

EXPERIMENTAÇÃO COM TECNOLOGIAS E O DESENVOLVIMENTO ALGÉBRICO COM O ALGORITMO DE BRIOT-RUFFINI

EXPERIMENTATION WITH TECHNOLOGY AND DEVELOPMENT ALGEBRAIC WITH THE ALGORITHM BRIOT-RUFFINI

Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva

Universidade Estadual Paulista – UNESP – Brasil

Leandro do Nascimento Diniz

Universidade Federal do Recôncavo da Bahia – UFRB – Brasil

Resumo

Nosso estudo é exploratório. Nós apresentamos uma possibilidade sobre como podem ser engendrados os processos de experimentação com tecnologias e desenvolvimento algébrico na investigação do algoritmo de Briot-Ruffini. Destacamos simulações, aspectos visuais, conjecturas, verificações e enunciações que podem ser realizadas a partir do uso do software Winplot na exploração dinâmica e multi-representacional de funções polinômiais. Iniciamos nossa abordagem com uma potencial conjectura elaborada com o Winplot ao explorarmos funções polinomiais cúbicas, que nos remete ao dispositivo de Briot-Ruffini. Assumimos tal conjectura como uma preposição, a qual enunciamos: “Se a soma dos coeficientes reais $a \neq 0$, b , c e d de um polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ for nula, então 1 é raiz do polinômio”. Na busca por aprimorar nosso convencimento acerca da preposição enunciada, exploramos de forma algébrica e/ou experimental diversificadas noções como divisão entre polinômios e os teoremas de D’Alambert, do Fator e das Raízes Racionais. Isso nos permite propor de forma justificada uma possibilidade para investigarmos o algoritmo de Briot-Ruffini com o Winplot. Basicamente, plotamos uma função representada por uma expressão algébrica composta pela a divisão entre um polinômio do terceiro grau em sua forma genérica e o polinômio $(x - 1)$, ou seja, $f(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)/(x - 1)$. Ao animarmos com o Winplot os coeficientes reais de modo que $a + b + c + d = 0$, a curva que representa o gráfico de $f(x)$ assume a forma de uma parábola, o que mostra a divisibilidade entre os polinômios. Com base no que exploramos, esse fato nos convence acerca da veracidade da preposição enunciada.

Palavras-chave: Educação Matemática, Experimentação com Tecnologias, Prova, Demonstração, Winplot.

Abstract

Our study is exploratory. We introduce a possibility on how the processes of experimentation with technology and algebraic approaches may be combined to investigate Ruffini's rule. We highlight simulations, visual aspects, conjectures, confirmations and enunciations we may develop through the use of the software Winplot, exploring dynamically multiple representation of polynomial functions. We began our approach with a potential conjecture we may have using Winplot when we explore third-degree polynomial functions, leading us to Ruffini's rule. We enunciate the rule as a preposition: "If the sum of the characters $a \neq 0$, b , c e d of the polynomial expression $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ is equal to zero, then 1 a root of the polynomial expression". Seeking to improve our conviction toward the preposition we enunciated, we explore algebraically and experimentally several notions such as division between polynomials and the theorems of D'Alambert, among others. It allows us to propose in a justified manner a possibility to investigate Ruffini's rule using Winplot. Basically, we plot a function represented by an algebraic expression formed by the division between a third-degree polynomial and the polynomial $(x - 1)$, that is, $f(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d) / (x - 1)$. Using an animating tool of Winplot, we may vary or change the real characters in a way that $a + b + c + d = 0$. Under these conditions, the shape of the curve that represents $f(x)$ is a parabola, and it showing the divisibility between the polynomials. Based on our study, that fact convinces us toward the truth of the preposition we enunciated.

Keywords: Mathematics Education, Experimentation with Technology, Proof, Demonstration, Winplot.

Inquietações e Concepções Iniciais

Em meados de 2006, enquanto integrantes do mesmo grupo de pesquisa³⁷, nós investigávamos a possibilidade em elaborar uma atividade para explorar funções cúbicas com o *software* Winplot. Nós já sabíamos naquela época que há em nossa área grande interesse em se criar atividades investigativas que exploram as múltiplas representações de funções. Basicamente, propõe-se alterar os coeficientes de uma família de funções (polinomiais, trigonométricas etc.) buscando-se estabelecer relações entre as alterações realizadas em representações algébricas e as respectivas alterações dinâmicas ocorridas nas representações gráficas e tabulares (BORBA, 1993).

E esse tipo de abordagem utilizando tecnologias como calculadoras gráficas, *software* gráfico ou CAS³⁸, busca explorar as potencialidades das tecnologias informáticas, trazendo possibilidades diferenciadas de investigação matemática para a produção de sentidos e conhecimentos matemáticos.

³⁷ GPIMEM – Grupo de Pesquisa em Informática outras Mídias e Educação Matemática - UNESP – Universidade Estadual Paulista – IGCE – Departamento de Matemática – Rio Claro, SP. Coordenador: Prof. Dr. Marcelo de C. Borba. Home Page: <http://www.rc.unesp.br/gpimem/>.

³⁸ CAS: *Computer Algebra System* ou sistema de computação algébrica. REMATEC, Natal (RN), Ano 8/ n.14/ Set-Dez, 2013

Por um lado, podemos utilizar as tecnologias informáticas para o estudo de um conceito matemático de forma muito semelhante ao modo como utilizamos lápis e papel para explorar este conceito, por exemplo. Contudo, esse é um tipo de uso que denominamos “uso domesticado de novas tecnologias” (BORBA, 1999), pois existe apenas uma espécie de “adaptação direta” de uma mesma atividade voltada ao uso de uma nova tecnologia. Por outro lado, consideremos fundamental explorarmos as potencialidades das tecnologias informáticas de modo buscar possibilidades para *reorganização de pensamento* (TIKHOMIROV, 1981). Ou seja, com o surgimento de uma nova tecnologia devemos buscar a criação de novos *designs* de atividades que propiciem a investigação de novos problemas, visando a produção de sentidos e conhecimentos antes não comuns em cenários baseados na investigação de atividades criadas para o uso de tecnologias “antigas”.

Nosso objetivo neste artigo é propor uma possibilidade de investigação sobre o algoritmo de Briot-Ruffini visando explorar potencialidades do software Winplot. Nossa investigação parte de uma experimentação com esta tecnologia visando abordar múltiplas representações de funções cúbicas. Esta experimentação nos possibilita a elaboração de conjecturas que enunciamos como uma preposição. Na busca pelo convencimento acerca desta preposição, realizamos abordagens algébricas e nos levam a explorar outras noções como a divisão de polinômios e os teoremas de D’Alambert, do Fator e das Raízes Racionais. Isso nos possibilita enunciar de forma mais aprimorada e justificada uma atividade experimental para que algoritmo seja explorado.

Então é neste engendramento entre a experimentação com o Winplot e abordagens ou provas de natureza algébrica que nossa investigação é proposta. Neste cenário buscamos dar ênfase aos aspectos visuais e dinâmicos que possibilitam a elaboração e verificação de conjecturas bem como a convergência simbólica que pode aproximar experimentação e prova algébrica no contexto investigativo. Antes de apresentarmos nossa proposta, discutimos alguns aspectos importantes sobre a experimentação com tecnologias e sua contextualização envolvendo, consequentemente, uma noção sobre diferentes papéis demonstração matemática pode assumir.

Experimentação com Tecnologias

Nós temos nos apoiado na perspectiva de que as tecnologias condicionam a produção de sentidos e conhecimentos matemáticos. As possibilidades de produção de sentidos com a utilização de um *software*, por exemplo, são diferentes das possibilidades de produção com lápis e papel. O surgimento de novas tecnologias possibilita a reorganização do pensamento, pois os tipos de sentidos e conhecimentos produzidos dependem da tecnologia utilizada. Ou seja, o *design* de uma mídia, suas potencialidades, condiciona a natureza dos sentidos e conhecimentos que podem ser produzidos. Utilizando a perspectiva proposta por Borba e Villarreal (2005), diríamos que o conhecimento é produzido por coletivos de seres-humanos-com-mídias, ou que a utilização de diferentes tecnologias condiciona a produção de diferentes conhecimentos.

Borba e Villarreal (2005) discutem a noção de *experimentação com tecnologias*, na qual visualização e demonstração são temas relacionados. Os autores destacam que a utilização de tecnologias informáticas possibilita testar conjecturas usando um grande número de exemplos, executar modos alternativos de testes, repetir os experimentos e a disposição de diferentes tipos de representações. Nesta perspectiva, uma abordagem experimental implica: no uso de tentativas e processos que possibilitem a geração de

conjecturas; na possibilidade de descoberta de resultados matemáticos desconhecidos previamente à experimentação; na possibilidade de testar modos alternativos de coletar resultados usando um grande número de exemplos; na chance de repetir experimentos e proporcionar novos; em um modo diferente de aprender matemática; e na possibilidade de gerar e/ou testar conjecturas.

Nas discussões sobre experimentação com tecnologias, sobressaem inquietações sobre o *status* da *visualização*, pois as informações visuais e dinâmicas presentes no design de tecnologias informáticas podem, por exemplo, condicionar o pensamento matemático de estudantes. A visualização, nesse sentido, pode assumir um papel relevante na atividade matemática, um modo de resolução de problemas, trazendo implicações diversas à Educação Matemática.³⁹ Uma abordagem visual no processo de pensamento matemático pode ser caracterizada fundamentalmente pelo(a): utilização de informação gráfica para resolver questões matemáticas que poderiam ser também abordadas algebricamente; não necessidade de recorrer primeiro à álgebra, quando as soluções gráficas são requisitadas; elaboração e refutação de conjecturas com base em informações gráficas e outras diversas (BORBA; VILLARREAL, 2005).

Antes de explorarmos o algoritmo de Briot-Ruffini, apresentaremos um exemplo para contextualizar uma possibilidade de convergência entre os processos de experimentação com tecnologias e formalização matemática. O exemplo surgiu a partir da *análise de vídeo* (POWELL; FRANCISCO; MAHER, 2004) de uma aula de matemática de um curso de Ciências Biológicas (BORBA, 1999)⁴⁰.

Ao utilizarem calculadoras gráficas para explorar múltiplas representações de funções polinomiais do segundo grau, uma estudante teve uma conjectura ao relacionar diferentes valores para o coeficiente real $a \neq 0$ da função $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ de equação $f(x) = ax^2 + bx + c$ e suas representações gráficas utilizando uma calculadora gráfica. A estudante

³⁹ Seriam implicações diversas, como políticas, por exemplo. Não discutiremos estas dimensões neste artigo, embora abordemos a noção de verdade em matemática. Em perspectivas mais formalistas sobre a matemática, a experimentação e a visualização são apenas um complementos ou ferramentas de auxílio na trajetória heurística. Contudo, em perspectivas de caráter mais falibilista, as quais nos consideramos inseridos, estes processos têm um status maior. Eles são fundamentais na elaboração de conjecturas que possibilitam a produção de sentidos, abrindo caminhos para a produção de novos conhecimentos, bem como na busca pelo convencimento e na verificação ou confirmação de conjecturas. Por exemplo, do lado formalista há resistência na prova de natureza empírica sobre o teorema das quatro cores. Em nossa perspectiva, a demonstração do teorema baseada em simulações é uma das belas da matemática.

⁴⁰ Borba (1999) discute parte de sua pesquisa sobre Modelagem e Informática, desenvolvida junto à disciplina Matemática Aplicada no Curso de Ciências Biológicas da UNESP – Universidade Estadual Paulista – de Rio Claro, SP. O referido autor destaca que, além dos estudantes (desta disciplina) desenvolverem Projetos de Modelagem (MALHEIROS; BORBA; DINIZ, 2005) utilizando tecnologias informáticas, eles também exploram potencialidades das Calculadoras Gráficas no estudo de funções durante as aulas. Esse processo de exploração (experimentação) de conceitos matemáticos fundamentais da disciplina, realizado pelos estudantes com tecnologias, é denominado enfoque experimental com Calculadoras Gráficas (BORBA, 1999).

investigou, com a simbologia da calculadora, as equações $y_1 = 1.5x^2 - 6x + 5$ e $y_2 = x^2 - 6x + 5$, ou seja, variou o coeficiente a de forma que $a_1 = 1,5$ e $a_2 = 1$ e manteve os constantes os coeficientes b e c de modo que $b_1 = b_2 = -6$ e $c_1 = c_2 = 5$ (ver Figura 1).

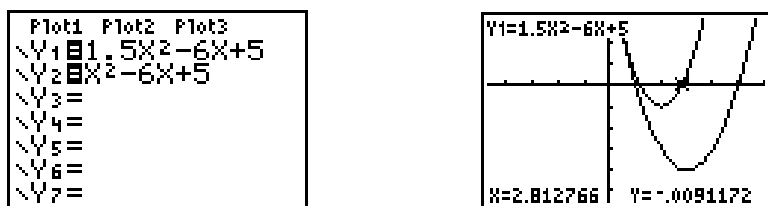


Figura 1. Gráficos plotados com a Calculadora Gráfica

A partir dessa experimentação-visualização, a estudante conjecturou que “quando a aumenta, as raízes diminuem”. O primeiro autor deste artigo buscou investigar esta fala da estudante utilizando uma linguagem matemática mais formal, “traduzindo” a conjectura em um enunciado matemático. Mesmo sendo necessário elaborar inúmeras hipóteses para provar a veracidade do enunciado, o que implicou na estruturação de diversos casos ($c > 0$ e $b^2 - 4ac > 0$, $c < 0$ e $b > 0$, $c < 0$ e $b < 0$, etc.), argumentou-se sobre diferentes níveis de rigor para uma prova formal acerca do enunciado (SCUCUGLIA, 2002).

Borba e Villarreal (2005) também analisam este exemplo e destacam que, além da conjectura elaborada em sala de aula de um curso de ciências aplicadas ter promovido discussões matemáticas interessantes, também possibilitou o engajamento de um estudante de graduação em matemática. O processo longitudinal, ou seja, a experimentação e elaboração de conjectura em sala de aula, e a posteriori enunciação e prova de natureza algébrica e dedutiva, constituem um cenário interessante de investigação, que envolveu diferentes estudantes, de cursos distintos, em investigação matemática. De outra forma, como explicaremos adiante, dizemos que este é um exemplo no qual a *demonstração matemática* assumiu vários papéis no processo investigativo.

As noções de experimentação e demonstração estão relacionadas. Com base em atores como Polya (1945) e Lakatos (1976), podemos destacar aspectos investigativos no fazer matemático, bem como os próprios fundamentos da matemática, exemplos históricos de caráter heurístico, concepções sobre resolução de problemas e suas possibilidades com as tecnologias informática. Não é um absurdo dizemos que a experimentação com tecnologias permite primeiramente um momento de investigação, de descoberta de resultados, de elaboração de conjecturas, as quais podem ser enunciadas formalmente. Posteriormente, na busca pelo convencimento, é que se podem buscar abordagens algébricas, dedutivas. De certo modo, isso constitui uma possibilidade “inversa” aos modelos tradicionais de ensino de matemática, como argumentam autores como Borba e Penteadó (2003).

A experimentação se torna algo fundamental, invertendo a ordem de exposição oral da teoria, exemplos e exercícios bastante usuais no ensino tradicional permitindo uma nova ordem: investigação e, então, a teorização (BORBA; PENTEADO, 2003, p. 39).

Em consonância, argumentamos que esse processo de inversão promovido pela experimentação permeia uma inquietação fundamental em nossa comunidade no que se refere às dimensões do tema demonstração em educação matemática. Existem inquietações discutindo o fato de que,

O estudante de matemática é, geralmente, defrontado com uma apresentação lógico-dedutiva do conhecimento. A um conjunto de teoremas seguem-se as provas lógicas. O conhecimento parece ter sido produzido num ato mágico. As proposições assim apresentadas são sempre verdadeiras, e válidas todas as inferências. A matemática se constitui, então, num conjunto crescente de verdades imutáveis e eternas. [...]. Obviamente tal concepção está impregnada do caráter mecanicista e autoritário da razão clássica, que procura manter sua hegemonia (TENÓRIO, 2001, p. 90).

Defendemos a ideia de que a utilização das tecnologias informáticas contribui com a transformação do cenário descrito por Tenório (2001). Assim, nesse artigo, propomos uma articulação entre o processo de experimentação com tecnologias informáticas e a formalização matemática na investigação de um algoritmo relacionado no estudo de funções cúbicas. É nesse sentido que trazemos a noção de que a demonstração pode assumir papéis diversificados, e é na exploração destes vários papéis que se constitui o cenário investigativo.

É importante ressaltarmos que, em grande parte de nossas pesquisas, nós investigamos como estudantes exploraram as atividades que elaboramos, atividades estas que enfatizam a experimentação com tecnologias. Ou seja, com base em metodologias de pesquisa qualitativa, em grande parte de nossos estudos nós produzimos dados os quais buscamos analisá-los com o objetivo de investigar o pensamento matemático de estudantes. Com estas análises emergem possibilidades em aprimorarmos as atividades.

Contudo, não é exatamente isso que estamos propondo neste artigo. Nossa abordagem aqui é de natureza exploratória. Nos somente apresentamos uma discussão que consideramos ter certo grau de originalidade e que oferece uma possibilidade investigação sobre o algoritmo de Briot-Ruffini. Em um estudo futuro esperamos discutir nossas análises acerca do pensamento matemático de estudantes ao investigarem esta atividade.

A seguir, antes de apresentamos nossas principais ideias sobre a atividade que propomos, e discutimos uma possibilidade de se conjecturar o algoritmo Briot-Ruffini baseado em uma experimentação com o Winplot. Isso nos propicia um contexto no qual nos parece pertinente discutir aspectos mais

específicos sobre demonstração em educação matemática, sobre os diversos papéis que a demonstração pode assumir no contexto pedagógico.

Conjeturando o Algoritmo de Briot-Ruffini: os papéis da demonstração

Ao investigarmos as relações entre os coeficientes reais $a \neq 0$, b , c e d de uma função $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de equação $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ e suas respectivas representações gráficas utilizando um *software* gráfico, podemos identificar alguns padrões, ou seja, podemos identificar similaridades na busca por estabelecer relações entre as representações disponíveis.

Desenvolvendo atividades com o Winplot e analisando o que ocorre graficamente quando variamos na forma algébrica os coeficientes reais $a \neq 0$, b , c e d de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, podem emergir conjecturas. Suponhamos um caso no qual $a = c = -2$ e $b = d = 2$, ou seja, $a + b + c + d = 0$. Quando plotamos $f(x) = -2x^3 + 2x^2 - 2x + 2$, visualizamos o seguinte gráfico (Figura 2):

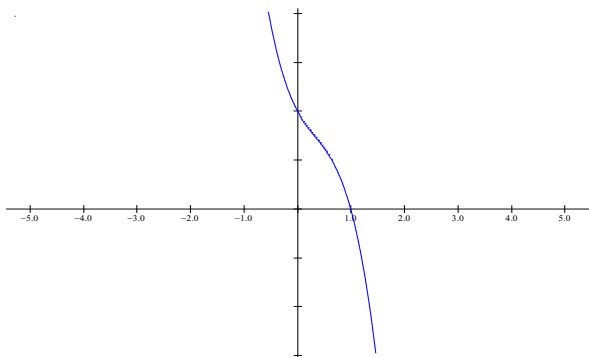


Figura 2. Gráfico de $f(x) = -2x^3 + 2x^2 - 2x + 2$ no Winplot

A partir da visualização do gráfico, percebemos que $x = 1$ é raiz da função, pois é onde o gráfico intercepta o eixo- x . Ao relembrarmos de experiências que vivenciamos ao cursarmos o Ensino Médio, recordamos uma “proposição-consequência” do dispositivo prático (ou algoritmo) de Briot-Ruffini, que está intrinsecamente articulado às abordagens sobre divisões entre polinômios e implica em um resultado interessante quando exploramos funções do terceiro grau. Tal proposição, que denominaremos P, é a seguinte:

Proposição P: Se a soma dos coeficientes reais $a \neq 0$, b , c e d de um polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ for nula, então 1 é raiz do polinômio.

Com o Winplot, podemos verificar ou confirmar essa proposição em uma abordagem dinâmica, que possibilita estabelecer relações entre

representações algébricas e gráficas de funções. Novamente, vamos considerar $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a \neq 0$, b , c e d números reais. Podemos inserir no Winplot as equações explícitas $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ e $g(x) = a + b + c + d$. Podemos também utilizar o comando de animação de cada um dos coeficientes a partir de uma ferramenta disponível no menu do Winplot. Arrastando os botões de animação, variamos os coeficientes a , b , c , e d e assim visualizamos, dinamicamente, a movimentação do gráfico de $f(x)$.

Com esta experimentação é possível conjecturar que 1 é raiz de $f(x)$ sempre que $g(x) = 0$. Entendemos assim ser possível realizar uma experimentação com o Winplot que possibilite a conjecturar da proposição P de forma experimental, ou seja, realizando a variação de diversos valores para a , b , c e d de forma que $a + b + c + d = 0$, observando o movimento dinâmico e simultâneo do gráfico e indentificando que $x = 1$ é sempre raiz de $f(x)$ sob condições. A conjectura sobre a proposição P pode ser confirmada ou verificada visualizando-se que as diversas curvas determinadas pelas variações dos coeficientes sempre interceptam o eixo-x em $x = 1$ quando a soma dos coeficientes é nula (Ver Figura 3):

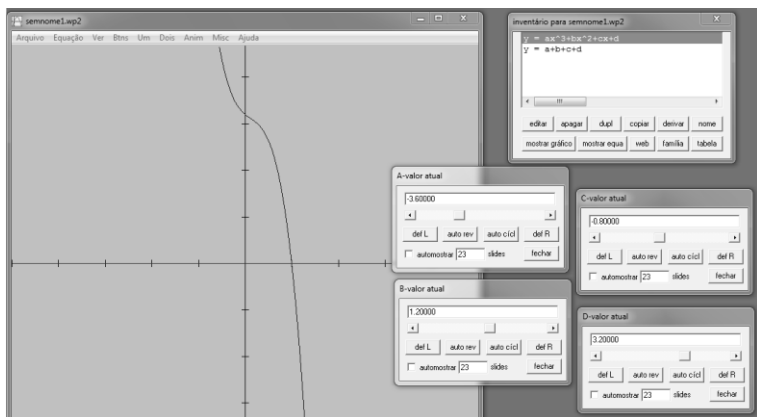


Figura 3. Animação dos coeficientes de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ com o Winplot.
Se $a + b + c + d = 0$, então $x = 1$ é raiz de $f(x)$.

A partir do processo de experimentação que realizamos, pensamos a respeito de alguns aspectos, como: a exploração e/ou relacionamento da proposição P com a idéia de múltiplas representações de funções (como seria possível aprimorar esta experimentação), uma prova para proposição P a partir do uso do Winplot (na busca por aprimorar nosso convencimento), e a relevância da exploração de uma atividade desse tipo em sala de aula (na qual

estudantes podem enunciar uma conjectura elaborada experimentalmente e buscar formas mais aprimoradas de prová-la verdadeira).

Para aprofundar essas reflexões e, principalmente, para destacar um encaminhamento investigativo para se conjecturar esta preposição com o Winplot, estruturaremos uma abordagem sobre o algoritmo de Briot-Ruffini, no estudo de representações gráficas de polinômios do terceiro grau, e como esta abordagem pode condicionar discussões matemáticas que possam constituir um cenário investigativo. Estes são alguns motivos pelos quais trataremos neste artigo algumas questões específicas sobre este algoritmo e, ao mesmo tempo, sobre a potencial harmonia entre os processos de experimentação com tecnologias e desenvolvimento algébrico na busca pelo convencimento, pela veracidade de enunciações de natureza matemática.

Em nossa concepção, o processo investigativo, ambiente fértil para a elaboração de conjecturas, já é componente integrante fundamental do processo de demonstração matemática. A demonstração é formada por várias dimensões como a exploração de caráter heurístico, elaboração, verificação e enunciação de conjecturas, desenvolvimentos algébricos, dentro outras dimensões.

Assumimos que a demonstração não assume um caráter linear, absolutamente algébrico, dedutivo ou indutivo, estrutural. O processo de demonstração matemática é dinâmico, não-linear, formado por diversos elementos investigativos e exploratórios, incluindo tanto aqueles denominados formais ou dedutivos quanto aqueles envolvendo a visualização e a simulação, a elaboração de conjecturas e suas enunciações. Do ponto de vista pedagógico, nos parece interessante conceber demonstração não apenas como o produto, o resultado “passado a limpo”, apresentado de forma rigoroso possível. O produto é apenas parte da demonstração. As várias fases do processo de busca pelo convencimento é o que nos chama a atenção. É no cenário heurístico que se revelam as formas de nossos pensamentos, nossas tentativas, conjecturas, e nossa busca por nos familiarizarmos com um universo simbólico que representa os eventos que experimentamos e as relações entre eventos e representações.

De forma consideravelmente próxima, Villiers (2001) argumenta que a demonstração assume diferentes papéis no ensino, em um contexto investigativo. De acordo com o autor,

- A demonstração, enquanto *processo de verificação/convencimento*, coloca em uma perspectiva mais apropriada uma suposição distorcida da demonstração como único e absoluto meio de verificação, pois a elaboração de conjecturas desempenha, na procura da convicção, um papel tão importante como o processo da justificação dedutiva. Logicamente, exigem-se inferências dedutivas, mas a experimentação exploratória e a compreensão intuitiva são necessárias;
- A demonstração, enquanto *processo de descoberta*, possibilita considerar que os teoremas são, na maior parte das vezes, descobertos por meio da intuição e por métodos quase-empíricos, antes de serem

verificados através de demonstrações. Para o matemático profissional, a demonstração não é apenas um meio de verificação de um resultado já descoberto, mas um processo de explorar, analisar, descobrir e inventar novos resultados;

- A demonstração, enquanto *processo de sistematização*, permite transformar um conjunto de significados conhecidos em um sistema dedutivo e identificar inconsistências e reorganizar hipóteses, tornando possível verificar a possibilidade de aplicação de toda uma estrutura complexa ou teoria através de uma avaliação de axiomas e definições.
- A demonstração, enquanto *desafio intelectual*, cumpre uma função gratificante e de realização própria. A demonstração é, portanto, um campo de teste para a energia intelectual e engenho do matemático.

Para contextualizar os papéis da demonstração, tomemos um exemplo. Em uma abordagem tradicional em sala de aula, a preposição P seria provavelmente enunciada e demonstrada pelo professor e apenas copiada pelos estudantes. Ou seja, tradicionalmente, o professor apresenta o enunciado e ele mesmo demonstra. Quando muito os estudantes são desafiados a provar a preposição que foi enunciada por eles. Assim, a demonstração teria apenas um papel de desafio intelectual.

De modo alternativo, a experimentação pode oferecer meios para que a preposição seja conjecturada e enunciada pelos próprios estudantes. Experimentalmente, é possível estabelecer relações entre representações e engajar-se a busca por descrever simbolicamente aquilo que se explora. Na busca por mais argumentos sobre a veracidade da preposição, na busca por mais justificativas sobre o convencimento, a preposição enunciada pode ser explorada de forma algébrica e dedutiva, cenário no qual geralmente busca mais rigor ou formalismo matemático.

A demonstração assume assim potencialmente os papéis de descoberta e de busca pelo convencimento, além de outros papéis como o de sistematização e desafio intelectual, seja no momento de experimentação ou na abordagem algébrica dedutiva. Esses momentos muitas vezes se fundem em nossa proposta investigativa. Esse cenário nos parece fértil para a produção de sentidos e conhecimentos matemáticos, elementos que consideramos fundamentais para aprendizagem (matemática).

A seguir apresentamos nossa abordagem, que compila os possíveis papéis da demonstração descritos anteriormente. Como o leitor notará, esta é uma abordagem “mista”. O uso do Winplot está amalgamado ou engendrado de forma simbiótica a uma abordagem algébrica, de caráter dedutivo e natureza formal. Nossa abordagem é iniciada com a noção de divisão de polinômios, o que nos leva explorar o teorema de D’Alembert, o do Fator e o das Raízes Racionais. Tal abordagem nos propicia apresentar de modo justificao uma

atividade experimental para investigar o algoritmo de Briot-Ruffini. Discutimos então noção de divisão de polinômios.

O Algoritmo de Briot-Ruffini

Lima et al. (1999) argumentam que o caso mais importante de divisão de polinômios é aquele em que o divisor é da forma $(x - a)$. Sempre que um número a é identificado como uma raiz de um polinômio $p(x)$ é possível concluir que $p(x)$ é divisível por $(x - a)$. De fato, ao se dividir um polinômio qualquer por $(x - a)$, obtemos um polinômio $q(x)$ e um resto r_0 , satisfazendo $p(x) = (x - a) q(x) + r_0$. Assim, o resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $(x - a)$ é igual a $p(a)$. Em particular, concluímos que um número a é raiz de $p(x)$ se, e somente se, $p(x)$ é divisível por $(x - a)$.

No contexto da nossa exploração com o Winplot, podemos explorar a função $f(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)/(x - k)$, de modo que $a + b + c + d = 0$. Ao manipularmos o coeficiente k a partir do menu animação, notamos que quando $k = 1$ a curva torna-se uma parábola (Figura 4), o que sugere a divisibilidade.

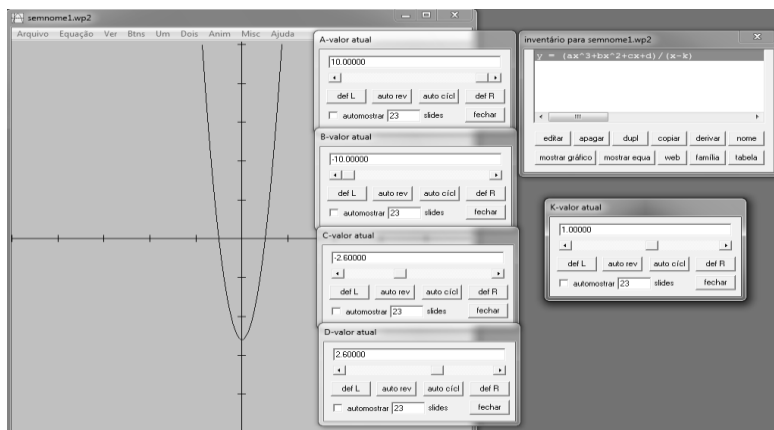


Figura 4. Exploração de $f(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)/(x - k)$ com o Winplot

Vamos avançar nosso desenvolvimento algébrico nesse momento. Dante (2005) evidencia os fundamentos da idéia de divisão de polinômios, indicando que dados dois polinômios $p(x)$ e $h(x)$, com $h(x)$ não nulo, dividir $p(x)$ por $h(x)$ significa encontrar dois polinômios $q(x)$ e $r(x)$ que satisfaçam as seguintes condições:

- i) $p(x) = h(x) \cdot q(x) + r(x)$; e
 - ii) o grau de $r(x)$ não pode ser maior que o grau de $h(x)$ ou então $r(x) = 0$.
- Assim, dizemos que:

- $p(x)$ é o dividendo
- $h(x)$ é o divisor
- $q(x)$ é o quociente
- $r(x)$ é o resto

$$\begin{array}{r|l} p(x) & h(x) \\ r(x) & q(x) \end{array}$$

No entanto, há um dispositivo que permite efetuar as divisões por polinômios do tipo $(x - a)$ de uma maneira mais simples e rápida: é o chamado dispositivo prático ou algoritmo de Briot-Ruffini⁴¹. Consideremos e detalhemos o seguinte exemplo: vamos dividir $p(x) = 2x^4 + 7x^3 - 4x + 5$ por $h(x) = x + 3$.

i) Os coeficientes de $p(x)$ são 2, 7, 0, -4 e 5.

ii) $a = -3$, pois é raiz de $h(x)$.

iii) Montamos a seguinte tabela:

	2	7	0	-4	5
-3					

iv) Copiamos o primeiro coeficiente.

	2	7	0	-4	5
-3		↓			
	2				

v) Calculamos $[(-3).(2)] + 7 = -6 + 7 = 1$ e obtemos o próximo número da tabela.

	2	7	0	-4	5
-3	↓	↓			
	2	1			

vi) Analogamente, determinamos os próximos números da tabela:

$$[(-3).(1)] + 0 = -3 + 0 = -3$$

$$[(-3).(-3)] - 4 = 9 - 4 = 5$$

$$[(-3).(5)] + 5 = -15 + 5 = -10$$

	2	7	0	-4	5
-3	↓	↓	↓	↓	↓
	2	1	-3	5	-10

vii) Encontramos os números 2, 1, -3, 5 e -10. Isso significa que 2, 1, -3 e 5 são os coeficientes do polinômio-quociente. E que -10 é o resto da divisão.

viii) Portanto, $p(x) = 2x^4 + 7x^3 - x^4 + 5$ dividido por $h(x) = x + 3$ resulta em $q(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 5$ e $r(x) = -10$. Logo, $2x^4 + 7x^3 - x^4 + 5 = (2x^3 + x^2 - 3x + 5).(x + 3) - 10$.

Em meio a este desenvolvimento algébrico, é possível retomarmos a abordagem experimental. Uma possibilidade de exploração com o Winplot

⁴¹ O quociente e o resto de uma divisão de um polinômio $P(x)$ por um polinômio da forma $(x - a)$ podem ser obtidos através de um dispositivo bastante simples, conhecido como dispositivo de Briot-Ruffini (BEZERRA, 1996).

sobre o referido caso para o dispositivo de Briot-Ruffini seria investigar as funções $f(x) = 2x^4 + 7x^3 - x^4 + 5$ e $g(x) = (2x^3 + x^2 - 3x + 5) \cdot (x + k) - 10$. Podemos animar o coeficiente k com o Winplot, e conjecturar que quando $k = 3$, os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$ coincidem (Figura 5).

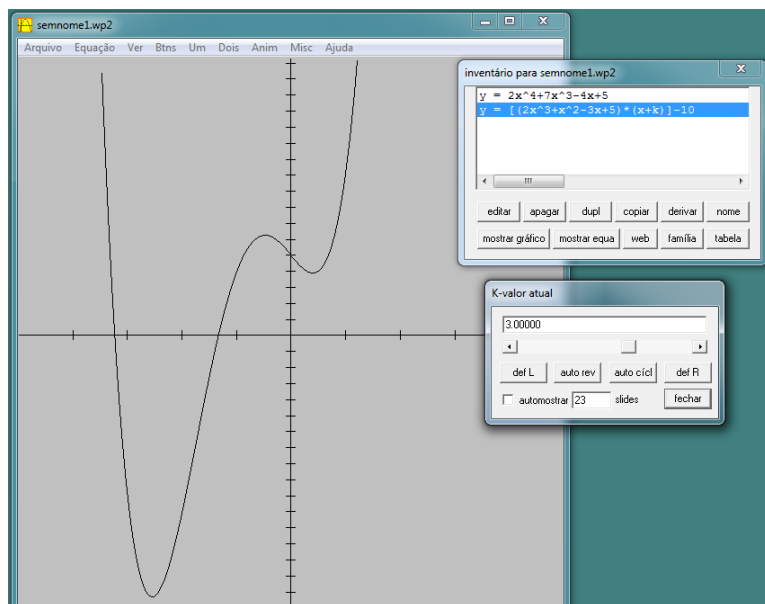


Figura 5. Uma possibilidade inicial para exploração do dispositivo de Briot-Ruffini com o Winplot para o caso $f(x) = 2x^4 + 7x^3 - x^4 + 5$.

Pesquisas em nossa área têm investigado o tema equações algébricas, principalmente envolvendo divisão enter polinômios de terceiro grau e as possíveis relações desta divisão com a resolução de equações cúbicas do tipo $p(x) = 0$. Dentre essas pesquisas, destacamos os estudos de Lima (1999) e Azevedo (2002).

Lima (1999) investigou métodos algébricos e geométricos da resolução de equações de terceiro grau, com seqüências de atividades para serem resolvidas com base na utilização de quatro métodos diferentes, destacando as suas vantagens e desvantagens. Um dos métodos valorizava a visualização a partir da utilização do *software* Cabri, uma vez que para sua solução, os alunos realizam a seguinte abordagem:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$ax^3 + bx^2 + cx = -d$$

$$ax^2 + bx + c = -d/x$$

Buscamos explorar as ideias de Lima (1999) com o Winplot. Nós notamos que se 1 for raiz da equação, ou seja, se $x = 1$, então $a + b + c + d = 0$. Inserindo as equações $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = -d/x$ e animando os coeficiente a , b , c e d , percebemos uma relação interessante, relacionada naturalmente com o que investigamos: toda vez que $a + b + c + d = 0$, os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ sempre se interceptam em $x = 1$ (Figura 6).

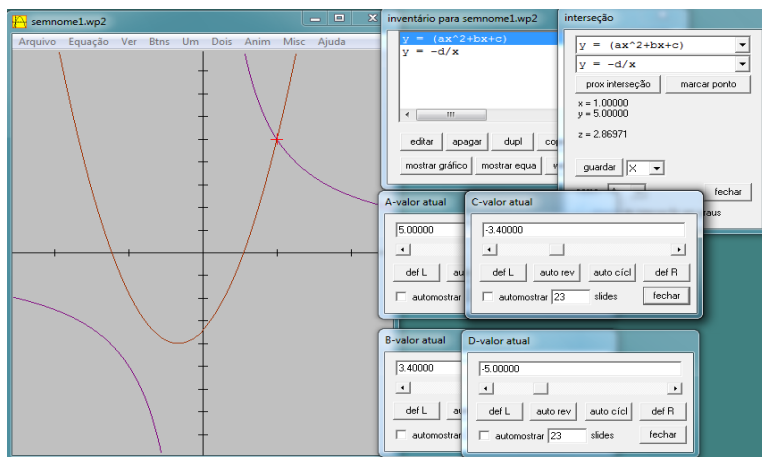


Figura 6. Explorando com o Winplot a intersecção entre $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = -d/x$ quando $a + b + c + d = 0$.

Por ter sido valorizado pelos estudantes, Lima (1999) sugere que este método pode ser considerado útil para introdução do estudo de equações cúbicas. Além disso, este método pode ser utilizado na solução de qualquer equação cúbica. Nesse sentido, na pesquisa de Lima (1999), para explorar o algoritmo de Briot-Ruffini era solicitado à resolução de uma equação cúbica incompleta (por exemplo, $x^3 - 5x = 4$), e era pedido para encontrar uma equação pelo método de pesquisa de raízes utilizado o teorema de D'Alembert⁴². Assim, seria possível encontrar as outras equações, caso existissem.

Uma análise qualitativa da solução era solicitada aos alunos através da comparação do resultado encontrado o este método e os resultados obtidos a partir do uso de outros métodos. A autora relata que “os alunos concordam que nem sempre o dispositivo [...] é bom na resolução de equações, pois elas precisam ter uma raiz inteira para que esse método possa ser usado” (LIMA, 1999, p. 88). Para os alunos usarem o método de Briot-Ruffini, como destacado, a decisão estava subordinada aos valores dos coeficientes da equação. Assim, os alunos notaram que após terem resolvido atividades

⁴² Ver demonstração mais adiante.

utilizando diferentes métodos, eles podiam escolher um dos caminhos mais convenientes ou efetivos (LIMA, 1999).

No cenário da outra pesquisa que discutimos, Azevedo (2002) investiga o ensino e aprendizagem de estudantes sobre equações algébricas através da resolução de problemas. Uma das atividades usada pela pesquisadora para introdução do dispositivo de Briot-Ruffini propunha a divisão entre dois polinômios. Esse encaminhamento possibilitou que os estudantes pudessem usar o dispositivo, além do Teorema de D'Alembert e Teorema do Fator⁴³.

Evidenciamos ainda que ambas as pesquisadoras (LIMA, 1999; AZEVEDO, 2002) destacam que o dispositivo de Briot-Ruffini está intrinsecamente articulado ao *Teorema das Raízes Racionais*, o qual enunciamos: *Se o número racional $\frac{p}{q}$, com p e q , primos entre si, é uma raiz da*

equação polinomial com coeficientes inteiros $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, então, p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n .

Apenas de modo exploratório, tomemos um exemplo. O teorema enunciado nos permite argumentar, por exemplo, que as possíveis raízes racionais de $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$, são os números cujos quocientes obtidos entre os valores de p e q respectivamente são iguais a 1, -1, 2 e -2 (divisores de $a_0 = -2$) e 1, -1, 2 e -2 (divisores de $a_3 = 2$). Considerando-se as possíveis combinações para $\frac{p}{q}$, obtemos os seguintes candidatos a raízes do polinômio:

1, -1, 2, -2, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$. Por substituição verificamos que as raízes são $\frac{1}{2}$, 1 e 2.

Destacamos ainda o fato de 1 ser raiz do polinômio estar em ressonância com foco de nosso artigo (com nossa proposição P), pois podemos novamente perceber que a soma dos coeficientes da expressão algébrica de nosso exemplo é nula: $2 - 7 + 7 - 2 = 0$.

Na experimentação proposta neste artigo, indicamos inicialmente que sejam exploradas funções polinomiais do terceiro grau com o Winplot de tal forma que o estudante possa conjecturar e enunciar a proposição P, como indicado na seção 2. E ainda, como os próprios fundamentos do processo experimentação com tecnologias destacam, na busca mais aprimorada pelo convencimento, é natural que uma prova de natureza algébrica seja desenvolvida, uma validação algébrica-dedutiva de tal proposição. São os

⁴³ **Teorema do Fator:** Se C é uma raiz de um polinômio $p(x)$, de grau $n > 0$, então $x - c$ é um fator de $p(x)$. Prova: Pelo teorema de D'Alembert, $p(x) = (x - c)q(x) + p(c)$. Se c é raiz de $p(x)$, então $p(c) = 0$. Tem-se então $p(x) = (x - c)q(x)$. Logo $x - c$ é um fator de $p(x)$.

vários papéis da demonstração em ação. Vamos assim enunciar o **Teorema de D'Alembert**: O resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $x - a$ é $p(a)$.

Prova: Consideremos $p(x) = (x - a)q(x) + r$. Para $x = a$ tem-se $p(a) = (a - a)q(a) + r = 0 + r = r$. Portanto, $p(a) = r$ (c.q.d.).

Podemos agora retomar o enunciado e provar nossa Proposição P: se a soma dos coeficientes reais $a \neq 0$, b , c , e d de um polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, for nula, então 1 é raiz do polinômio.

Prova: Basta verificarmos sob que condições o polinômio $p(x)$ é divisível por $(x - 1)$. Pelo dispositivo de Briot-Ruffini temos:

	a	b	c	d
1	a	a + b	a + b + c	a + b + c + d

Concluimos então que o resto da divisão do polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ por $(x - 1)$ é $a + b + c + d$. Imediatamente, pelo teorema de D'Alembert, temos que $p(1) = a + b + c + d$. Suponhamos que 1 não seja raiz de $p(x)$. Então $p(1) \neq 0$. Logo $a + b + c + d \neq 0$. Isso contradiz nossa hipótese! Portanto, se a soma dos coeficientes a , b , c e d de um polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a \neq 0$ for nula, então 1 é raiz do polinômio. Como Havíamos Conjecturado!⁴⁴.

A nível experimental e exploratório, podemos determinar, por exemplo, as raízes de $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Como a soma dos coeficientes é nula ($1 - 2 - 5 + 6 = 0$), já sabemos que 1 é raiz. Pelo método de Briot-Ruffini, obtemos os coeficientes: 1, -1 e -6. Basta determinarmos as raízes de $f(x) = x^2 - x - 6$. Obtém-se $x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$ e $x_2 = -2$. Logo as raízes de $p(x)$ são -2, 1 e 3. De modo simplificado, podemos visualizar, verificar ou confirmar a veracidade de tal resolução com o Winplot (Figura 7):

⁴⁴ Para evidenciar o processo de experimentação com tecnologias na investigação/demonstração matemática, Scucuglia (2006) discute a possibilidade de se considerar C.H.C. (Como Havíamos Conjecturado!) ao invés de C.Q.D. (como queríamos demonstrar) ao se finalizar uma abordagem dedutiva.

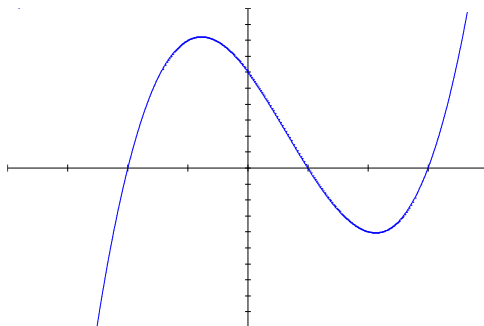


Figura 7. $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Podemos agora, de modo mais investigativo, propor uma investigação com o Winplot sobre o algoritmo de Briot-Ruffini considerando famílias de funções polinomiais do terceiro grau. Plotemos $f(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)/(x - 1)$ e $g(x) = a + b + c + d$. Ao animarmos os coeficientes reais $a \neq 0$, b , c e d notamos que a curva da função $f(x)$ torna-se uma parábola quando $a + b + c + d = 0$. Isso mostra a divisibilidade do polinômio dado por $(x - 1)$ quando a soma dos coeficientes é nula, o que nos convence sobre a veracidade da proposição P (Figura 8).

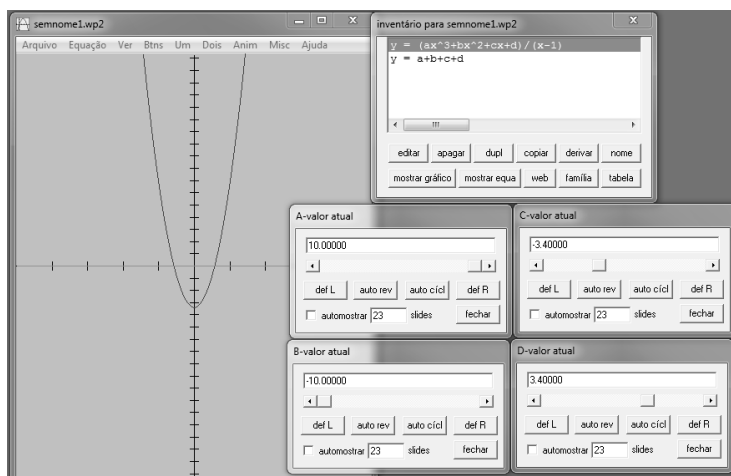


Figura 8. Visualizando com o Winplot a divisibilidade entre $ax^3 + bx^2 + cx + d$ e $(x - 1)$ quando $a + b + c + d = 0$.

Fica, portanto, evidenciado como o algoritmo de Briot-Ruffini pode ser explorado ao se investigar múltiplas representações de funções polinomiais do

terceiro grau utilizando um *software* gráfico, não somente no sentido de verificação, mas também de se elaborar e enunciar uma conjectura a partir do estabelecimento entre uma relação entre uma das raízes do polinômio e uma condição particular envolvendo os coeficientes numéricos do polinômio. Mais ainda, é natural que seja investigada a divisibilidade entre o polinômio original e aquele do tipo $(x - x_0)$, tal que, em nosso caso, $x_0 = 1$ é raiz do polinômio. É essa divisibilidade que podemos explorar graficamente/ visualmente com o Winplot e que é um dos elementos fundamentais que constitui nosso convencimento acerca da veracidade do algoritmo de Briot-Ruffini, enunciado por nós como proposição.

Nesse contexto, fica evidente como a experimentação com tecnologias e a visualização caracterizam nossa exploração e, ao mesmo tempo, condicionam e possibilitam a elaboração de uma abordagem algébrica para o enunciado conjecturado. A demonstração assume vários papéis na investigação matemática, no qual o uso de tecnologias e desenvolvimentos de caráter algébricos se engendram na elaboração de conjecturas, enunciações das conjecturas e buscas pelo convencimento acerca da veracidade dos enunciados.

Considerações Finais

Neste artigo, foi proposta uma forma sobre como podem ser amalgamados os processos de experimentação com tecnologias informáticas e abordagem algébrica na exploração do algoritmo de Briot-Ruffini, a partir de conjecturas que podem ser elaboradas experimentalmente, que possibilitem representar visualmente, de modo múltiplo e dinâmico, famílias de funções polinomiais do terceiro grau.

Buscamos indicar uma possibilidade de explorar o referido algoritmo destacando o fato de se investigar conceitos matemáticos com uma determinada tecnologia informática como um *software* gráfico, no caso o Winplot. Explorando atividades de caráter investigativo, estabelecendo relações entre diferentes tipos de representações, valendo-se de informações gráficas-visuais. Pudemos assim elaborar uma conjectura a qual enunciamos enquanto proposição.

Buscamos aprimorar nosso convencimento acerca da proposição e isso nos encaminhou a diferentes tipos de abordagens que, gradativamente, podem ser consideradas mais dedutivas, formais ou rigorosas no sentido proposto por Reis (2004). No nosso caso, no abordagens algébricas e experimentais com tecnologia foram combinadas. O uso de tecnologia informática assumiu um papel importante no processo de descoberta, de investigação, de exploração e convencimento, promovendo a possibilidade de proposições serem intuitivamente conjecturadas, enunciadas e gradativamente formalizadas.

A demonstração matemática, em nossa perspectiva sobre investigação matemática, assumiu diversificados papéis e eles ocorreram de forma dinâmica

e multi-direcional, e não de forma sequencial ou linear, quando buscamos destacar o uso de tecnologias informáticas. Não somente o produto – que tracionalmente é concebido como demonstração em matemática – mas principalmente o processo é que nos interessa enquanto educadores matemáticos. Com esse estudo exploratório, acreditamos ter contribuído com uma possibilidade de investigação para sala de aula bem como com o mosaico de alternativas sobre modos de se conceber demonstração matemática.

Referências

- AZEVEDO, E. Q. **Ensino-aprendizagem das equações algébricas através da Resolução de Problemas**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, 2002.
- BORBA, M. C. VILLARREAL, M. E. **Humans-with-media and Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation**. New York: Springer Science+Business Media, Inc., 2005.
- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. (Tendências em Educação Matemática).
- BORBA, M. C. Calculadoras Gráficas no Brasil. In: FAINGUELERNT, E. K.; GOTTLIEB, F. C. (Orgs.). **Calculadoras Gráficas e Educação Matemática**. Rio de Janeiro: Ed. Art Bureau, p. 15-34, 1999.
- HANNA, G. Proof, Explanation and Exploration: an Overview. **Educational Studies in Mathematics**. 2000.
- LAKATOS, I. **Proofs and Refutations: the logic of mathematical discovery**. Cambridge: 1976.
- LÉVY, P. **As Tecnologias da Inteligência: O futuro do pensamento na era da informática**. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.
- LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, W.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, v. 3, 1999.
- LIMA, R. N. **Resolução de equações de terceiro grau através de cônicas**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) –PUC-SP, São Paulo, 1999.
- MALHEIROS, A. P. S.; BORBA, M. C.; DINIZ, L. N. Doze Anos de Produção Matemática de Estudantes de Biologia em um Ambiente de Modelagem. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2005, Feira de Santana. **Anais...** Feira de Santana: Universidade Estadual de Feira de Santana, 2005. 1 CD-ROM.
- POLYA, G. **How to Solve it?** Princeton University Press, 1945.

SCUCUGLIA, R. Calculadoras Gráficas: conjecturando um teorema a partir de um estudo investigativo de funções. In: **V SIMPÓSIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA**, V SIC, 2002, Rio Claro: Universidade Estadual Paulista, 2002.

SCUCUGLIA, R. **A Investigação do Teorema Fundamental do Cálculo com calculadoras Gráficas**. 1v. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

THIKHOMIROV, O. The psychological consequences of the computerization. In: WERSTCH, J. **The concept of activity in soviet psychology**. New York: Sharp, 1981.

TENÓRIO, R. **Computadores de Papel**: Máquinas abstratas para um ensino concreto. São Paulo: Cortez, 2001.

VILLIERS, M. Papel e Funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. São Paulo: **Educação e Matemática**, 2001.

Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva

Universidade estadual Paulista – UNESP/São José do Rio Preto – Brasil.

E-mail: ricardos@ibilce.unesp.br

Leandro do Nascimento Diniz

Universidade Federal do Recôncavo Baiano – UFRB – Amargosa – Brasil

E-mail: leandro@ufrb.edu.br