Sobre Legendre e os Números Primos

Maria Aparecida Roseane Ramos[12]

Introdução

Adrien Marie Legendre (1752-1883) foi um matemático francês que publicou em 1794 a obra "Éléments de Géométrie", que ganhou um prêmio especial do júri do concurso de produção de livros elementares para o ensino francês no fim do século XVIII. A premiação do livro foi justificada, pois o conteúdo de geometria apresentado era mais didático e mais algébrico do que o da obra "*Os Elementos*" de Euclides, que até então era o livro utilizado, e tornou-se assim o protótipo do livro de geometria nas escolas da França. Além disso, em 1786 Legendre escreveu sobre integrais elípticas dando uma grande contribuição à Física e também desenvolveu uma prova sobre a irracionalidade de π e de π^2. Legendre também escreveu "Essai sur la Théorie des Nombres" (1797-1798), que foi a primeira obra sistemática sobre esta ciência e mais tarde aperfeiçoada em "Théorie des Nombres" (1830) na qual ele se propõe a avançar o estudo da ciência de teoria dos números com o preenchimento de algumas lacunas pela ausência da arte da numeração e da Álgebra, lacunas deixadas em sua obra anterior e pelos cientistas anteriores a exemplo de Euclides, Diofanto e Viète.

Este presente trabalho faz parte da pesquisa de Doutorado em Educação que estou desenvolvendo na UFRN e tem por objetivo geral traduzir e realizar uma análise histórico-matemática tendo como material de análise o livro "Théorie des Nombres" de Legendre (edição francesa de 1830).

Existem fórmulas que fornecem todos os números primos?

Esta é uma questão que até hoje preocupa estudiosos da teoria dos números e se não podemos encontrar uma fórmula algébrica que exprima unicamente os números primos,[13] é porque não podemos encontrar uma que contenha absolutamente todos esses números que seja a expressão de sua formação geral. Para Legendre, essa lei parecia muito difícil de se encontrar, e praticamente não havia uma esperança de que se conseguisse. Isso não o impediu de descobrir e demonstrar um grande número de propriedades sobre os números primos. Apresentaremos três propriedades que se encontram no Volume I do livro supracitado de Legendre, seguidas de alguns comentários de minha autoria.

PROPRIEDADE XIX. "Todo número primo, exceto 2 e 3, está contemplado na fórmula $6x\pm1$". (Op. cit. pp. 12-13)

Com efeito, se dividimos um número ímpar por 6, o resto só pode ser 1, 3 ou 5. Portanto, todo número ímpar pode ser representado por uma das três fórmulas $6x+1$, $6x+3$, $6x+5$. A segunda fórmula é divisível por 3, e portanto está

[12] Professora Adjunta do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestre em Matemática e Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação da UFRN. e-mail: maria.ramos@uesb.br

[13] Veja em WATANABE, Renate G. *Uma Fórmula para números primos*, Revista do Professor de Matemática, N. 37.

excluída. A fórmula 6x+5 contém os mesmos números que 6x–1; portanto todo número primo exceto 2 e 3 está contemplado na fórmula 6x±1. A recíproca não é verdadeira, ou seja, que todo número escrito sob a fórmula 6x±1 seja um número primo; pois para x = 4, 6, etc. a fórmula nos fornece números compostos.

Comentário: A equivalência entre as fórmulas 6x+5 e 6x-1 pode ser justificada utilizando a teoria das classes de congruências mod 6, pois neste conjunto $-1 \equiv 5 \bmod 6$. Tal teoria na época se encontrava em 1801 em *Disquisitiones Arithmeticae*, de Gauss; inclusive foi ele quem introduziu a notação $\equiv$ para congruência. Legendre poderia ter escolhido justificar a equivalência utilizando congruência, vez que não lhe era desconhecida, pois a obra *Teoria dos números* foi publicada em 1830. Uma outra opção é a justificativa algébrica, pois 6*x*+5 = 6*x* +5–1+1 = 6 (*x*+1) –1.

PROPRIEDADE XXII. "Todos os números ímpares se representam pela fórmula 2*x*+1, a qual, segundo *x* é par ou ímpar, conterá as duas formas 4*x*+1 e 4*x* –1 ou 4 *x* + 3". (Ibidem, pp. 14-15).

Assim, há duas grandes divisões de números primos: uma compreendendo os números primos 4*x* +1, a saber, 1, 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, etc.,e uma outra contemplando os números primos 4*x* –1 *ou* 4*x* + 3, ou seja, 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, etc.

A forma geral 4*x*+1 se subdivide em duas outras formas 8x+1 e 8x − 3 ou 8x + 5[14]; da mesma forma que 4*x*+3 se subdivide em duas outras 8*x*+3 e 8*x*+7 ou 8*x* – 1; de maneira que relativamente aos múltiplos de 8, os números primos se distribuem nestas quatro principais formas:

8*x* + 1: 1, 17, 41, 73, 89, 97, 113, 137, etc.
8*x* + 3: 3, 11, 19, 43, 59, 67, 83, 107, etc.
8*x* + 5: 5, 13, 29, 37, 53, 61, 101, 109, etc.
8*x* + 7: 7, 23, 31, 47, 71, 103, 127, etc.

Comentário: Novamente, a equivalência entre 4*x*–1 ou 4*x*+3 pode ser justificada usando – se que 4x+3 = 4x+ 4– 1 = 4 (x+1) – 1. Assim, 8 x + 1 = 4 (2x) + 1 e 8x + 5 = 8x + 8 – 3 = 8 (x+1) – 3.

PROPRIEDADE XXIII. (Ibidem, pp. 15-16) Vimos que os números primos, considerados em relação aos múltiplos de 6, são da forma 6*x*+1 e 6*x*-1 ou 6*x* +5; onde *x* pode ser par ou ímpar. Disso resultam, em relação aos múltiplos de 12, as quatro fórmulas 12*x*+ 1, 12*x*+5, 12*x*+7, 12*x*+11[15], cada uma contendo uma infinidade de números primos. Em geral, dado qualquer número *a*, todo número ímpar pode ser representado pela fórmula 4*ax* $\pm$ *b*, na qual *b* é ímpar, positivo e menor do que 2*a*; o que equivale à fórmula 4*ax*+*b*, onde *b* é ímpar, positivo e menor do que 4*a*. Se entre todos os valores possíveis para *b*, tirarmos aqueles que têm um divisor comum com *a*, as demais formas do tipo 4*ax*+*b* contêm todos os números primos (com exceção daqueles que dividem 4*a*) distribuídos, relativamente aos múltiplos de 4*a*, tendo tantos tipos ou formas quanto *b* tem de

[14] De forma análoga, 8 x + 5 = 8 (x +1) – 3 vez que 5 $\equiv$ – 3 mod 8.
[15] Justificadas pelas congruências mod 6 e mod 12.

valores diferentes. O número dessas formas é evidentemente o mesmo daqueles números menores do que 4*a* e primos a 4*a*. Portanto se $4a = 2^m\alpha^n\beta^p$, etc., sendo α, β, etc., números primos, a quantidade destas formas será dada pela fórmula

$$a = 4a\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right), \text{etc.}$$

Por exemplo, se temos *a* = 60, resulta que a = 16. Assim relativamente aos múltiplos de 60, todos os números primos (exceto 2, 3, 5, divisores de 60), se distribuiriam em dezesseis formas, a saber:
$60x + 1$; $60x + 7$, $60x + 11$; $60x + 13$; $60x + 17$; $60x + 19$; $60x + 23$; $60x + 29$;
$60x + 31$, $60x + 37$, $60x + 41$, $60x + 43$; $60x + 47$, $60x + 49$, $60x + 53$, $60x + 59$.

Comentário: Na verdade trata-se de $4a = 60$, pois se *a* fosse igual a $60 = 2^2.\ 3.\ 5$ teríamos $4a = 4.2^2.3.5 = 240$ e assim $a = 2^4.3.5\ (1 - \frac{1}{2})\ (1 - \frac{1}{3})\ (1 - \frac{1}{5}) = 64$. Porém, sendo $4a = 60$ então $a = 4.\ 5\ (1 - \frac{1}{2})\ (1 - \frac{1}{3})\ (1 - \frac{1}{5}) = 16$ que é o resultado esperado.

Considerações Finais

Encontramos na literatura algumas provas sobre a infinidade dos números primos demonstradas por Euclides, Goldbach, Kuhn e até mesmo por Legendre. Porém, fórmulas que explicitem sua lei de formação geral, até hoje é um enigma para muitos estudiosos e amantes da teoria dos números. Este trabalho procurou exemplificar algumas fórmulas encontradas no livro “Théorie des Nombres” de Legendre, de 1830. Porém, trata-se também de um resgate deste grande matemático como um dos precursores, juntamente com os gregos, do estudo da teoria dos números primos, muito embora ele seja mais conhecido como geômetra do que como algebrista.

Referências Bibliográficas

COUTINHO, S. C. *Números Inteiros e Criptografia RSA*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. Instituto de Matemática e Aplicada. Série de Computação e Matemática, 1997, p. 53 – 55.

LEGENDRE, Adrien Marie. *Théorie des Nombres*. Tome I. 4 eme edition.conforme à la trosième nouveau tirage corrigé, Paris: Librairie Scientifique et Tecnique, A. Blanchard, 1953.

MAC TUTOR. History of Mathematics. www-history.mcs.st-and.ac.uk/history

RIBENBOIM, Paulo. *Números Primos: mistérios e recordes*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, Instituto de Matemática e Aplicada, Coleção Matemática Universitária, 2001, p. 115-127.

WATANABE, Renate G. *Uma Fórmula para números primos*, Revista do Professor de Matemática. n. 37, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 1998. p 19-21.