

## **Algumas contribuições do trabalho de Euler para o desenvolvimento da Matemática<sup>7</sup>**

João Cláudio Brandemberg<sup>8</sup>

### **Introdução**

Neste artigo queremos homenagear o tricentenário de nascimento de Leonhard Euler (1707 – 1783) e destacar as suas contribuições bem como a importância do seu trabalho para o desenvolvimento da Matemática: sua notação, seu estilo e a sua capacidade de relacionar os conteúdos dos diversos ramos desta parte do conhecimento humano.

### **Uma pequena biografia**

Nascido em 1707 na cidade de Basileia<sup>9</sup>, na Suíça, Leonhard Euler é sem dúvida o matemático mais produtivo do século XVIII. Euler foi aluno de Johann Bernoulli (1667, 1748). Quando em 1725, Nicolaus, filho de Johann, viajou para São Petersburgo, o jovem Euler, agora com 18 anos, o seguiu. Em 1727 Euler, indicado pelos irmãos Daniel e Nicolaus Bernoulli, tornou-se membro da Academia de São Petersburgo e em seguida o responsável (cabeça) pela seção de Matemática da academia. Após quatorze anos na academia, Euler aceitou um convite de Frederico, o grande, e foi chefiar a seção de Matemática da Academia de Berlim, onde permaneceu por vinte e cinco anos.

Em 1776, Euler aceita um convite de Catarina, a grande, e retorna a Academia de São Petersburgo onde permanece por mais dezessete anos, vindo a falecer subitamente em 1783, aos setenta e seis anos de idade.

Euler, cego do olho direito desde 1735, foi sem dúvida o maior escritor da história da Matemática. A cegueira, total a partir de 1766, não o impediu de manter sua produção, ajudado por sua extraordinária memória e um grande poder de concentração, ele continuou seu trabalho criativo com a ajuda de um secretário que anotava suas idéias, expressas verbalmente ou escritas a giz.

Euler publicou 530 trabalhos durante a sua vida (livros e artigos), deixando ainda uma série de manuscritos, sendo que o mais curioso é o seu primeiro caderno, escrito quando Euler tinha cerca de nove anos e era um tranqüilo discípulo de Johann Bernoulli, os quais garantiram a Academia de São Petersburgo material a ser publicado por cerca de mais quarenta anos.

---

<sup>7</sup> Este texto é parte de um trabalho maior que será publicado ainda em 2007, em homenagem ao tricentenário do nascimento de Leonhard Euler.

<sup>8</sup> Professor da UFPA. Doutorando em Educação Matemática pelo Programa de Pós Graduação em Educação da UFRN.

<sup>9</sup> Cidade imperial livre desde 1263, que tinha sido durante muito tempo um centro de estudos avançados.

### Contribuições de Euler

As contribuições de Euler a Matemática são demasiado numerosas para serem aqui expostas completamente, assim apontaremos algumas de suas muitas contribuições em áreas específicas.

Euler foi um escritor magistral, e seus trabalhos se caracterizaram por sua clareza, riqueza de detalhes e alcance. Seus livros, entre os quais destacamos: *O Introductio in Analysin Infinitorum* (1748), *Institutiones Calculi Differentialis* (1755), *Institutiones Calculi Integralis* (1768-1774) e *Vollständige Anleitung zur Algebra* (1770), serviram de modelo para muitos dos livros dos cursos superiores atuais.

O *Introductio* de Euler é frequentemente citado por historiadores, mas sua importância, geralmente é subestimada. Este livro é provavelmente o mais influente para os textos modernos. Neste trabalho, ele constrói o conceito de função. Ele populariza a definição de logaritmos como expoentes e as definições das funções trigonométricas como razões. Cristaliza as distinções entre funções algébricas e transcendentais e entre funções elementares e avançadas (higher). Ele desenvolveu o uso de coordenadas polares e de representação paramétrica de curvas. Assim nossas notações mais comuns derivam dele. Em uma palavra, o *Introductio* está para a Análise elementar como o *Elements of Euclid* está para a Geometria. (BOYER, 1956 apud TRUESDALL, 1972, p. xvi. Tradução nossa).

Cabe aqui registrar a importância da notação de Euler para o posterior desenvolvimento da Matemática. Ele é o responsável pela implantação das seguintes notações:  $f(x)$  (para funções),  $e$  (para a base dos logaritmos naturais),  $\sum$  (para o somatório) e  $i$  (para a unidade imaginária  $\sqrt{-1}$ ), entre outras.

Além da notação da fórmula

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

em que para  $x = \pi$ , temos

$$e^{i\pi} = -1 = 0;$$

e da equação

$$v - a + f = 2,$$

que relaciona o número de vértices, arestas e faces de um Poliedro Fechado Simples qualquer.

Os trabalhos de Euler representam exemplos relevantes do formalismo do século XVIII, isto é, da manipulação e da 'implicação' das regras do pensamento lógico. Estas abordagens, embora sem muito rigor, muitas vezes o conduziram a resultados profundos e verdadeiros, como a obtenção da soma da série infinita:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

Seu livro *Elements of Algebra* (1972) (*Volständige Anleitung zur Algebra*, 1770)<sup>10</sup>, também um modelo para os livros modernos, caracteriza o interesse de Euler pelo ensino e divulgação dos conteúdos de Álgebra, principalmente a resolução de equações (Parte I, Seção IV: Of algebraic equations, and of the resolution of those equations).

O principal objeto da Álgebra e também de todos os outros ramos da Matemática, é determinar o valor de quantidades ainda não conhecidas. Isto é obtido se considerarmos atentamente as condições dadas, as quais são expressas por números conhecidos. Por esta razão a Álgebra pode ser definida como, a Ciência que nos permite determinar quantidades desconhecidas por meio de outras que são conhecidas. (EULER, 1972, p.186. Tradução nossa).

A Teoria dos Números parece ser a parte favorita de Euler, e pela qual ele sempre demonstrou grande e profícuo interesse. Suas contribuições a Teoria dos Números, sozinhas, seriam suficientes para estabelecer sua posterior reputação nos anais de Matemática.

Entretanto, o saber e o interesse de Euler não se limitavam apenas a Matemática. Ele era um erudito autêntico; estendendo seus conhecimentos à Astronomia, Física, Medicina, Química, Botânica e Teologia. Além disso, era versado em línguas orientais e em vários ramos da literatura.

### Considerações Finais

Em seu livro *A History of Algebra*, van der Waerden (1985, p.148) cita o artigo: *Theorems on the residues left by division of powers*, publicado em 1761, onde Euler divide as potências  $a^n$  de um inteiro  $a$  por um primo  $p$ , e considera os restos desta divisão. Como conseqüência ele apresenta uma prova do Teorema de Fermat

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Por meio da expansão de  $(a+b)^p$ . Wussing (1984, p.48) também cita este teorema de Euler. Eles estabelecem relações entre o trabalho de Euler na Teoria dos Números e na Álgebra, ampliando a nossa concepção de que Euler desenvolveu um trabalho, não só grandioso, mas também de conexão entre os vários ramos da Matemática estudados a época.

<sup>10</sup> Ditado por Euler, devido a sua cegueira, e escrito por seu secretário.

**Bibliografia Consultada**

EULER, L. **Elements of Algebra**. EUA: Springer-Verlag, 1972.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2002.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas**. Tradução; João Cosme Santos Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1997.

TRUESDELL, C. **Leonhard Euler, supreme geometer**. EUA: University of Wisconsin Press. 1972.

WAERDEN, B. L. van der. **A history of Algebra** – from Al-Khowarism to Emmy Noether. Berlin: Springer Verlag, 1985.

WUSSING, H. **The gênesis of the abstract group concept**. EUA: The MIT press, 1984.