AS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E OS FRISOS

GEOMETRICS TRANSFORMATIONS AND FRIEZES

David Antonio da Costa
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC - Brasil

Resumo

O objetivo deste artigo é apresentar parte dos resultados de uma pesquisa que procurou investigar como o uso dos frisos com a ajuda do software Cabri-Géomètre-II, contribuiu para articular e dar significado aos conceitos de translação, simetria axial e simetria central. O pressuposto é de que os frisos potencializam o estudo das geometrias das transformações. Os padrões presentes nos frisos são ricos elementos de contextualização das transformações geométricas em uma dimensão artística. Como resultado encontrou-se que a abordagem de diferentes transformações geométricas é favorecida com a introdução de frisos por meio de sequencias didáticas e o uso de alguns recursos tecnológicos.

Palavras-chave: Transformações Geométricas, Frisos, Educação Matemática, Arte.

Abstract

The aim of this paper is to present some results of a survey that investigated how the use of friezes with the help of Cabri-Géomètre-II, helped to articulate and give meaning to the concepts of translation, axial symmetry and symmetry. The assumption is that the friezes help the study of geometry of the transformations. The patterns present in the friezes are rich contextual elements of geometric transformations in artistic dimension. As a result it was found that the approach of different geometrical transformations is favored by the introduction of friezes in a didactic sequence and the use of some technological resources.

Keywords: Geometric Transformation, Friezes, Mathematics Education, Art

Introdução

Este texto apresenta parte da pesquisa realizada por Costa (2005) no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP intitulado “O estudo dos frisos[13] no ambiente informatizado Cabri-Géomètre II.

---

13 Pastor (1996) define friso como o ladrilhamento de uma região plana limitada por duas retas paralelas. Tal conceito será abordado ainda neste artigo posteriormente.

Muitos estudos tem sido feitos acerca das transformações geométricas. Entre eles podemos citar Mabuchi (2000) que analisou estudos e pesquisas sobre o ensino e aprendizagem das transformações geométricas no ensino fundamental e como tais conteúdos deveriam ser incorporados aos cursos de formação de professores de Matemática. Fernandes (2004) devido as fortes associações com experiências visuais, investigou os processos pelos quais aprendizes cegos se apropriam dos conceitos de simetria e reflexão – algumas das transformações geométricas. Partindo de uma perspectiva vygotskiana, esta autora tem como hipótese que aprendizes cegos têm o mesmo potencial que os videntes para apropriar-se de noções ligadas a esses conceitos. E ainda mais recentemente podemos citar a pesquisa de Salazar (2009) onde se apoia na gênese instrumental na interação com o Cabri 3D para realizar estudos sobre as transformações geométricas. A investigação de Silva (1997) descreve uma proposta de ensino da geometria através de desenhos, tendo como base alguns ornamentos, como faixas, rosetas e mosaicos, utilizando na sua confecção translação, reflexão e rotação. O seu objetivo era elaborar uma proposta de Ensino de Geometria utilizando ornamentos para estimular a criatividade através da metodologia de resolução de problemas, por meio de trabalhos em grupos e ensino pela descoberta.

Seguindo Silva (1997) procurou-se responder a seguinte questão: em que medida o uso dos frisos com o Cabri-Géomètre II contribui para articular e dar significado aos conceitos de translação, simetria axial e simetrai central?

Os frisos e as faixas usados como sinônimos nesta pesquisa se apresentaram como elementos motores articulados dentro de uma dimensão artística. Esta articulação foi feita principalmente por uma releitura das pinturas presentes nas paredes da Pinacoteca Benedito Calixto[14], no município de Santos. Dessa forma, os frisos permitiram uma nova dimensão ao estudo que transcenderia a própria matemática.

Nesta pesquisa, adotou-se o conceito de obra matemática discutido por Chevallard (2001), entendendo-se que todo saber matemático é constituído de pequenas obras e estas devem ser reconstruídas para que se possam dar significados a este saber. Sendo assim as transformações geométricas devem ser problematizadas para poderem ser estudadas.

Segundo Bkouche (1991) o estudo da geometria das transformações pode ser problematizado e abordado de pelo menos cinco formas:

a) movimento (neste caso via translações e rotações);

b) figuras regulares (polígonos regulares e seus respectivos padrões – frisos e pavimentações; poliedros regulares e os cristais)

c) figuras semelhantes (homotetias e semelhanças);

14 O chamado Casarão Branco, sede da Fundação Pinacoteca Benedicto Calixto, construído no início do século XX, é um dos mais significativos conjuntos arquitetônicos da cidade de Santos. Localizado na orla da praia e cercado por edifícios residenciais, abriga nas pinturas internas dos cômodos, trabalhos artísticos magníficos onde a presença das faixas é notória em todos os ambientes.

d) relações provocadas por transformações deformantes (que mudam a forma) entre uma figura geométrica e sua imagem; e

e) representações planas dos objetos (perspectiva cônica e paralela).

Enfatizou-se neste trabalho a abordagem do estudo da geometria das transformações pelas figuras regulares, ou seja, a problematização das figuras regulares (polígonos regulares e seus respectivos padrões – frisos e pavimentações; poliedros regulares e cristais).

O software Cabri-Géomètre II foi utilizado no estudo dos frisos e das transformações geométricas no plano. O uso deste programa permitiu uma abordagem diferenciada em relação ao meio papel e lápis, pois sua principal característica é de permitir a manipulação de figuras sem alterar as propriedades básicas das mesmas, ou seja, seus invariantes.

A caixa de ferramenta “Transformar” contém as ferramentas associadas aos recursos de transformação do Cabri-Géomètre II. Particularmente neste trabalho foram utilizadas apenas a translação, reflexão em reta (ou simetria axial) e simetria central.

Os frisos na arte

> Ignoramos como a arte começou, tanto quanto desconhecemos como teve inicio a linguagem. Se aceitarmos que arte significa o exercício de atividades tais como a edificação de templos e casas, a realização de pinturas e esculturas, ou a tessitura de *padrões*, nenhum povo existe no mundo sem arte. (GOMBRICH, 1999, p.41 – grifo nosso)

Encontra-se na arte diversos exemplos dos padrões, mais especificamente, das transformações geométricas. Seja na pintura, na confecção de máscaras, o dominio dos artífices tribais é deveras surpreendente. Os maoris[15] da Nova Zelândia aprenderam a criar verdadeiras maravilhas em suas obras de talhe (GOMBRICH, 1999, p.44). Nestes entalhes nota-se a presença da *simetria em relação a um eixo vertical.*

Figura 1. Lintel da casa de um chefe maiori, começo do século XIX. Madeira talhada 32 x 82 cm; Museu do Homem, Londres (GOMBRICH, 1999).

15 Os maoris são os povos indígenas da Nova Zelândia.

Poderemos encontrar mais exemplos de objetos que contém os ornamentos. Na realidade, em vários lugares até os dias de hoje, os frisos e as faixas com motivos geométricos são chamados também de "gregas". A Figura 2 apresenta um vaso grego decorado com padrões geométricos simples. Este vaso representa a lamentação por um morto, que jaz em seu esquife, enquanto as carpideiras à direita e à esquerda levam as mãos à cabeça no pranto ritual que era um costume de quase todas as sociedades primitivas.

Figura 2. A lamentação pelo morto, 700 a.C. Vaso grego no estilo Geométrico; altura 155 cm; Museu Arqueológico Nacional, Atenas (GOMBRICH, 1999).

Os frisos estão presentes, além das manifestações em pinturas ou cerâmicas, também na arquitetura. O Coliseu é um exemplo característico da construção romana. O andar térreo é uma variação do estilo dórico, o segundo andar é jônico, e o terceiro e o quarto são meias colunas coríntias. É possível verificar a presença de um grande friso ornamentando o ponto mais elevado desta construção.

Figura 3. O Coliseu, Roma, 80 d.C. Um anfiteatro romano (GOMBRICH,1999)

Sinteticamente, procuramos demostrar que há na cultura em várias épocas e lugares o emprego dos frisos.

A matemática nos frisos

Segundo as possíveis problemáticas nas abordagens do estudo das transformações geométricas nas considerações iniciais, a pesquisa de Costa (2005) adotou aquela que trata dos padrões regulares.

Estes padrões podem ser finitos ou infinitos de acordo com o número de cópias seja finito ou infinito, respectivamente. No entanto, na realidade, encontram-se somente padrões finitos, mas, a capacidade de abstração permite imaginar partes de padrões que se estendem indefinidamente.

Alguns tipos de padrões:

- papéis de parede: padrão com simetria de translação em direções diferentes (independentes);
- frisos ou padrões de faixa: padrões com simetria de translação numa única direção;
- padrões de roseta: o motivo repete-se como se constituísse pétalas de uma flor à volta do caule.

Num papel de parede a repetição do motivo verifica uma propriedade que consiste na existência de duas translações linearmente independentes tais que o desenho final é resultado de todas as transformações geradas por essas translações. O estudo limitou-se a um tipo de padrão, ou seja, os frisos.

Pastor (1996) define friso como o ladrilhamento de uma região plana limitada por duas retas paralelas. Dada uma região R do plano, entende-se por ladrilhamento o conjunto de figuras geométricas (geralmente polígonos) que se podem colocar de maneira que todo ponto da região R pertença exclusivamente a uma destas figuras. Ainda segundo este autor, o conjunto inicial de figuras é chamado de motivo mínimo. O conjunto de isometrias que permite construir o ladrilhamento são subgrupos do grupo de isometrias do plano, pois é sempre possível encontrar um conjunto mínimo de isometrias que caracterize o ladrilhamento, chamado de sistema gerador. Para ele, o ladrilhamento é caracterizado matematicamente por um motivo mínimo e um sistema gerador.

Essa região por onde se definiu o friso possui comprimento infinito, mas largura finita. Sendo assim as únicas isometrias que podem fazer parte destes frisos são:

a) as translações de vetor paralelo às bordas desta região;

b) as rotações de 180º cujo centro eqüidista das bordas da região;

c) as reflexões em reta desde que seu eixo seja uma reta eqüidistante das bordas desta região ou perpendicular a esta reta.

d) as reflexões transladadas com eixo eqüidistante das bordas desta região.

Acredita-se ser relevante a descrição das possíveis isometrias que poderão fazer parte dos frisos por que introduzem as possibilidades de construção que iremos utilizar no nosso estudo do objeto matemático.

Em Alsina (1989) encontra-se definição similar para o friso, no entanto um pouco mais precisa na sua forma de exposição. Este autor introduz a ideia do friso como figuras onde a geometria se põe ao serviço de criar beleza com repetição e ritmo.

> ... No friso se reconhece a ordem e a periodicidade. Seu motivo inicial pode ser muito diverso e eles induzem a pensar em uma infinidade de combinações. Porém o método de geração de friso responde a uma perfeita sincronia de movimentos geométricos em número muito limitado. (ALSINA, 1989, p.83).

De acordo com Alsina (1989), dada uma figura *F* e seja *S(F)* o grupo de simetrias de *F*, isto é, as isometrias que deixam a figura *F* invariante. Diremos que *F* é um friso se as seguintes condições são satisfeitas: a) Existe uma reta *r* (desenhada ou não) que indica a direção de desenvolvimento do friso e que é invariante por todas as isometrias do grupo *S(F).* b) Existe uma translação t_a, por vetor não nulo e direção igual a da reta *r*. As demais translações presentes no friso por vetor não nulo e direção igual a da reta serão múltiplos inteiros da translação t_a deixando o friso invariante.

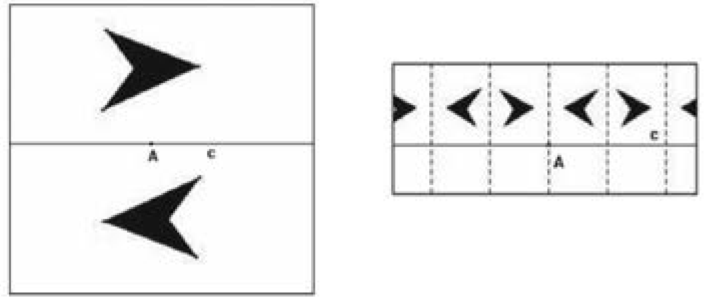
Adotou-se na pesquisa a definição de friso dada por Martin (1982): "Um grupo de frisos de eixo **c** é um grupo de isometrias que fixa uma dada reta **c** cujas translações formam um grupo cíclico infinito." (MARTIN, 1982).

A este objeto matemático, dadas as possibilidades de combinações de transformações geométricas, pode-se verificar (e provar) a existência de apenas sete tipos, ainda que existam infinitas possibilidades de representação.

Consideram-se os grupos de isometrias que fixam uma reta ***c,*** gerados por uma translação. Esses grupos são chamados grupos de faixas ou grupos de frisos com centro ***c***. Seja τ a translação não identidade que fixa a reta ***c***. Escolhe-se um ponto *A* como segue:

a) se o grupo contém rotação de 180º, então *A* é escolhido como o centro de uma das rotações.

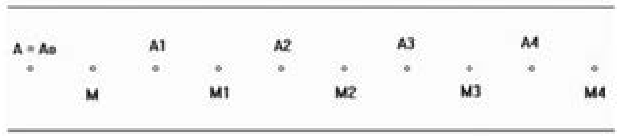
b) se o grupo não possui rotação de 180º, mas contém reflexão em retas perpendiculares a *c* , então *A* é escolhido para ser a intersecção de uma dessas retas com *c.*



c) para outros casos, o ponto *A* será escolhido para ser qualquer outro ponto de *c*.

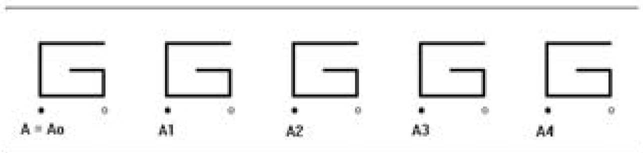
Considera-se a sequencia de pontos A = A_0, A_1, A_2, ... A_i, e a sequencia de pontos M = M_0, M_1, M_2, ... M_i em que M_0 é o ponto médio de A_0 e A_1; M_1 é o ponto médio de A_1 e A_2. Sendo assim, temos que

$$A_i = \tau^i(A),\ \tau^n(A_i) = \tau^n(\tau^i(A) \ = \tau^{n+i}(A)$$

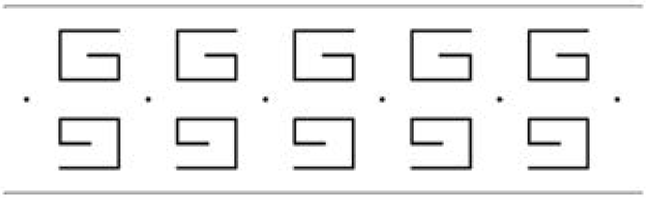


Os grupos de frisos $\mathcal{F}$ são grupos discretos de isometrias que possuem translações τ diferentes da identidade, mas somente em uma direção. Torna-se importante salientar que usaremos a definição de padrão de friso como sendo o *pattern* (padrão), ou melhor, o modelo que se repete, o modelo que se mantém invariante. Ele é usado no contexto de reticulado unidimensional. É possível distinguir os seguintes tipos de grupos de frisos:

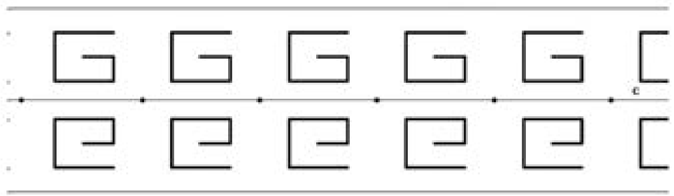
1ª Possibilidade: $\mathcal{F}_1 = <\tau>$**.** São os grupos de frisos que possuem somente translações. Um padrão de friso contendo $\mathcal{F}_1$ como seu grupo de isometria não tem ponto de simetria, não tem reta de simetria e não é fixo por uma reflexão transladada (MARTIN, 1982).



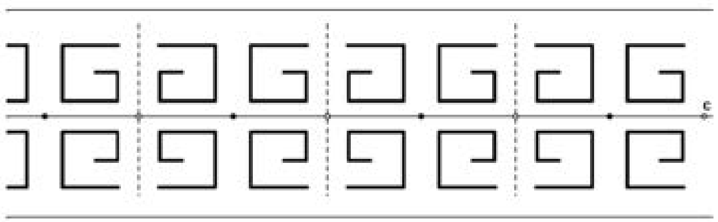
2ª Possibilidade: $\mathcal{F}_2 = \langle \tau, \sigma_A \rangle$ São os grupos de frisos gerados por translações e rotações de 180º. Um padrão de friso contendo $\mathcal{F}_2$ como seu grupo de simetria tem um ponto de simetria, mas não tem eixo de simetria (MARTIN, 1982).



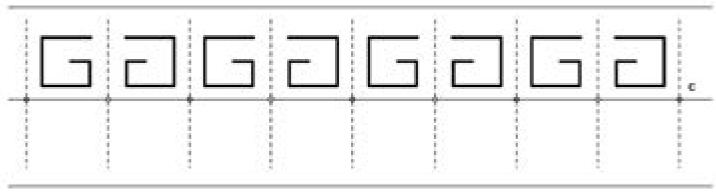
3ª Possibilidade: $\mathcal{F}_1^{\,1} = \langle \tau, \sigma_c \rangle$. São os grupos de frisos que possuem translações e uma simetria axial cujo eixo é o centro do grupo de friso. Um padrão de friso contendo $\mathcal{F}_1^{\,1}$ como seu grupo de simetria não tem ponto de simetria e o centro é um eixo de simetria (MARTIN, 1982).



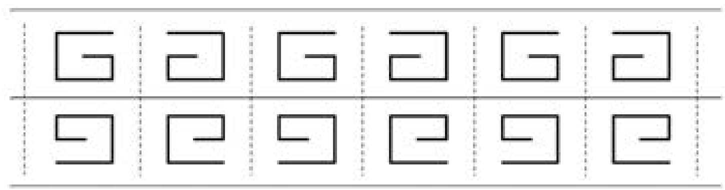
4ª Possibilidade: $\mathcal{F}_2^{\,1} = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_c \rangle$. São os grupos de frisos que possuem translações e simetria axial cujo eixo é perpendicular à direção do vetor da translação. Estes frisos contêm não só translações, mas também simetria central em pontos alinhados no eixo de centro deste grupo de friso. Um padrão de friso contendo $\mathcal{F}_2^{\,1}$ como seu grupo de simetria tem um ponto de simetria e o centro é um eixo de simetria (MARTIN,1982).



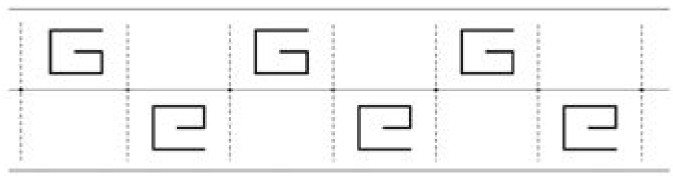
5ª Possibilidade: $\mathcal{F}_1^{\,2} = \langle \tau, \sigma_a \rangle$. São os grupos de frisos que possuem translações e simetria axial cujo eixo é perpendicular à direção do vetor da translação, diferentemente da 4ª possibilidade apresentada anteriormente, pois nela não há a simetria axial relativa ao eixo de centro c. Um padrão de friso contendo $\mathcal{F}_1^{\,2}$ como seu grupo de simetria não tem ponto de simetria, tem uma reta de simetria, mas o centro não é um eixo de simetria (MARTIN, 1982).



6ª Possibilidade: $\mathcal{F}_2^{\,2} = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_p \rangle$. São os grupos de frisos que possuem translações e simetria axial cujo eixo é perpendicular à direção do vetor da translação. Além disso, também possuem simetrias centrais em relação a pontos médios da intersecção dos eixos perpendiculares a um eixo de centro paralelo à direção do vetor da translação. Um padrão de friso contendo $\mathcal{F}_2^{\,2}$ como seu grupo de simetria tem um ponto de simetria, tem um eixo de simetria, mas o centro não é uma linha de simetria (MARTIN,1982).



7ª Possibilidade: $\mathcal{F}_1^{\,3} = \langle \gamma \rangle$ onde γ é a reflexão transladada com eixo *c* tal que $\gamma^2 = \tau$. São os grupos de frisos que possuem somente translações e translação deslizante. Um padrão de friso contendo $\mathcal{F}_1^{\,3}$ como seu grupo de simetria, não tem ponto de simetria, não tem eixo de simetria mas é fixo por uma reflexão transladada (MARTIN,1982).



A seguir a figura 4 apresenta um resumo dos sete tipos de frisos Os sete tipos de frisos ou faixas onde τ representa translações, σ representa as reflexões ou simetrias e γ representa a reflexão transladada ou também chamada de translação deslizante (COSTA, 2005).

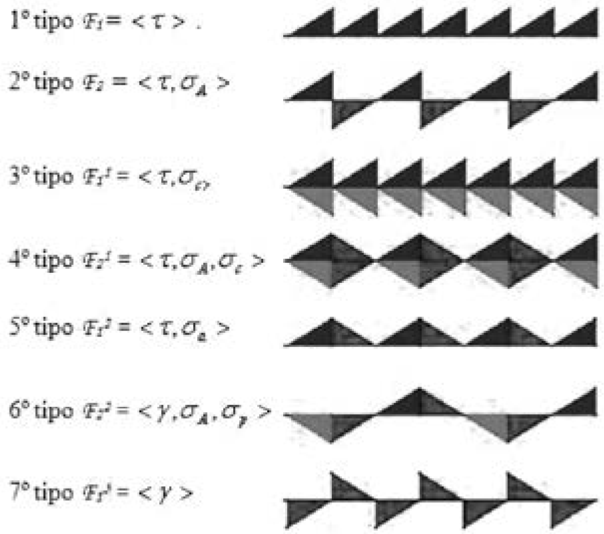


Figura 4. Os sete tipos de frisos ou faixas onde τ representa translações, σ representa as reflexões ou simetrias e γ representa a reflexão transladada ou também chamada de translação deslizante. (COSTA, 2005).

Metodologia e aplicações das atividades

As atividades da pesquisa de Costa (2005) foram divididas em quatro módulos. *Módulo 1*: familiarização do aluno com o programa Cabri-Géomètre II; *Módulo 2*: classificação aleatória de frisos; *Módulo 3*: formação de conceitos relativos às transformações geométricas (translação, simetria axial e simetria central) e; *Módulo 4*: reavaliação da classificação dos frisos ocorridas no módulo 2 e apresentação de alguns exemplos de faixas produzidas pelos próprios alunos.

Tais atividades fundamentaram-se na teoria de Régine Douady (1986). Um saber matemático pode ser visto sob dois aspectos. Por um lado, nível funcional, onde certos conceitos e teoremas matemáticos podem ser usados para resolver problemas, interpretar informações. Neste caso, o saber matemático funciona como *ferramenta* que pode ser adaptada a vários problemas, e várias ferramentas podem ser adaptadas a um mesmo problema. O segundo aspecto é aquele que identifica o saber matemático como elemento de um corpo de conhecimento cientificamente e socialmente reconhecido. O saber matemático é visto, neste caso, como *objeto*.

Esta autora assume como hipótese de trabalho que, para certas noções, uma seqüência de atividades fazendo alternar o aspecto ferramenta da noção visada com o aspecto objeto, seguida de uma institucionalização, e seguida de exercícios variados de familiarização que precisam das noções recentemente institucionalizadas e sua reutilização numa situação nova, pode ajudar na construção de um conhecimento procurado. A esta sequencia de atividades com estas características ela denomina de dialética Ferramenta-Objeto (DOUADY, 1986).

O *Módulo 1* apresentou atividades de familiarização com o Cabri-Géomètre, privilegiando grande parte das construções geométricas básicas. Não foi trabalhado nenhum dos comandos relativos às transformações geométricas.

No *Módulo 2*, foi solicitado aos alunos para estudar quinze faixas e classificá-las mediante elementos comuns entre as mesmas. Eles receberam exemplares impressas em papel plastificado, todas com mesmas dimensões aproximadamente 25 cm de comprimento por 3 cm de largura. A figura 5 ilustra alguns destes modelos de frisos. Receberam também um espelho de mesma dimensão para poderem investigar seus desenhos e conjecturar possíveis relações entre elas. Tais atividades favoreceram os conceitos iniciais das simetrias, pois ao manipularem tanto as faixas, como os espelhos, os alunos apresentaram primeiras conjecturas acerca deste conceito.

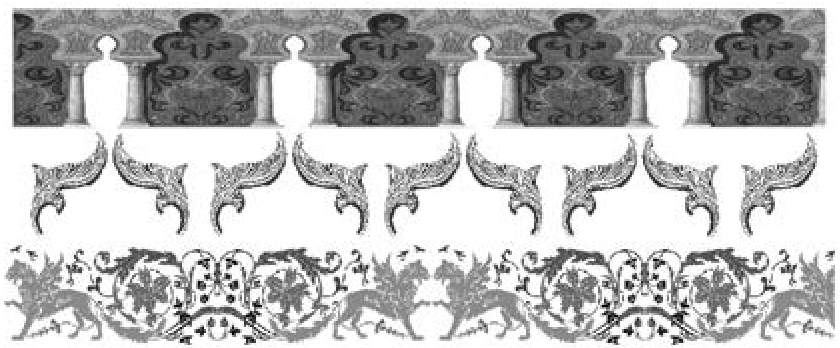


Figura 5. Exemplos de frisos dados aos alunos em atividades no Módulo 2. Exemplos de frisos do tipo $F_1^2 = < \tau, \sigma_a >$ (COSTA, 2005).

O *Módulo 3* foi subdivido em três partes. Em cada uma delas os alunos foram submetidos a atividades que trataram dos conceitos matemáticos de translação, simetria axial e simetria central, respectivamente. Na medida em que se tratava de um determinado conceito, por exemplo translação, os alunos eram submetidos as atividades relacionados com a construção de frisos via Cabri.

Figura 6. Exemplo de uma tela do Cabri para uma atividade envolvendo o conceito de translação (COSTA, 2005, p. 144).

O *Módulo 4* marcou um dos pontos mais importantes da pesquisa. As atividades presentes indicavam aos alunos a reutilização dos novos conhecimentos recém adquiridos em tarefas mais complexas e agora integradas também numa dimensão artística. Do ponto de vista da Dialética Ferramenta-Objeto, os conceitos de translação, simetria axial e simetria central, com suas características e propriedades matemáticas já estudadas e reconhecidas, passariam agora a ser utilizados como ferramentas ao analisar novos frisos.

Para os objetivos traçados no *Módulo 4*, os alunos foram conduzidos à Pinacoteca Benedito Calixto para uma atividade *in loco*. Eles deveriam reconhecer os frisos na pintura interna do casarão. Posteriormente, de posse de algumas fotos do local, nos jardins da casa, estudar estes frisos com o objetivo de verificar quais transformações geométricas estavam presentes.

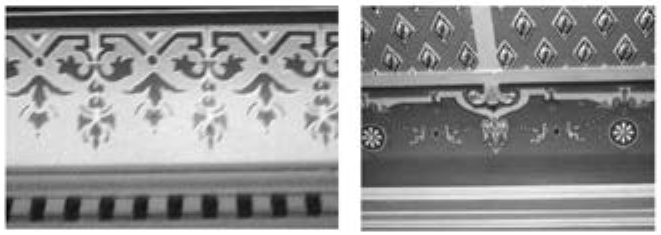


Figura 7. Alguns exemplos de frisos pintados nas paredes da Pinacoteca Benedito Calixto, Santos, SP. (COSTA, 2005).

Ainda como objetivo deste módulo, eles deveriam, no laboratório de informática, criarem algumas faixas por meio do software Cabri-Géomètre II. Dessa forma estariam desenvolvendo sua criatividade artística – no sentido de uma estética – e, ao mesmo tempo, sua criatividade matemática.

Para ilustrar alguns resultados segue um friso construído (figura 8) por uma das duplas de alunos onde se pode ver claramente o uso da translação e simetria axial relativa a eixos, a saber: a) eixos perpendiculares em relação à direção do vetor da translação; b) eixo central, neste caso horizontal, paralelo a direção do vetor. Os alunos utilizaram a simetria central além da translação e da simetria axial.

Utilizando a ferramenta de revisor de construção do Cabri-Géomètre II pode-se observar que a dupla construiu primeiramente um hexágono regular. Posteriormente, um triângulo eqüilátero com vértices coincidentes ao hexágono. Por meio de uma reta contendo um dos pontos do hexágono (Figura 9), essa reta foi utilizada como eixo de simetria para a construção do segundo polígono à direita da figura inicial, utilizando-se uma transformação simetria axial (figura 10).

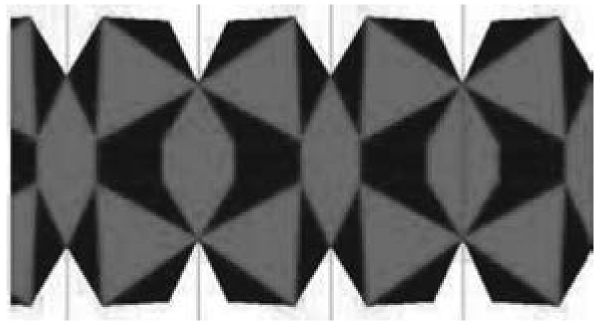


Figura 8. Produção de aluno durante atividade proposta na fase 6 da Dialética Ferramenta-Objeto. Nota-se a articulação das transformações geométricas na construção do friso, mediante o uso da criatividade do aluno. (COSTA, 2005).

Para dar continuidade ao seu trabalho, a dupla criou um ponto nesta reta e formou outro polígono simétrico em relação a este ponto, ou seja, utilizou também a simetria central (figura 11). Constatou-se, pelo estudo da construção utilizada pela dupla uma articulação envolvendo as transformações geométricas estudadas. A produção de seu friso apresenta traços criativos na sua construção.

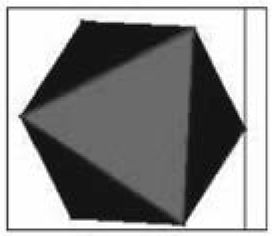


Figura 9

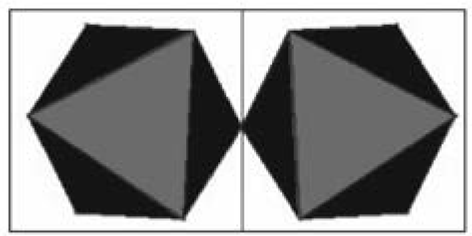


Figura 10

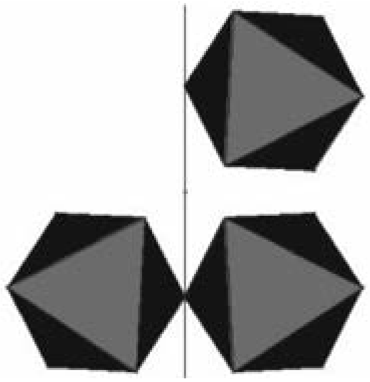


Figura 11

Ainda há outros exemplos de outras produções dos alunos realizadas no Cabri-Géomètre: uma faixa produzida (figura 12) utilizando a construção de um polígono estrelado e, posteriormente, translação por um vetor.

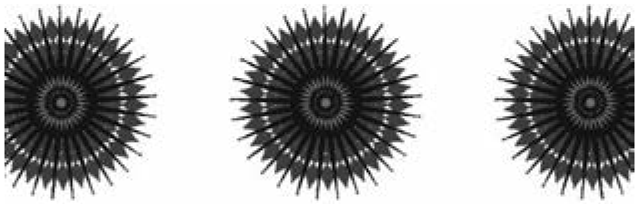


Figura 12

Outro exemplo abaixo indicado na figura 13 evidencia a produção do friso pelo aluno o qual demonstra sua preocupação em mostrar que a transformação geométrica que gerou a faixa foi a translação cujo vetor utilizado foi deixado desenhado.

A análise do arquivo que este aluno gerou no Cabri por meio da revisão de construção mostra que o aluno construiu dois vetores de mesmo módulo e direção, porém com sentidos contrários. A translação ocorreu nos dois sentidos de mesma direção.

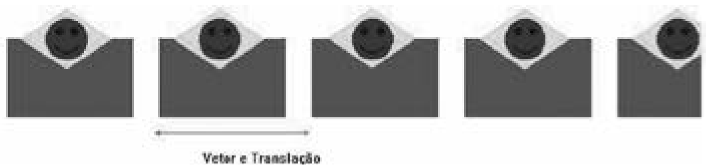


Figura 13. Faixa produzida pelo aluno por meio do uso da ferramenta Translação e vetor desenhado na tela do Cabri (COSTA, 2005, p. 159).

O exemplo da figura 13 nos remete que os alunos não só utilizaram motivos geométricos para o desenvolvimento desta atividade, mas outros que sua criatividade permitiu avançar. A seguir, na figura 14, uma faixa produzida por uma aluna que deixou registrado o vetor utilizado na translação que reproduziu a figura inicial e formou o friso.

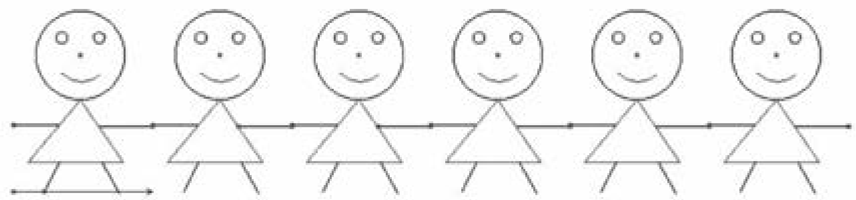


Figura 14. Exemplo de Friso criado por aluno (COSTA, 2005, p 159)

Considerações Finais

Participaram desta pesquisa alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública de Santos. Estes alunos nunca haviam previamente estudado as transformações geométricas em ambiente escolar. As atividades foram desenvolvidas em duplas.

A escolha dos frisos para articular os conhecimentos das transformações geométricas foi muito importante. Este ente matemático proporcionou várias situações problemas, uma vez que os alunos eram postos à prova na construção de frisos com a transformação geométrica recém vista para finalizar cada ciclo da Dialética Ferramenta-Objeto.

Não obstante, todos os resultados favoráveis obtidos com o uso do Cabri-Géomètre II e os frisos nas atividades envolvendo as transformações geométricas, a pesquisa ainda contemplou o aspecto artístico presente nos frisos.

A visita realizada na Pinacoteca Benedito Calixto, Santos, permitiu aos alunos um retorno espontâneo no reconhecimento das transformações geométricas presentes nos frisos pintados nas paredes do interior deste casarão finamente decorado com pinturas artísticas deste importante artista.

Na avaliação dos frisos produzidos pelos alunos no final da seqüência de atividades, foram encontrados diversos exemplares muito criativos. A evidência nestes exemplares do uso das transformações geométricas como translação, simetria axial e simetria central permitiu o pesquisador afirmar que os frisos, entre outras coisas, permitiram articular e dar significados a estes conceitos.

Referências

ALSINA, C.; PÉREZ, R.; RUIZ, C. **Simetria dinámica**. Madrid: Síntesis, 1989.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**,Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions,v.9.3,p.281-308, 1988.

BALDIN, Y. Y. **Atividades com Cabri-II para cursos de licenciatura em matemática e professores do ensino Fundamental e Médio.** São Carlos: UFSCar, 2002.

BKOUCHE, R . De la geometrie et des transformations. **REPERES – IREM** n. 4, p.134-158, juillet.1991.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental** – Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CHEVALLARD, Y. **Estudar Matemáticas**: O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Tradução Dayse Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2001.

COSTA, David Antonio da. **O estudo dos frisos no ambiente informatizado Cabri-géomètre**. 164f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. São Paulo, 2005.

DOUADY, R. **Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques**. These de doctorat d' etat. Université Paris VII. Paris, 1984.

DOUADY, R. Jeux de cadres et dialectique outil-objet. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Paris, v.7, n.2, p.5-31, 1986.

FERNANDES, Solange Hassan Ahmad Ali. **Uma análise Vygotskiana da apropriação do conceito da simetria por aprendizes sem acuidade visual**. São Paulo, 2004. 229f. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática.

GOMBRICH, E. H. **A História da Arte**. 16. ed. Tradução Álvaro Cabral. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

MABUCHI, Setsuko Takara. **Transformações Geométricas**: a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores. 197f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2000.

MARTIN, G. E. **Transformation Geometry**. An introduction to simmetry. New York: Springer Verlag, 1982.

PARZYSZ, B. Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1.**Extrait du colloque de la COPIRELEM**. Tours, 2001.

PASTOR, A; Rodriguez, A. **El Grupo de las Isometrías del Plano**. Madrid: Síntesis, 1996.

SALAZAR, Jesus Victoria Flores. **Gênese instrumental na interação com Cabri 3D**: um estudo de transformações geométricas no espaço. 313f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2009.

SILVA, Viviane Clotilde. **Ensino de Geometria através de Ornamentos**. Dissertação (Mestrado) Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquista Filho. UNESP, Rio Claro, 1997.

David Antonio da Costa - UFSC - Brasil

E-mail: prof.david.costa@gmail.com