *Controle Deslizante* permite a construção da sequência com qualquer número de termos e o *Rastro* permite a visualização dos termos. Também é possível representar as coordenadas dos pontos da sequência na Planilha, por meio da opção *Gravar para a Planilha de Cálculos*, proporcionando uma visualização numérica dos termos da sequência. O grande potencial desses recursos é a possibilidade de construir a sequência termo a termo, conjecturar a respeito do comportamento de seus termos, de acordo com as variações de n, e visualizar esse comportamento nas diferentes representações.

Outra possibilidade identificada foi a de representar os termos da sequência numérica como pontos sobre um eixo. Optamos por representá-los sobre o eixo das ordenadas. Para tanto, atribuímos o valor zero para a abscissa e deixamos o valor da ordenada associado ao *Controle Deslizante*, formando, assim, uma sequência de pontos do tipo (0, a_n).

Na figura 3, exemplificamos os três tipos de representação da sequência $a_n = \dfrac{6}{n+1}$ com a utilização do GeoGebra. O ponto *P*, com coordenadas (n, a_n) e que aparece no primeiro quadrante do sistema de eixos cartesianos, representa a sequência por meio de uma função discreta, com domínio nos naturais. O ponto *Q*, com coordenadas $(0, a_n)$, representa a sequência por meio de um conjunto de pontos sobre o eixo das ordenadas. E, na Planilha, temos a representação numérica dos pontos da sequência. As três representações são visíveis em uma única tela.

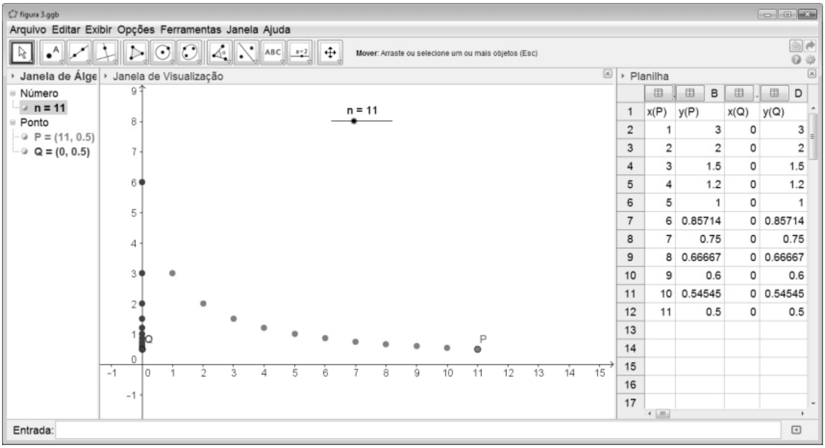


Figura 3. Representações de uma sequência no GeoGebra

Aumentando o valor máximo do *Controle Deslizante*, novos termos serão construídos de forma dinâmica, simultaneamente, em cada uma das três representações, o que permite o estabelecimento de relações entre a representação numérica, na Planilha, e as duas representações gráficas, na Janela de Visualização.

No trabalho desenvolvido nas aulas práticas, por meio das indagações dos roteiros das atividades, estimulamos que essas relações fossem estabelecidas. Dreyfus (1991, p. 39) ressalta a importância de se estabelecer relações entre diferentes representações matemáticas, quer sejam simbólicas ou mentais. Para esse autor, determinar fortes relações entre diferentes representações permite ao aluno transitar entre elas, fortalecendo elementos que possibilitarão a abstração do conceito e, dessa forma, favorecerão o desenvolvimento do pensamento matemático avançado.

Descreveremos a seguir os diferentes momentos nos quais essas representações foram trabalhadas. Inicialmente, abordamos a sequência como uma função discreta, com a construção do ponto P, sua representação gráfica e também a representação numérica, por meio dos valores das coordenadas do ponto P na Planilha. Para que os alunos interagissem com o *software* e, consequentemente, com a sequência, foi solicitado a eles que aumentassem o número de termos da sequência, por meio do aumento do valor máximo do *Controle Deslizante*, e que tentassem descobrir algo sobre o comportamento da sequência. Por meio dos exemplos escolhidos, demos aos alunos a oportunidade de explorar sequências convergentes e divergentes, embora esses conceitos não tivessem sido trabalhados de modo teórico até aquele momento. Nossa expectativa era de que os alunos pudessem perceber que, em algumas delas, os termos se aproximam de um valor fixo e em outras, não. A corporificação da convergência, nesse caso, relaciona-se à percepção de que, nas sequências convergentes, os termos se aproximam de um valor fixo. Essa percepção lança bases para a proceitualização e formalização futura, por meio do cálculo e da definição formal de limite.

Encerrada essa etapa, pedimos aos alunos a representação dos pontos das sequências sobre o eixo das ordenadas, de forma que construíssem pontos do tipo Q $(0, a_n)$. Essa escolha se deu por entendermos que facilitaria o estabelecimento da relação entre as duas representações, a saber: pontos do gráfico de uma função discreta e pontos sobre uma reta. Aumentando o número de termos e observando as modificações nas duas representações gráficas, simultaneamente, é possível perceber o mesmo deslocamento vertical dos pontos e que aqueles representados no eixo das ordenadas são as imagens, ou projeções, dos pontos da função discreta sobre o eixo das ordenadas. No caso de os pontos serem construídos sobre o eixo das abscissas, como geralmente as sequências são apresentados nos livros de Cálculo, essa relação natural pode ficar comprometida. Para a sequência anterior, $a_n = \frac{6}{n+1}$, construindo os termos com o recurso do *Controle Deslizante* e representando-os sobre o eixo das abscissas, é possível ver que os pontos do gráfico da função discreta se movem para a direita, enquanto os pontos sobre o eixo se movem para a esquerda, já que a sequência converge para zero (figura 4). Esse é um exemplo em que a relação entre as representações pode não ser percebida pelos alunos.

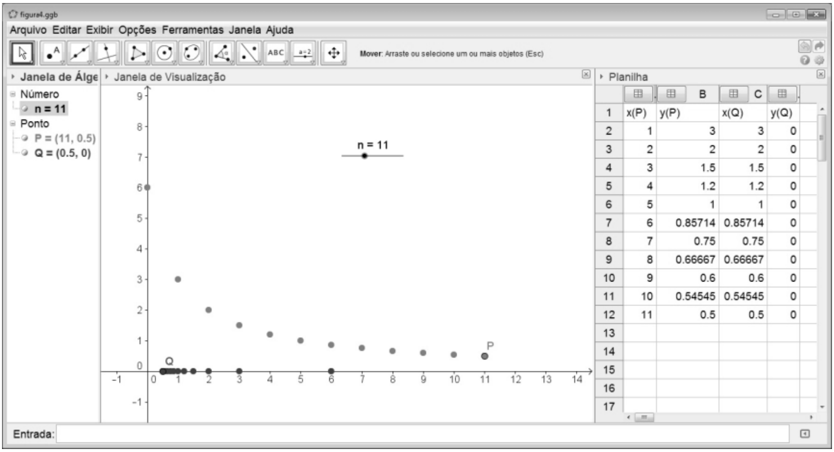


Figura 4. Outras representações de uma sequência no GeoGebra

A representação dos termos da sequência sobre um eixo, assim como a representação como pontos no gráfico de uma função discreta e ainda os valores numéricos na Planilha, permitem a visualização de que os termos de uma sequência convergente aproximam-se de um valor fixo, o que remete ao conceito de limite. Além disso, possibilitam criar a imagem mental de que os termos de sequências convergentes tornam-se cada vez mais próximos uns dos outros a partir de certo valor de *n*, condição necessária para a convergência.

Tendo discorrido sobre as potencialidades do GeoGebra para abordagens corporificadas do conceito de convergência de sequências, apresentaremos a seguir como esses recursos foram utilizados nas atividades das aulas práticas que desenvolvemos e como os Três Mundos da Matemática se mostraram nas manifestações dos alunos.

Identificando os Três Mundos da Matemática nas atividades desenvolvidas

Vimos que os recursos do GeoGebra possibilitam a construção das sequências de modo dinâmico, bem como a visualização e a exploração de suas diferentes representações de forma interconectada. Entendemos que, com a utilização desses recursos nas atividades que desenvolvemos, foi possível, não apenas corporificar os conceitos, como também transitar entre alguns dos mundos da Matemática.

Ressaltamos que não existe um único caminho para transitar entre os mundos e esclarecemos que as atividades aplicadas foram formuladas para que os alunos pudessem iniciar o desenvolvimento do pensamento matemático no mundo corporificado, seguindo para a interseção dos mundos corporificado e simbólico e expandindo-se neste, a fim de alcançar a base do mundo formal.

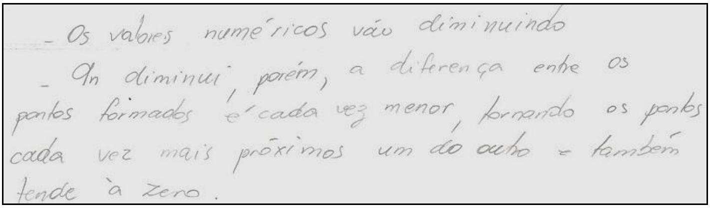
Nos roteiros que foram utilizados pelos alunos para desenvolverem as atividades, em diferentes momentos perguntamos sobre o comportamento dos termos da sequência e os estimulamos para que usassem os recursos do *software* na exploração e verificação da validade das conjecturas por eles elaboradas. Ao utilizar o GeoGebra para construir e representar os termos da sequência, e ao aumentar a quantidade de termos para discutir o comportamento da sequência, o aluno está no mundo corporificado, pois está *agindo* sobre o objeto para poder *ver* o resultado. Experiências de pensamento foram provocadas ao perguntarmos, por exemplo, o que acontecia com os valores numéricos dos termos da sequência quando aumentávamos o número de termos.

Para elucidar o que afirmamos, trazemos o exemplo das ações e discussões de uma dupla de alunos a respeito da sequência de termo geral $a_n = \frac{5}{n}$. Os alunos construíram as três representações da sequência (função discreta de domínio nos inteiros positivos, pontos sobre um eixo e numérica), manipularam o *Controle Deslizante* para aumentar a quantidade de termos da sequência e discutiram sobre o que cada um havia observado, com o intuito de responder o que acontece com os valores de a_n quando n se torna cada vez maior.

Os alunos observaram que, com o aumento do valor de n, os pontos nas duas representações gráficas se aproximam do eixo das abscissas, e concluíram que os valores dos termos da sequência tendem a zero. Observaram também que existe uma relação entre as duas representações gráficas, como podemos perceber por um trecho da fala de um deles transcrita a seguir: “Todos esses pontos aqui estão sempre na mesma altura [...] Eles já tem o mesmo valor, que é a imagem”. Perceberam também que os termos da sequência se tornam cada vez mais próximos uns dos outros, à medida que se aumenta o número deles na sequência.

Ao manipular o *Controle Deslizante*, os alunos *agiram* sobre os termos da sequência para *ver* o seu comportamento e também realizaram experiências de pensamento com as observações feitas e discussões realizadas, o que caracteriza o mundo corporificado.

Outras atividades foram propostas para estimular discussões sobre divergência de sequências, convergência para valores diferentes de zero e convergência de sequências alternadas. Em todas as atividades, foi solicitado aos alunos que registrassem as conclusões a que chegaram. Consideramos que, ao efetuar o registro, o aluno está na intersecção entre os mundos corporificado e simbólico, pois ele se utiliza da linguagem escrita ou simbólica para explicar aquilo que foi corporificado. Na figura 5, podemos ver a simbolização do que foi corporificado pela dupla em questão.

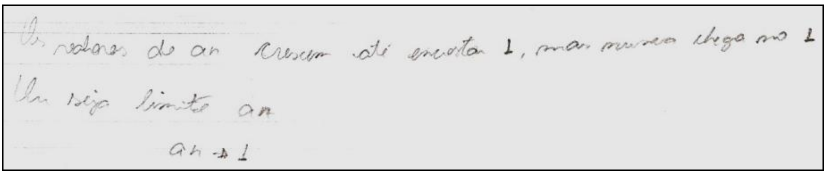


- Os valores numéricos vão diminuindo
- an diminui, porém, a diferença entre os pontos formados é cada vez menor, formando os pontos cada vez mais próximos um do outro e também tende à zero.

Figura 5. Simbolização do que foi corporificado sobre o comportamento da sequência de termo geral $a_n = \frac{5}{n}$

Vê-se no registro das conclusões dessa dupla que eles ainda não conseguiram se expressar utilizando a linguagem totalmente simbólica, mas estão em um processo, uma vez que utilizaram a expressão "tende a zero".

Nos registros de outras duplas foi possível perceber alguns exemplos de usos de símbolos matemáticos. É o caso de uma dupla que, ao discutir o comportamento da sequência de termo geral $a_n = \frac{n}{n+1}$, percebeu que, à medida que a quantidade de termos aumenta, os valores da sequência aumentam e se aproximam de um. Na figura 6, podemos perceber que os alunos estão em um nível inicial dentro do mundo simbólico e que já utilizam alguns símbolos matemáticos para expressar o que entenderam.



Os valores de an crescem até encostar 1, mas nunca chega no 1
Ou seja limite an
an → 1

Figura 6. Nível inicial dentro do mundo simbólico

Como dito anteriormente, as atividades desenvolvidas em laboratório com uso do GeoGebra foram elaboradas com o objetivo de criar ambientes para exploração do conceito de convergência, visando à corporificação do conceito de convergência de sequências numéricas. Foram, portanto, atividades introdutórias, desenvolvidas antes de qualquer definição ou formalização do conceito. Assim, não esperávamos que os termos "convergente" ou "divergente" fossem utilizados pelos alunos. Tendo como ponto de partida essas atividades, a convergência foi definida nas aulas teóricas posteriores, quando a notação de limite foi utilizada, referenciada pelas manifestações de corporificação externadas pelos alunos.

Tall (2002) caracteriza o mundo proceitual (simbólico) no Cálculo como aquele em que os cálculos aritméticos e algébricos podem ser feitos. No caso da convergência de sequências, podemos dizer que o aluno está no mundo simbólico quando utiliza o cálculo de limite para decidir sobre a convergência da sequência.

Em respostas a questões de uma atividade avaliativa, encontramos muitas situações nas quais os alunos demonstraram estar no mundo simbólico, como podemos ver no exemplo a seguir:

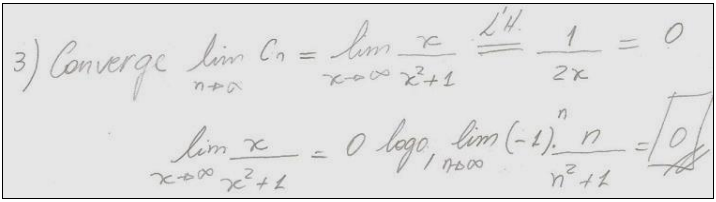


Figura 7. Convergência de sequência no mundo simbólico

Embora a linguagem simbólica não esteja completamente correta, percebemos o cálculo do limite para provar a convergência, o que caracteriza o mundo simbólico. Não há como saber qual foi a contribuição das atividades realizadas com o uso do GeoGebra para que esse resultado fosse alcançado. Há que se considerar que, em uma abordagem do Cálculo dita tradicional, esse tipo de resultado também pode ser alcançado. Porém, também é possível que imagens mentais de atividades com sequências, com as mesmas características, tenham contribuído para o processo de compreensão desse conceito, como é o caso da sequência $a_n = \frac{(-1)^n n^2}{2^n}$ trabalhada em sala de aula com o GeoGebra.

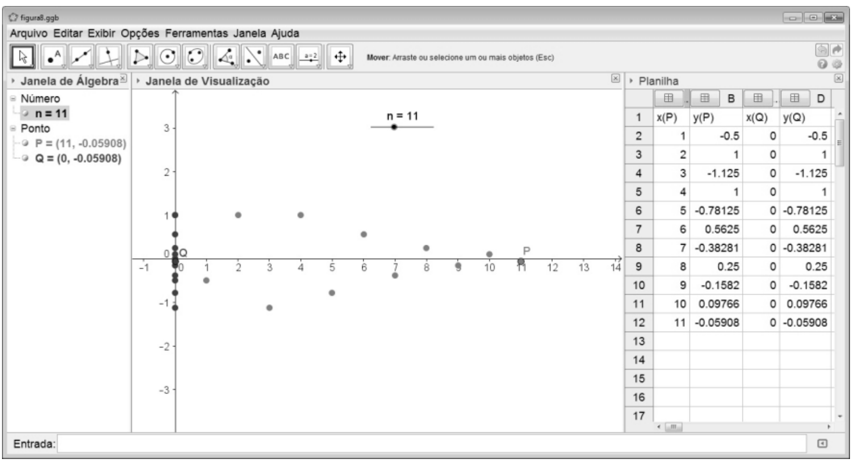


Figura 8. Convergência de sequência no mundo simbólico

Quanto ao mundo formal, não tivemos a expectativa de que os alunos o atingissem, uma vez que concordamos com Tall (1991, 2002) quando ele diz que os cursos de Cálculo não precisam ter esse objetivo, devendo esse tratamento ser feito na Análise. No entanto, planejamos as atividades de modo a construir bases para o desenvolvimento cognitivo formal posterior. Na interseção entre os Três Mundos, identificada no esquema de Tall (2002) reproduzido na figura 1, e denominada por Fonseca (2012) de *base do mundo formal*, as definições e deduções de propriedades são feitas com base em experiências corporificadas e simbólicas. Embora não tenha efetivamente acontecido com nenhum dos participantes, interpretamos que uma propriedade que poderia ter sido deduzida é a de que uma condição necessária para a convergência de sequências é que as distâncias entre os termos diminuam à medida que se aumente o número de termos. Somos levadas a crer que isso seria possível uma vez que, já nas atividades iniciais, mesmo sem ainda terem sido estimulados a observar as distâncias, os alunos perceberam que, em alguns tipos de sequências, os pontos se aproximavam uns dos outros com o aumento do número de termos.

Contribuições do GeoGebra identificadas na pesquisa realizada

Os dados da pesquisa, principalmente os registros das resoluções das atividades, as gravações de áudio e das telas dos computadores, permitem concluir que os recursos do *software* GeoGebra utilizados nas atividades tiveram influência decisiva no processo de corporificação do conceito de convergência.

Primeiramente, pela possibilidade de construir e manipular as sequências de modo dinâmico, por meio do *Controle Deslizante*, e pela possibilidade de preservar as imagens e os diferentes valores assumidos pelos termos da sequência, por meio do recurso do *Rastro*. Em segundo lugar, pela possibilidade de visualização de diferentes representações da sequência, quer seja pelos pontos do gráfico de uma função de domínio discreto, pelos pontos sobre uma reta ou ainda pela sequência de valores numéricos. Dessa forma, os alunos puderam recorrer a uma ou a outra representação para explorar determinada situação. Cada aluno pôde escolher aquela que, para ele, fazia mais sentido ou trazia mais elementos para identificar características, verificar conjecturas ou argumentar com o colega.

Estabelecer conexões entre diferentes representações de um mesmo objeto matemático é fator importante para a formação de conceitos. Isso foi facilitado pela possibilidade que o GeoGebra apresenta de visualizar as três representações em uma mesma janela e de trabalhar com elas de modo integrado: com o uso do *Controle Deslizante* e com as definições das diferentes representações atreladas a ele, as mudanças decorrentes de modificações de valores por meio do *Controle Deslizante* aconteciam simultaneamente nas três representações.

Os recursos do GeoGebra possibilitaram a exploração do conceito de convergência do ponto de vista dinâmico, da sequência em construção. Ao manipular os termos da sequência e observar as representações, os alunos formularam conjecturas sobre o comportamento das sequências. A forma utilizada para verificar as conjecturas foi aumentar a quantidade de termos da sequência, redefinindo o valor máximo do *Controle Deslizante.* Se a conclusão de um aluno não estava clara para o colega ou se havia dúvidas sobre as conjecturas, iniciava-se uma discussão entre os alunos, de forma que cada um desenvolvia melhor sua argumentação para convencer o outro a respeito do que havia concluído. Para tanto, utilizaram alguns recursos do GeoGebra, como aumentar o número de termos, arrastar imagens para melhor visualização, aumentar a largura das planilhas e analisar um maior número de casas decimais. Um aspecto importante a ser destacado foi a percepção de alguns alunos da importância de outras formas de verificação e prova, como o caso de uma aluna que, não acreditando no que podia ver com o número de casas decimais mostrado pelo GeoGebra em determinado contexto, recorreu a outros recursos para provar sua conjectura. Além de aumentar a quantidade de casas decimais e alargar a coluna da planilha, fez contas no papel, utilizou o Excel e analisou, do ponto de vista algébrico, os valores que a expressão do termo geral da sequência poderia assumir.

As diferentes situações que pudemos observar evidenciam que as experiências corporificadas com uso do GeoGebra possibilitaram a criação de imagens mentais que fortaleceram aspectos centrais da convergência, como a aproximação a um ponto fixo ou a diminuição das distâncias entre pontos. Somos levados a crer que as diferentes possibilidades de visualização que o *software* oferece contribuíram para isso. As manipulações por meio dos recursos do *software* possibilitaram a elaboração e verificação de conjecturas e, ao mesmo tempo, estimularam discussões a respeito da necessidade de outros tipos de argumentos, para além daquilo que apenas pode ser visto.

O papel do GeoGebra foi decisivo para a corporificação e ponto de partida para que o ambiente construído, a partir do desenvolvimento das atividades com utilização do *software*, propiciasse transições entre os mundos, especialmente entre o corporificado e simbólico.

Considerações finais

Apresentamos na introdução alguns dos pontos que têm sido apontados na literatura como de dificuldades para a compreensão de conceitos do Cálculo: as diferenças entre o pensamento matemático exigido para compreensão de conceitos da Matemática nos cursos de graduação, que são apresentados na sua forma final, por meio de definições, com ênfase nas deduções e demonstrações de resultados, e as abordagens da Matemática vivenciadas pelo estudante no ensino fundamental e médio. No caso específico da convergência de sequências, apontamos especialmente as dificuldades relativas à passagem de operações finitas para infinitas relacionadas ao conceito de limite.

Apresentamos no artigo possibilidades de abordagens da convergência por meio de atividades exploratórias com uso do *software* GeoGebra, visando à corporificação do conceito. Entendemos que, iniciar o estudo por atividades exploratórias em busca da corporificação, sem que as definições e resultados tenham sido apresentados previamente de forma teórica, pode ser uma forma de abordagem que, de certa forma, resgata aspectos do processo de construção da teoria matemática, pois parte de algo que pode ser observado, que se quer compreender e sobre o qual se busca encontrar e provar resultados.

Os ambientes construídos com os recursos do GeoGebra possibilitaram: i) a participação dos alunos no processo de construção do pensamento matemático ao *agirem* sobre os termos da sequência (com o *Controle Deslizante)* e *verem* o comportamento por meio do *Rastro* deixado pelos pontos, o que permitiu a formulação de conjecturas que foram discutidas entre os próprios alunos e, posteriormente, em aulas teóricas; ii) a construção e manipulação das sequências de maneira dinâmica, com o estabelecimento de conexões entre diferentes representações, resultando em visualização rápida, confirmação ou refutação de conjecturas formuladas.

A possibilidade de aumentar o número de termos, por meio das definições dos parâmetros do controle deslizante, e dos outros recursos de visualização dos termos nas diferentes janelas do *software* (como as imagens gráficas, o aumento do número de casas decimais e o alargamento das colunas nas planilhas) podem ter contribuído para diminuir as dificuldades na transição de operações finitas para infinitas, relacionadas ao conceito de limite.

No sentido de resgatar o processo de construção da teoria, destacamos a opção que fizemos de estabelecer conexões entre os mundos corporificado e simbólico, partindo do corporificado. Não se trata de apresentar definições, resultados, ensinar a calcular e depois visualizar isso com o uso do *software*, o que seria a corporificação do simbolismo. Buscamos, inicialmente, a corporificação dos conceitos, cuidando para que as imagens mentais pudessem ser formadas e que os principais resultados pudessem ser redescobertos, antes de serem apresentados de modo teórico; dessa forma, simbolizando o que foi corporificado.

Destacamos mais uma vez nosso entendimento de que essa abordagem pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento matemático avançado, construindo sementes para a expansão cognitiva posterior, o que entendemos como desejável para os cursos de Cálculo.

Finalizamos apresentando um produto educacional intitulado “Estudo da convergência de sequências e séries numéricas no Cálculo: uma proposta utilizando o *software* GeoGebra", que está disponível na página do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UFOP (http://www.ppgedmat.ufop.br). Esse material foi construído com base na pesquisa já mencionada e tem o objetivo de apresentar, aos professores, alternativas de trabalho com o tema convergência de sequências e séries em aulas de Cálculo. Nele é possível encontrar: um recorte do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, uma breve explicação da escolha e de algumas ferramentas do *software* GeoGebra, e várias das atividades desenvolvidas durante a pesquisa, entre as quais as de convergência de sequência mencionadas neste artigo.

Referências

BAGNI, Giorgio Tomaso. **Infinite series from history to mathematics education**. 2005. Disponível em: <http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/bagni.pdf>. Acessado em: 15 de outubro de 2012.

DREYFUS, Tommy. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: TALL. David Orme (Org.) **Advanced Mathematical Thinking**. Londres: Kluwer Academic Publisher, 1991. p. 25 – 41.

FONSECA, Daila Silva Seabra de Moura. **Convergência de sequências e séries numéricas no Cálculo***:* um trabalho visando à corporificação dos conceitos. (Dissertação) Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto, 2012.

GRAY, Eddie; TALL, David Orme. Duality, Ambiguity and Flexibility*:* a proceptual view of simple arithmetic. **The Journal for Research in Mathematics Education**, NCTM, v. 26, n. 2, 1994. p. 115 – 141.

KAWASAKI, Teresinha. Fumi. **Tecnologias na sala de aula de matemática***:* resistência e mudanças na formação continuada de professores. (Tese) Belo Horizonte: UFMG, 2008.

TALL, David Orme. The Transition to Formal Thinking Mathematics. **Mathematics Education Research Journal**. Netherlands: Springer Netherlands, v. 20, n.2, 2008. p. 5 – 24.

TALL, David Orme. Embodimente, symbolism, argumentation and proof. Keynote presented at the **Conference on Reading, Writing and Argumentation,** in Taiwan, May, 2007.

TALL, David Orme. Introducing Three Worlds of Mathematics. 2004. Disponível em: <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2004a-3worlds-flm.pdf>. Acessado em: 15 de outubro de 2012.

TALL, David Orme. Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics. **First Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática**. Rio de Janeiro: Universidade do Estado do Rio De

Janeiro, 2002. Disponível em: <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/ themes/three-worlds.html>. Acessado em: 15 de outubro de 2012.

TALL, David Orme. The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In: TALL. David Orme (Org.) **Advanced Mathematical Thinking**. Londres: Kluwer Academic Publisher, 1991. p. 3 – 21.

TALL, David Orme & MEJIA-RAMOS, Juan Pablo. Reflecting on post-calculus-reform. Plenária de abertura para **Topic Group 12: Calculus, International Congress of Mathematics Education**, Copenhagen: Denmark, 2004. Disponível em: <http://www.icme-organisers.dk/tsg12/papers/tall-mejia-tsg12.pdf>. Acessado em: 15 de outubro de 2012.

ZULATTO, R. B. A. O perfil dos professores de matemática que utilizam *softwares* de geometria dinâmica em suas aulas. In: VALENTE, Wagner Rodrigues (Org.) **Anais do II SIPEM**. São Paulo: SBEM **-** Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2003.

Daila Silva Seabra de Moura Fonseca
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia – IFMG – *campus* de Congonhas **-** Brasil
E-mail: dailasmfonseca@yahoo.com.br

Regina Helena de Oliveira Lino Franchi
Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP – Ouro Preto **-** Brasil
E-mail: reginhafranchi@uol.com.br