

Matemática e arte: conectadas no progressivo domínio do campo conceitual de semelhança matemático

Márcia de Nazaré Jares Alves Chaves⁸

Introdução

Os registros históricos evidenciam estreitas fronteiras entre a Arte e a Matemática. A íntima ligação pode ser constatada, desde as civilizações mais antigas e são muitos os exemplos dessa interação. Esses campos de conhecimento sempre estiveram intimamente ligados, haja vista que a maioria dos conceitos matemáticos foi criada a partir de percepções intuitivas, em íntima relação com objetos materiais e com figuras geométricas, à similaridade do que ocorreu com as artes.

Essa relação entre a Arte e a Matemática foi um dos fatores que nos motivou a escolha desse tema. Outro fator relevante foi termos verificado, junto aos pesquisadores em Educação Matemática, as dificuldades no ensino e na aprendizagem de conceitos geométricos e especificamente sobre o ensino de semelhança matemática, como Sanches (1991), Charalambos (1991), Haruna (2000) e Maciel (2004) que relata,

A maneira como se tem ensinado semelhança de figuras planas e a forma como essa propriedade vem sendo apresentada, nos livros didáticos, pode proporcionar, aos alunos, a aquisição de uma concepção limitada do conceito. Diante do estudo realizado, percebemos que os conceitos de proporção, propriedades de figuras geométricas, homotétia, ampliação, redução e semelhança, quando trabalhados são, em alguns casos, de maneira estanque, sem que se realizem atividades que promovam a percepção, por parte do aluno, de relações entre esses conceitos (...) (MACIEL 2004, p.70).

Brito e Morey (2004, p 66) também constataram dificuldades.

Como havíamos pressuposto, alguns professores desconheciam os movimentos de simetria e a composição dos mesmos. Quanto ao conceito de semelhança, observamos que todos os professores de nossa amostra só haviam trabalhado, até então, com semelhança de triângulos; sete acreditavam que a proporcionalidade dos lados homólogos de figuras semelhantes garantiria a congruência dos ângulos correspondentes e cinco deles utilizavam o processo aditivo para construir figuras semelhantes, repetindo um procedimento já constatado em pesquisas anteriores”.

partir desse contexto, julgamos importante trabalhar os distintos aspectos do conceito de semelhança, evidenciando as relações de aprendizagem entre os

⁸ Msc. em Educação em Ciências e Matemáticas – PPGECEM— NPADC –UFGA-Brasil, professora de arte da Escola de Aplicação da UFGA. marciajares@terra.com.br

conteúdos matemáticos e artísticos, contribuindo, desse modo, com o ensino dessas duas áreas, já que:

A arte desenvolve a cognição, a capacidade de aprender. A arte leva os indivíduos a comparar coisas, a passar do estado das idéias para o estado da comunicação, a formular conceitos e a descobrir como se comunicam esses conceitos. Todo esse processo faz com que o aluno seja capaz de ler e analisar o mundo em que vive, e dar respostas mais inventivas”.⁹

Assim, com o propósito de evidenciar as relações de aprendizagem entre os conteúdos matemáticos e artísticos, propomos destacar conceitos matemáticos presentes no fazer artístico, enriquecendo, dessa maneira, a didática de ensino das disciplinas focadas.

A Arte e a Matemática na construção de aspectos de semelhança

A importância dessa pesquisa está em mostrar que conceitos trabalhados no ensino das Artes e no ensino da Matemática, especificamente, o conceito de semelhança, podem ter seus distintos aspectos revelados ao estudante, no usar, no fazer, ao vivenciar distintas situações nas Matemáticas e nas Artes. O fazer para cada situação nas especificidades dessas disciplinas pode promover, paulatinamente, a descoberta, pelo aluno, de faces comuns desse conceito na Arte e na Matemática, permitindo distingui-las para a construção do conceito matemático de semelhança articulado e integrado com o conceito artístico de semelhança. Esse conceito pode ser evidenciado pela ação explícita do fazer das Artes até a descrição dos conhecimentos implícitos movimentados por ele nesse fazer, por meio da língua natural ou simbólica da Matemática. Postulamos que a construção, pelo estudante, do conceito matemático de semelhança, objeto matemático, requer um uso prévio do conceito-útil de semelhança no aspecto também presente nas artes, como meio de desenvolver nele conhecimentos implícitos que julgamos indispensáveis para a evolução do conceito matemático de semelhança que queremos que eles atinjam.

Assim, para justificar a importância das respostas as nossas questões e prover de subsídios o que postulamos, fazemos uma breve, mas indispensável apresentação do conceito de semelhança na Arte e na Matemática, começando pela Arte, pois é nela que esse conceito surge com a ideia de repetição premeditada de formas, de cores, de tons, de linhas.

Rudolf Arnheim¹⁰ (1991, p. 70.) explica que “a semelhança nas artes visuais é um pré-requisito para se notar as diferenças”.

Para Parramon (1988, p. 48) “trata-se de repetir e distribuir pelo quadro as mesmas semelhanças, como a semelhança de formas. Tem-se como exemplo a obra de El Greco ‘A Ressurreição de Cristo’, na qual o artista representa figuras alongadas, repetidas em toda obra. Esse fator de semelhança também se apresenta no volume, na execução e no estilo, trata-se da famosa Lei da

⁹ Ana Mãe Barbosa Revista SESC/SP v. 1, p. 19-22. n° 129 - Fevereiro 2008 - ano 2008 . Em pauta: Educação Artística

¹⁰ Psicólogo e teórico da Gestalt percepção.

Repetição, graças a ela se consegue harmonia e ordem dentro da variedade compositiva.

No conceito matemático de semelhança, também, surge a ideia de repetição, ou seja, a grosso modo, a forma é a mesma, o que varia é o tamanho.

Segundo Maciel (2004, p.04), a ideia de semelhança remonta às civilizações antigas com os egípcios

Encontramos que os antigos egípcios por volta de 3.200 a.C., usavam a redução e a ampliação de um desenho por meio do método científico conhecido como método dos quadrados: depois de traçarem a figura considerada em um quadriculado, reproduziam-na em uma certa escala. A nova figura desenhada era uma transposição da figura esboçada anteriormente. Em seguida eram determinados pontos de coincidência entre os quadrados e o desenho, de tal modo que o desenhista não cometera erros de proporção... [] Entre o esboço e o desenho final ampliado, havia uma razão geométrica de semelhança que envolvia conceitos de homotetia, semelhança e proporcionalidade”.

Observamos que o conceito matemático de semelhança está intimamente ligado ao conceito de proporção, como define Ostrower (1989, p. 280) “a proporção é a justa relação das partes entre si e de cada parte com o todo”. Tal conceito encontra-se, muitas vezes, em clássicas obras de arte. A ideia de proporção já era utilizada pelo homem das cavernas, pelos egípcios na construção das monumentais pirâmides, na construção do templo grego Parthenon, mas foi no Renascimento que a arte, por meio da perspectiva, transformou, cada vez mais, a pintura em uma representação calculada e matemática da realidade.

Numa linguagem mais moderna, a definição de semelhança se reveste de uma sofisticação, evidenciada, historicamente, na recorrência de outros conceitos matemáticos distantes do anteriormente descrito que se resume como “duas figuras no plano são semelhantes quando uma é a imagem da outra por meio de uma transformação de semelhança do plano”. Ou seja, são aplicações, no plano, que multiplicam as distâncias entre dois pontos por uma constante positiva k , chamada fator de escala ou razão de semelhança. Se P e Q são dois pontos da figura original cuja distância é dada por PQ e se os pontos P' e Q' são, respectivamente, os pontos obtidos a partir de P e Q , por uma transformação de semelhança, a distância $P'Q'$ é igual a $k(PQ)$, para algum número positivo k , isto é, a distância de P' a Q' é igual a k vezes a distância de P a Q . O conceito matemático de semelhança entre figuras requer um conjunto de outros conceitos matemáticos que se articulam, evidenciando faces ou aspectos matemáticos nem sempre fáceis de os estudantes do ensino básico ou superior explicitarem por palavras ou símbolos. Mas o fazer, o construir figuras semelhantes, tem sido marcante no desenvolvimento histórico da humanidade nas diferentes áreas do conhecimento, com destacadas apropriações e desenvolvimento na Arte e na Matemática.

A técnica egípcia dos quadrados para aumentar ou reduzir uma figura é, claramente, traduzida no conceito matemático, ou melhor, o conceito matemático é claramente uma evolução explícita do método dos quadrados egípcios. Assim, podemos pensar que o domínio da técnica egípcia contribuiu para a apropriação, pelo estudante, do conceito matemático de semelhança de figuras. Os aspectos de repetição do conceito de semelhança, evidenciados nas artes, também precisam

ser explorados, pois uma repetição com critérios menos objetivos e controláveis, como os da obra 'A Ressurreição de Cristo', de El Greco que apresenta repetição de formas alongadas nas figuras, podem tornar tal conceito limitado para a Matemática e daí evidenciar a relevância do critério de proporcionalidade para a semelhança na Matemática.

Nesse sentido, julgamos que o fazer artístico pode promover a construção de conhecimentos implícitos no estudante a partir da dinâmica da construção e do uso das transformações de semelhanças por ele construídas. Esses conhecimentos o levarão paulatinamente a significar o conceito matemático de semelhança, de modo a se dotar de um '*sentimento de semelhança*' que lhe permita, por meio de simples observações de figuras, fazer afirmações do tipo 'parecem ser semelhantes', como no caso dos dois retângulos. E ainda ter a certeza de que as figuras não são semelhantes como, por exemplo, um quadrado e um losango com ângulos internos não retos.

Estimamos que tal sentimento, desenvolvido implicitamente pelo estudante, constitui o primeiro critério, na verdade, para verificar se duas figuras são semelhantes, ou melhor, se uma figura não parece ser uma ampliação ou redução, incluindo as figuras de mesma dimensão, então elas não são semelhantes. Quando parecem ser ampliações, reduções ou uma simples repetição busca-se evocar outros critérios que nos permitam confirmar ou não o '*sentimento de semelhança*'.

Pelo exposto, torna-se imprescindível respondermos à questão investigativa, o fazer artístico pode desenvolver o '*sentimento de semelhança*' no sentido matemático em alunos do Ensino Fundamental?

A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud

Segundo a 'Teoria dos Campos Conceituais', o conhecimento encontra-se organizado em campos conceituais de que o sujeito se apropria ao longo do tempo e que podem ser definidos como grandes conjuntos, informais e heterogêneos, de situações e de problemas cuja análise e tratamento requerem diversas classes de conceitos, procedimentos e representações simbólicas, inter-relacionados (VERGNAUD, 1990, p. 23). O autor entende um conceito como sendo um tripleto de conjuntos, que não pode ser considerado separadamente: (VERGNAUD, 1990, p. 145; 1997, p. 6),

$O = (S, R, I)$, onde S é um conjunto de situações que dão sentido ao conceito, I é um conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito que permitem ao sujeito analisar e dominar as situações do primeiro conjunto e R é um conjunto de representações simbólicas (linguagem natural, gráficos e diagramas, sentenças formais, etc), que servem para representar de forma explícita os invariantes operatórios. O primeiro desses conjuntos é o referente do conceito, o segundo o significado e o terceiro o significante". (GRECA E MOREIRA, 2003, p.5)

Vergnaud compreende que um verdadeiro conceito é construído por meio de relações, não necessariamente objetivas, estabelecido pelo sujeito entre uma classe de situações por ele enfrentada e os invariantes operatórios e, ainda, entre esses invariantes operatórios e as representações simbólicas usadas por ele para explicitar esses invariantes operatórios. A não objetividade das relações significa

que não se pode reduzir o significado aos significantes nem às situações (VEGNAUD, 1990, p.146), pois não podemos tratar o conceito isolado das situações já que é por meio das distintas situações vivenciadas pelo sujeito que se revelam distintos aspectos ou ‘faces’ do conceito presentes nessas situações. Essas relações engendradas é que significam o conceito para o sujeito. Além disso, uma situação pode comportar uma variedade de conceitos e, portanto, não pode ser analisada por meio de um único conceito.

Desse modo, o processo inicial de aprendizagem de semelhança entre figuras está marcadamente imerso em conhecimentos implícitos que se manifestam, por exemplo, em situações de construções de figuras semelhantes, não necessariamente conscientes da semelhança existente, mas imprescindíveis para alcançarem estágios outros em que possam afirmar, por exemplo, que dois círculos são sempre semelhantes, embora não sejam capazes de justificar por qualquer suporte essa semelhança. É sobre esse conhecimento implícito que nos referimos inicialmente como ‘sentimento de semelhança’, que é importante para que os estudantes, no futuro, desenvolvam o emergir do conceito matemático, formalizado de semelhança e de compreensão da importância do estudo dos critérios de semelhança de figuras.

Análise dos dados

Ao verificarmos a análise a priori, percebemos que os sujeitos/estudantes tiveram dificuldades em explicitar seus conhecimentos prévios que envolveram o conceito de semelhança. Todavia, a teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, que foi adotada como luz para fundamentar esta análise, segundo Moreira (2004, p. 22), declara que

não é uma teoria de ensino de conceitos explícitos e formalizados, embora tenha subjacente a idéia de que os conhecimentos-em-ação (largamente implícitos) podem evoluir, ao longo do tempo, para conhecimentos científicos (explícitos). Sendo assim, o papel do educador é fundamental em auxiliar o estudante a construir conceitos e teoremas explícitos, e cientificamente aceitos, a partir do conhecimento implícito”.

Examinamos as produções artísticas realizadas por meio de atividades propostas e observamos que os conhecimentos adquiridos acerca dos atributos do conceito de semelhança, que são repetição e proporção foram explicitados com bastante propriedade. Isso ficou bem evidente nas produções do fazer artístico dos nossos sujeitos/estudantes, e ainda constatamos que, de acordo com o conteúdo e com os objetivos propostos, nossos sujeitos registraram em seus trabalhos, de forma explícita, uma compreensão pessoal perfeita acerca do ‘*sentimento de semelhança*’, quando revelaram corretamente os aspectos de repetição de formas na construção de fractais, de simetria e de proporcionalidade em suas produções artísticas.

Foi possível também constatar, na análise a posteriori, aspectos relevantes para a análise geral. Ressaltamos nessa análise questões que remetem aos aspectos de ‘*sentimento de semelhança*’ Matemática, cujo ponto central foi investigar se os estudantes explicitariam na língua natural tais aspectos.

Foi possível verificar os aspectos do conceito de semelhança, construídos por meio de nosso estudo, na verbalização de nossos sujeitos estudantes, descritos na língua natural sobre os aspectos de repetição e de proporcionalidade, quando, na maioria das respostas, foi explicitado o aspecto de repetição, de modo a relacionar semelhança com igualdade de forma e de variação de tamanho. Diagnosticando a relevância da experiência e o envolvimento nas atividades desenvolvidas, indica-se, dessa forma, um desenvolvimento progressivo do conhecimento implícito para o explícito, pois foi visualmente presente e progressivo, como por nós desejado, a manifestação do *sentimento de semelhança* em cada uma das atividades como na análise à posteriori.

Portanto, constatando um índice significativo de 92,2% de respostas satisfatórias na análise à posteriori, é importante destacar manifestações encontradas em um pequeno percentual 7,8% de respostas de estudantes sujeitos de nossa experiência que não conseguiram explicitar na língua natural o conceito-em-ação em questão. Vergnaud apud Moreira (2004,P.23) explica:

os alunos, em geral, não são capazes de explicar ou expressar em linguagem natural seus teoremas-em-ação, ainda que sejam capazes de resolver certas tarefas (situações). Não só alunos, qualquer pessoa muitas vezes é incapaz de colocar em palavras coisas que faz muito bem, conhecimentos que tem. Há um hiato, entre a ação e a formalização da ação. Agimos com o auxílio de invariantes operatórios sem expressá-los ou sem sermos capazes de expressá-los. A análise cognitiva dessas ações muitas vezes revela a existência de potentes teoremas e conceitos-em-ação implícitos. Esse conhecimento, no entanto, não pode ser, apropriadamente, chamado de conceitual, pois o conhecimento conceitual é necessariamente explícito.

Esse percentual de 7,8% também se encontra dentro de nossos parâmetros de validação, pois conforme a Teoria dos Campos Conceituais, esses estudantes estão vivenciando a demora do progressivo domínio de um campo conceitual, estando, desse modo, aptos a desenvolver tal conceito.

Considerações Finais

A análise dos dados mostrou que nossos sujeitos estudantes identificaram, durante a trajetória de nossa experiência piloto, a presença de aspectos como repetição e proporcionalidade em imagens apresentadas e produzidas por eles, sendo esses aspectos utilizados como fortes instrumentos para a construção de um *'sentimento de semelhança'* no sentido matemático.

A teoria dos Campos Conceituais foi considerada como favorável para a compreensão, acerca de nossa análise, revelando de modo satisfatório os resultados.

Com base nos resultados obtidos, é possível responder de forma positiva à pergunta de que fazemos no desenvolvimento de nossas atividades, possibilitaram aos nossos sujeitos estudantes a ampliação do campo conceitual de semelhança num caminho progressivo em direção à construção do conhecimento científico formalizado.

Dessa forma, demonstramos ser possível promover a construção de conhecimentos implícitos no aluno pela dinâmica da construção e do uso das transformações de semelhanças por ele construídas, que o levarão paulatinamente

a significar o conceito matemático de semelhança, de modo a se dotar de um 'sentimento de semelhança' que, por meio de simples observações de imagens permita-lhe fazer afirmações do tipo 'parecem ser semelhantes'.

Referências

- ARNHEIM, R. Gestalt psychology and artistic form. Aspects of form. In: SYMPOSIUM IN NATURE AND ART. Bloomington: Indiana University press, 1991.
- BRITO, A. J. ; MOREY B. B. Trigonometria: dificuldades dos professores de matemática do ensino fundamental. *Horizontes, Bragança Paulista*. 2004.
- CHARALAMBOS, Lemonidis. 1991. Analyse et réalisation d'une expérience d'enseignement de l'homothétie. França: IREM
- Didactique des Mathématiques, Vol. 11, n° 23, pp 295-324
- GRECA, I. e M.A. Moreira (2003). Conceptos: naturaleza y adquisición. *Textos de Apoio do Programa Internacional de Doutorado em Ensino de Ciências da Universidade de Burgos/UFRGS*. Actas del PIDECA
- HARUNA, Nancy Cury Andraus Teorema de Thales: Uma abordagem do processo ensino-aprendizagem. Mestrado em educação matemática – PUC- SP – 2000
- MACIEL, A.C. O Conceito de Semelhança: Uma proposta de ensino. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC-SP. São Paulo, 2004.
- MOREIRA, M.A. A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud: O ensino de Ciências nesta área. Porto Alegre. Instituto de Física da UFRGS, 2004.
- OSTROWER, Fayga *A sensibilidade do intelecto*: visões paralelas de espaço e tempo na arte e na ciência. 1998. Rio de Janeiro: Campus
- PARRAMÓN, José Maria. Assim se compõe um quadro. Ed. Parramón. Barcelona, 1988.
- SANCHEZ, Lucilia Bechara. O desenvolvimento da noção de semelhança na resolução de questões de ampliação e redução de figuras planas. Dissertação (Mestrado em Educação). USP-Faculdade de Educação -São Paulo, 1991.
- VERGNAUD. G. La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques. Editora Cidade, 1990.
- VERGNAUD. G. Epistemology and psychology of mathematics education. In Neshier, P. & Kilpatrick, J. (Eds.) Mathematics and cognition: A research synthesis by International Group for the Psychology of Mathematics Education. Cambridge: Cambridge University Press. (1990).
- VERGNAUD. G. The nature of mathematical concepts. In Nunes, T. & Bryant, P. (Eds.) *Learning and teaching mathematics, an international perspective*. Hove (East Sussex), Psychology Press Ltd. (1997).