

El uso de la opción 3D del GeoGebra en la disciplina de Geometría Analítica en la formación de profesores

Mario Rafael Estrada Doallo¹
Universidad de Holguín

Juan Eduardo Nápoles Valdés²
UNNE-FaCENA; UTN-FRRE

Osvaldo Jesús Rojas Velázquez³
Universidad Antonio Nariño

RESUMEN

Uno de los programas de matemática dinámica más consultados y utilizados en la enseñanza y aprendizaje de la matemática es el programa GeoGebra, que mezcla la funcionalidad de un procesador geométrico y algebraico, muy fácil de usar y que resulta ser una poderosa herramienta, es un software que reúne geometría, álgebra, estadística y cálculo. El trabajo recoge algunos de los resultados obtenidos en el proceso investigativo llevado a cabo por los autores y donde se muestra cómo se usó el programa de matemática dinámica GeoGebra en la disciplina Geometría Analítica, a través de la opción 3D, incorporación que se ha hecho en las últimas versiones de GeoGebra y que su forma de trabajar es similar a la utilizada en los programas de cálculo simbólico.

Palavras-chave: Matemática Dinámica, Geometría Analítica, Asistentes Matemáticos, Situaciones de Aprendizaje.

The use of GeoGebra 3D option in the discipline of analytic geometry

ABSTRACT

One of the most consulted dynamic math program sand used in the teaching and learning of mathematics is the GeoGebra program that combines the functionality of a geometric and algebraic processor, written in java, easy to use and turns out to be a powerful tool, is software that brings together geometry, algebra, statistics and calculus. This paper presents some of the results obtained in the research process conducted by the authors and which shows how the dynamic GeoGebra math program used in the Analytic Geometry discipline, through the 3D option, incorporation has been done in latest versions of GeoGebra and the way they work is similar to that used in programs for symbolic computation.

Keywords: Dynamic Mathematics, Analytic Geometry, Mathematical Assistants, Situations Learning.

¹ Instituto Superior Pedagógico (ISPH). Docente Departamento de Matemática, Universidad de Holguín (UHO), Holguín, Cuba. Dirección postal: Calle General Salazar, Número 42 altos, entre Máximo Gómez y Carretera Central, Holguín, Cuba. CEP: 80500. <http://orcid.org/0000-0001-6246-4415>. E-mail: mestrada@uho.edu.cu

² Universidad de Oriente (UO). Docente, Función e Universidad Nacional del Nordeste (UNNE-FaCENA), Corrientes, Universidad tecnológica Nacional (UTN-FRRE), Resistencia, Chaco, Argentina. Dirección postal: Av. 3 de abril, Número: 750, Apto. 2, Corrientes, Argentina, CEP: 3400. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2470-1090>. E-mail: jnapoles@exa.unne.edu.ar

³ Universidad de Ciencias Pedagógicas “José de la Luz y Caballero” (UCPJLC). Docente investigador Programa de Doctorado y Maestría Educación Matemática, Universidad Antonio Nariño (UAN), Bogotá, Colombia. Dirección postal: Carrera 68H 21A – 11 Sur, Apto. 213, Edificio Torres de las Américas, Barrio Villa Claudia, Kennedy. Bogotá, Colombia, CEP: 110831. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3327-3799>. Correo electrónico: orojasv69@uan.edu.co

A utilização da opção 3D do GeoGebra na disciplina de Geometria Analítica na formação de professores

RESUMO

Um dos programas de matemática dinâmica mais consultados e utilizados no ensino e aprendizagem de matemática é o programa GeoGebra, que mistura a funcionalidade de um processador geométrico e algébrico, muito fácil de usar e que acaba por ser uma ferramenta poderosa, é um software que reúne geometria, álgebra, estatística e cálculo. O trabalho reúne alguns dos resultados obtidos no processo de investigação realizado pelos autores e mostra como foi utilizado o programa de matemática dinâmica GeoGebra na disciplina de Geometria Analítica, através da opção 3D, uma incorporação que vem sendo feita nas últimas versões do GeoGebra e que sua forma de trabalhar é semelhante à usada em programas de cálculo simbólico.

Palabras clave: Matemática Dinâmica, Geometria Analítica, Assistentes Matemáticos, Situações de Aprendizagem.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de los contenidos geométricos no resulta una tarea sencilla en la actualidad, por un lado, se observan limitaciones para abordar la enseñanza de los mismos en cualquier nivel educativo, probablemente una herencia de las llamadas Matemáticas Modernas y su “Abajo Euclides”. Esta tendencia enfatiza la algebrización por encima de la geometría, afectando a la intuición, a la visualización, a la manipulación geométrica, y como consecuencia limitó el pensamiento geométrico.

Por otro lado, está presente la falta de motivación de los estudiantes hacia los contenidos de la matemática, lo que provoca un bajo aprovechamiento en el aprendizaje de los mismos y por lo tanto los resultados académicos son deficientes en cada una de las educaciones.

Dadas las limitaciones que presentan los estudiantes en la asimilación de los contenidos de geometría, se buscan alternativas para mejorar su aprendizaje. El desarrollo de las tecnologías informáticas ha ganado espacio en la docencia y con las mismas se han obtenidos resultados positivos en el proceso de enseñanza y aprendizaje, por lo que se considera necesario su uso.

Los medios informáticos, y su principal instrumento, la computadora, con su lenguaje y comunicación propios, abren nuevos escenarios con términos como: hipertextos, multimedia, hipermedia, plataformas de aprendizaje y en particular los múltiples asistentes matemáticos, que permiten diseñar entornos virtuales de aprendizaje, que con un modelo pedagógico establecido elevan la calidad de la educación matemática desde un nuevo bagaje cultural” (LIMA; RODRÍGUEZ, 2010, p. 156).

Las posibilidades didácticas que ofrecen estos asistentes han suscitado nuevos enfoques metodológicos y conlleva un replanteo del acto de cómo enseñar y lograr mejorar el rendimiento académico del estudiante con el uso de estos softwares. Por lo tanto, se debe pensar bajo qué condiciones se aplica un software educativo, ya que más allá de sus características técnicas, es importante la preparación y el uso didáctico que realice el docente. No es sólo instalar un software y presentar unos problemas; la utilización de estos recursos requiere un adecuado diseño que permita que el alumno asuma un rol activo en el proceso de enseñanza aprendizaje, desarrollando habilidades en la formación de los conocimientos objeto de estudio (ESTRADA; BAPTISTA, 2018).

Por otra parte, hay una cantidad creciente de estudios sobre los efectos del empleo de la Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) en el aula. Estos estudios se asocian con la aparición de ambientes colaborativos y cooperativos en los aprendizajes, por lo que

mejora la motivación y el interés, una mayor inclinación por la indagación, y el fortalecimiento de habilidades directamente vinculados a su espíritu de investigación y de resolución de problemas (DE LA CHICA, 2010; MINGIRWA, 2016).

Otros estudios, también las asocian con la obtención de mejores rendimientos y con actitudes favorables hacia las matemáticas (BEELAND, 2002; DÍAZ et al, 2018; WEAVER, 2000). Además, desde el punto de vista didáctico, la introducción de las TIC aporta un componente importante de dinamismo a la forma en que se trabaja la Geometría en el aula (GUTIÉRREZ, 2005; MORENO, 2015; SANTOS-TRIGO; MORENO; CAMACHO-MACHÍN, 2016).

Es por ello, que es importante elaborar actividades que conlleven a que el estudiante no solo interactúe con el software, sino que logre adquirir conocimientos, forme conceptos, elabore conjeturas, relaciones conceptos y desarrolle habilidades de la asignatura. Esta actitud está soportada en las palabras de Arnold, resumidas en el Palais de Découverte en París en 1997, en el que denuncia el daño que causaron esos matemáticos “escolásticos” al ocultar a los jóvenes que los objetos matemáticos, además de tener un significado algebraico y geométrico, también tienen un significado físico. El conocimiento da al matemático una intuición que le sirve de potente faro, y que la modelización en matemáticas también necesita de confirmación experimental.

Lisa y llanamente, Arnold, (1998, p. 232) plantea que "La matemática es una parte de la física. La física es una ciencia experimental, una parte de las ciencias naturales. La matemática es la parte de la física en la que los experimentos son baratos" y en esa dirección las computadoras y los softwares educativos, vienen a ser los complementos necesarios para tal fin.

Por otro lado, se consideran los resultados que brindan las diferentes investigaciones en el ámbito nacional e internacional en el empleo de estos asistentes matemáticos, que además de revolucionar el conocimiento matemático, tienen un gran impacto en el aprendizaje (SAIDÓN; BERTÚA; MOREL, 2010; FLORENCIA, 2010; CARRILLO DE ALBORNOZ, 2010, 2013; BARRENA et al., 2011; ABAR, 2015; ESTRADA; BATTISTA; CHILUA, 2018; ESTRADA; BAPTISTA, 2018; PAIVA; ALVES, 2019). Estos resultados son motivados por el poder expresivo e interactivo que brindan estos recursos, por lo cual se hace necesario estudiarlos, pues surgen interrogantes sobre qué se debe enseñar y aprender de los mismos dentro del currículo de Matemática. En la matemática están presente tanto aspectos conceptuales, como aspectos computacionales, y el equilibrio que debe mantenerse entre ambos entra dentro de la dialéctica actual de dedicar tiempo en las actividades de cálculo y la resolución de problemas.

Los aspectos antes mencionados han sido corroborados por los autores a lo largo de su vida laboral, por una parte, enseñando matemática en diferentes niveles e instituciones educativas y por otra, por su experiencia en la preparación académica y didáctica a los profesores de matemática, en diferentes países.

Dentro de este conjunto de softwares educativos se encuentra el Software de geometría dinámica (SGD) GeoGebra, programa libre de fácil aprendizaje y de muchas posibilidades de aplicación en la docencia. El SGD GeoGebra da pie a un tratamiento algebraico, analítico y geométrico, dinámicamente integrado.

Como parte de las tareas investigativas para la carrera de Licenciatura en Educación Matemática en la Universidad de Holguín, Cuba, se pudo apreciar que se le da gran importancia al uso de las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje desde los problemas del profesional hasta los objetivos generales y específicos de las disciplinas y asignaturas. Además, la revisión del Plan de Estudio E y de los diferentes programas de las disciplinas dio como principal problema que en las orientaciones metodológicas de los mismos se puede observar que no existen precisiones de cómo usar las TIC en el proceso de enseñanza aprendizaje de cada disciplina.

Teniendo en cuenta lo analizado y a partir de la experiencia de los autores con el uso del programa de matemática dinámica GeoGebra se pudo determinar que era posible usar este programa en la disciplina de Geometría Analítica. En la investigación se propone recoger las experiencias en el trabajo con GeoGebra, a través del uso de la opción 3D para la representación de superficies y de las regiones del espacio limitada por superficies, con los estudiantes de la Carrera de Licenciatura en Educación Matemática.

MARCO TEÓRICO

Se está de acuerdo con Almoiloud (2007) cuando aborda que la experimentación puede ser definida como la etapa donde ocurre la aplicación de un cierto número de clases preparadas y analizadas previamente, con la finalidad de observar situaciones de aprendizajes donde estén presentes los conceptos previstos en la investigación. En la investigación se asume como marco teórico el uso de recursos tecnológicos digitales, en particular el GeoGebra y sus potencialidades para el aula, y la visualización matemática.

El uso de recursos tecnológicos digitales en el contexto escolar constituye una línea de trabajo que necesita ser fortalecida, pues existe una distancia considerable entre los avances de los softwares educativos y la aceptación, comprensión y utilización de los mismos en las clases por los profesores, donde muchos de ellos siguen utilizando la metodología tradicional (PAIVA; ALVES, 2019).

Por Geometría Dinámica se entiende la geometría asistida por el computador, en que los objetos matemáticos, como rectas, ángulos, triángulos y cuerpos, pueden ser movidos y manipulados, al contrario de la geometría en que los objetos son construidos con instrumentos euclidianos, como regla y compás (GRANDE; NUNES; SILVA, 2015).

No hay dudas que la propuesta del uso de softwares de geometría dinámica, en el proceso de enseñanza y aprendizaje en geometría puede contribuir a la visualización geométrica (NASCIMENTO, 2012) y, en específico, el uso de la opción 3D de GeoGebra. El uso de esta opción permite la exploración de las propiedades gráficas y geométricas de los objetos matemáticos, permitiendo así el trabajo, con los estudiantes, de las ideas intuitivas de la representación de superficies.

Ferri, Calejon e Schimiguel (2013) defienden que GeoGebra tiene la capacidad de aumentar el componente visual de la matemática contribuyendo en la asimilación de conceptos y tornando el ambiente de aprendizaje más atractivo, aspecto que queda de manifiesto en el uso de 3D. GeoGebra vincula dos categorías, la relativa a Sistemas de Álgebra Computacional (CAS) y la relativa a los Sistemas de Geometría Dinámica (DGS), y esto es lo más interesante. Combina las representaciones gráficas y simbólicas ofreciendo ambas al mismo tiempo.

Meier y Da Silva (2015) explican que, por medio de la manipulación de los objetos contruidos por los alumnos, estos pueden observar los resultados obtenidos, inicialmente de forma empírica, y después logran argumentar las propiedades de los mismos a partir de las regularidades observadas.

Los asistentes matemáticos, en particular el GeoGebra, que pueden ser orientados a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática ofrecen nuevas potencialidades educativas que los distinguen de los sistemas tradicionales de enseñanza. Dentro de las características que más sobresalen se destacan: la representación múltiple de diferentes sistemas de notación, el dinamismo, el almacenamiento de trazas de los procedimientos, la interactividad, el almacenamiento de información, a representación en tres dimensiones, el aprendizaje colaborativo, la comunicación.

De las ventajas que proporciona el trabajo con el GeoGebra, se pueden citar (CARRILLO DE ALBORNOZ, 2013):

- Favorece la interiorización de los conceptos y procedimientos.
- Desarrolla nuevas estrategias de razonamiento y propicia la investigación y el descubrimiento.
- Facilita el trabajo autónomo del estudiante en la resolución de problemas, en la medida en que permite experimentar con rapidez y seguridad.
- La capacidad gráfica facilita la integración de diversas imágenes y gráficas en el plano y en el espacio que son obstáculos en el aprendizaje.
- Su carácter interactivo provoca una retroalimentación inmediata. Estos sistemas ofrecen una ventaja indudable: reducen el tiempo empleado en la representación gráfica de diferentes lugares geométricos y permiten contribuir al desarrollo del pensamiento espacial del estudiante.
- Facilita la aparición de contextos de trabajo colectivo, muy adecuados para el aprendizaje colaborativo.

Debido a las potencialidades de la utilización de GeoGebra, se propone el empleo de las propiedades visuales del software, para el estudio de las superficies de segundo grado y la representación de regiones del espacio. De esta forma, se presentan algunas construcciones, cuya manipulación y exploración didáctica, estimulan la intuición geométrica, y el estudio abstracto de los conceptos de superficie y región del espacio y facilita el aprendizaje relacionado con la representación gráfica de los mismos.

Investigadores como Zimmermann y Cunningham (1991), Duval (1998), Arcavi (2003), Presmeg (2006), entre otros, han aportado a la visualización matemática.

El proceso de visualización constituye un recurso para la comprensión de los conceptos matemáticos y para comunicar ideas matemáticas (ARCAVI, 2003). Arcavi (2003, p. 217) precisa que la visualización es:

... la capacidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, uso y reflexión sobre fotos, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información sobre el pensamiento y desarrollo de ideas previamente desconocidas y avanzar en la comprensión.

En la visualización matemática en un contexto geométrico:

... las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geoméricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos, como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas del campo” (DE GUZMAN, 1996, p. 2).

Rojas (2009) presenta tres reglas que propician el trabajo con la visualización matemática en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, las cuales son:

- Objetivación de figuras geométricas: se pone de manifiesto en la representación del objeto concreto, en la representación simplificada, en la construcción de figuras de análisis y en construcciones auxiliares.
- Manipulación geométrica, descomposición e integración.
- Representación analítica: se refiere a buscar relaciones, para determinar los objetos y operaciones que se pueden establecer.

Una enseñanza y aprendizaje de la geometría analítica, donde se utilice la visualización matemática apoyada en estas reglas, propicia que el estudiante se apropie de los procesos: manipulación, representación, transformación, exploración, modelación, entre otros. El proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría analítica en la formación de profesores basados en problemas, que en su resolución propicie hacer uso del GeoGebra y de la visualización matemática como una herramienta didáctica, permite la construcción robusta del contenido geométrico en los estudiantes.

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En el trabajo se asume un enfoque de investigación cualitativo, bajo un diseño de investigación acción. Este diseño “... constituye un proceso de reflexión-acción-cambio-reflexión, por y para el mejoramiento de la práctica del docente, mediante la participación activa de este, dirigido a superar los problemas y las necesidades del aula, la escuela y la comunidad, posibilitando el diálogo entre teoría-práctica-teoría” (MINERVA, 2006, p. 116). Como resultado de aplicar este diseño en una investigación de un contexto de aula relacionado con la enseñanza aprendizaje geometría analítica, se propicia la experimentación, búsqueda y exploración del conocimiento geométrico.

Dentro de los métodos utilizados en la investigación se encuentran los de carácter empíricos como la observación y la entrevista que permitieron constatar la situación sobre el empleo y uso de los asistentes matemáticos en la enseñanza y aprendizaje de la matemática en la carrera de Licenciatura en Educación Matemática. Al mismo tiempo se emplearon métodos teóricos como el histórico – lógico y análisis – síntesis, los que permitieron hacer una valoración crítica de las tendencias en el mundo del uso de la tecnología en la enseñanza y propiciaron la elaboración de las actividades de aprendizaje a utilizar en la disciplina de Geometría Analítica. La investigación fue aplicada al grupo de primer año de Licenciatura en Educación Matemática, en la disciplina Geometría Analítica, de la Universidad de Holguín, el grupo estaba compuesto por 10 estudiantes.

La estrategia didáctica propuesta, correspondió al diseño e implementación de un sistema de actividades, de un análisis didáctico a priori basado en el diagnóstico del grupo de

estudiantes, y la fase de acción, donde se diseñaron e implementaron diversas actividades, para fortalecer las habilidades matemáticas buscadas en los estudiantes. En concreto, para el trabajo con el GeoGebra se siguieron los siguientes pasos:

- Estudio y selección de los contenidos de la Geometría Analítica en los que se empleó el GeoGebra para su desarrollo.
- Tener en cuenta las diferencias individuales de los estudiantes para la elaboración de las actividades a desarrollar.
- Tener presente las condiciones del laboratorio de computación.
- Planificar las diferentes actividades que resolverá el estudiante ante el computador, con el objetivo de que estas sean lo más eficientes y efectivas posible.
- Llevar un registro individual, donde se recojan los avances y dificultades de cada estudiante.

Luego de explicar cada paso con una de las cuádricas, en este caso se inició con el elipsoide, se fue representado el mismo en la pizarra para que los alumnos pudieran analizar cada paso y lograran junto con el profesor la representación de la misma. A continuación, se muestran las actividades, las cuales se estructuran en título, objetivo y desarrollo de la actividad.

Actividad 1. Representación de sólidos.

Objetivo: representar los sólidos a través del GeoGebra.

Desarrollo de la actividad.

1. Represente gráficamente el elipsoide. Observe la superficie desde varias vistas, ¿a qué conclusión llega? $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{4} = 1$
2. Represente gráficamente paraboloides elíptico e hiperbólico.
3. Represente gráficamente cilindros parabólico e hiperbólico.

Actividad 2. Volumen de sólidos.

Objetivo: Determinar el volumen resultante de la intercepción de varios solidos a través de GeoGebra.

Desarrollo de la actividad.

1. Determine la intersección de las superficies $y = z$ y $x^2 + y^2 = 9$.
2. Represente gráficamente el volumen limitado por los planos: $3x + 2y + 3z = 6$; $y = 1$; $y = 2$; $z = 0$; $x = 0$. Determine las proyecciones sobre los planos coordenados.

Estas actividades que se muestran fueron utilizadas, en el estudio de las superficies cuádricas y en la representación de regiones limitadas por superficies. El estudio de las superficies cuádricas se realiza a través del procedimiento siguiente:

1. Interceptos con los ejes coordenados.
2. Trazas sobre los planos coordenados.
3. Simetría.
4. Secciones planas paralelas a los planos coordenados.
5. Extensión.
6. Representación gráfica.

RESULTADOS

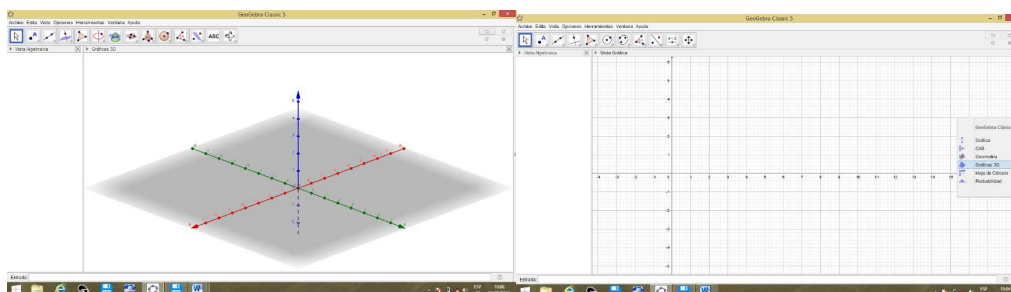
Es necesario un cambio en el desarrollo de las clases de matemáticas donde se busquen metodologías de trabajo, que motiven a los alumnos a aprender, donde el docente debe aplicar los recursos tecnológicos disponibles en su centro de estudio y así crear métodos didácticos aplicables a su disciplina de modo que el estudiante vea la Matemática de un modo diferente a como se venía tratando (FARIA; SOUZA; FERNANDES, 2015).

A continuación, se muestran dos ejemplos en la disciplina de Geometría Analítica, donde se aplica la opción 3D del GeoGebra, la cual resulta novedosa, pues al compararla con otros asistentes matemáticos como al Derive, el Maple o el Mathematica se observa a favor de GeoGebra su característica de software libre. Además, de la característica anterior hay que tener en cuenta que para ciertos niveles educativos más que potencia se requieren otras características como sencillez, intuición o dinamismo, por lo que GeoGebra es suficiente para el desarrollo de la mayoría de los contenidos (CARRILLO DE ALBORNOZ, 2013).

De las opciones que ofrece la vista 3D de GeoGebra se muestran las relacionadas con la representación de superficie, la proyección sobre los planos coordenados y por supuesto la movilidad del sistema de coordenadas que permite observar con mucha claridad lo representado en este sistema. Además, las diferentes opciones que brinda como color, grosor de los trazos, entre otras.

A continuación, se familiariza con los estudiantes cómo acceder al sistema y a la opción 3D, lo cual se muestra en la Figura 1. Luego se explica cómo introducir, en la barra de entrada, la ecuación de las superficies.

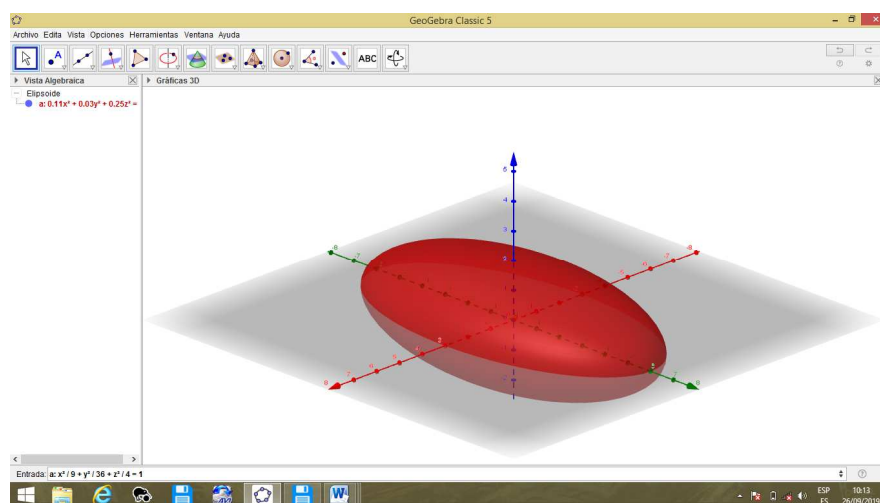
Figura 1 - Sistema y a la opción 3D.



Fuente: Colección de la investigación, 2019

En el desarrollo de la actividad 1, relacionada con la representación de sólidos, todos los estudiantes construyen utilizando el GeoGebra el elipsoide. Su representación gráfica se muestra en la Figura 2.

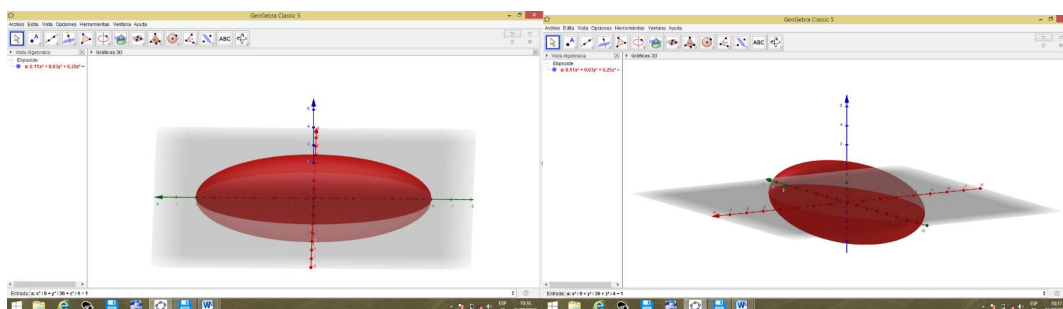
Figura 2 - Representación del elipsoide con GeoGebra.



Fuente: Colección de la investigación, 2019

Como se puede observar de manera inmediata se representa la superficie, luego de esta representación el estudiante tuvo la posibilidad de mover el gráfico y observar la superficie desde varias vistas lo que permite un desarrollo del pensamiento espacial (ver Figura 3).

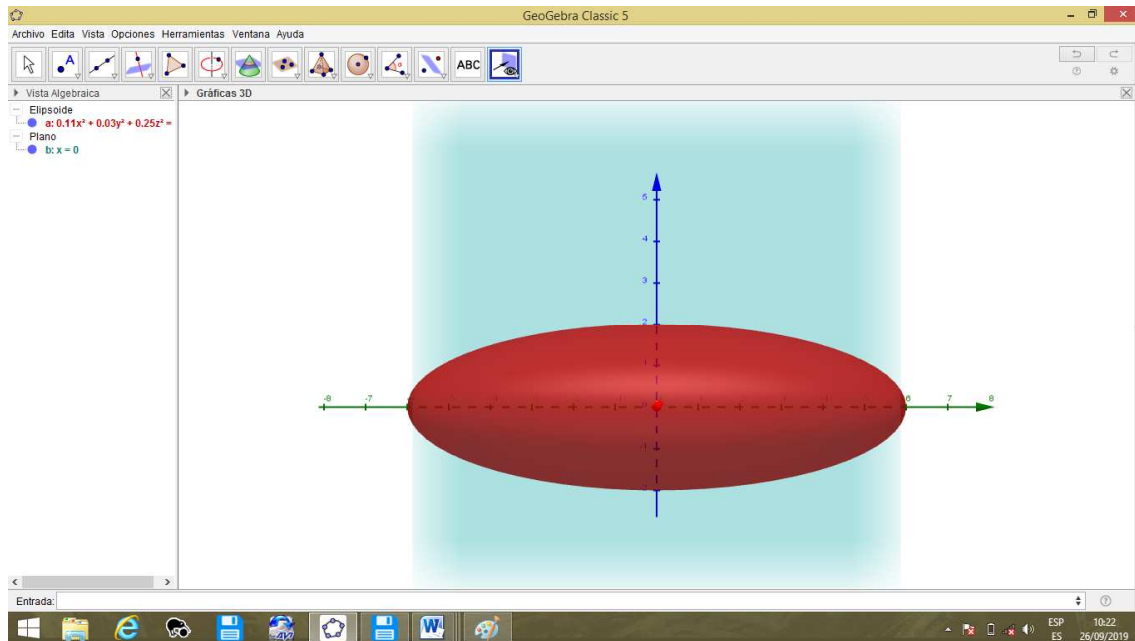
Figura 3 - Diferentes vistas del elipsoide.



Fuente: Colección de la investigación, 2019

A continuación, se socializa la actividad, donde los estudiantes muestran cómo trabajar con la opción Vista Frontal . El profesor les explica a los estudiantes que esta vista permite la proyección de la superficie en los planos coordenados (ver Figura 4).

Figura 4 - Proyección del elipsoide en los planos coordenados.



Fuente: Colección de la investigación, 2019

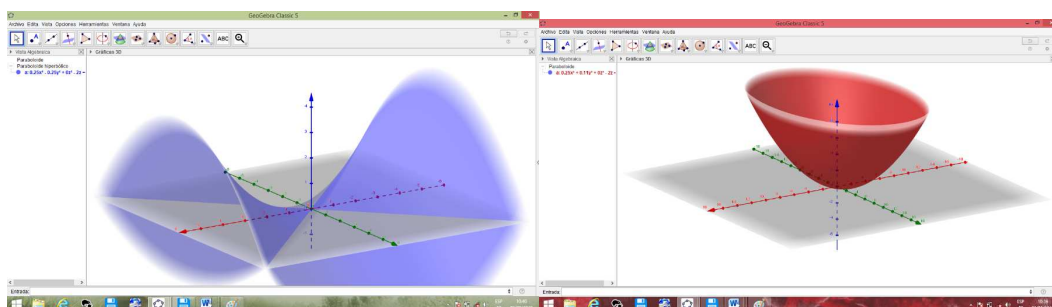
En la figura se muestra la proyección sobre el plano coordenado YZ, esto permite volver al concepto de traza de la superficie, concepto que le resulta complejo de entender antes del uso del software. Aquí el estudiante pudo observar que no es más que una elipse como se había analizado por vía analítica. Además, esta opción es de gran utilidad cuando se representan las regiones del espacio, pues permite hallar gráficamente la proyección de la región sobre los planos coordenados, que será de utilidad en el Análisis Matemático y que resultaba un contenido con dificultades para los alumnos.

El uso de GeoGebra permitió ahorrar tiempo en el trabajo con las superficies analizadas, pues el estudiante con el software pudo, de estudio independiente, trabajar varias de las superficies, sobre todo aquellas presentes en su contexto. Además, permitió una mejor comprensión y visualización de las mismas, pues en el control del estudio los estudiantes no solo trabajaron con el GeoGebra sino que mostraron el análisis analítico de las superficies y su representación con lápiz y papel. También, los estudiantes utilizan la opción 3D, la cual le permite visualizar de forma dinámica la construcción de los objetos (elipsoide), y le ofrece una sensación de realismo, que es importante para la comprensión de las superficies.

La solución al segundo problema relacionado con representar gráficamente paraboloides elíptico e hiperbólico, se muestra en la Figura 5. Todos los estudiantes realizan de forma correcta la representación, surgiendo expresiones como “... al representar estos solidos con ayuda de Geogebra nos ayudan a ver los cuerpos en el espacio, y nos permite identificarlos en situaciones reales”⁴.

⁴ Opinión del estudiante E3.

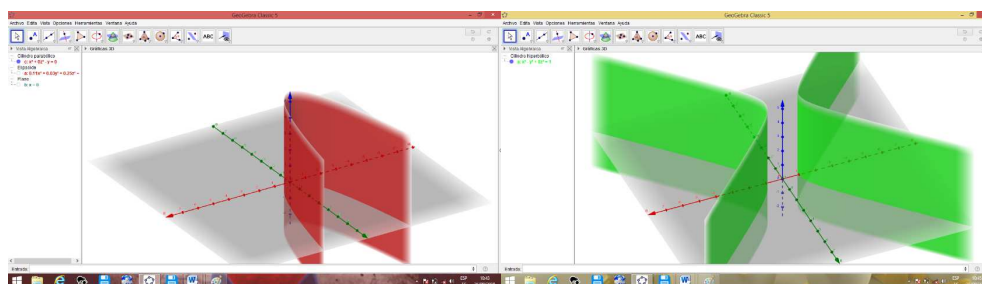
Figura 5 - Representación del paraboloides elíptico e hiperbólico del E7.



Fuente: Colección de la investigación, 2019

Con respecto a la representación gráfica de cilindros parabólico e hiperbólico, los 10 estudiantes la desarrollan de forma adecuada. Es de resaltar que brindan ejemplos en la vida real de esta superficie, tal como “... cinta de cartulina o cartón doblados”⁵. La representación en Geogebra se muestra en la Figura 6. En la resolución de estos problemas los estudiantes utilizan la opción 3D, y plantean que “... interesante, esta opción me permite ver el sólido mejor, ofrece ver los sólidos como si fueran cuerpos reales”⁶.

Figura 6 - Cilindros parabólico e hiperbólico.



Fuente: Colección de la investigación, 2019

La actividad dos que se muestra se dirige a determinar el volumen resultante de la intercepción de sólidos. Para el trabajo en el aula se le presenta a los estudiantes el siguiente procedimiento para la representación:

1. Trazar cada una de las superficies limitantes.
2. Determinar las curvas de intersección de las superficies tomadas dos a dos.
3. Reforzar el contorno del volumen por medio de líneas gruesas, continuas las porciones visibles y de trazos las invisibles.

Es bueno destacar que para la determinación y la representación de las curvas de intersección se trabajó también con el GeoGebra siguiendo la opción Intersección de

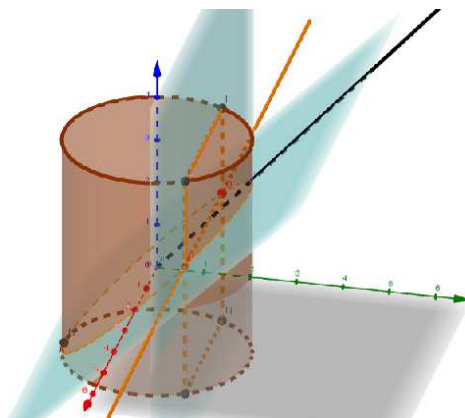
Superficies . A continuación, se muestra las soluciones dadas por los estudiantes.

En la resolución del problema referido a determinar la intersección de las superficies $y = z$ y $x^2 + y^2 = 9$, siete estudiantes para un 70%, lo realizan correctamente, como se muestra en la Figura 7. Los tres estudiantes que no logra desarrollar el problema, presentan dificultades en el manejo del GeoGebra y no identifican completamente las superficies.

⁵ Opiniones del estudiante E9.

⁶ Opiniones del estudiante E1.

Figura 7 - Intersección de las superficies $y = z$ y $x^2 + y^2 = 9$.

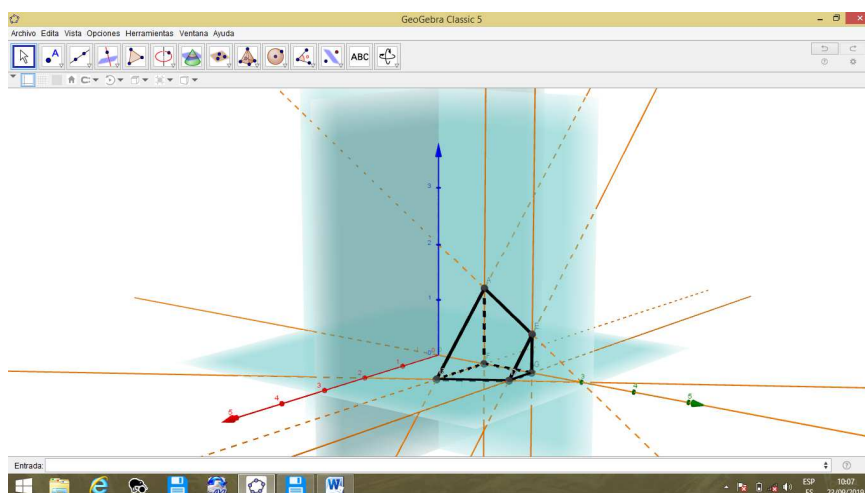


Fuente: Colección de la investigación, 2019

En la resolución del problema 2, seis de los 10 estudiantes lo resuelven correctamente. Para lograr que los estudiantes restantes llegaran a su resolución por sí solos, el profesor les orientó representar dos planos y determinar la recta de intersección, lo que se resuelve con la opción intersección de superficies, así se determinaron las rectas de intersección y luego se pasó a analizar qué región del espacio estaba limitada por estos planos. Este proceso les permitió a los estudiantes determinar el trazo final del volumen, como se muestra en la Figura 8. Los estudiantes concluyen que analíticamente el volumen se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq y \leq 2; x \geq 0; z \geq 0; 3x + 2y + 3z \leq 6\}$$

Figura 8 - Trazo final del volumen realizado por los estudiantes.



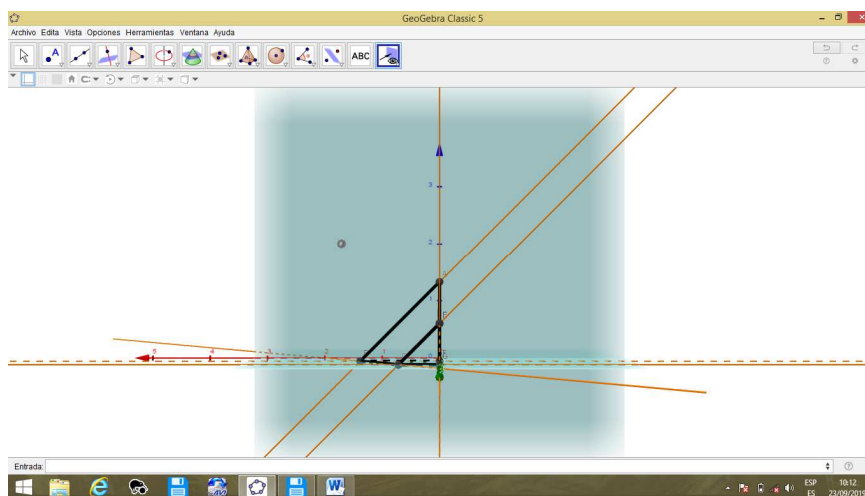
Fuente: Colección de la investigación, 2019

En total 9 de los 10 estudiantes determinan el sólido correctamente. En la socialización los estudiantes explican el significado de cada una de las desigualdades, aspecto que será de utilidad para el posterior trabajo con la representación de los volúmenes.

En el punto relacionado a determinar las proyecciones sobre los planos coordenados, los estudiantes solo muestran la proyección sobre el plano XZ, usando la opción Vista Frontal. En la socialización los estudiantes expresan que es necesario precisar sobre qué plano

coordenado se va a proyectar el volumen, para trazar primero este plano, para luego poder ejecutar la opción vista frontal (ver Figura 9).

Figura 9 - Proyecciones sobre los planos coordenados, XZ.



Fuente: Colección de la investigación, 2019

En la actividad 2 fue significativa el uso de la opción 3D para visualizar la intercepción de las superficies y de esta forma identificar el sólido. También, el trabajo con esta opción propicia el desarrollo del pensamiento espacial en los estudiantes. Los criterios de los estudiantes están dados por “... excelente vista de las superficies y de los sólidos, esta opción de 3D nos permite ver el cuerpo como si estuviera cerca y lo muestra real”, otros plantean que “esto es muy difícil de hacer con medios tradicionales o lleva bastante tiempo en su construcción y aquí con un clic es suficiente...”. En de desatacar que, en la resolución de ambas actividades, primero se trabajó con lápiz y papel y luego el estudiante utilizaba el GeoGebra para la representación y proyección de las superficies y volúmenes determinados.

Por otra parte, en el examen final de la disciplina 9 de 10 estudiantes, es decir, el 90% del grupo logró resolver la pregunta relacionada con la representación gráfica de las superficies y del volumen limitado, lo que contribuyó a este resultado el uso del GeoGebra en su preparación para los exámenes.

Se pudo observar durante las actividades desarrolladas el avance de los estudiantes tanto con el uso del GeoGebra como en sus conocimientos sobre esta temática expuesta en este trabajo, lo que demuestra la utilidad del uso del software no solo en la representación y desarrollo del pensamiento espacial, sino en la formación de los conceptos abordados en esta temática.

CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

La experiencia se continúa aplicando en la disciplina y se ha trabajado con otros contenidos como los relativos a vectores, rectas, planos y secciones cónicas, ya que, por medio del GeoGebra, podemos priorizar manipulaciones geométricas dinámicas, diferentes a las presentadas en los libros que abordan este contenido, pues se presentan de manera estática. Este análisis proporcionó la obtención de elementos que permiten considerar la utilización del

software en la elaboración y desarrollo de actividades destinadas a la comprensión del significado de los conceptos de superficies cuádricas y de volumen.

Queremos señalar un aspecto que a veces pasa inadvertido, el software GeoGebra no sólo brinda posibilidades geométricas, es una de las posibilidades para vincular el Álgebra y la Geometría (la esencia de la Geometría Analítica), tal y como se ha resaltado en diversos trabajos anteriores, por ejemplo, las referencias citadas por estos investigadores (HOHENWARTER; JONES, 2007; HALL; CHAMBLEE, 2013). Al respecto, puede consultar la página⁷ donde se presentan variadas demostraciones de propiedades geométricas, algunas de ellas trascienden el marco de este trabajo.

De hecho, lo que hemos realizado es convertir la Geometría Analítica en una asignatura en la que los estudiantes han experimentado, siguiendo las palabras de Arnold:

The scheme of construction of a mathematical theory is exactly the same as that in any other natural science. First we consider some objects and make some observations in special cases. Then we try and find the limits of application of our observations, look for counter-examples which would prevent unjustified extension of our observations onto a too wide range of events... (ARNOLD, 1998).

Para el trabajo con la computadora, se deben tener en cuenta qué contenidos curriculares se pueden tratar con la misma y que sea efectivo en el aprendizaje de los estudiantes (VENEMA, 2013; BUDINSKI et al., 2018). El profesor puede combinarla con la metodología tradicional (entiéndase primero representar las superficies primero a través de instrumentos con lápiz y papel o en la pizarra) a lo largo de un curso, para ello debe decidir y escoger para cada unidad didáctica el tratamiento que considere más conveniente. Además, se debe tener en cuenta el desarrollo individual de cada estudiante para aplicar con más efectividad esta.

Otro aspecto a resaltar, es el hecho que el uso del software GeoGebra, tiene un impacto beneficioso y fortalecedor al ser implementada en el aula de clase, ya que permite el desarrollo y consolidación de las habilidades relativas al pensamiento geométrico y la visualización (DIKOVIĆ, 2009; SAHAA et al., 2010). También, lleva a los estudiantes a plantear conjeturas sobre las propiedades, para luego verificarlas. De esta manera, creemos que puede contribuir a mejorar la motivación por la Matemática y, de hecho, mejorar la enseñanza y aprendizaje de esta asignatura en cualquier nivel de enseñanza.

La opción 3D constituye una herramienta importante para realizar y comprender estas construcciones geométricas, pues les muestra a los estudiantes visualizar las superficies y sólidos, desde una perspectiva, que enriquece la representación y sus conocimientos, propiciando el interés y motivación por esta temática, y contribuyendo a la resolución de problemas intramatemático y extramatemáticos.

Por último, queremos recalcar que no afirmamos que el GeoGebra es la solución “mágica”, debe ser utilizado con una planificación y con objetivos perfectamente determinados, en un marco de actividades previamente elaborados y como toda herramienta didáctica, tiene ventajas y desventajas, nuestro papel es explotar las primeras y minimizar las segundas (WASSIE; ZERGAW, 2019).

⁷ GeoGebra Demonstrations. Disponible en:
<https://media.lanecce.edu/users/gettyst/GeoGebraDemonstrations.html>

REFERÊNCIAS

- ABAR, C.; COTIC, N. GeoGebra en la producción del conocimiento matemático. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, marzo, núm. 41, 2015. p.134-135.
- ALMOULOUD, A.S. **Fundamentos da Didática da Matemática**. São Paulo: Editora UFPR, 2007.
- ARCAVI, A. The role of visual representations in the teaching and learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, 52(3), 2003.
- ARNOLD, V. I. Sobre la Enseñanza de la Matemática. **Uspekhi Mat. Nauk** 53, no. 1, 1998. p. 229-234 (hay una versión en inglés, disponible: <https://www.uni-muenster.de/Physik.TP/~munsteg/arnold.html>). Acceso en: 15 de octubre de 2019.
- BARRENA, E. [et. al.]. Presentación y resolución dinámica de problemas mediante GeoGebra. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, núm. 25, marzo, 2011. p. 161-174.
- BEELAND, J. W. D. Student engagement, visual learning and technology: Can interactive white-boards help? **Action Research Exchange**, 1(1), 2002. Disponible: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.1.35.3542&rep=rep1&type=pdf>. Acceso en: 23 de abril de 2019.
- BUDINSKI, N.; LAVICZA, Z.; FENYVESI, K. Ideas for using GeoGebra and Origami in Teaching Regular Polyhedrons Lessons. **K-12 STEM Education** Vol. 4 No. 1, Jan-Mar, 2018. p. 297-303
- CARRILLO DE ALBORNOZ, A. Cálculo Simbólico también es posible con GeoGebra. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, 34, 2013. p. 151-167, junio.
- CARRILLO DE ALBORNOZ, A. GeoGebra. Un recurso imprescindible en el aula de Matemáticas. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, septiembre, núm. 23, 2010. p. 201-210.
- DA SILVA, R. S. O uso da Geometria Dinâmica em Modelagens Geométricas: possibilidade de construir conceitos no ensino fundamental. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 4, n. 6, 2015. Disponible: http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/936/pdf_113. Acceso en: 21 de junio de 2019.
- DE GUZMÁN, M. **El Rincón de la Pizarra. Cap. 0. El papel de la visualización**. Madrid: Pirámide, 1996.
- DE LA CHICA, J. **Metodologías activas y aprendizaje por descubrimiento. Las TIC y la educación**. Almería: Tutorial Formación, S.L.L, 2010.
- DIAZ-NUNJA, L.; RODRÍGUEZ-SOSA, J.; LINGÁN, S. K. Enseñanza de la geometría con el software GeoGebra en estudiantes secundarios de una institución educativa en Lima.

Propósitos y Representaciones, Jul.-Dec. Vol. 6, Nº 2, 2018. p.217-251. Recuperable en: <http://dx.doi.org/10.20511/pyr2018.v6n2.251>

DIKOVIĆ, L. Applications GeoGebra into Teaching Some Topics of Mathematics at the College Level, **ComSIS** Vol. 6, No. 2. December UDC 004.738, 2009. DOI: 10.2298/csis0902191D

DUVAL, R. Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.). **Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI Study**. Dordrecht: Kluwer Academic, 1998. p. 37-62.

ESTRADA, M.; BAPTISTA, J. A elaboração de meios de ensino com o programa de matemática dinâmica GeoGebra para o ensino e aprendizagem da matemática. **Revista Pertinencia Acadêmica**, 2018, núm. 7, junio, 2018.

ESTRADA, M.; CHILUA, M.; BAPTISTA, J. La enseñanza de la Geometría Analítica en la carrera de Matemática del ISCED-Huambo con el uso del CAS. **Revista Órbita Pedagógica**, vol V, núm. 2, 2018.

ESTRADA, M.; FIGUEREDO, M.; GONZÁLEZ, D.; GRIMALDY, L. El uso del GeoGebra en la enseñanza de la geometría analítica. En: **Evento COMPUMAT 2019**. La Habana, 2019.

ESTRADA, M.; FIGUEREDO, M.; HERNÁNDEZ, A. El uso de la opción CAS del GeoGebra en la disciplina de Álgebra. En: **Evento COMPUMAT 2019**. La Habana, 2019.

FARIA, I. G.; SOUZA, L. D. F. R.; FERNANDES, E. A. Métodos informatizados contribuem para o ensino da Matemática: utilização do GeoGebra para o ensino de geometria-Revisão bibliográfica. **Revista Eletrônica de Educação e Ciência**, v. 5, n. 1, 2015. p. 65-70.

Disponible:

http://fira.edu.br/revista/wpcontent/uploads/2015/03/2015_vol5_num1_pag65.pdf. Acceso en: 12 de abril de 2020.

FERRI, J.C.; CALEJON, L. M. C.; SCHIMIGUEL, J. Uso do GeoGebra no Ensino de Matemática. **Revista Gestão Universitária**, v. 1, 2013. Disponible: <http://www.gestaouniversitaria.com.br/artigos/uso-do-geogebra-no-ensino-de-matematica--2>. Acceso en: 23 de junio de 2020.

FLORENCIA, M.; MANTICA, A. El uso del software de geometría dinámica en la formulación y validación de conjeturas. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, diciembre, núm 51, 2017. p. 69-82.

GRANDE, A.L. NUNES, L.D.O. SILVA, M.P.D. O estudo do Teorema Fundamental das Curvas Planas utilizando o GeoGebra. In: **Conferência Interamericana de Educação Matemática**. Tuxtla- Chiapas – México, 2015. Acesso em 10 de julho de 2018, de http://xiv.ciaemredumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/225/130. Acceso en: 21 de abril de 2020.

GUTIÉRREZ, A. **Enseñanza de las matemáticas en entornos informáticos. Módulo optativo del Plan de Estudios de Maestro**, Curso 2005-06, Valencia: Universidad de Valencia, 2005.

HALL, J.; CHAMBLEE, G. Teaching Algebra and Geometry with GeoGebra: Preparing Pre-Service Teachers for Middle Grades/Secondary Mathematics Classrooms, **Computers in the Schools: Interdisciplinary Journal of Practice, Theory, and Applied Research**, 30:1-2, 2013. p. 12-29, DOI: 10.1080/07380569.2013.764276

HOHENWARTER, M.; JONES, K. Ways of linking Geometry and Algebra: the case of geogebra, BSRLM Geometry Working Group, en D. Kuchemann (Ed.) **Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics**, 27, 3, November, 2007.

LIMA, S.; RODRÍGUEZ, M. La educación matemática en entornos virtuales. En: **Actas de Didáctica de las Ciencias. Nuevas Perspectivas. IV Congreso Internacional Didácticas de las Ciencias**, 2010, p. 155 - 178.

MEIER, M.; DA SILVA, R. S. O uso da Geometria Dinâmica em Modelagens Geométricas: possibilidade de construir conceitos no ensino fundamental. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 4, n. 6, 2015. Disponible: http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/936/pdf_113. Acceso en: 23 de abril de 2019.

MINERVA, F. **El proceso de investigación científica**. Zulia, Venezuela: Universidad del Zulia, 2006.

MINGIRWA, I. M. Teachers' technology uptake, a case of GeoGebra in teaching Secondary School Mathematics in Kenya. **2016 IST-Africa Week Conference**, Durban, 2016. p. 1-11, doi: 10.1109/ISTAFRICA.2016.7530652.

MORENO, L. Las prácticas matemáticas en la educación: tradición y enfoques emergentes. En **16º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa**, Asociación Colombiana de Matemática Educativa, Bogotá, Colombia, ASOCOLME, 2015. p. 1-16.

NASCIMENTO, E. G. Avaliação do uso do software GeoGebra no ensino de geometria: reflexão da prática na escola. En **XII Encontro de Pós-Graduação e Pesquisa da Unifor**, ISSN, v. 8457, 2012. p.1808. Disponible: <https://uol.unifor.br/oul/conteudosite/?cdConteudo=3363732>. Acceso en: 15 de julho de 2019.

PAIVA, A. C. P.; ALVES, F. R. V. Um estudo da Primeira Forma cuadrática: Uma proposta de construção dinâmica. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, abril, n. 55, 2019. p 123-143. ISSN: 1815-0640.

PRESMEG, N. Research on visualization in learning and teaching mathematics: emergence from psychology. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), **Handbook of research on the psychology of mathematics education**. Rotterdam: Sense, 2006. p. 205–235.

SAHAA, R. A.; MOHD AYUBB, A. F.; TARMIZI, R. A. The Effects of GeoGebra on Mathematics Achievement: Enlightening Coordinate Geometry Learning, **Procedia Social and Behavioral Sciences** 8, 2010. p. 686-693.

SAIDÓN, L.; BERTÚA, J.; MOREL, J. Un escenario dinámico de exploración matemática. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**. Junio, Número 22, 2010. p. 157-167. ISSN: 1815-0640.

SANTOS-TRIGO, M., MORENO, L. y CAMACHO-MACHÍN, M. Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework, **ZDM Mathematics Education**, Springer, 2016.

VENEMA, G. A. Exploring Advanced Euclidean Geometry With Geogebra (classroom Resource Materials), **Mathematical Association Of America**, 2013.

WASSIE, Y. A.; ZERGAW, G. A. Some of the Potential Affordances, Challenges and Limitations of Using GeoGebra in Mathematics Education, **EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, 15(8), 2019.

WEAVER, G. An examination of the national educational longitudinal study (NELS: 88) database to probe the correlation between computer use in school and improvement in test scores. **Journal of Science Education and Technology**, 9, 2000. p. 121-133. Doi: <https://doi.org/10.1023/A:1009457603800>.

Submetido em: 14 de Fevereiro de 2021.

Aprovado em: 28 de Março de 2021.

Publicado em: 07 de Maio de 2021.

Como citar o artigo:

ESTRADA, M.; NAPOLES, J.; ROJAS, O. El uso de la opción 3d del GeoGebra en la disciplina de Geometría Analítica en la formación de profesores. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, Belém/PA, v. 16, n. 38, p. 120-137, Maio-Ago., 2021. DOI: <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n38.p120-137.id341>